

ЛАПИЧ Андрей Олегович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И АЛГОРИТМЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ
НЕОДНОРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ
РАССЕЯННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

**1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ**

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Пенза – 2026

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Пензенский государственный университет» на кафедре «Математика и суперкомпьютерное моделирование».

Научный руководитель:

Смирнов Юрий Геннадьевич, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пензенский государственный университет», заведующий кафедрой «Математика и суперкомпьютерное моделирование».

Официальные оппоненты:

Боровик Сергей Юрьевич, доктор технических наук, Институт проблем управления сложными системами Российской академии наук – обособленное подразделение федерального государственного бюджетного учреждения науки Самарского федерального исследовательского центра Российской академии наук, директор.

Осипов Олег Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики», заведующий кафедрой «Высшая математика».

Ведущая организация:

федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука Российской академии наук, г. Москва.

Защита состоится «18» декабря 2026 г. в 10:00 на заседании диссертационного совета 24.2.379.08, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева», по адресу: 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке и на сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева»: https://ssau.ru/resources/dis_protection/lapich.

Автореферат разослан «___» _____ 2026 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
д.ф.-м.н., доцент

А.В. Дорошин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Дефектоскопия, медицинская диагностика и задачи неразрушающего контроля требуют разработки и применения передовых технологий для надежного обнаружения и точного описания дефектов (неоднородностей) в различных материалах и структурах. Для этого необходимо эффективное использование современных численных методов, вычислительных алгоритмов и специализированных программных комплексов, позволяющих анализировать данные измерений (например, рассеяние электромагнитных волн) и получать параметры, описывающие размер, форму и расположение дефектов. Такие задачи называются обратными в электродинамике.

Одной из перспективных технологий решения указанного круга задач является микроволновая томография, позволяющая определять небольшие (не более 1 см) неоднородности, расположенные внутри тел, с высоким контрастом. Для решения этой задачи требуется комплексный подход, включающий построение адекватных математических моделей для описания исследуемых процессов, а также эффективное применение методов решения обратной задачи для извлечения необходимой информации или определения неизвестных параметров. При этом обратная задача сводится к решению векторного объемного сингулярного интегрального уравнения первого рода для определения комплексной диэлектрической проницаемости. Решение обратных задач часто осложняется недостатком данных. В связи с этим требуется разработка или адаптация существующих математических моделей, чтобы они могли успешно работать с небольшим объемом информации.

Микроволновая томография обладает потенциалом для использования в медицине, промышленности и безопасности. Среди ключевых ее преимуществ: высокая чувствительность к изменениям диэлектрических свойств материалов, компактность оборудования, безопасность, скорость и доступность, которые делают ее конкурентоспособной альтернативой традиционным методам визуализации. В современных исследованиях значительное внимание уделяется перспективам использования СВЧ-технологий в медицинской диагностике, с акцентом на их применение для выявления опухолей. Уникальная способность микроволновой томографии выявлять различия в диэлектрических свойствах здоровых и пораженных тканей делает ее перспективным инструментом для ранней диагностики рака молочной железы, головного мозга и других онкологических заболеваний. Это обусловлено тем, что злокачественные новообразования часто имеют более высокую диэлектрическую проницаемость по сравнению с окружающими здоровыми тканями, что позволяет их выявлять с помощью микроволновой томографии с высокой чувствительностью. Разработка эффективных алгоритмов реконструкции изображений и методов обработки данных для микроволновой томографии является актуальной задачей, направленной на улучшение диагностики и повышение выживаемости пациентов, поскольку в настоящее время задача

СВЧ-томографии полностью не решена, отсутствуют промышленные образцы СВЧ-томографов.

Степень научной разработанности темы исследования.

К настоящему времени прямые задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрических телах исследованы очень подробно. Развита численная методика их решения, созданы пакеты прикладных программ для проведения расчетов (COMSOL Multiphysics, HFSS, FEKO, CST Studio Suite). К основным методам решения таких задач дифракции относятся: метод конечных разностей во временной области (который в электродинамике обычно называют FDTD – Finite Difference Time Domain), метод конечных элементов, метод интегральных уравнений, метод дискретных источников, асимптотические высокочастотные и низкочастотные методы, представленные в монографиях А. Taflov, А. Б. Самохина, Ю. Г. Смирнова, В. А. Неганова, Е. И. Нефедова, А. Г. Рамма, Ю. А. Еремина, Р. Б. Ваганова и др.

Теория и практика решения обратных задач математической физики имеют богатую историю. Основы теории были заложены в работах выдающихся ученых: А. Н. Тихонова, В. Я. Арсенина, В. Г. Романова, М. М. Лаврентьева, И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана. Разработанные ими методы и подходы были успешно применены многими учеными для решения конкретных обратных задач в акустике, электродинамике, механике. Среди этих ученых: А. В. Баев, А. С. Барашков, В. И. Дмитриев, С. И. Кабанихин, А. М. Денисов, А. Б. Бакушинский, А. Г. Ягола и многие другие. Значительные результаты были получены зарубежными исследователями, такими как Д. Колтон, Р. Кресс, Р. Новиков, М. Клибанов, Л. Бейлина и др.

В области микроволновой томографии выделяются несколько ведущих исследовательских групп. Группа Meaney и Paulsen (Dartmouth College) известна своими итеративными методами решения обратной задачи и разработкой прототипов томографов. Группа Fedeli (University of Genoa) также внесла значительный вклад, предложив альтернативный прототип и проведя экспериментальные исследования. Итальянские исследователи Scaraticci и Vasquez (CNR и Politecnico di Torino) сосредоточились на применении микроволновой томографии для диагностики заболеваний мозга и молочной железы, а также на неразрушающем контроле продуктов в пищевой промышленности.

Цель исследования состоит в математическом моделировании для обнаружения неоднородностей в диэлектрических телах по измерениям ближнего электромагнитного поля с помощью решения задачи СВЧ-томографии.

Для достижения поставленной цели необходимо решить **научную задачу**, состоящую в разработке численных методов и вычислительных алгоритмов для обнаружения неоднородностей в диэлектрических телах по данным измерений ближнего поля на основе решения обратной задачи.

Для достижения поставленной цели и решения научной задачи сформулированы следующие частные научные **задачи**:

1. Выбрать математические модели и на основе математического моделирования определить неоднородности в двумерных и трехмерных диэлек-

трических телах с помощью решения задачи дифракции волн на объекте, которые по данным ближнего поля позволяют идентифицировать дефекты и неоднородности.

2. Разработать численный итерационный метод решения нелинейных задач и применить двухшаговый метод для решения обратных электромагнитных задач дифракции волн на полушаре.

3. Разработать численные методы и вычислительные алгоритмы решения прямой нелинейной и векторной обратной задач дифракции волн на объекте.

4. Создать программный комплекс, реализующий численные методы для решения прямых и обратных задач.

Объектом исследования является процесс переотражения электромагнитных волн от неоднородных объектов.

Предметом исследования являются математические модели дифракции волн на объектах и вычислительные алгоритмы для обнаружения неоднородностей в диэлектрических объектах.

Методология и методы исследования. В работе применены методы решения задач электродинамики, теории сингулярных интегральных уравнений, численные методы, методы математического моделирования и информационных технологий.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Разработан неитерационный двухшаговый метод для решения обратной задачи дифракции волны на полушаре, отличающийся сведением краевой задачи к решению объемного интегрального уравнения по области неоднородности, позволяющий повысить точность определения неоднородностей малого размера по результатам измерения ближнего поля.

2. Разработан итерационный метод решения объёмного интегрального уравнения для нелинейной задачи дифракции на неоднородных объектах, отличительной особенностью которого является учёт нелинейности диэлектрической проницаемости в задаче дифракции, а также модифицирован метод коллокации для решения интегрального уравнения, отличающийся новыми базисными функциями.

3. На основе предложенных численных методов созданы новые алгоритмы, реализованные в программном комплексе, позволяющие определять геометрические и электродинамические параметры неоднородностей в диэлектрическом теле для решения обратных задач дифракции.

Теоретическая значимость работы. Результаты математического моделирования, разработанные численные методы, эффективные алгоритмы и программный комплекс создают основу для прорывных технологий обнаружения неоднородностей и дефектов, с учетом специфики имеющегося у разработчиков оборудования и измерительной аппаратуры, что позволит значительно улучшить существующие системы неразрушающего контроля и неинвазивной диагностики.

Практическая значимость работы. Предоставляется разработчикам комплекс программ для решения ряда сложных прямых и обратных задач

электродинамики. Разработанные методы отличаются от известных точностью определения и локализации неоднородностей с зашумлением входных данных на уровне 10 %. Программный комплекс позволяет существенно продвинуться в улучшении качества медицинской диагностики, дефектоскопии и задачах неразрушающего контроля за счет повышения точности, надежности и скорости получения информации. Создан макет измерительной установки для получения входных данных – значений ближнего поля, рассеянного объектом, необходимых для решения обратной задачи, что позволяет провести проверку точности моделирования.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертация выполнена в соответствии с требованиями специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Области исследования: пункт 2 – Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий; пункт 3 – Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента; пункт 8 – Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Степень достоверности полученных результатов, сформулированных в диссертации, подтверждается корректным применением математического аппарата, верификацией моделей на тестовых задачах и экспериментальных данных, корректной реализацией численных алгоритмов, использованием современного программного обеспечения и сопоставлением с данными других исследований по этой тематике. Полученные результаты прошли апробацию на научно-технических конференциях международного и всероссийского уровня.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Неитерационный двухшаговый метод решения векторной обратной задачи на диэлектрическом неоднородном полушаре, позволяющий повысить точность выявления неоднородностей малого размера по результатам измерения ближнего поля.

2. Итерационный метод для решения прямой нелинейной задачи дифракции волн на объекте, позволяющий при восстановлении параметров неоднородностей учитывать влияние нелинейности поля на процесс дифракции волн.

3. Программный комплекс, реализующий численные методы и разработанные на их основе вычислительные алгоритмы, для решения прямой нелинейной задачи дифракции и векторной обратной задачи для определения геометрических и электродинамических параметров неоднородностей в диэлектрическом теле.

4. Положительные результаты экспериментального исследования возможности определения неоднородности в объектах методом микроволновой томографии с помощью данных, полученных на макете измерительной установки.

Апробация результатов. Основные положения диссертационной работы докладывались на международных и всероссийских научных конференциях: QIPRA2025 (Сириус, 2025), «Суперкомпьютерные дни в России» (Москва, 2024–2025), XXI Международной научно-технической конференции «Физика и технические приложения волновых процессов» (Самара, 2024), конференции «Матричные методы и интегральные уравнения» (Сириус, 2023–2026), Photonics and Electromagnetics Research Symposium (Абу-Даби, 2025), XXIV Международной научно-технической конференции «Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике» (Пенза, 2024), XVI Международной научно-технической конференции «Методы, средства и технологии получения и обработки информации» (Пенза, 2024), XX Международной научно-технической конференции «Физика и технические приложения волновых процессов» (Казань, 2023).

Результаты и разработанный комплекс программ использовались при выполнении проектов: грант РНФ № 20-11-20087 (исполнитель), Госзадание Минобрнауки РФ № 124020200015-7 (исполнитель), ректорский грант для молодых кандидатов наук и аспирантов № ХП-480/24 (руководитель).

Предложенные методы и алгоритмы восстановления параметров неоднородных объектов используются в разработках и исследованиях:

1. ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» в рамках учебного процесса по направлению подготовки 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика» кафедры «Математика и суперкомпьютерное моделирование».

2. ООО «Ромб» при проверке диэлектрических комплектующих на предмет наличия дефектов и неоднородностей (имеется акт о внедрении).

Публикации. По теме исследования опубликовано 24 работы, отражающие основные положения исследования, среди которых – 3 публикации в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки России, 10 публикаций в изданиях, индексируемых международной базой данных Scopus, а также 4 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад. Все основные представленные в диссертации результаты были получены автором лично либо при его непосредственном участии. Результаты, опубликованные совместно с другими авторами, принадлежат авторам в равных долях. Постановка цели исследования и формулировка задач были проведены автором совместно с научным руководителем. Программная реализация численных алгоритмов и решение модельных примеров выполнены автором самостоятельно.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы и трех приложений. Работа содержит 149 страниц основного текста, 5 таблиц, 74 рисунка. Список использованной литературы включает 126 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении диссертации обоснована актуальность темы исследования, доказывающая ее важность и соответствие современным научным и практи-

ческим потребностям. Определены цель работы и задачи исследования, представляющие собой желаемый итог и конкретные этапы его достижения. Особое место занимают выносимые на защиту положения, являющиеся ключевыми идеями, которые будут аргументированы и подтверждены в ходе работы. Подчеркивается научная новизна, выделяющая оригинальный вклад исследования в развитие конкретной области знаний. Представлена теоретическая и практическая ценность диссертации, продемонстрирована ее польза для науки и возможность применения полученных результатов на практике.

В первой главе проводится анализ существующих методов решения задач дифракции, выявляются их преимущества и недостатки, а также определены перспективные направления для дальнейших исследований. Особое внимание уделяется ограничениям применимости существующих методов, вопросам вычислительной сложности и точности получаемых результатов. Результаты анализа методов решения задач дифракции служат основой для разработки новых методов, представленных в последующих главах диссертации.

Вторая глава посвящена описанию математических моделей, рассматриваемых в диссертации, а также теоретическому исследованию двумерных и трехмерных задач дифракции на неоднородных телах. Представлены математические модели, которые описывают распространение волн в средах, содержащих препятствия или неоднородности. В главе проводится подробное описание моделей, детальное исследование задач дифракции, начиная с вывода и анализа основных уравнений, а также соответствующих граничных условий, специфичных для различных типов дифракционных задач. Подробно описываются модели в двумерной и трехмерной геометрии, включая анализ различных геометрических конфигураций рассеивающих объектов и их физических свойств. Целью данной главы является описание математических моделей и создание математической базы, необходимой для дальнейшего численного моделирования и анализа дифракционных явлений. Результаты этой главы служат теоретической основой для разработки и применения численных методов, представленных в последующих разделах диссертации.

Для двумерной задачи дифракции использована модель неоднородного плоского ограниченного объекта Q , расположенного в свободном пространстве $\mathbb{R}^2$. Такая модель может быть применена в электродинамике, когда объект является протяженным и регулярным вдоль одной из координат.

Область вне тела $(\mathbb{R}^2 \setminus Q)$ предполагается однородной и характеризуется волновым числом $k_0 > 0$ (волновое число воздуха), а внутри тела задается функцией неоднородности $k(x)$, где $x \in Q$ и $x = (x_1, x_2)$. Таким образом, определяется волновая функция $k_p(x)$. Полное поле $u_p(x)$ представляется как сумма падающей волны $u_0(x)$, возбуждаемой источником, и рассеянным объектом Q полем $u(x)$.

Двумерная задача дифракции приводит к решению неоднородного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u_p + k_p^2(x) u_p(x) = f(x). \quad (1)$$

На границе ∂Q функция $u_p(x)$ непрерывна вместе со своей нормальной производной (что соответствует случаю Е-поляризации, u_p – продольная компонента электрического поля). На бесконечности выполнены условия излучения Зоммерфельда для рассеянного поля.

Краевая задача сведена к интегральному уравнению

$$f^0(x) = u(x) - \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u(y) dy, \quad (2)$$

где $f^0(x)$ является функцией, задающей падающее поле, а $G(x, y) = iH_0^{(1)}(k_0 |x - y|) / 4$ – функция Ханкеля первого рода.

При больших амплитудах падающей волны волновая функция может иметь нелинейный характер. В диссертации рассмотрены математические модели с некоторыми функциями задания нелинейности. Наиболее распространенная нелинейность описывается законом Керра:

$$k^2(x) = k_1^2 + k_0 \alpha |u(x)|^2. \quad (3)$$

Здесь $k_1 = \text{const}, \alpha > 0$ – коэффициент нелинейности.

При интенсивном воздействии падающего поля в реальных средах происходит явление насыщения, характеризующееся ограничением роста эффекта нелинейности, что моделируется с помощью следующей функции:

$$k^2(x) = k_1^2 + \left(k_0 \alpha |u(x)|^2 \right) / \left(1 + \beta |u(x)|^2 \right), \quad (4)$$

где β является некоторым коэффициентом нелинейности. В главе 3 разработан численный метод решения объемного интегрального уравнения для решения нелинейной задачи дифракции на неоднородных объектах, позволяющий учитывать влияние нелинейности поля на процесс дифракции волны.

Далее рассмотрена математическая модель, отвечающая задаче дифракции на неоднородном теле Q , расположенном в свободном пространстве $\mathbb{R}^3$, описываемая неоднородным уравнением Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2(x) u = f(x), \quad (5)$$

где $f(x)$ – известная функция с компактным носителем, а $k^2(x)$ – непрерывная функция. Такая модель для задач дифракции электромагнитных волн на диэлектрических телах может применяться в случае, когда функция диэлектрической проницаемости в области неоднородности медленно меняется так, что ее модуль градиента достаточно мал. На границе раздела двух сред выполнены условия непрерывности функции $u(x)$ и ее нормальной производной, а также условия излучения Зоммерфельда.

Задача сведена к интегральному уравнению вида

$$u(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) (k^2(y) - k_0^2) u(y) dy. \quad (6)$$

Функция Грина имеет вид

$$G(x, y) = e^{ik|x-y|} / (4\pi|x-y|), \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3).$$

На основе прямой задачи дифракции в следующей главе численно решена скалярная задача восстановления параметров неоднородных объектов.

Рассмотрена математическая модель, отвечающая векторной задаче дифракции электромагнитной волны на диэлектрическом теле, где $Q \subset \mathbb{R}^3$ – полушар (данная модель имеет приложение в медицинской диагностике). В четвертой главе приведены экспериментальные исследования для этого случая. Предполагается, что диэлектрическое тело Q является изотропным и неоднородным. Оно характеризуется постоянной магнитной проницаемостью $\mu_0 > 0$ и функцией диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x) \in C^\infty(\bar{Q})$.

Для относительной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$, предположено, что в каждой точке $x \in \bar{Q}$ существует комплекснозначная функция $(\varepsilon_r(x) - 1)^{-1}$.

Свободное пространство $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}$ является однородным с постоянными значениями проницаемостей $\varepsilon_0 > 0, \mu_0 > 0$ (проницаемости вакуума). Поле возбуждается источником, порождающим электромагнитную волну $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$, удовлетворяющую системе уравнений Максвелла в свободном пространстве.

Полное поле представляется в виде суммы падающего и рассеянного полей, а именно: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_s$. Решение прямой задачи дифракции удовлетворяет уравнениям Максвелла:

$$\text{rot} \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon \mathbf{E}, \quad \text{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad (7)$$

условиям непрерывности касательных компонент поля на границе области неоднородности, условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства и условиям на бесконечности.

Краевая задача сведена к системе, состоящей из интегро-дифференциального уравнения по области неоднородности

$$\mathbf{E}(x) - (k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) (\varepsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q, \quad (8)$$

и интегрального представления поля вне тела

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0(x) + (k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) (\varepsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}. \quad (9)$$

Магнитное поле всюду выражается по формуле $\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{E} / (i\omega \mu_0)$.

На основе прямой задачи дифракции в главе 3 численно решена векторная задача восстановления параметров неоднородных объектов.

Для решения обратной задачи дифракции рассматривается математическая модель, в которой диэлектрическая проницаемость

представляется кусочно-постоянной функцией на некоторой сетке. Использована система интегральных равенств (8)–(9), определяющих зависимость поля $\mathbf{E}(x)$ от диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x)$ и падающей волны $\mathbf{E}_0(x)$. Постановка обратной задачи дифракции заключена в следующем: требуется восстановить функцию $\varepsilon(x)$ в области неоднородности Q по результатам измерения полного поля $\mathbf{E}(x)$ в точках области D вне тела, используя равенство

$$(k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) (\varepsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy = \mathbf{E}(x) - \mathbf{E}_0(x), \quad x \in D, \quad (10)$$

с учетом уравнения в области неоднородности Q :

$$\mathbf{E}(x) - (k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) (\varepsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q. \quad (11)$$

В однородном трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, характеризующемся волновым числом $k_0 > 0$, в сферических координатах $x = \{r, \varphi, \theta : r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ рассмотрим векторную обратную задачу восстановления неоднородности изотропного диэлектрического полушара Q (без границы), $Q = \{x : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$.

Введем на Q равномерную сетку с узлами $r_{i_1} = Ri_1 / n_1, 0 \leq i_1 \leq n_1$, $\varphi_{i_2} = 2\pi i_2 / n_2, 0 \leq i_2 \leq n_2$, $\theta_{i_3} = \pi i_3 / (2n_3), 0 \leq i_3 \leq n_3$. Разобьем тело Q на элементарные ячейки:

$$Q_{i_1 i_2 i_3} = \{x : r_{i_1} < r < r_{i_1+1}, \varphi_{i_2} < \varphi < \varphi_{i_2+1}, \theta_{i_3} < \theta < \theta_{i_3+1}\}, \quad 0 \leq i_k \leq n_k - 1.$$

Введем кусочно-постоянные функции $\chi_{i_1 i_2 i_3}$:

$$\chi_{i_1 i_2 i_3}(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q_{i_1 i_2 i_3}, \\ 0, & x \notin Q_{i_1 i_2 i_3}. \end{cases}$$

Далее будем предполагать, что область Q характеризуется магнитной проницаемостью $\mu_0 > 0$ и подлежащей отысканию кусочно-постоянной функцией диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x) = \varepsilon_r(x)\varepsilon_0$, а точнее,

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3}, & x \in Q_{i_1 i_2 i_3}, \end{cases}$$

где $\mathbf{i} = (i_1 i_2 i_3)$ – мультииндекс. Представим функцию $\varepsilon(x)$ при каждом $x \in Q$

$$\varepsilon(x) = \sum_{\mathbf{i}} \varepsilon_{\mathbf{i}}(x) \chi_{\mathbf{i}}(x).$$

Двухшаговый метод решения обратной задачи дифракции заключается в следующем: в области Q вводится вектор-функция

$$\mathbf{J}(x) := (\varepsilon_r(x) - 1)\mathbf{E}(x),$$

предполагается, что всюду в Q выполнено условие $|\varepsilon_r(x)| \geq \tilde{\varepsilon} > 1$. Тогда из представления поля (10) вне рассеивателя получается уравнение для $\mathbf{J}(x)$:

$$(k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}(x) - \mathbf{E}_0(x), \quad x \in D, \quad (12)$$

а уравнение в области неоднородности (25) записывается в виде

$$(\mathbf{J}(x)) / (\varepsilon_r(x) - 1) - (k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q. \quad (13)$$

Двухшаговый метод восстановления диэлектрической проницаемости неоднородного объекта Q состоит из следующих шагов. Первый шаг – по известным значениям падающего поля $\mathbf{E}_0(x)$ и полного поля $\mathbf{E}(x)$ в области D необходимо найти ток $\mathbf{J}(x)$ в Q из уравнения (12). Второй шаг – вычислить явно $\varepsilon_r(x)$ в Q , используя уравнение (13). Численная реализация этого метода для векторной обратной задачи для полушара является одной из целей настоящей работы. Стоит отметить, что предложенный метод решения обратной задачи не является итерационным и не требует знания «хорошего» начального приближения. Таким образом, разработан и применен двухшаговый метод для решения двумерных и трехмерных обратных задач дифракции волны на объекте.

Третья глава посвящена численным методам решения рассматриваемых интегральных уравнений и задач дифракции. В данной главе подробно описывается численный метод, примененный для решения уравнений, полученных в предыдущей главе. Представлен комплекс программ, разработанный для проведения вычислительных экспериментов, и обоснован выбор сетки, используемой для дискретизации расчетной области. Детально описан метод коллокации, предложенный для аппроксимации уравнений, и приведены примеры его применения к конкретным задачам дифракции. Важным аспектом главы является применение параллельных вычислений для повышения эффективности численного решения сложных трехмерных задач.

В качестве метода решения выбираем метод коллокации и применяем его для приближенного решения линейного уравнения $Au = f$. Общая схема метода коллокации состоит в нахождении приближенного решения $u \in X_n$, $X_n = \text{span}\{v_1 \dots v_n\}$, удовлетворяющего уравнению $(Au_n)(x_j) = f(x_j)$, $j = 1 \dots n$, где v_i – базисные функции. Приближенное решение u_n представляется в виде линейной комбинации $u_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k v_k$. Метод коллокации приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k (Av_k)(x_j) = f(x_j), \quad j = 1 \dots n. \quad (14)$$

В сферической системе координат рассмотрена векторная задача в случае диэлектрического полушара Q :

$$Q = \{x : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

На Q введена равномерная сетка с узлами

$$r_{i_1} = R i_1 / n_1, \quad 0 \leq i_1 \leq n_1, \quad \varphi_{i_2} = 2\pi i_2 / n_2, \quad 0 \leq i_2 \leq n_2, \quad \theta_{i_3} = (\pi/2) i_3 / n_3, \quad 0 \leq i_3 \leq n_3.$$

Тело Q разбито на элементарные ячейки

$$Q_{i_1 i_2 i_3} = \{x: r_{i_1} < r < r_{i_1+1}, \varphi_{i_2} < \varphi < \varphi_{i_2+1}, \theta_{i_3} < \theta < \theta_{i_3+1}\}, \quad 0 \leq i_k \leq n_k - 1.$$

Определены шаги сетки по переменным: $h_1 = R / n_1$, $h_2 = 2\pi / n_2$, $h_3 = \pi / (2n_3)$. Введены новые векторные базисные функции (кусочно-линейные по одной координате и кусочно-постоянные по двум другим в сферической системе координат):

$$v_{i_1 i_2 i_3}^{(r)}(x) = 1 - |r - r_{i_1}| / h_1, x \in Q_{i_1-1, i_2 i_3} \cup Q_{i_1 i_2 i_3}; \quad 0 - \text{иначе}, \quad (15)$$

$$v_{i_1 i_2 i_3}^{(\varphi)}(x) = 1 - |\varphi - \varphi_{i_2}| / h_2, x \in Q_{i_1 i_2-1, i_3} \cup Q_{i_1 i_2 i_3}; \quad 0 - \text{иначе}, \quad (16)$$

$$v_{i_1 i_2 i_3}^{(\theta)}(x) = 1 - |\theta - \theta_{i_3}| / h_3, x \in Q_{i_1 i_2 i_3-1} \cup Q_{i_1 i_2 i_3}; \quad 0 - \text{иначе}, \quad (17)$$

$$\mathbf{v}_{i_1 i_2 i_3}^{(r)}(x) = v_{i_1 i_2 i_3}^{(r)}(x) \mathbf{r}(x), \quad \mathbf{v}_{i_1 i_2 i_3}^{(\varphi)}(x) = v_{i_1 i_2 i_3}^{(\varphi)}(x) \boldsymbol{\varphi}(x), \quad \mathbf{v}_{i_1 i_2 i_3}^{(\theta)}(x) = v_{i_1 i_2 i_3}^{(\theta)}(x) \boldsymbol{\theta}(x). \quad (18)$$

Точки коллокации расположены в центрах ячеек $Q_{i_1 i_2 i_3}$.

Элементы блочной 3×3 матрицы системы линейных алгебраических уравнений имеют вид:

$$a_{ij}^{(\alpha\beta)} = k_0^2 \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} G(x_i^{(\alpha)}; r_0, \varphi_0, \theta_0) v_j^{(\beta)}(r_0, \varphi_0, \theta_0) r_0^2 \sin \theta_0 dr_0 d\varphi_0 d\theta_0 + \\ + \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \text{grad}^{(\alpha)} G(x_i^{(\alpha)}; r_0, \varphi_0, \theta_0) \text{div} \mathbf{v}_j^{(\beta)}(r_0, \varphi_0, \theta_0) r_0^2 \sin \theta_0 dr_0 d\varphi_0 d\theta_0, \quad (19)$$

где $\text{grad}^{(\alpha)}$ – соответствующая компонента градиента, то есть $\text{grad} = (\text{grad}^{(r)}, \text{grad}^{(\varphi)}, \text{grad}^{(\theta)})$, $\alpha = r, \varphi, \theta$, $\beta = r, \varphi, \theta$.

Для решения нелинейной задачи разработан итерационный метод, состоящий из двух этапов. На первом этапе, в качестве начального приближения, среда считается однородной, т.е. волновое число $k^2(x) = k_1 = \text{const}$ (или квадрат волнового числа) будет постоянным.

При неявном подходе значения нелинейных параметров на следующей итерации зависят от электромагнитного поля. Это приводит к необходимости решения системы нелинейных уравнений на каждой итерации. Такой метод является более устойчивым, но требует больше вычислительных ресурсов. Решаем интегральное уравнение (6) методом коллокации с $u(x) = u_0(x)$. На последующих итерациях вычисляем значения волновой функции по формуле:

$$k_{n+1}^2(x) = k_1^2 + \alpha |u_n(x)|^2. \quad (20)$$

Далее решаем линейное уравнение

$$u_{n+1}(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k_{n+1}^2(y; u_n(y))) u_{n+1}(y) dy. \quad (21)$$

На рисунке 1 приведен график сходимости итерационного процесса. По вертикальной оси δ_0 – максимум разности решений в узлах коллокации на текущем и предыдущем шагах итерации: $\delta_0 = \max_i |u_{n+1}(x_i) - u_n(x_i)|$.

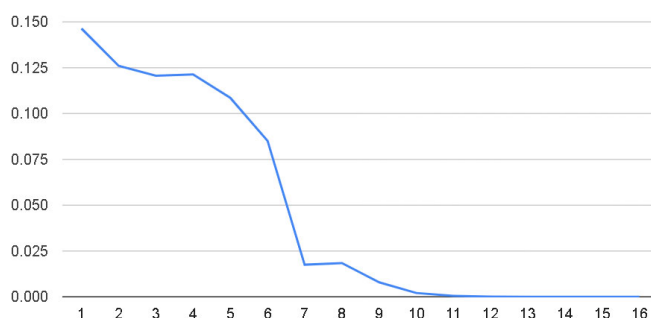


Рисунок 1 – График сходимости итерационного процесса (21) с нелинейностью (3). По горизонтальной оси – количество итераций

Таким образом, предложен итерационный метод для решения прямой нелинейной задачи дифракции волны на объекте.

Для решения всех задач исследования предложены численные методы, основанные на решении интегральных уравнений.

В **четвертой главе** приведен анализ численных результатов, полученных с использованием разработанного комплекса программ. В данной главе приводятся графические данные, которые показывают характеристики объекта при решении прямой и обратной задач, рассчитанные для различных параметров и конфигураций рассеивающих объектов.

Данная часть работы включает схемы программ, результаты расчетов прямых и обратных задач дифракции, а также результаты натурных экспериментов. Производится сравнение экспериментальных данных с модельными результатами для подтверждения адекватности используемых подходов.

Описываются стратегии распараллеливания вычислительного алгоритма, реализующего предложенный численный метод. Данные ускорения решения задачи в зависимости от количества процессов представлены на рисунке 2.

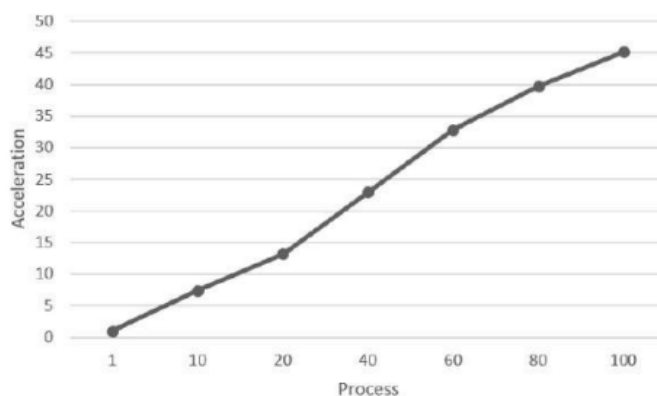


Рисунок 2 – Ускорение решения задачи в зависимости от количества процессов

В заключение главы анализируется точность и эффективность численного метода.

Для реализации численных методов разработан вычислительный комплекс программ, представленный в главе 4. На рисунках 3–5 представлены результаты решения прямых и обратных задач для неоднородных объектов с применением вычислительного комплекса.

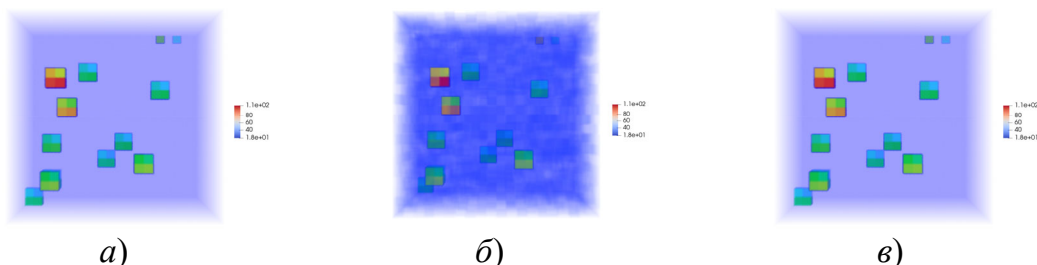


Рисунок 3 – Значения относительной диэлектрической проницаемости тела, содержащего серию неоднородностей: *a* – исходные; *б* – восстановленные, с добавлением шума 10 % на этапе измерений; *в* – восстановленные с применением фильтрации

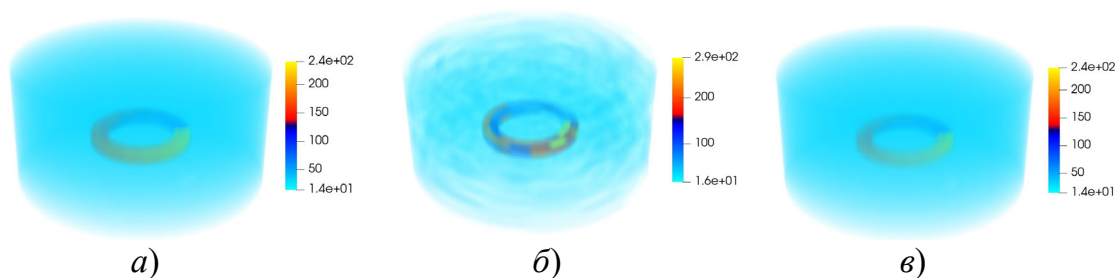


Рисунок 4 – Значения функции $k(x)$ для диэлектрического цилиндра, содержащего серию неоднородностей: *a* – исходные; *б* – восстановленные, с добавлением шума 15 % на этапе измерений; *в* – восстановленные с применением фильтрации

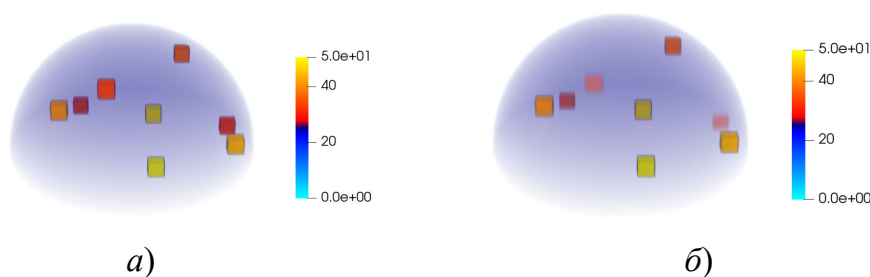


Рисунок 5 – Решение прямой (*a*) и обратной (*б*) задач для неоднородного полушара: значения относительной диэлектрической проницаемости

На рисунке 6 представлены частотные зависимости коэффициента $|S_{21}|$.

Коэффициенты отражения S_{11} и прохождения S_{21} , полученные с помощью векторного анализатора фирмы Rohde&Schwarz и разработанной измерительной установки (которая описана в приложении В диссертации) на различных частотах.

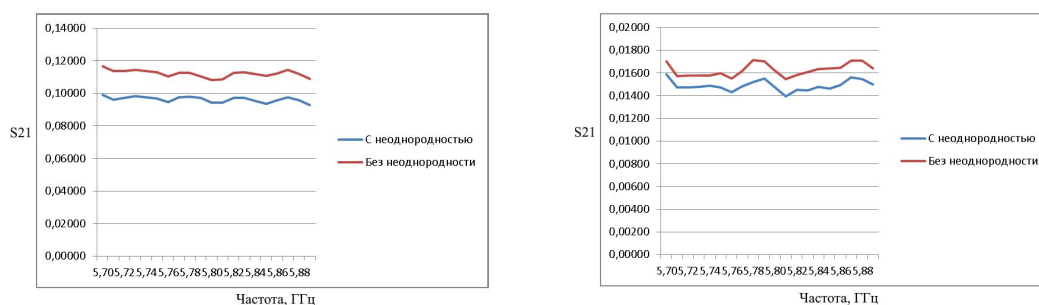


Рисунок 6 – Частотная зависимость модуля коэффициента прохождения S_{21} для полусферического и цилиндрического объектов с неоднородностью и без неоднородности

В приложении В подробно описывается, как проведены экспериментальные измерения, а также конструкция экспериментальной установки, методика проведения измерений и методы обработки полученных экспериментальных данных. Также в приложении В описан макет измерительной установки для получения данных – значений ближнего поля, рассеянного объектом. На основании сравнения численных и экспериментальных результатов делается заключение о том, насколько хорошо разработанный численный метод моделирует реальные физические процессы. Результаты математического моделирования и эксперимента представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Сравнение параметров S_{11} и S_{21} , полученных с помощью математического моделирования и макета экспериментальной установки

Частота	$ S_{11} $ Модель	$ S_{21} $ Модель	$ S_{11} $ Эксперимент	$ S_{21} $ Эксперимент
5,7 ГГц	–8,95 dB	–20,5 dB	–9,3 dB	–20,8 dB
5,8 ГГц	–9,82 dB	–20,42 dB	–10,1 dB	–20,6 dB
5,9 ГГц	–10,9 dB	–20,4 dB	–11,08 dB	–20,5 dB

Различия в коэффициентах S_{11} и S_{21} , полученные с помощью математического моделирования и эксперимента, составляют менее 3 % и 2 % соответственно.

В целом результаты расчетов (см. рисунки 3–5) и эксперимента (см. рисунок 6 и таблицу 1) показывают, что предложенный метод решения обратной задачи дифракции с помощью измерения поля в ближней зоне позволяет обнаружить неоднородность в указанном диапазоне частот.

В **заключении** представлены результаты диссертационной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В диссертации основании выполненных автором исследований решена **научная задача** обнаружения неоднородностей в диэлектрических телах по данным измерения ближнего поля, основанная на решении обратной задачи:

1. Выбраны двумерные и трехмерные математические модели с кусочно-непрерывной или кусочно-постоянной функциями диэлектрической про-

нищаемости объектов и определены неоднородности в двумерных и трехмерных диэлектрических телах с помощью решения задач дифракции волн на объекте, позволяющие идентифицировать дефекты и неоднородности.

2. Разработан и применен двухшаговый метод для решения обратных задач дифракции волны на неоднородном полушаре с целью определения неоднородностей в диэлектрическом теле, что позволило выявлять неоднородности малого размера (порядка 1 см) по результатам измерений ближнего поля.

3. Разработан итерационный метод решения объемного интегрального уравнения для решения нелинейной задачи дифракции на неоднородных объектах, что позволило оценить влияния нелинейности на процесс дифракции волн. Модифицирован метод коллокации для решения интегрального уравнения, отличающийся новыми базисными функциями.

4. Разработаны вычислительные алгоритмы, реализующие численные методы решения прямой нелинейной и векторной обратной задач дифракции. Алгоритмы позволяют определять неоднородности, расположенные внутри диэлектрического объекта при внесении шума во входные данные на уровне 10 %.

5. На основе вычислительных алгоритмов создан программный комплекс на языках C++ и Python для решения прямых линейной и нелинейной задач дифракции и векторной обратной задачи для определения геометрических и электродинамических параметров неоднородностей в диэлектрическом теле.

6. В диссертации предложена модель наблюдения, на основе которой создан макет измерительной установки, для проверки результатов математического моделирования с помощью натуральных экспериментов. По результатам сравнения данных получено обоснование возможности определения неоднородностей в диэлектрических объектах методом микроволновой томографии. Разница между коэффициентами S_{11} , полученными в результате математического моделирования и экспериментальных измерений, составляет менее 3 %. Для коэффициента S_{21} это различие не превышает 2 %. Сравнение коэффициентов прохождения измеренных данных для однородного объекта и объекта с неоднородностью показывает среднее различие между образцами более 10 %, что позволяет обнаружить неоднородность.

Практическая ценность подтверждена возможностью применения разработанного комплекса программ для диагностики неоднородностей материалов. В диссертации содержится решение научной задачи, имеющей существенное значение в области математического моделирования в электродинамике.

Перспективы использования и дальнейшего развития темы.

Разработанные комплексы программ могут применяться при решении задач медицинской диагностики, в неразрушающем контроле объектов и других областях математической физики и техники. Направлением для дальнейшей работы является развитие разработанных методов и измерительной установки для определения неоднородностей в диапазоне частот до 20 ГГц, который используется в неразрушающем контроле объектов меньшего размера.

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации, по специальности 1.2.2

1. Кондырев, О. В. Применение параллельных вычислений в обратной задаче дифракции на диэлектрических объектах с неоднородностями / О. В. Кондырев, **А. О. Лапич**, М. Ю. Медведик // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2025. – № 2. – С. 95–106. – doi: 10.21685/2227-8486-2025-2-8

2. **Лапич, А. О.** Решение прямой и обратной задач дифракции на плоских объектах с различными видами нелинейности поля / **А. О. Лапич** // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2024. – № 3. – С. 138–146. – doi: 10.21685/2227-8486-2024-3-12

3. **Лапич, А. О.** Метод восстановления параметров неоднородностей тела по результатам измерений электромагнитного поля / **А. О. Лапич**, М. Ю. Медведик // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2023. – № 4. – С. 142–153. – doi: 10.21685/2227-8486-2023-4-9

Публикации в изданиях, индексируемых базами данных Web of Science и Scopus

4. **Lapich, A. O.** Measuring a Near Electromagnetic Field and Restoring the Parameters of Inhomogeneities in a Dielectric Body / **A. O. Lapich**, Yu. G. Smirnov // Technical Physics Letters. – 2025. – Vol. 51, № 3. – P. 115–119. – doi: 10.1134/S1063785025700191

5. Smirnov, Y. G. Solution of electromagnetic inverse problem of inhomogeneity reconstruction in dielectric body by near-field measurements using two-step method / Y. G. Smirnov, **A. O. Lapich** // Physics of Wave Processes and Radio Systems. – 2025. – Vol. 28, № 1. – P. 33–38. – doi: 10.18469/1810-3189.2025.28.1.33-38

6. **Lapich, A. O.** Solving the Direct and Inverse Diffraction Problems on Flat Objects with Different Types of Field Nonlinearity / **A. O. Lapich** // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 2025. – Vol. 140, № 4. – P. 77–81. – doi: 10.1134/S1063776125600473

7. **Lapich, A. O.** Method for Reconstruction the Parameters of Body Inhomogeneities from the Results of Electromagnetic Field Measurements / **A. O. Lapich**, М. Yu. Medvedik // Lobachevskii J Math. – 2024. – Vol. 45. – P. 4740–4747. – doi: 10.1134/S1995080224605824

8. **Lapich, A. O.** Two Iterative Methods for Solving a Volumetric Singular Equation for a Nonlinear Diffraction Problem in a Semi-Infinite Rectangular Waveguide / **A. O. Lapich**, М. Yu. Medvedik // Technical Physics. – 2024. – Vol. 69, № 8. – P. 2312–2317. – doi: 10.1134/S1063784224700622

9. **Lapich, A. O.** Algorithm for Searching Inhomogeneities in Inverse Nonlinear Diffraction Problems / **A. O. Lapich**, М. Yu. Medvedik // Uchenye

Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2024. – Vol. 166, № 3. – P. 395–406. – doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.395-406

10. **Lapich, A. O.** Algorithm of the Search for Inhomogeneities in the Inverse Nonlinear Diffraction Problems / **A. O. Lapich**, M. Yu. Medvedik // Technical Physics. – 2024. – Vol. 69, № 9. – P. 2454–2460. – doi: 10.1134/S1063784224700749

11. **Lapich, A. O.** Method of generalized and combined computational grids for restoration of the parameters of inhomogeneities of a body based on the results of measurements of the electromagnetic field / **A. O. Lapich**, M. Y. Medvedik // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2024. – Vol. 16, № 6. – P. 806–813. – doi: 10.1134/S207004822470042X

12. **Lapich, A. O.** Solution of a Scalar Two-Dimensional Nonlinear Problem of Diffraction on Objects of Arbitrary Shape / **A. O. Lapich**, M. Yu. Medvedik // Technical Physics Letters. – 2024. – Vol. 50, № 1. – P. 6–12. – doi: 10.1134/S1063785024700196

13. **Lapich, A. O.** Solution of a Scalar Two-Dimensional Nonlinear Diffraction Problem for Objects of Arbitrary Shape / **A. O. Lapich**, M. Yu. Medvedik // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2023. – Vol. 165, № 2. – P. 167–177. – doi: 10.26907/2541-7746.2023.2.167-177

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

14. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024665561. Программа для решения обратной задачи дифракции на плоском объекте с нелинейной структурой / **Лапич А. О.** – № 2024664872; заявл. от 28.06.2024; опубли. 03.07.2024.

15. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024665656. Программа восстановления характеристик объемного тела расположенного в свободном пространстве с применением двухшагового метода / **Лапич А. О.**, Медведик М. Ю. – № 2024664879; заявл. от 28.06.2024; опубли. 03.07.2024.

16. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025686225. Программа восстановления диэлектрических параметров сферического тела методом микроволновой томографии / **Лапич А. О.**, Медведик М. Ю. – № 2025685376; заявл. от 16.09.2025; опубли. 30.09.2025.

17. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025687045. Программа для моделирования электромагнитного поля на объектах сложной геометрической формы / **Лапич А. О.**, Медведик М. Ю. – № 2025685265; заявл. от 16.09.2025; опубли. 08.10.2025.

В прочих изданиях, а также в сборниках трудов международных и всероссийских конференций опубликовано 7 работ.