

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО»

на правах рукописи

Халилов Сервер Искандарович

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СТОКСА
СТРУКТУРИРОВАННЫХ ПУЧКОВ ЛАГЕРРА–ГАУССА**

1.3.6. – Оптика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

Брецько Михаил Владимирович,

кандидат физико-математических наук

Симферополь – 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. СТРУКТУРИРОВАННЫЙ ПУЧОК ЛАГЕРРА–ГАУССА	13
1.1 Структурированный пучок Лагерра–Гаусса	14
1.1.1 Комплексная амплитуда сЛГ-пучка.....	14
1.1.2 Осцилляции ОУМ сЛГ-пучка	18
1.1.3 Экспериментальная реализация сЛГ-пучков	21
1.2 Астигматическое преобразование сЛГ-пучка (простой астигматизм).....	28
1.2.1 Правило ABCD для астигматического сЛГ-пучка	31
1.2.2 Преобразование ОУМ сЛГ-пучка после цилиндрической линзы.....	35
1.2.3 Экспериментальная реализация астигматического преобразования сЛГ-пучка (простой астигматизм)	37
1.3 Астигматическое преобразование сЛГ-пучка (общий астигматизм)	42
1.3.1 Преобразование ОУМ сЛГ-пучка после цилиндрической линзы при общем астигматизме.....	43
1.3.2 Адиабатическое следование картины интенсивности сЛГ-пучка после поворота цилиндрической линзы	49
1.4 Выводы к главе 1	56
ГЛАВА 2. МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ОРБИТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СТОКСА СТРУКТУРИРОВАННОГО ПУЧКА ЛАГЕРРА–ГАУССА	57
2.1 Матрица моментов интенсивности второго порядка сЛГ-пучка.....	58
2.1.1 Определение 4D-матрицы моментов интенсивности.....	60
2.1.2 4D-матрица моментов интенсивности сЛГ-пучка.....	65
2.2 Орбитальные параметры Стокса сЛГ-пучка	66
2.2.1 Связь орбитальных параметров Стокса с матрицей моментов интенсивности второго порядка	69
2.2.2 Отображение сЛГ-пучка на орбитальную сферу Пуанкаре	71
2.3 Метод измерения орбитальных параметров Стокса сЛГ-пучка	74
2.3.1 Теоретическое обоснование метода измерения орбитальных параметров Стокса сЛГ-пучка	76
2.3.2 Экспериментальная реализация метода измерения орбитальных параметров Стокса сЛГ-пучка	79
2.4 Выводы к главе 2	83

ГЛАВА 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СТОКСА СТРУКТУРИРОВАННЫХ АСТИГМАТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ В ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.....	85
3.1 Теоретическое обоснование преобразования сЛГ-пучка в оптической системе состоящей из цилиндрической и сферической линзы	88
3.1.1 ABCD матричный формализм	88
3.1.2 Преобразования ЛГ и ЭГ мод.....	91
3.1.3 Отображение астигматических преобразований сЛГ-пучка на орбитальную сферу Пуанкаре.....	93
3.1.4 Эффекты взаимного самосогласования и самовосстановления в критических плоскостях	96
3.2 Модифицированный метод измерения орбитальных параметров Стокса сЛГ и асЛГ пучков	99
3.2.1 Измерение сЛГ-пучка	100
3.2.2 Измерение асЛГ пучка.....	100
3.3 Преобразование астигматической фазы Гуи в оптической системе первого рода	101
3.4 Фурье-инварианты сЛГ- и асЛГ-пучков.....	105
3.4.1 Вихревой, астигматический и общий ОУМ.....	105
3.4.2 Фурье-инварианты ОУМ астигматического преобразования и их разрушение.....	107
3.5 Экспериментальная реализация модифицированного метода определения орбитальных параметров Стокса.....	110
3.5.1 Положение критических плоскостей	112
3.5.2 Измерение орбитальных параметров Стокса	115
3.5.3 Экспериментальное исследование Фурье-инвариантов сЛГ- и асЛГ-пучков в оптической системе первого порядка	116
3.6 Выводы к главе 3.....	118
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	120
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	122

ВВЕДЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена разработке и экспериментальному воплощению метода орбитальных параметров Стокса структурированных вихревых пучков. Метод основан на цифровом анализе моментов интенсивности второго порядка в оптической системе первого порядка с последующим отображением состояний пучков на орбитальную сферу Пуанкаре, а измерительный процесс базируется на аналогии с поляризационными параметрами Стокса.

Актуальность. Структурированные вихревые пучки, обладающие множеством степеней свободы, характеризуются тонкой структурой картин интенсивности, а также наличием орбитального (ОУМ) и спинового углового момента [1–4]. Такое разнообразие свойств способствовало быстрому распространению структурированных пучков далеко за пределами классической оптики – в системах манипулирования микрочастицами [5], системах оптической связи [6], включая системы квантовой связи [7], нелинейную оптику [8], радиотехнику [9] и акустику [10]. В немалой степени этому способствовала относительная простота формирования структурированных пучков с использованием пространственных световых модуляторов [11] и цифровых микрозеркальных устройств [12]. Особое внимание при этом уделяется голографическим технологиям [13]. Со времени создания первой голограммы Габора голографическая техника значительно расширила свои возможности и широко используется в таких областях, как безопасность, хранение данных, сохранение культурного наследия, визуализация и медицина на основе структурированного света [14]. Тем не менее, ключевой проблемой остается измерение ОУМ и связанной с ним тонкой структуры интенсивности с её уникальной геометрией [15].

Анализ свойств параксиальных структурированных пучков традиционно осуществляется в два этапа. На первом этапе описываются общие свойства пучка, распространяющегося через оптическую систему, с использованием матричного подхода, основанного на формализме 4×4 ABCD-матриц [16]. Второй этап связан

с процессом измерений и опирается на формализм распределения Вигнера [17], а следовательно, на использование матриц моментов интенсивности второго порядка. Метод моментов интенсивности позволяет определять основные характеристики пучка посредством анализа только распределения интенсивности в соответствии с рекомендациями ISO, которые предусматривают использование специализированного программного обеспечения [18].

Исторически сформировались пять основных подходов к измерению ОУМ [19, 20]: интерференционный метод [21], дифракционный метод [20], метод Шака–Гартмана [22], метод компьютерно-синтезированных голограмм и дифракционных оптических элементов [23, 24], а также метод геометрического разделения пучков [25, 26]. Как правило, данные методы предполагают использование громоздкого и дорогостоящего оборудования, чувствительного к внешним возмущениям при проведении многократных последовательных измерений.

В то же время метод моментов интенсивности требует регистрации лишь одного распределения интенсивности с последующей стандартной компьютерной обработкой. Однако до недавнего времени он применялся преимущественно для анализа изображений [27] и для оценки качества лазерных пучков [28]. Лишь в одной работе [29] был предложен подход, основанный на применении моментов интенсивности для измерения ОУМ в некоторых типах лазерных пучков. Между тем ещё в начале 1990-х годов начались интенсивные теоретические исследования свойств лазерных пучков, включая ОУМ, с использованием аппарата физических моментов интенсивности второго порядка [17].

Ананьев и Бекшаев [30] определили главные инварианты матрицы моментов второго порядка. В работе [31] было предсказано сохранение полного ОУМ как суммы вихревого и астигматического вкладов при прохождении пучка через цилиндрическую линзу. Немес и Сейгман [32] предложили теоретический подход к измерению всех 10 элементов матрицы моментов интенсивности. Алиева и Бастиаанс [33] ввели понятие орбитальных параметров Стокса, включая ОУМ, и предложили отображение состояния вихревого пучка на орбитальную сферу Пуанкаре. Волостников и Абрамочкин [34, 35] показали, что пучки Лагерра–Гаусса

(ЛГ) и Эрмита–Гаусса (ЭГ) являются частными случаями обобщённого семейства однопараметрических пучков Эрмита–Лагерра–Гаусса (ЭЛГ). Паджетт с соавторами [36] отобразили все возможные состояния ЭЛГ-пучков низших порядков в виде плоских траекторий на орбитальной сфере Пуанкаре. Калво [37] внедрил в экспериментальную установку призму Дове, вращающую пучок, что позволило преобразовать плоскую траекторию ЭЛГ-пучка в пространственную и измерить геометрическую фазу Берри при циклическом изменении управляющего параметра пучка.

Воляр и соавторы [38] предложили двухпараметрические структурированные ЛГ-пучки (сЛГ), в которых устраняется вырождение ЭЛГ-пучков по вращению вокруг оптической оси, а траектория состояний на орбитальной сфере Пуанкаре приобретает пространственную форму [39]. Они также разработали и реализовали метод измерения спектра ЛГ- и ЭГ-мод в структурированных пучках через моменты интенсивности высших порядков [40, 41], что позволяет вычислять ОУМ и радиус перетяжки пучка. Анализируя симметрию структурированных пучков и подходы к их описанию, Деннис и Алонсо [42] предложили единый подход к отображению состояний поляризации и вихревых состояний на сферу Пуанкаре. Однако проблема экспериментального измерения орбитальных параметров Стокса и отображения состояний астигматических структурированных пучков с несколькими степенями свободы на орбитальную сферу Пуанкаре пока остаётся открытой.

Целью диссертационной работы является разработка и экспериментальная реализация метода измерения орбитальных параметров Стокса структурированных вихревых пучков на основе моментов интенсивности второго порядка в оптической системе первого рода с последующим отображением состояний пучков на орбитальную сферу Пуанкаре.

Для достижения поставленной цели необходимо решить три задачи:

1. Разработать и экспериментально реализовать метод измерения орбитальных параметров Стокса структурированных вихревых пучков Лагерра–

Гаусса, представленных в базисе мод Эрмита–Гаусса, в оптической системе первого порядка.

2. На основе прямого измерения моментов интенсивности второго порядка построить отображение эволюции состояния пучка на орбитальной сфере Пуанкаре и установить связь формы траектории с параметрами наблюдаемого эллипса интенсивности.

3. С использованием компьютерного моделирования и прямых измерений орбитальных параметров Стокса определить положения критических плоскостей в оптической системе, состоящей из двух сферических линз и расположенной между ними цилиндрической линзы, а также измерить астигматическую фазу Гуи.

Новизна полученных в работе результатов:

1. Разработан и экспериментально реализован метод определения орбитальных параметров Стокса структурированных пучков Лагерра–Гаусса по моментам интенсивности второго порядка, вычисляемым по двум зарегистрированным распределениям интенсивности в фокусе сферической линзы и в двойном фокусе цилиндрической линзы, с последующим представлением состояния пучка на орбитальной сфере Пуанкаре.

2. В оптической системе, состоящей из двух сферических линз и расположенной между ними цилиндрической линзы выявлены две плоскости, в которых происходит преобразование пространственной структуры пучка. Установлено, что на орбитальной сфере Пуанкаре этим плоскостям соответствуют поворот траектории состояния пучка на 90° и её последующее обратное вращение.

3. Получено выражение для астигматической фазы Гуи, определяющей эволюцию состояния пучка при астигматическом преобразовании, через орбитальные параметры Стокса: $\arctan(S_3/S_2)$, где S_2 , S_3 – второй и третий орбитальные параметры Стокса.

4. Выявлено, что при астигматическом преобразовании структурированных пучков Лагерра–Гаусса величина их орбитального углового момента определяется не только топологическим зарядом, но и радиальным

числом. Установлено сохранение инварианта астигматического преобразования $\sqrt{S_2^2 + S_3^2}$, где S_2, S_3 – второй и третий орбитальные параметры Стокса.

Защищаемые положения:

1. Орбитальные параметры Стокса структурированных пучков Лагерра–Гаусса экспериментально определяются по моментам интенсивности второго порядка, вычисляемым по двум зарегистрированным распределениям интенсивности: в фокусе сферической линзы и в двойном фокусе цилиндрической линзы, что позволяет представить состояние пучка на орбитальной сфере Пуанкаре.

2. В оптической системе, состоящей из двух сферических линз и расположенной между ними цилиндрической линзы, существуют две выделенные плоскости, в которых структурированный пучок Лагерра–Гаусса претерпевает преобразование пространственной структуры. На орбитальной сфере Пуанкаре этим плоскостям соответствует поворот траектории состояния пучка на 90° и её последующее обратное вращение, что позволяет использовать указанные плоскости для прямого измерения орбитальных параметров Стокса.

3. Астигматическая фаза Гуи, определяющая эволюцию состояния пучка при астигматическом преобразовании, выражается соотношением $\arctan(S_3/S_2)$, где S_2, S_3 – второй и третий орбитальные параметры Стокса.

4. При астигматическом преобразовании структурированных пучков Лагерра–Гаусса величина их орбитального углового момента определяется не только топологическим зарядом, но и радиальным числом, инвариантом астигматического преобразования является величина $\sqrt{S_2^2 + S_3^2}$, где S_2, S_3 – второй и третий орбитальные параметры Стокса.

Теоретическая и практическая значимость.

Теоретическая значимость работы заключается в разработке метода измерения орбитальных параметров Стокса на основе численного анализа моментов интенсивности второго порядка в оптических системах первого рода, который расширяет существующие подходы к диагностике сложных

структурированных пучков. Введённое описание эволюции состояний структурированных пучков через отображение на орбитальную сферу Пуанкаре позволяет интерпретировать динамику тонкой структуры интенсивности в терминах непосредственно измеряемых характеристик. Обоснована связь орбитальных параметров Стокса с астигматической фазой Гуи, что открывает возможность строгого анализа преобразований состояния пучков при их распространении через астигматические элементы. Показано, что радиальное число оказывает влияние на орбитальный угловой момент пучка при астигматическом преобразовании, что дополняет современные представления о структуре световых полей, обладающих орбитальным угловым моментом.

Практическая значимость работы состоит в экспериментальной реализации метода, позволяющего определять орбитальные характеристики пучков без необходимости использования сложных интерферометрических или дифракционных систем, что значительно упрощает экспериментальные процедуры и повышает их надёжность. Возможность восстановления эволюции состояния пучка на основе двух снимков распределения интенсивности существенно снижает требования к измерительному оборудованию и повышает устойчивость результатов к внешним возмущениям. Разработанные подходы могут быть использованы для оптимизации систем оптической связи с использованием структурированных пучков, для диагностики параметров лазерных пучков в системах обработки материалов, в микроманипуляционных технологиях, а также при исследовании квантовых систем, где контроль орбитальных степеней свободы имеет принципиальное значение.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 24-22-00278, что подтверждает её актуальность и практическую значимость.

Достоверность результатов работы обеспечивается использованием строгих математических моделей описания распространения структурированных вихревых пучков через оптические системы первого рода, применением общепринятых методов анализа моментов интенсивности второго порядка, а также сопоставлением экспериментальных данных с результатами численного

моделирования. Разработанный метод измерения орбитальных параметров Стокса прошёл экспериментальную проверку для различных состояний структурированного пучка, что подтвердило его воспроизводимость и устойчивость к внешним возмущениям. Соответствие полученных результатов теоретическим прогнозам и независимым расчётам дополнительно подтверждает достоверность выводов работы.

Личный вклад автора

Вклад соискателя заключается в проведении численного моделирования распространения структурированных вихревых пучков через оптические системы первого рода, разработке и реализации метода измерения орбитальных параметров Стокса на основе анализа моментов интенсивности второго порядка, а также в обсуждении полученных результатов. Автором самостоятельно проведены экспериментальные исследования по измерению орбитальных характеристик структурированных пучков, выполнена обработка экспериментальных данных и осуществлена апробация разработанного метода. Все основные выводы и положения диссертационной работы сформулированы автором лично.

Публикации и апробация работы

По теме данной диссертационной работы было опубликовано 15 научных работ, из которых 13 статей индексируются в базах данных Scopus и Web of Science и опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК. Кроме того, по результатам исследований зарегистрированы две программы для ЭВМ.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих международных и всероссийских научных конференциях:

- 7-9 октября 2025 г. – XI Международная конференция и молодежная школа «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2025), Узбекистан, г. Самарканд (Россия, г. Самара);
- 24-26 января 2024 г. – XIII Международная конференция по фотонике и информационной оптике, Россия, г. Москва;
- 20-24 мая 2024 г. – X Международная конференция и молодёжная школа «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2024), Россия, г. Самара;

- 14-18 ноября 2023 г. – XXI Всероссийская молодежная Самарская конкурс-конференция научных работ по оптике и лазерной физике, посвященной 300-летию РАН, Россия, г. Самара;
- 17-21 апреля 2023 г. – IX Международная конференция и молодёжная школа «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2023), Россия, г. Самара;
- 1-3 февраля 2023 г. – XII Международная конференция по фотонике и информационной оптике, Россия, г. Москва;
- 30 мая-3 июня 2022 г. – XXXII Международная школа-симпозиум по голографии, когерентной оптике и фотонике, Россия, г. Санкт-Петербург;
- 23-27 мая 2022 г. – VIII Международная конференция и молодёжная школа «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2022), Россия, г. Самара;
- 6-10 сентября 2021 г. – Международная конференция «Цифровая сингулярная оптика» (DSO2021), Россия, г. Ялта.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав, заключения, списка литературы, включающего 165 наименований. Работа изложена на 138 листах машинописного текста, содержит 37 рисунков.

Краткое содержание диссертации:

Во введении обоснованы актуальность темы, новизна, теоретическая и практическая значимость и достоверность результатов работы. Проведён обзор научной литературы по теме диссертационного исследования и сформулированы основные результаты, выносимые на защиту.

В первой главе исследовано влияние радиального числа на ОУМ сЛГ-пучка в условиях астигматического преобразования. Экспериментально показано, что радиальный индекс ЛГ-моды вносит существенный вклад на величину ОУМ. Исследовано влияние астигматического преобразования на сЛГ-пучок.

Во второй главе представлен разработанный и реализованный метод прямого измерения орбитальных параметров Стокса структурированных вихревых пучков на основе анализа моментов интенсивности второго порядка. Обоснована аналогия с классическим поляризационным формализмом Стокса. Проведено теоретическое моделирование и экспериментальное подтверждение метода для сЛГ-пучка. Показано отображение его состояний на орбитальную сферу Пуанкаре.

В третьей главе исследованы орбитальные преобразования пучков в оптической системе первого порядка. Определены положения критических плоскостей на основе анализа параметров орбитального эллипса интенсивности. Показано, что пространственная траектория состояний пучка на орбитальной сфере Пуанкаре связана с его распространением между критическими плоскостями. Установлена функциональная связь астигматической фазы Гуи с орбитальными параметрами Стокса, позволяющая количественно описывать преобразования состояний пучка.

В заключении приведены основные результаты диссертации.

ГЛАВА 1. СТРУКТУРИРОВАННЫЙ ПУЧОК ЛАГЕРРА–ГАУССА

Хорошо известно, что радиальное квантовое число стандартной ЛГ-моды не вносит вклад в продольную компоненту ОУМ параксиального вихревого пучка. Как правило, ОУМ такого пучка однозначно определяется азимутальным индексом ℓ (или, иначе, его топологическим зарядом (ТЗ)) [43]. При нормированных комплексных амплитудах таких пучков выражение для ОУМ суперпозиции связано с их ТЗ [44] и принимает вид $\ell_z = \sum_{\ell} \ell |c_{\ell}|^2$, где c_{ℓ} – амплитуды вихревых мод и равен $\sum_{\ell} \ell |c_{\ell}|^2 = 1$. В то же время в случае сложных или несимметричных комбинаций оптических пучков ситуация становится менее тривиальной. Принято разделять ОУМ лазерного пучка [45] на внутреннюю и внешнюю составляющую орбитального момента. Внутренний ОУМ обусловлен геликоидальной структурой волнового фронта и связан с наличием фазовых особенностей, таких как оптические вихри. Внешний ОУМ, в свою очередь, формируется за счет смещения центра тяжести пучка, поперечных искажений его профиля или наличием астигматизма. Экспериментально обе компоненты могут быть измерены, например, методом моментов интенсивности [46]. Примечательно, что в некоторых случаях значения ОУМ могут быть получены даже без наличия вихрей, за счёт геометрической деформации безвихревых пучков [47]. Управляя пространственным распределением массивов внеосевых вихревых и гладких мод, возможно добиться как кратного увеличения результирующего ОУМ [48], так и его полной компенсации [49]. До недавнего времени влияние радиального числа на орбитальный момент считалось несущественным. Однако в ряде современных исследований [50, 51] установлено, что при деформации вихревых пучков – в частности, при комплексных сдвигах – возникает зависимость ОУМ от радиального числа, хотя оно не является его прямым управляющим параметром. Особенно отчетливо этот эффект проявляется в случае симметричных ЛГ пучков, подвергнутых внешнему воздействию (например, астигматизму), нарушающему симметрию структуры пучка.

Данная глава диссертации посвящена исследованию зависимости ТЗ и ОУМ от радиального числа в осесимметричных структурированных пучках ЛГ [1, 52], формируемых на основе суперпозиции ЭГ мод, каждая из которых испытывает двухпараметрическое гармоническое возбуждение амплитуды и начальной фазы.

1.1 Структурированный пучок Лагерра–Гаусса

Использование множественных степеней свободы в структурированных оптических пучках предполагает возможность кодирования полезной информации в каждую независимую моду пучка [1]. Однако при этом возникает существенная проблема: изменение амплитуд и фаз мод, которое приводит к нарушению общей структурной устойчивости пучка и может вызывать существенные флуктуации его ОУМ.

С этой точки зрения, возбуждение собственных мод пучка можно рассматривать как внутреннее возмущение, отличное по своей природе от внешних возмущений, обусловленных влиянием регулярных или случайных факторов окружающей среды. Отклик пучка на внутренние воздействия определяется как собственными свойствами вихревых мод, входящих в его состав, так и методами детектирования информации, внедрённой в модовую структуру.

Как будет показано, ОУМ всего структурированного пучка может значительно отличаться от суммы ОУМ отдельных мод, особенно в случае возбуждения безвихревых ЭГ-мод. Более того, в работе [53*] было показано, что радиальное число, характеризующее структуру пучка, оказывает заметное влияние не только на значение ТЗ отдельных мод, но и на величину общего ОУМ пучка.

1.1.1 Комплексная амплитуда сЛГ-пучка

ЛГ пучки являются одним из фундаментальных семейств решений параксиального уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координат и находят широкое применение в оптических системах, где важна тонкая структура светового поля. Они описываются двумя целыми числами: радиальным индексом $p \geq 0$, определяющим число темных колец пучка ЛГ, и азимутальным индексом

$\ell \in \mathbb{Z}$, характеризующим распределение фазы и связанным с ОУМ фотонов. Каждый фотон в пучке ЛГ-моды несёт ОУМ величиной $\ell\hbar$, обусловленный винтовой фазой $\exp(i\ell\varphi)$.

Комплексная амплитуда ЛГ-пучка в плоскости фокуса ($z=0$) имеет следующий вид:

$$LG_{p,\ell}(r,\varphi) = \left(\frac{r}{\omega_0}\right)^{|\ell|} L_p^{|\ell|}\left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right) \exp(i\ell\varphi), \quad (1)$$

где r и φ – полярные координаты в поперечной плоскости, ω_0 – перетяжка пучка в фокальной плоскости, $L_p^{|\ell|}$ – обобщённые многочлены Лагерра.

Другим важным классом решений параксиального уравнения являются пучки ЭГ, которые задаются в декартовой системе координат. Они описываются целыми неотрицательными числами m и n , определяющими порядок моды по координатам x и y соответственно. Комплексная амплитуда ЭГ-пучка записывается следующим образом:

$$HG_{m,n}(x,y) = H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega_0}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega_0}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega_0^2}\right), \quad (2)$$

где H_m и H_n – многочлены Эрмита.

Несмотря на различие в симметрии, между пучками ЛГ и ЭГ существует линейная связь. Поскольку оба семейства решений описывают одно и то же уравнение, пучки одного базиса можно представить как линейные комбинации мод другого базиса при условии совпадения порядков: $N = 2p + |\ell| = m + n$. В частности, мода $LG_{0,1}$ может быть выражена через моды $HG_{1,0}$ и $HG_{0,1}$ следующим образом:

$$LG_{0,1}(x,y) = HG_{1,0}(x,y) + iHG_{0,1}(x,y). \quad (3)$$

Это соотношение иллюстрирует возможность представления винтовой фазы ЛГ-пучка как суперпозиции ЭГ-мод с фазовыми градиентами вдоль взаимно перпендикулярных осей. Более того, такая взаимосвязь позволяет использовать базис ЭГ-мод как для формирования и фильтрации мод ЭГ в составе ЛГ-пучков и изменять свойства структурированного пучка в целом [54].

СЛГ-пучок может быть представлен в базисе ЭГ-мод в виде:

$$sLG_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+3\ell/2} n!} \sum_{k=0}^{2n+\ell} (2i)^k P_k^{(n+\ell-k, n-k)}(0) \varepsilon_k(\varepsilon, \theta) HG_{2n+\ell-k}(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где $n, \pm\ell$ – радиальный и азимутальный индекс ЛГ-мод, $\mathbf{r} = (x, y)$, $P_k^{(n+\ell-k, n-k)}(0)$ – многочлен Якоби, $HG_{2n+\ell-k}(\mathbf{r})$ – комплексная амплитуда ЭГ-моды с масштабным аргументом, $\varepsilon_k(\varepsilon, \theta)$ – возмущающие коэффициенты. Как мы увидим далее, в случае, когда $\varepsilon = 0$ и $\theta = 0$ получаем $\varepsilon_k(0, 0) = 1$ и сЛГ-пучок (4) переходит в стандартную ЛГ-моду [54, 55].

Для описания амплитудно-фазовой модуляции задается следующая форма возмущения:

$$\varepsilon_k(\varepsilon, \theta) = 1 + \varepsilon e^{ik\theta}, \quad (5)$$

где к каждой ЭГ-моде будет добавлено амплитудное ε и фазовое θ возмущение.

Выражение (4) для сЛГ-пучка с учетом возмущения (5) может быть представлено в виде суммы ЛГ-моды и гибридной ЭЛГ-моды, структурой которой управляют амплитудный ε и фазовый θ параметры [56]:

$$sLG_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta) = LG_{n,\ell}(\mathbf{r}) + \varepsilon \frac{e^{-3\pi i \ell / 4}}{2^{n+\ell} n!} e^{i(2n+\ell)\theta/2} HLG_{n,n+\ell} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{y-x}{\sqrt{2}} \middle| \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad (6)$$

$$HLG_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha) = (-1)^{\min} 2^{\max} (\min)! LG_{\min, n-m}(\mathbf{r}), \quad (7)$$

где $HLG_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha)$ – ЭЛГ-мода с управляющим параметром α , $\min = \min(n, m)$, $\max = \max(n, m)$ [54].

Из анализа формулы (6) позволяет выделить два устойчивых семейства:

1. При $\varepsilon \leq 1$, формируется пучок, включающий ЛГ- и ЭЛГ-моды;
2. При $\varepsilon \gg 1$, сЛГ-пучок переходит в стандартную ЭЛГ-моду с управляющим параметром θ .

На рисунке 1 приведены характерные распределения интенсивности и фазы пучков, относящихся к указанным семействам.

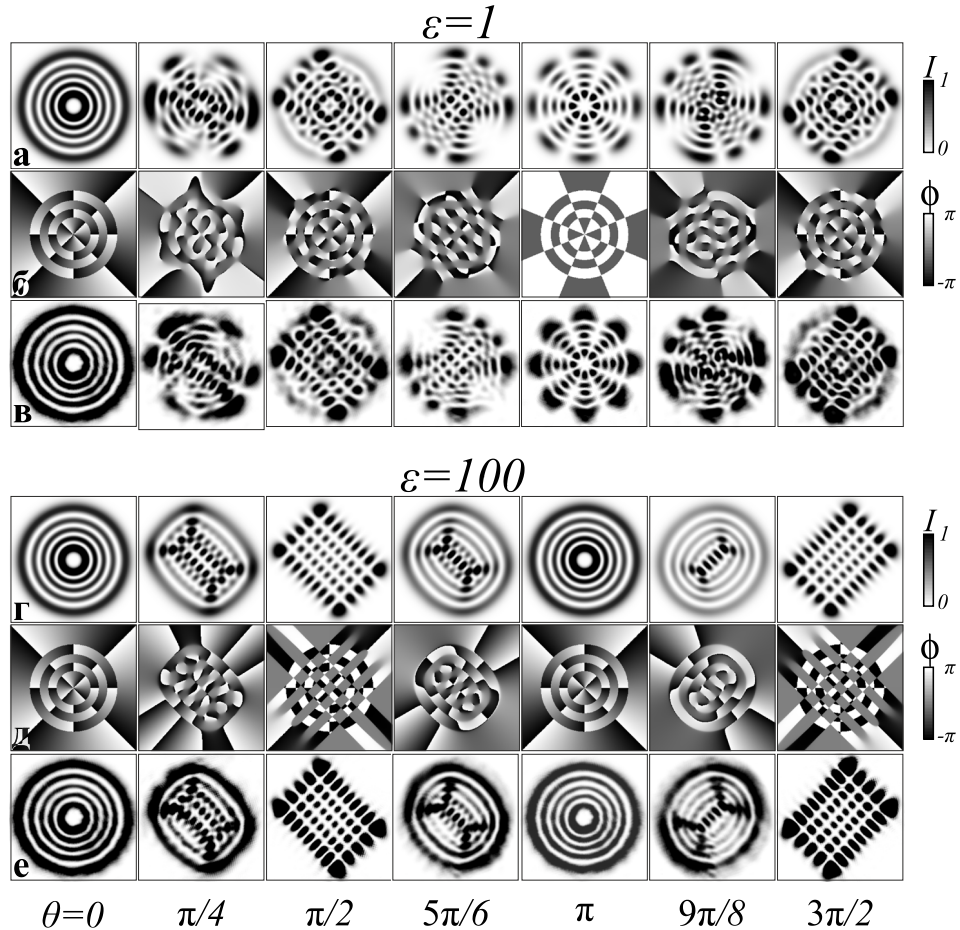


Рисунок 1 – Теоретические (а, г) и экспериментальные (в, е) распределения интенсивности и фазы (б, д) для двух значений амплитудного параметра при $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 100$ и вариации фазового параметра $\theta \in (0, 3\pi/2)$ сЛГ-пучка

Особый интерес вызывают три характерные случая, соответствующие значениям фазового параметра θ : $\pi/2$, π , $3\pi/2$ и двух значениях амплитудного параметра $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 100$:

– при $\varepsilon = 1$ и $\theta = \pi/2$ формируется суперпозиция ЛГ- и ЭГ-мод, поскольку выполняется равенство $H LG_{n,n+\ell}(\mathbf{r}, \pi/2) = i^n H G_{n+\ell,n}(\mathbf{r})$ [55]. В этом случае обе моды имеют одинаковые веса;

– при $\varepsilon = 1$ и $\theta = 3\pi/2$ структура пучка поворачивается на угол $\pi/2$, демонстрируя фазовую симметрию относительно предыдущего случая;

– при $\varepsilon = 100$ наблюдаются почти чистые ЭГ-моды, ориентированные под углами $\pi/4$ и $3\pi/4$, в зависимости от значения фазового параметра;

– при $\varepsilon = 1$ и $\theta = \pi$ возникает вырожденное состояние, соответствующее суперпозиции ЛГ-мод с противоположными знаками ТЗ;

– при $\varepsilon = 100$ и $\theta = \pi$ пучок переходит в состояние стандартной ЛГ-моды, но с противоположным знаком ТЗ.

Важно отметить, что каждый сЛГ-пучок сохраняет свою структурную устойчивость при распространении и произвольных значениях параметров возмущения. Это связано с тем, что все ЭГ-моды, входящие в разложение (4), обладают одинаковой фазой Γ_{ui} , задаваемой выражением:

$$\Gamma = (2n + \ell + 1) \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{z_0} \right), \quad (8)$$

где z_0 – длина Рэлея. Благодаря этому фазовому соответствию сохраняется согласованность модовой структуры при распространении пучка.

1.1.2 Осцилляции ОУМ сЛГ-пучка

Для расчета ОУМ пучка необходимо разложить комплексную амплитуду сЛГ-пучка (6) по базису мод ЛГ:

$$sLG_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta) = \sum_{k=0}^{2n+\ell} c_k LG_{\min, 2n+\ell-2k}(\mathbf{r}), \quad (9)$$

$$c_k = \delta_{n,k} + (-1)^{\min} \varepsilon \frac{i^{n+k} e^{i(2n+\ell)\theta/2}}{2^{n+\ell} n!} \times \\ \times 2^{\max} \min! \sin^{n-k} \left(\frac{1}{2} \theta \right) \cos^{n+\ell-k} \left(\frac{1}{2} \theta \right) P_k^{(n-k, n+\ell-k)}(\cos \theta), \quad (10)$$

где $\min = \min(2n + \ell - k, k)$, $\max = \max(2n + \ell - k, k)$ и $\delta_{n,k}$ – символ Кронекера. Радиальное $\nu = \min$ и азимутальное $\mu = 2n + \ell - k$ числа связаны между собой полным числом мод $2\nu + \mu + 1 = 2n + \ell + 1$ в сЛГ-пучке.

ОУМ структурированного пучка удобно выразить в следующем интегральном виде:

$$L_z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) \left(x \frac{\partial E(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial E(x, y)}{\partial x} \right) dx dy. \quad (11)$$

Удельный ОУМ найдем, вычислив поток энергии в направлении распространения пучка по формуле:

$$P_z = \int_{\mathbb{R}^2} E(\mathbf{r}) \bar{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (12)$$

так что удельный ОУМ равен [57*]:

$$\ell_z = \frac{L_z}{P_z}. \quad (13)$$

Используя выражения для L_z и P_z , приведенные в работе [56], и предварительно нормировав ЛГ-моды, ОУМ можно представить в следующем виде:

$$\ell_z = \sum_{k=0}^{2n+\ell} (2n+\ell-2k) |\bar{c}_k|^2 / \sum_{k=0}^{2n+\ell} |\bar{c}_k|^2, \quad (14)$$

где $\bar{c}_k = c_k \|LG_{\min, 2n+\ell-2k}(\mathbf{r})\|$, $\|LG_{n,\pm\ell}\|^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(n+\ell)!}{2^\ell n!}$ – нормировочный коэффициент

ЛГ-моды, ℓ – ГЗ ЛГ-моды.

Для сЛГ-пучка полученное выражение сводится к более простому виду:

$$\ell_z = \ell \cdot \frac{1 + 2\varepsilon \cos\left(\frac{1}{2}(2n+\ell)\theta\right) \cos^\ell\left(\frac{1}{2}\theta\right) P_n^{(0,\ell)}(\cos\theta) + \varepsilon^2 \cos\theta}{1 + 2\varepsilon \cos\left(\frac{1}{2}(2n+\ell)\theta\right) \cos^\ell\left(\frac{1}{2}\theta\right) P_n^{(0,\ell)}(\cos\theta) + \varepsilon^2}. \quad (15)$$

Кроме того, в случае нулевого радиального числа ($n=0$) выражение для ОУМ принимает следующий вид:

$$\ell_z = \ell \frac{1 + 2\varepsilon \cos\left(\frac{1}{2}\ell\theta\right) \cos^\ell\left(\frac{1}{2}\theta\right) + \varepsilon^2 \cos\theta}{1 + 2\varepsilon \cos\left(\frac{1}{2}\ell\theta\right) \cos^\ell\left(\frac{1}{2}\theta\right) + \varepsilon^2}. \quad (16)$$

На рисунке 2 представлены зависимости ОУМ сЛГ-пучка от фазового параметра, рассчитанные по формуле (16) для двух характерных случаев: $\varepsilon=1$ и $\varepsilon \gg 1$ ($\varepsilon=100$). В случае при $\varepsilon=1$ ОУМ обращается в ноль при $\theta=\pi$. Однако стоит лишь амплитудному параметру превысить единичное значение ($\varepsilon>1$), как эта особенность расщепляется на две точки, где ОУМ обращается в ноль в окрестности

$\theta = \pi$. По мере увеличения амплитудного параметра точки нулей стремятся к значениям $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$, в то время как само значение ОУМ стремится к максимальному ОУМ с противоположным знаком ТЗ [56].

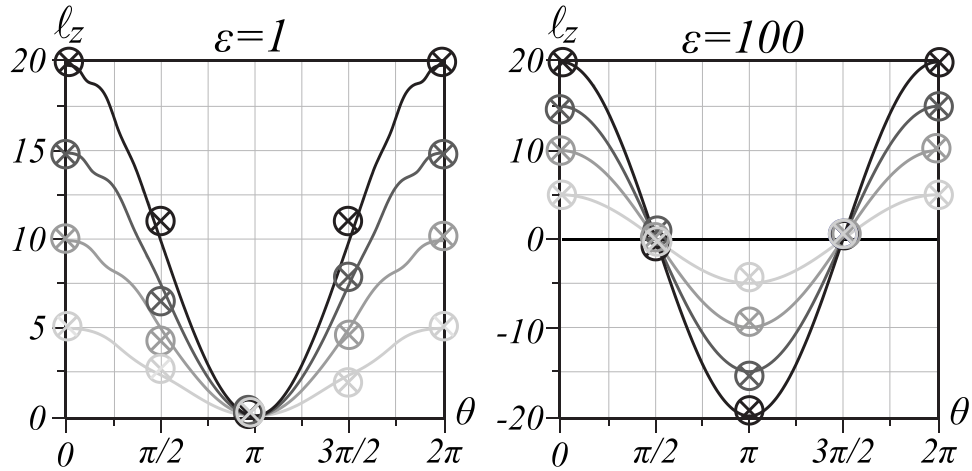


Рисунок 2 – ОУМ $l_z(\theta)$ как функция фазового параметра θ в двух семействах СЛГ-пучков $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 100$ при нулевом радиальном числе $n = 0$ и азимутальных числах $l = 5, 10, 15, 20$. Сплошные кривые – теория, круги – эксперимент

В случаях с ненулевым радиальным числом $n \neq 0$ в динамике ОУМ наблюдаются выраженные осцилляции, примеры которых приведены на рисунке 3. Частота этих осцилляций возрастает по мере увеличения разности между радиальным n и азимутальным l числом: чем больше это расхождение, тем более выраженной и частой становится колебательная структура.

Для анализа положений нулей ОУМ удобно воспользоваться выражением (15), приравнивая его числитель к нулю:

$$1 + 2\varepsilon \cos\left(\frac{1}{2}(2n + \ell)\theta\right) \cos^\ell\left(\frac{1}{2}\theta\right) P_n^{(0,\ell)}(\cos\theta) + \varepsilon^2 \cos\theta = 0. \quad (17)$$

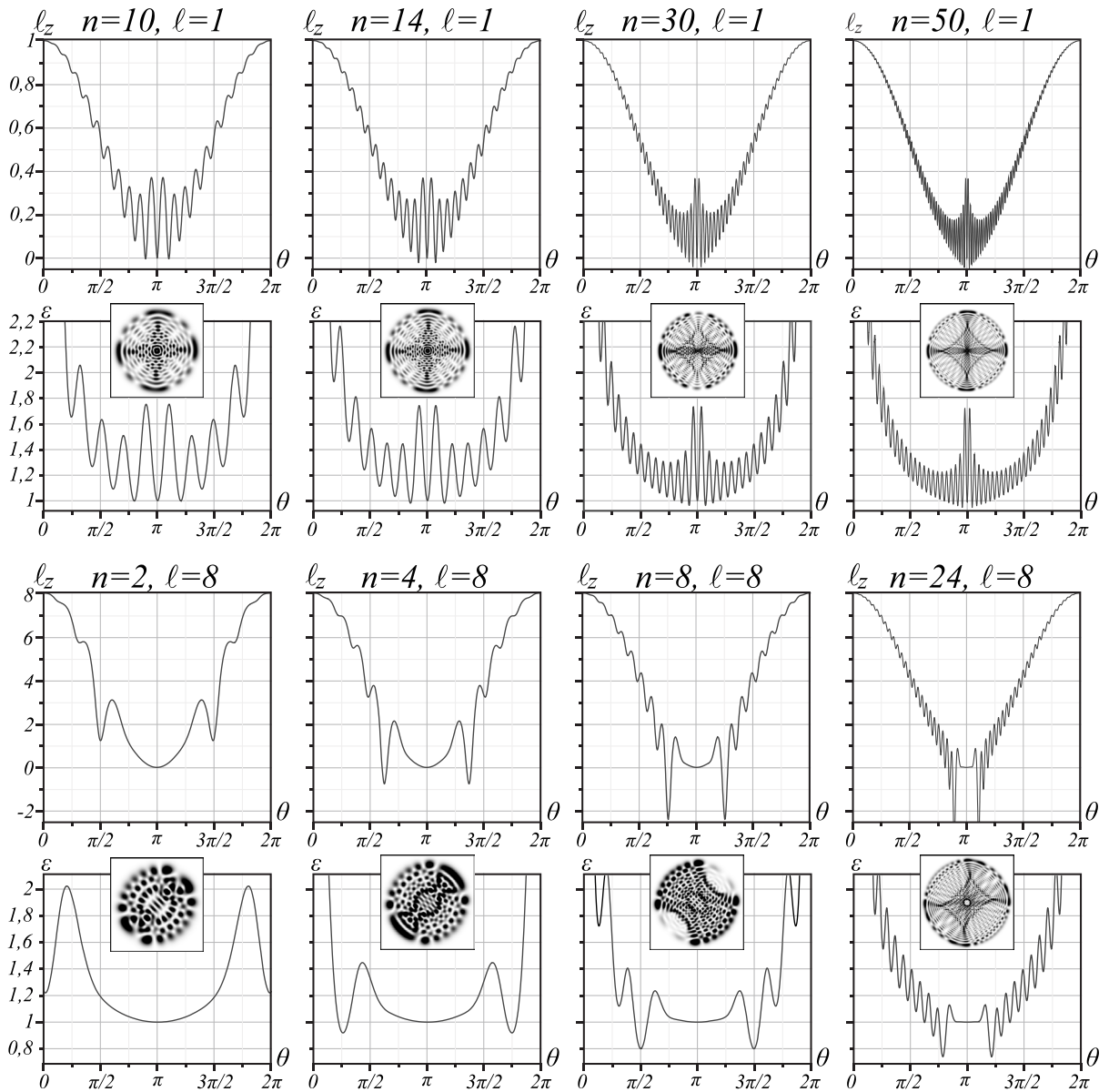


Рисунок 3 – Зависимость ОУМ $l_z(\theta)$ от фазового параметра θ (первая и третья строка) и положение нулей ОУМ на плоскости параметров (ϵ, θ) (вторая и четвертая строка) для двух случаев исходного ТЗ (1 и 2 ряд) $l=1$ и (3 и 4 ряд) $l=8$. На вставках приведены картины интенсивности для $\theta = 3\pi/4$

1.1.3 Экспериментальная реализация сЛГ-пучков

Основной задачей данного пункта является описание экспериментального формирования сЛГ-пучка с использованием пространственного модулятора света (Spatial Light Modulator – SLM) согласно выражению (6), а также исследование осцилляций ОУМ при варьировании амплитудного и фазового управляющих параметров (15).

Для реализации поставленной задачи была собрана экспериментальная установка, представленная на рисунке 4.

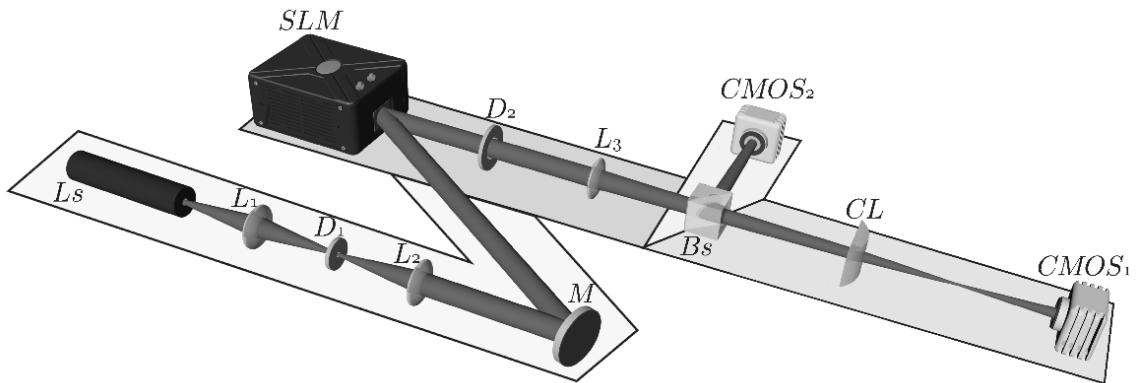


Рисунок 4 – Схема экспериментальной установки: L_s – лазер, L_{1-3} – сферические линзы, $D_{1,2}$ – диафрагмы, M – зеркало, SLM – пространственный модулятор света, CL – цилиндрическая линза, B_s – делительная призма, $CMOS_{1,2}$ – детекторы

Лазерный пучок, излучаемый источником света L_s – *He-Ne* лазером Thorlabs HNL 020L с длиной волны $\lambda = 633$ нм, после прохождения через пространственный фильтр, состоящий из сферических линз L_1 и L_2 с фокусными расстояниями $f_{L_1} = 5$ см и $f_{L_2} = 20$ см соответственно, а также диафрагмы D_1 , размещённой между ними, формировал коллимированный Гауссов пучок. С помощью зеркала M пучок направлялся на дисплей пространственного модулятора света (Spatial light modulator – SLM). На SLM загружалась голографическая решётка, соответствующая сЛГ-пучку (6), с фиксированными значениями радиального n и азимутального ℓ чисел, а также управляющими амплитудным ε и фазовым θ параметрами. При этом использование пространственного модулятора света позволяет независимо задавать и контролировать указанные параметры пучка, обеспечивая формирование требуемой модовой структуры. В качестве SLM использовался отражающий модулятор Thorlabs EXULUS-4K1/M с разрешением 3840×2160 пикселей (формат 4K UHD) и шагом пикселя 3,74 мкм. При длине волны $\lambda = 633$ нм устройство обеспечивало полный диапазон фазовой модуляции от 0 до 2π , что является критически важным условием при формировании

структурированных пучков. Управление модулятором осуществлялись с помощью персонального компьютера и специализированного программного обеспечения. Загружаемая голографическая решётка на жидкокристаллический дисплей модулятора имела ширину и высоту составляющая 1,1–1,2 от диаметра падающего пучка $d = 2,2$ мм, что позволяло эффективно модулировать пучок. После отражения от поверхности *SLM* пучок дифрагировал, формируя дифракционный спектр, состоящий из сЛГ-мод. Для выделения первого порядка дифракции ($n = +1$) использовалась диафрагма D_2 , после которой пучок направлялся на сферическую линзу L_3 с фокусным расстоянием $f_{L_3} = 75$ см. В перетяжке данной линзы при выполнении условия длины Рэлея $z_0 = 2f_{CL} = 100$ см устанавливалась цилиндрическая линза CL с фокусным расстоянием $f_{CL} = 50$ см. И в плоскости двойного фокусного расстояния цилиндрической линзы, где выполняется астигматическое преобразование модулированного пучка, устанавливалась $CMOS_1$ –камера (Місhrome 20) для замера распределения интенсивности астигматического сЛГ (асЛГ) пучка. Для параллельной регистрации распределения интенсивности сЛГ пучка после линзы L_3 устанавливалась делительная призма BS , от которой отраженный пучок фокусировался на камеру $CMOS_2$, размещенную в фокальной плоскости, как показано на рисунке 4.

На рисунке 5 представлена типичная голографическая решетка (а), отображенная на *SLM* модуляторе и картины интенсивности на $CMOS_1$ (б, в) и $CMOS_2$ (г, д) детекторе.

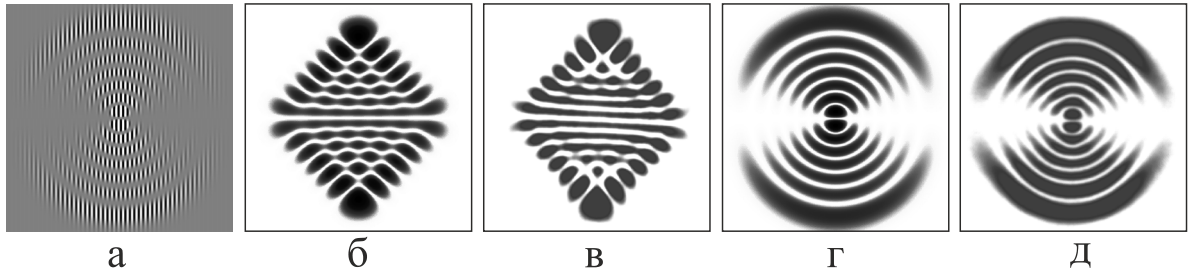


Рисунок 5 – (а) Дифракционная решетка для генерации сЛГ-пучка с параметрами $n = 6$, $\ell = 1$, $\varepsilon = 1$, $\theta = \pi$; (б, в) картины интенсивности в двойном фокусе цилиндрической линзы, зарегистрированные камерой $CMOS_1$; (г, д) восстановленные картины интенсивности после SLM , зарегистрированные на камеру $CMOS_2$ ((б, г) – теория и (в, д) – эксперимент)

Для экспериментального определения ОУМ сЛГ-пучков в данной работе использован метод, основанный на анализе моментов второго порядка распределения интенсивности, предложенный и развитый в работах А.В. Воляра и соавторов [38, 41, 58]. Методика позволяет быстро и достоверно определить интегральное значение ОУМ без интерферометрических измерений и сложных процедур восстановления фазы.

В основе используемого метода лежит прохождение структурированного пучка через цилиндрическую линзу, осуществляющую астигматическое преобразование. При этом часть фазовой информации пучка, содержащейся в пучке, отображается в виде характерных изменений распределения интенсивности в области двойного фокусного расстояния цилиндрической линзы. Такая трансформация позволяет зафиксировать направленную пространственную структуру, отражающую наличие и знак ОУМ.

В эксперименте сформированный сЛГ-пучок направлялся на цилиндрическую линзу с фокусным расстоянием f_{CL} , после чего регистрировалось распределение интенсивности $CMOS_1$ -камерой в плоскости $z = 2f_{CL}$. В данной области наиболее отчётливо проявляются модовые признаки, обусловленные структурой возбуждённой моды или их суперпозицией [40, 41].

Для количественного анализа используется матрица моментов второго порядка интенсивности:

$$W_{xx} = \frac{\iint x^2 I(x, y) dx dy}{\iint I(x, y) dx dy}, \quad W_{yy} = \frac{\iint y^2 I(x, y) dx dy}{\iint I(x, y) dx dy}, \quad W_{xy} = \frac{\iint xy I(x, y) dx dy}{\iint I(x, y) dx dy}, \quad (18)$$

где W_{xx} , W_{yy} , W_{xy} – нормированные моменты интенсивности второго порядка, x, y – координаты, соответствующие осям x и y , $I(x, y)$ – распределение интенсивности пучка в поперечном сечении.

Наибольшую информативность компонентов матрицы моментов интенсивности второго порядка является смешанный момент W_{xy} , отражающий наклон линий равной интенсивности относительно координатных осей. При наличии ОУМ пучок приобретает характерную асимметрию, что приводит к $W_{xy} \neq 0$. При варьировании фазового параметра θ , определяющего внутреннюю структуру мод пучка, величина W_{xy} демонстрирует осцилляционное поведение, хорошо совпадающее с теоретическим профилем изменения ОУМ, как показано в работе [56]. Благодаря применению усовершенствованного пространственного модулятора света (Thorlabs EXULUS-4K1/M) и высокочувствительных фотодетекторов типа Michrome 20 удалось снизить относительную погрешность до 2,7 % [38].

На рисунке 6а представлена экспериментальная зависимость удельного ОУМ $\ell_z(\theta)$ от фазового параметра θ для сЛГ-пучка с параметрами $n=6$, $\ell=1$ и амплитудным параметром $\varepsilon=1$. Зависимость носит осцилляционный характер: в пределах полупериода $\theta \in (0, \pi)$ наблюдаются шесть выраженных экстремумов, число которых соответствует значению радиального индекса $n=6$. Это подтверждает связь структуры пучка с его модовым составом. При $\theta=0$ пучок представляет собой невозмущённую ЛГ-моду с азимутальным числом $\ell=1$, что соответствует максимальному значению ОУМ $\ell_z = \ell\hbar$ на фотон. По мере роста θ , значение ОУМ уменьшается, достигая своего минимума в области $\ell_z(\theta \approx 2,62 \text{ рад}) \approx 0,028$.

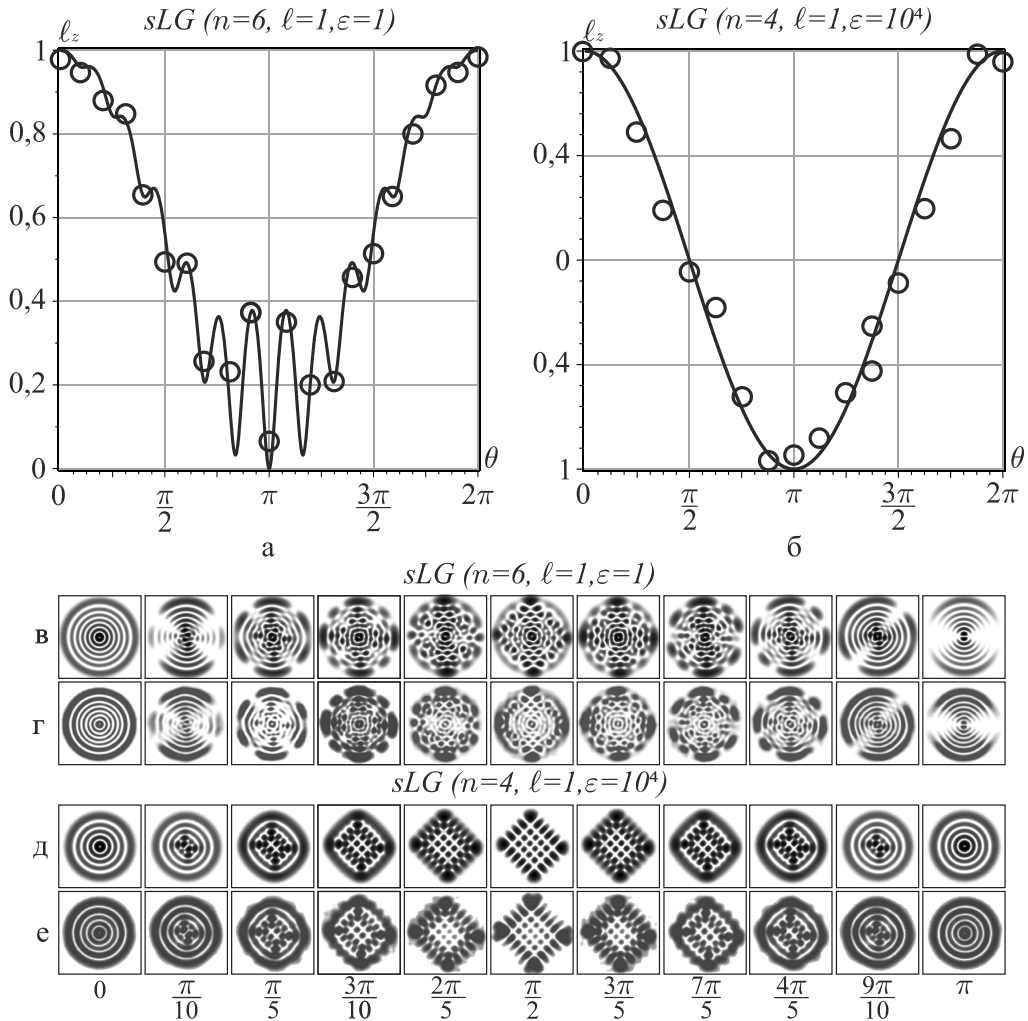


Рисунок 6 – (а, б) Осцилляции ОУМ $l_z(\theta)$ как функция фазового параметра θ построенные согласно выражению (13) и распределение интенсивности сЛГ-пучка: (в, д) теория, (г, е) эксперимент, с параметрами: (а, в, г) $n = 6$, $\ell = 1$, $\varepsilon = 1$ и (б, д, е) $n = 4$, $\ell = 1$, $\varepsilon = 10^4$

Следует отметить, что глубина осцилляций определяется соотношением между ℓ и n : чем больше разность между ними, тем более выражены колебания. При $\theta = \pi$ происходит взаимная компенсация вкладов мод с противоположным топологическим зарядом, и значение удельного ОУМ стремится к нулю. В этот момент центральный оптический вихрь исчезает, а в поле интенсивности формируется симметричный узор из пар вихрей противоположного знака – топологических диполей, число которых соответствует значению n . Этот переход наглядно иллюстрируют теоретические и экспериментальные распределения интенсивности, представленные на рисунке бв, г.

Восстановление модовой структуры пучка осуществлялось путём анализа полученных распределений интенсивности, что позволило определить амплитуды c_k составляющих ЛГ-мод. Используя выражение для расчёта удельного орбитального момента $\ell_z = \sum_{\ell} \ell |c_k|$ [56], было получено хорошее согласие между экспериментальными данными и теоретической кривой $\ell_z(\theta)$, построенной по выражению (15) и изображённой сплошной линией на графике рисунка ба.

Во втором случае, представленном на рисунке бб, рассмотрен пучок с параметрами $n = 4$, $\ell = 1$ и при большом значении амплитудного параметра $\varepsilon = 10^4$. В этом режиме наблюдается сглаживание осцилляций: амплитуда колебаний $\ell_z(\theta)$ существенно уменьшается, хотя максимум по-прежнему близок к значению ТЗ $\ell = 1$. Минимум, в свою очередь, достигает значения, близкого по модулю, но противоположного по знаку ТЗ, то есть $\ell = -1$.

Особый интерес представляет расщепление единственной нулевой точки $\ell_z = 0$, наблюдавшейся при $\theta = \pi$ в случае $\varepsilon = 1$. При большом значении $\varepsilon \gg 1$ нулевое значение ОУМ наблюдается уже в двух различных точках, соответствующих $\theta \approx \pi/2$ и $\theta \approx 3\pi/2$. Этот эффект согласуется с теоретическими предсказаниями, согласно которым при данных значениях фазового параметра происходит смена знака суммарного ТЗ пучка, а вклады мод с положительными и отрицательными вихревыми числами становятся равными. В эксперименте это соответствует формированию двух фазовых состояний с нулевым ОУМ. На рисунках бд, е приведены теоретические и экспериментальные распределения интенсивности, соответствующие максимуму, нулю и минимуму ОУМ. Картина интенсивности для $\theta = \pi$ демонстрирует формирование исходной ЛГ-моды с топологическими диполями, аналогично наблюдаемому при $\theta = 0$.

Таким образом, проведённые эксперименты наглядно демонстрируют, что характер осцилляций удельного ОУМ сЛГ-пучков определяется как радиальным, так и азимутальным числами исходной моды, так и величинами амплитудного и фазового параметров, определяющих структуру пучка.

1.2 Астигматическое преобразование сЛГ-пучка (простой астигматизм)

Одним из наиболее удобных и наглядных инструментов для анализа и проектирования оптических систем с когерентными и частично когерентными пучками является унитарный формализм ABCD-матриц, разработанный ещё в 1970-х годах [59–60]. Благодаря своей компактной математической форме и ясной физической интерпретации, этот подход широко используется в инженерной оптике при моделировании сложных устройств, в том числе систем, работающих со структурированным светом [1, 52, 61–64]. В основе метода лежит матрица вида $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где $\det M = AD - BC = 1$, описывающая отдельный элемент оптической системы. Последовательность таких элементов представляется как произведение соответствующих матриц.

ABCD-формализм традиционно применяется для описания гауссовых пучков, в частности, для расчета комплексного параметра $q(z)$: $\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{2}{k\omega^2}$, где $R(z)$ – радиус кривизны волнового фронта, $\omega(z)$ радиус пучка, k – волновое число. Однако при работе с пучками ЭГ, ЛГ или пучками высших порядков необходимо использовать интегральный подход, в частности, интеграл Коллинза [65]:

$$\Psi(\mathbf{r}, z) = \frac{k}{2\pi i B(z)} \int_{\mathbb{R}^2} \Psi(\boldsymbol{\rho}) \exp \left\{ -i \frac{k}{2B(z)} \left[A(z)|\boldsymbol{\rho}|^2 - 2(\boldsymbol{\rho}\mathbf{r}) + D(z)|\mathbf{r}|^2 \right] \right\} d^2\boldsymbol{\rho}, \quad (19)$$

где $\Psi(\boldsymbol{\rho})$ – комплексная амплитуда на входе, $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$ – элементы ABCD-матрицы, а $\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta)$, $\mathbf{r} = (x, y)$.

Применение данного подхода к единичным ЭГ- и ЛГ-пучкам было развито в работах Сейгмана [60] и Беленжера [66], а позже – Таше [67]. В более сложных оптических системах первого рода, содержащих каскад линз, усилительные элементы и ортосимплектические компоненты, анализ пучков ЭГ и гибридных ЭЛГ-мод осуществлялся с использованием формализма 4×4 симплектических

матриц, как это показано в работах Алиевой и Бастианса [68, 69]. В случае преобразования ЭГ-пучков в оптических вихревых конвертерах, содержащих астигматические элементы, стандартные методы ABCD-анализа оказываются недостаточными. В ряде исследований [70, 71] был применён нестандартный (условно искусственный) подход, основанный на модификации классической схемы преобразований. Альтернативно, Хонина и соавторы [72] использовали дифракционные методы численного моделирования, позволяющие описывать широкий класс астигматических модовых конвертеров.

Появление в системе астигматических элементов, таких как цилиндрические линзы, принципиально усложняет анализ. В этом случае пучок должен быть представлен в базисе собственных ЭГ-мод, оси которых строго согласованы с геометрией оптического элемента с соответствующим масштабированием координат [31, 36, 54, 73, 74].

Применение ABCD-матричного формализма к описанию структурированных световых пучков сопряжено с рядом существенных трудностей. Такие пучки активно используются в современных научных и прикладных исследованиях – включая биофотонику, микроманипуляцию и квантовые коммуникации, где требуются удобные математические подходы для проектирования оптических систем [3]. Прежде всего, это связано с тем, что в простейшем случае требуется представить ЛГ-моду в терминах ЭГ-мод в собственной системе координат цилиндрической линзы. Это представляется в виде [36, 73]:

$$LG_{n,\pm\ell}(\mathbf{r}) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+3\ell/2} n!} \sum_{j=0}^{2n+\ell} (\pm 2i)^j P_j^{(n+\ell-j, n-j)}(0) HG_{2n+\ell-j, j}(\mathbf{r}), \quad (20)$$

где $P_j^{(n,m)}(\cdot)$ – многочлен Якоби, n и ℓ – радиальное и азимутальное число. Если оси ЭГ-мод повернуты на угол $\pi/4$ относительно оси астигматизма линзы, то следует использовать разложение в виде:

$$HG_{n, n+\ell} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+3\ell/2} n!} \sum_{j=0}^{2n+\ell} 2^j P_j^{(n+\ell-j, n-j)}(0) HG_{2n+\ell-j, j}(\mathbf{r}), \quad (21)$$

а ABCD преобразование осуществляется для каждого направления x - и y -осей астигматического элемента.

В более сложном случае произвольной ориентации осей пучка относительно осей линз необходимо использовать громоздкие базисные преобразования, полученные Алиевой и Бастиансом [68, 69, 75]. Разработка оптической системы с единичным астигматическим преобразованием структурированных пучков требует применения этих базисных преобразований к каждой моде пучка, и в то же время необходимо внимательно следить за амплитудами и фазами мод, возникающих в результате преобразований. Когда речь идет об оптической системе, содержащей последовательность астигматических элементов с различной ориентацией осей, для каждого элемента следует использовать базисные преобразования. В результате основной подход к астигматическим преобразованиям структурированных пучков был сосредоточен на анализе траекторий на 2D-сфере с использованием унитарности астигматических преобразований [36, 76, 77*]. Но здесь исследователь сталкивается с длинной последовательностью громоздких нестандартных вычислений, что не оптимально для инженерного моделирования. Таким образом, для практической реализации устройств, преобразующих неустойчивый астигматический структурированный пучок в структурно устойчивый без потери его уникальных свойств, требуется разработка базисных методов ABCD-матриц.

В данном подразделе мы теоретически и экспериментально рассмотрим ABCD-преобразования в системе с одним астигматическим элементом, представляющей наибольший интерес для прикладных оптических задач. Такая система содержит цилиндрическую линзу, при прохождении через которую структурированные пучки формируют выраженные всплески ОУМ. Подобный подход был реализован и подробно проанализирован в наших работах [57*, 77* – 79*], где было показано, что даже простая астигматическая конфигурация способна существенно трансформировать орбитальную структуру пучка.

1.2.1 Правило ABCD для астигматического сЛГ-пучка

Рассмотрим распространение структурированного пучка $sLG_{n,\ell}$ с радиальным числом n , азимутальным числом ℓ и комплексным параметром $q(z) = z - iz_0$, где $z_0 = k\omega_0^2/2$ – длина Рэлея, через цилиндрическую линзу с фокусным расстоянием f_{CL} , расположенную в плоскости $z = 0$, как показано на рисунке 7а. При этом начальное значение параметра Гаусса принимается равным $q_0 = -iz_0$, а радиус перетяжки пучка составляет ω_0 .

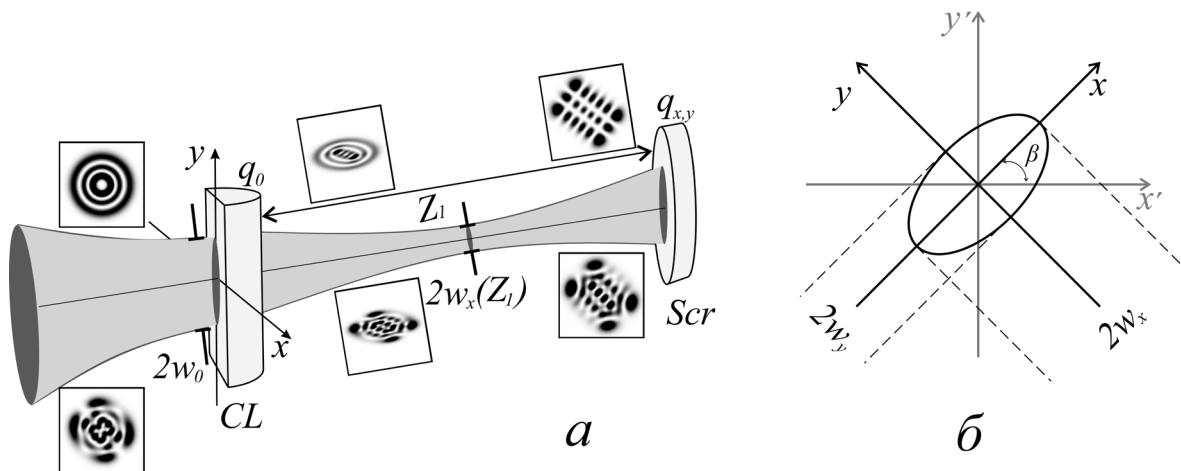


Рисунок 7 – (а) Эскиз астигматической системы с цилиндрической линзой (CL).

(б) Взаимная ориентация поперечного сечения астигматического пучка в координатах цилиндрической линзы (x, y) и лабораторных координатах (x', y')

Поскольку рассматриваемая оптическая система содержит несколько элементов, для её описания целесообразно использовать матричный метод, при котором общее преобразование пучка представляется в виде последовательного произведения ABCD-матриц, соответствующих отдельным оптическим компонентам [60]. Однако важно отметить, что детальное описание преобразования сЛГ-пучков в присутствии астигматических элементов ранее не проводилось. В связи с этим в дальнейшем основное внимание будет сосредоточено на анализе прохождения пучка через цилиндрическую линзу. В частности, будут определены его новые комплексные параметры $q_x(z)$ и $q_y(z)$, которые впоследствии будут использованы для моделирования распространения пучка в остальной части оптической системы.

Отметим, что цилиндрическая линза вносит различный масштаб по своим собственным координатам (x, y) , что связано с особенностями её геометрии и фокусирующего действия вдоль одной из осей (см. рисунок 7б). Для упрощения анализа будем предполагать, что оси линзы совпадают с осями лабораторной системы координат. Такой случай соответствует простому астигматизму [34, 54, 73]. Поскольку моды ЭГ являются собственными функциями астигматического преобразования, представим сЛГ-пучок через суперпозицию стандартных ЭГ-мод в соответствии с выражением (20), учитывая при этом различный масштаб по осям x и y , что соответствует формализму, изложенному, в частности, в формуле (3.8) монографии [54]:

$$sLG_{n,\pm l}(\mathbf{r}, z_1) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+3\ell/2} n!} \sum_{j=0}^{2n+\ell} (\pm 2i)^j Q_j (1 + \varepsilon e^{ij\theta}) P_j^{(n+\ell-j, n-j)}(0) \times \\ \times H_{2n+\ell-j} \left(\frac{\sqrt{2}x}{w_x(z_1)} \right) H_j \left(\frac{\sqrt{2}y}{w_y(z_1)} \right) \exp \left[\frac{ik}{2} \left(\frac{x^2}{q_x(z_1)} + \frac{y^2}{q_y(z_1)} \right) \right], \quad (22)$$

где H_n – многочлены Эрмита, Q_j – амплитуды ЭГ-мод, определяемые через ABCD-матриц, выражающиеся через исходные комплексные параметры пучка вдоль x - и y -направления $q_{0,x}$, $q_{0,y}$ и равна [60]:

$$Q_x = \left(\sqrt{\frac{q_{0,x}}{A_x q_{0,x} + B_x}} \right)^n, \quad Q_y = \left(\sqrt{\frac{q_{0,y}}{A_y q_{0,y} + B_y}} \right)^n, \quad (23)$$

где $q_{0,j} = -iz_0$.

В силу астигматичности необходимо учитывать различные ABCD-матрицы в направлениях x и y , что приводит к определению комплексных параметров $q_x(z_1)$ и $q_y(z_1)$:

$$q_x(z_1) = \frac{A_x q_{0,x} + B_x}{C_x q_{0,x} + D_x}, \quad q_y(z_1) = \frac{A_y q_{0,y} + B_y}{C_y q_{0,y} + D_y}. \quad (24)$$

Поскольку цилиндрическая линза не оказывает влияния вдоль оси y , то $q_y(z_1)$:

$$q_y(z_1) = z_1 - iz_0. \quad (25)$$

Для направления x преобразование определяется матрицей:

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ -\frac{1}{f_x} & 1 - \frac{z_1}{f_x} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

откуда $q_x(z_1)$ параметр получаем в виде:

$$q_x(z_1) = z_0 \frac{[Z_1(\kappa_x^2 + 1) - \kappa_x] - i}{\kappa_x^2 + 1}, \quad (27)$$

где $Z_1 = \frac{z_1}{z_0}$, $\kappa_x = \frac{z_0}{f_{CL}}$.

Полученные результаты позволяют найти радиусы пучков для x - и y -

направлений следующим образом $\operatorname{Re}\left(\frac{ik}{2q_x(z_1)}\right) = -\frac{1}{w_x^2(z_1)} \Rightarrow$

$$w_x^2(Z_1) = w_0^2 \left[(1 - Z_1 \kappa_x)^2 + Z_1^2 \right], \quad (28)$$

$$w_y^2(Z_1) = w_0^2 (1 + Z_1^2), \quad (29)$$

в то время как фазы Γ уи мод равны [60]:

$$\Gamma_x(Z_1) = \arg \sqrt{\frac{q_x}{Aq_x + B}} = \frac{1}{2} \arg(1 - \kappa_x Z_1 + i Z_1), \quad (30)$$

$$\Gamma_y(Z_1) = \frac{1}{2} \arg(1 + i Z_1). \quad (31)$$

Таким образом, после подстановки (25), (27)–(31) в выражение (22) и последующих преобразований получено выражение для комплексной амплитуды асЛГ-пучка за цилиндрической линзой в виде:

$$\begin{aligned} asLG_{n,\ell}(x, y, Z_1 | \varepsilon, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{\bar{w}_x(Z_1) \bar{w}_y(Z_1)}} \exp\left\{-i\left[(2n + \ell + 1/2)\Gamma_x(Z_1) + \Gamma_y(Z_1)\right]\right\} \times \\ &\times \frac{(-1)^n}{2^{2n+3\ell/2} n!} \sum_{j=0}^{2n+\ell} (2i)^j P_j^{(n+\ell-j, n-\ell)}(0) (1 + \varepsilon e^{ij\theta}) H_{2n+\ell-j}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\bar{w}_x(Z_1)}\right) H_j\left(\frac{\sqrt{2}y}{\bar{w}_y(Z_1)}\right) \times \\ &\times \exp(ij\Gamma_{xy}(Z_1)) \exp\left(i\left[\frac{x^2}{\bar{q}_x(Z_1)} + \frac{y^2}{\bar{q}_y(Z_1)}\right]\right), \end{aligned} \quad (32)$$

где $w_0 = \sqrt{2z_0/k}$, $x \rightarrow x/w_0$, $y \rightarrow y/w_0$, $\bar{w}_x \rightarrow w_x/w_0$, $\bar{w}_y \rightarrow w_y/w_0$ и

$$\bar{q}_x = \frac{[Z_1(\kappa_x^2 + 1) - \kappa_x] - i}{\kappa_x^2 + 1}, \quad \bar{q}_y = Z_1 - i, \quad (33)$$

$$\Gamma_{xy}(Z_1) = \Gamma_y(Z_1) - \Gamma_x(Z_1). \quad (34)$$

Следует отметить, что выражение (32) для комплексной амплитуды асЛГ-пучка совпадает с результатом, представленным в работе Бекшаева и соавторов [80], для случая с нулевым радиальным числом $n = 0$. На рисунке 8 представлена эволюция распределения интенсивности при распространении вдоль оси Z_1 как стандартного ЛГ-пучка (а–в), так и структурированного сЛГ-пучка (г–е). Как и предполагалось, при $Z_1 = 1$ (что соответствует расстоянию $z_1 = 2f_{CL}$) ЛГ-пучок преобразуется в ЭГ-пучок, что подтверждается наблюдаемой формой распределения интенсивности (рисунок 8а). При этом число нулей интенсивности вдоль координатных осей x и y позволяет однозначно определить ТЗ исходной ЛГ-моды [38, 81].

Поведение асЛГ-пучка демонстрирует не менее интересную динамику. Так, вблизи плоскости $Z_1 = 1$, интенсивность пучка принимает вид, близкий к стандартной моде ЭГ (рисунок 8г), однако как будет показано далее, при этом наблюдается резкий всплеск ОУМ. Следует подчеркнуть, что полученные данные качественно совпадают с результатами, рассчитанными методом интегральных преобразований, представленными в работе [76]. Однако данный метод демонстрирует высокую точность только в дальней зоне дифракции или вблизи плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы. Преимущество же подхода, основанного на использовании ABCD-матриц, заключается в его универсальности и вычислительной эффективности, позволяющей получить аналитическое выражение для комплексной амплитуды пучка без необходимости применения громоздких интегральных процедур [78*, 79*, 82].

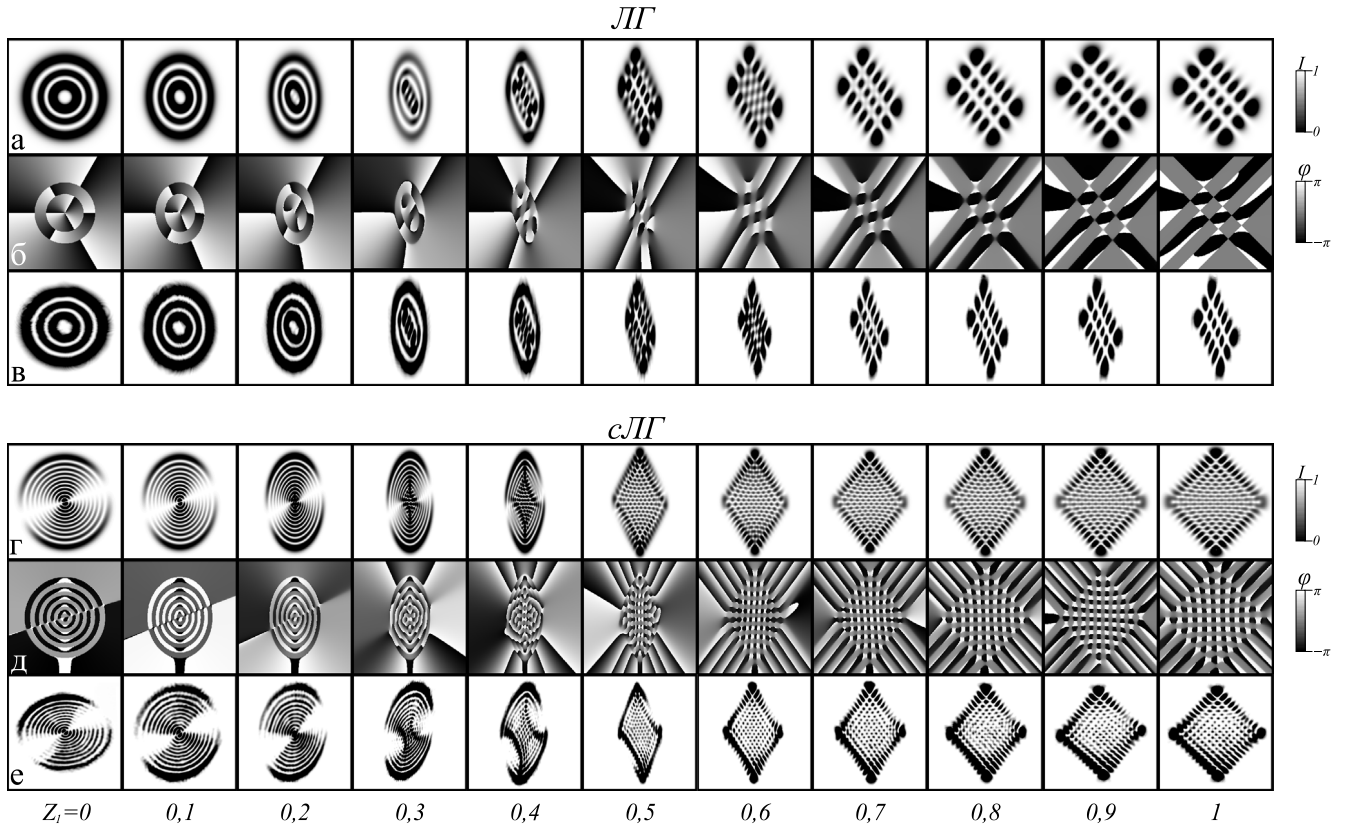


Рисунок 8 – Распределение интенсивности: (а, г) теория и (в, е) эксперимент, (б, д) фазы, эволюции ЛГ – (а-в) $n = 2$, $\ell = 3$ и сЛГ– (г-е) $n = 10$, $\ell = 1$, $\varepsilon = 1$, $\theta = 0,99\pi$ пучка, с $z_0 = 1$ м, $f_{CL} = 0,5$ м

1.2.2 Преобразование ОУМ сЛГ-пучка после цилиндрической линзы

Удельный ОУМ ℓ_z сЛГ-пучка (22) после прохождения через цилиндрическую линзу будем рассчитывать согласно ранее использованным выражениям (11–13), представленным в разделе 1.1. При этом ОУМ L_z и поток энергии P_z вдоль оси распространения пучка определяются следующим образом:

$$L_z = 2^{2n+\ell} \pi \sum_{j=0}^{2n+\ell-1} (j+1)!(2n+\ell-j)! \text{Im}(c_{j+1}c_j^*), \quad (35)$$

$$P_z = 2^{2n+\ell-1} \pi \sum_{j=0}^{2n+\ell} j!(2n+\ell-j)! c_j c_j^*, \quad (36)$$

где основной вклад в ОУМ вносят амплитуды мод, которые мы находим из выражения (14) в виде:

$$c_j = (2i)^j P_j^{(n+\ell-j, n-\ell)}(0)(1 + \varepsilon e^{ij\theta}) \exp(ij\Gamma_{xy}(z_1)). \quad (37)$$

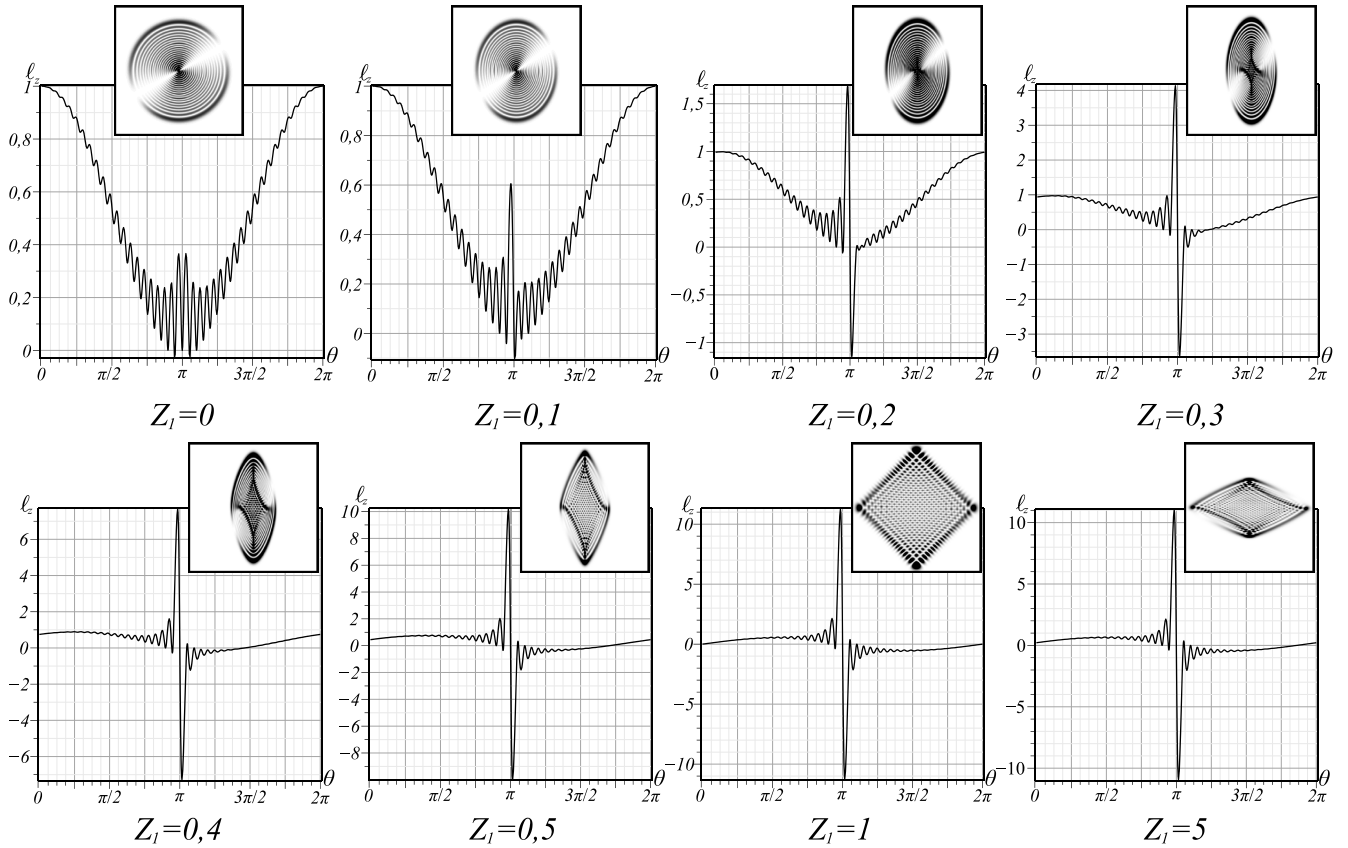


Рисунок 9 – Осцилляции ОУМ $\ell_z(\theta)$ при вариации θ -управляющего параметра асЛГ-пучка с $n = 20$, $\ell = 1$, $\varepsilon = 1$ на различных длинах пучка Z_1 . Выноски: картины интенсивности для первого всплеска ОУМ

Несмотря на то, что данные выражения учитывают различный масштаб в направлениях x и y , они формально сводятся к результатам, представленным в работе Котляра и др. [81], где использовалось одинаковое масштабирование по обоим направлениям. На рисунке 9 представлена зависимость $\ell_z(Z_1)$, иллюстрирующая поведение удельного орбитального момента вдоль оси пучка.

При изменении управляющего параметра θ наблюдается чередование фаз усиления и подавления ОУМ, сопровождающееся формированием резких всплесков при определённых значениях Z_1 и θ . В частности, при $\theta \approx 0,98\pi$ наблюдается формирование первого всплеска ОУМ, а при $\theta \approx 1,02\pi$ – второго, противоположного по знаку. При этом максимальное значение ОУМ достигается при $Z_1 = 1$, несмотря на выраженную деформацию картины интенсивности пучка

(см. рисунок 10б–д) и стремится к половине радиального числа $\ell_z \rightarrow n/2$ в дальней зоне дифракции.

Важно отметить, что полученные зависимости хорошо согласуются с результатами, ранее вычисленными методом интегральных преобразований [74], однако ABCD-матричный подход, применённый здесь, позволяет существенно упростить вычисления и проследить динамику ОУМ по всей длине пучка, включая ближнюю и переходную зоны [57*].

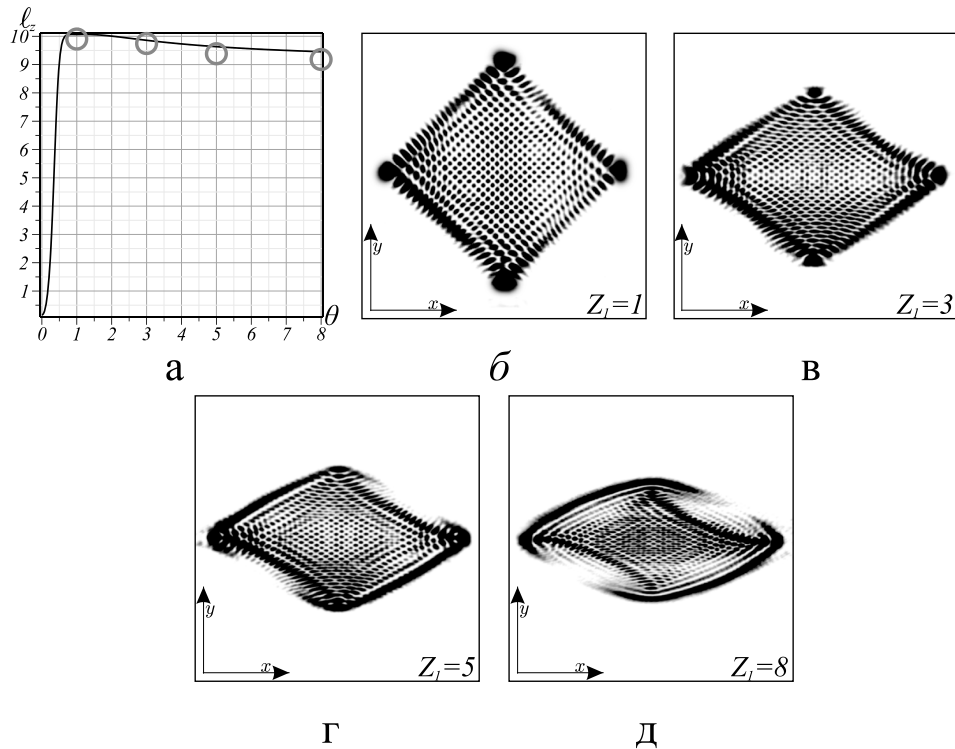


Рисунок 10 – (а) ОУМ $\ell_z(Z_1)$ вдоль асЛГ-пучка с $n = 20$, $\ell = 1$, $\varepsilon = 1$, $\theta = 0,98\pi$, $z_0 = 1$ м; (б) - (д) картины интенсивности в различных сечениях пучка

1.2.3 Экспериментальная реализация астигматического преобразования сЛГ-пучка (простой астигматизм)

В данном эксперименте исследовалось астигматическое преобразование сЛГ-пучков с использованием одной неподвижной цилиндрической линзы, реализующей простой астигматизм. Оптическая схема установки (см. рисунок 11) включала источник излучения – гелий-неоновый лазер (L_s) с длиной волны $\lambda = 633$ нм, после которого располагался пространственный фильтр SLF_1 , сформированный сферическими линзами L_1 ($f_{L_1} = 5$ см), L_2 ($f_{L_2} = 20$ см) и

диафрагмой D_1 между ними. Эта часть обеспечивала формирование коллимированного гауссова пучка.

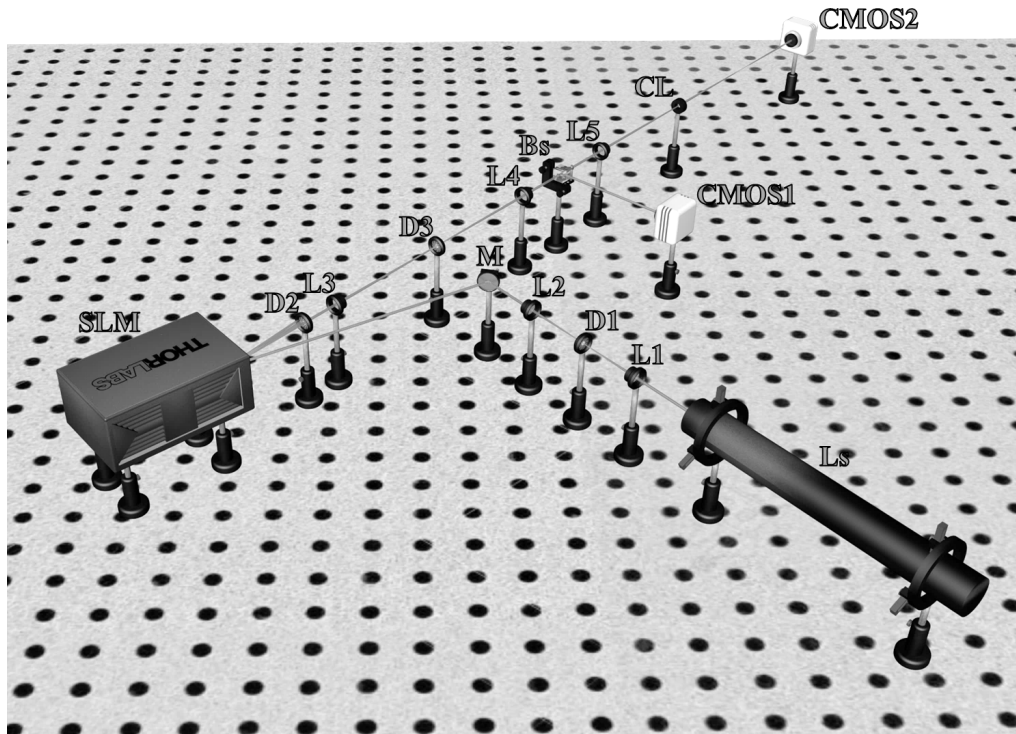


Рисунок 11 – Схема экспериментальной установки: L_s – лазер, L_{1-5} – сферические линзы, D_{1-3} – диафрагмы, M – зеркало, SLM – пространственный модулятор света, CL – цилиндрическая линза, Bs – делительная призма, $CMOS_{1,2}$ – детекторы

Для генерации сЛГ-пучков применялась дифракционная оптическая система на основе жидкокристаллического пространственного модулятора света (SLM), работающего в отражающем режиме и позволяющего загружать различные рассчитанные голограммы. Далее пучок проходил второй пространственный фильтр SLF_2 , состоящий из линз L_3 ($f_{L_3} = 10$ см), L_4 ($f_{L_2} = 50$ см) и диафрагм D_2 , D_3 , обеспечивающий качественное формирование коллимированного сЛГ-пучка. После этого пучок последовательно проходил через фокусирующую сферическую линзу L_5 ($f_{L_5} = 75$ см), цилиндрическую линзу CL ($f_{CL} = 50$ см) и регистрировался КМОП-камерой $CMOS_1$.

Для калибровки системы на SLM загружалась голограмма сЛГ-пучка с параметрами радиального $n = 10$ и азимутального $\ell = 1$ числа, с амплитудным $\varepsilon = 1$

и фазовым $\theta = 0$ управляющими параметрами, что соответствует стандартной ЛГ-моду. Её распределение интенсивности представлено на рисунке 8а–в, в плоскости $Z_1 = 0$.

В процессе астигматического преобразования цилиндрическая линза CL нарушает осевую симметрию пучка, в результате чего ЛГ-мода распадается на суперпозицию ЭГ-мод согласно выражению (3). При этом ключевым условием, обеспечивающим формирование чистой ЭГ-моды в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы, является выполнение условия, при котором длина Рэлея падающего пучка равной удвоенному фокусному расстоянию цилиндрической линзы: $z_0 = 2f_{CL} = 100$ см. Именно при этом соотношении в плоскости $z_1 = 2f_{CL}$, достигается фазовый сдвиг между ортогональными ЭГ-компонентами $\Gamma_{xy} = \pi/2$, что приводит к образованию чистой ЭГ-моды. Такой фазовый сдвиг возникает в результате разности фаз Γ_{ui} , обусловленной неравномерной фокусировкой пучка по осям x и y в астигматической системе.

Совпадение комплексной амплитуды, рассчитанной по формуле (32), с зарегистрированными распределениями интенсивности на $CMOS_2$ -камере в различных плоскостях Z_1 , представленных на рисунках 8а, в, подтверждает корректность теоретического описания. Эти результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными и теоретическими моделями, представленными в работах Бекшаева [80], Котляра [81] и Воляра [78*]. На рисунке 8г–е приведены результаты распределения интенсивности для сЛГ-пучка с радиальным $n = 10$ и азимутальным $\ell = 1$ числом, амплитудным $\varepsilon = 1$ и фазовым $\theta = 0,99\pi$ параметром, что соответствует первому положительному всплеску ОУМ вдоль оси распространения.

В случае же сЛГ-пучка ситуация существенно отличается: исходное распределение ОУМ оказывается более сложным, поскольку пучок формируется как суперпозиция ЛГ- и ЭЛГ-мод, согласно выражениям (6) и (7). В результате ОУМ оказывается зависимым от управляющего фазового параметра θ .

На рисунке 12 представлены экспериментальные зависимости удельного ОУМ от фазового параметра θ , полученные методом моментов интенсивности второго порядка. Исследованы два случая: 1) $n=6$, $\ell=1$, $\varepsilon=1$ и 2) $n=4$, $\ell=1$, $\varepsilon=10^4$.

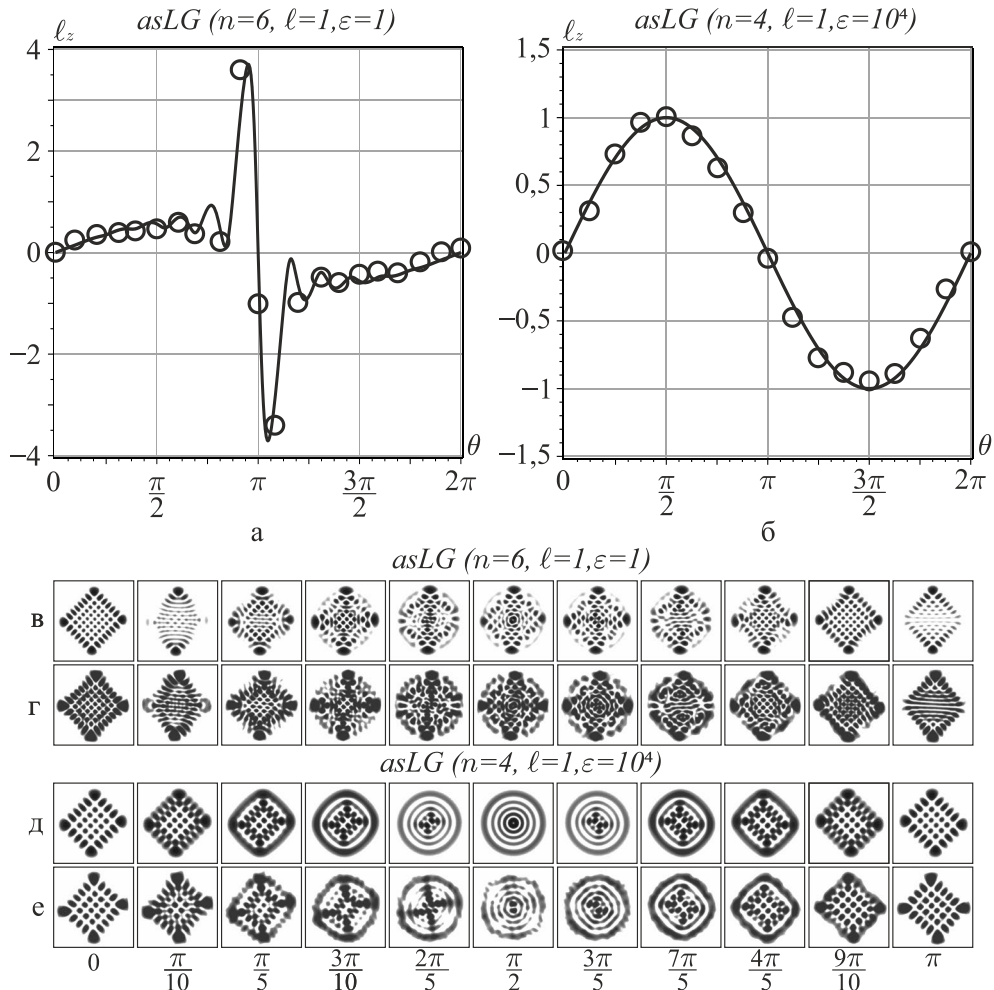


Рисунок 12 – (а, б) Всплески ОУМ $\ell_z(\theta)$ как функция фазового параметра θ и распределение интенсивности асЛГ-пучка: (в, д) теория, (г, е) эксперимент, с параметрами: (а, в, г) $n=6$, $\ell=1$, $\varepsilon=1$ и $n=4$, $\ell=1$, $\varepsilon=10^4$

В первом случае пучок с амплитудным параметром $\varepsilon=1$ демонстрирует выраженные осцилляции $\ell_z(\theta)$ (см. рисунок ба), которые при астигматическом преобразовании проявляются в виде резких всплесков и провалов. При $\theta=0$ и 2π сЛГ-пучок представляет собой чистую ЛГ-моду с максимальным значением ОУМ, равным $\ell_z=1$. После прохождения через цилиндрическую линзу структура пучка изменяется: на выходе формируется ЭГ-мода с нулевым ОУМ $\ell_z=0$.

Особый интерес представляет область вблизи фазовых параметров $\theta = \pi$, где наблюдается полная компенсация вкладов составляющих мод, приводящая к обнулению среднего ОУМ. Однако вблизи точки $\theta \approx \pi$ возникает резкий всплеск, достигающий максимума при $\theta \approx 2,98$ и далее переходящий через ноль к минимуму при $\theta \approx 3,27$. Амплитуда этих колебаний превосходит исходный ТЗ пучка и достигает значений равных $\ell_z(\theta \approx 2,98) \approx 3,76$, что отчётливо видно на рисунке 12а.

Во втором случае, при увеличении амплитудного параметра до $\varepsilon = 10^4$, в сЛГ-пучке практически полностью доминирует одна мода, и его структуре приближается к ЭЛГ-моду с управляющим фазовым θ параметром. Как видно из рисунка бб, д, е, характер осцилляций ОУМ становится значительно более сглаженным и при астигматическом преобразовании такого пучка переход к всплеску и провалу также осуществляется плавно. При фазовых параметрах $\theta = 0$ и 2π сЛГ-пучок соответствует чистой ЛГ-моду и обладает максимальным удельным ОУМ $\ell_z = 1$, тогда как при $\theta = \pi$ момент достигает минимального значения и равен $\ell_z = -1$. После прохождения через цилиндрическую линзу структура пучка претерпевает значительные изменения: в плоскости двойного фокуса формируется ЭГ-мода с нулевым орбитальным моментом $\ell_z = 0$, при этом её ориентация зависит от знака исходного ЛГ-пучка, что видно из рисунка 12б, д, е. Особый интерес представляют фазовые значения $\theta = \pi/2$ и $3\pi/2$, при которых на выходе формируются чистые ортогональные ЛГ-моды с максимальным по модулю значением ОУМ: $\ell_z(\theta = \pi/2) = 1$ и $\ell_z(\theta = 3\pi/2) = -1$.

Таким образом, фазовый параметр θ позволяет точно управлять распределением ОУМ, включая его нули и экстремумы. Максимальное значение удельного ОУМ достигается при $Z_1 = 1$, что соответствует двойному фокусу цилиндрической линзы. В этом положении ОУМ может достигать половины радиального числа пучка, $\ell_z = n/2$, что подчёркивает эффективность астигматической системы как преобразователя мод и элемента управления ОУМ.

1.3 Астигматическое преобразование сЛГ-пучка (общий астигматизм)

Современные исследования в области структурированного света демонстрируют уникальные свойства вихревых пучков, обладающих множеством степеней свободы, таких как ОУМ, ТЗ и пространственная структура поля [2, 6, 12, 14, 52, 83–90]. Эти пучки находят применение в задачах высокоскоростной передачи информации [61–64, 83–93], манипулирования микрочастицами в оптических ловушках [94], а также в квантовой криптографии [95]. Особый интерес вызывают их устойчивость к внешним возмущениям и способность к частичному самовосстановлению, даже в условиях турбулентной атмосферы [92–99].

Основу таких пучков составляют моды ЛГ, которые, несмотря на свою широкую применимость, обладают врождённой осевой симметрией, вследствие чего они чувствительны к несимметричным возмущениям. Даже слабое поперечное возмущение приводит к разложению в набор ЭГ-мод, число которых определяется как $N = 2n + \ell + 1$, где n – радиальное число, а ℓ – азимутальное [54]. Такая внутренняя перестройка сама по себе не разрушает структуру пучка, но открывает возможность формирования более сложных состояний света – сЛГ-пучков, возникающих за счёт управляемой модуляции амплитуд и фаз собственных ЭГ-мод [100–101].

Формирование сЛГ-пучка связано с нарушением осевой симметрии исходной ЛГ-моды, что позволяет проявить её скрытые модовые свойства. Действительно, ЛГ-пучок характеризуется ТЗ, равным азимутальному числу ℓ соответствующей моды, которое и определяет величину ОУМ [102–104]. Однако возмущение амплитуд и фаз собственных ЭГ-мод снимает вырождение по ТЗ в кольцевых дислокациях, которые распадаются на пары оптических вихрей, изменяя ОУМ структурированного пучка [20, 105–107]. В результате, ОУМ сЛГ-пучка становится функцией параметров структурности, зависящей от амплитудного ε и фазового θ параметра, а число его мод определяется всё тем же выражением $N = 2n + \ell + 1$ [56–58]. При этом максимальное значение ОУМ, достигаемое в сЛГ-пучке, не превышает исходного азимутального числа ℓ , поскольку возникающие вихри образуют топологические диполи с противоположными знаками ТЗ. Однако при

распространении сЛГ-пучков в астигматической оптической системе симметрия этих диполей нарушается. Это приводит к появлению резких всплесков ОУМ, величина которых может достигать $\ell_z \approx n/2$, что подтверждается результатами работ по простому астигматизму, в которых оптические оси цилиндрической линзы совпадают с координатными осями пучка [108].

Более интересная ситуация возникает при распространении пучка в среде с общим астигматизмом, когда оптические оси линзы повернуты относительно осей пучка. В такой системе появляется дополнительная степень свободы, позволяющая управлять как ОУМ, так и модовой структурой пучка. Это достигается за счёт изменения соотношения амплитуд и положений новорожденных оптических вихрей. Благодаря этому реализуются условия, при которых ОУМ достигает максимально допустимого значения $\ell_z^{\max} = 2n + \ell$ при сохранении устойчивой структуры пучка. Подобные эффекты и динамика модовой перестройки были подробно проанализированы в наших работах [77*, 109*, 110*].

Таким образом, целью данного раздела является теоретическое и экспериментальное исследование эволюции ОУМ сЛГ-пучков в астигматической системе с цилиндрической линзой произвольной ориентации, а также анализ условий формирования супервсплесков ОУМ и сохранения модовой структуры.

1.3.1 Преобразование ОУМ сЛГ-пучка после цилиндрической линзы при общем астигматизме

Для анализа трансформации ОУМ сЛГ-пучков при прохождении через цилиндрическую линзу с произвольной ориентацией оси астигматизма применяется метод ABCD-матриц. Как и в разделах 1.1 и 1.2, расчёт удельного ОУМ основывается на разложении пучка по ЭГ-модам. В данной задаче ключевым этапом является определение амплитуд этих мод C_j , по значениям которых определяется ОУМ пучка.

На первом этапе представим исходный сЛГ-пучок в виде разложения по ЭГ-модам, используя обобщённую двухпараметрическую функцию возбуждения:

$$sLG_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta) = (-1)^n / (2^{n+\ell} n!) \sum_{k=0}^{2n+\ell} (-i)^k c_k^{(n,n+\ell)} \left(\frac{\pi}{4} \right) \varepsilon_\kappa(\varepsilon, \theta) HG_{2n+\ell-k,k}(\mathbf{r}), \quad (38)$$

где коэффициенты $c_k^{(n,m)}(\alpha)$ задаются через полиномы Якоби:

$$c_k^{(n,m)}(\alpha) = \sum_{j=\max(0,k-m)}^{\min(k,n)} (-1)^{k-j} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} (\cos \alpha)^{n+k-2j} (\sin \alpha)^{m-k+2j}. \quad (39)$$

Пусть теперь пучок проходит через цилиндрическую линзу с фокусным расстоянием f_{CL} , повернутую на угол β и ее действие задается формулой:

$$\exp\left(-\frac{ik'}{2f_{CL}} [x \cos \beta - y \sin \beta]^2\right). \quad (40)$$

В таком случае необходимо переразложить ЭГ моды в (38), перейдя к повернутым координатам $\mathbf{R}_\beta \mathbf{r}$:

$$\mathbf{R}_\beta \mathbf{r} = (x \cos \beta - y \sin \beta, y \cos \beta + x \sin \beta). \quad (41)$$

В этом случае полагая $\alpha = -\beta$ амплитуда сЛГ-пучка (38) после цилиндрической линзы переписывается как:

$$asLG_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta) = (-1)^n / (2^{n+\ell} n!) \times \\ \times \sum_{j=0}^{2n+\ell} (-1)^j \left\{ \sum_{k=0}^{2n+\ell} (-i)^k c_k^{(n,n+\ell)} \left(\frac{\pi}{4} \right) \varepsilon_\kappa c_j^{(2n+\ell-k,k)}(-\beta) \right\} HG_{2n+\ell-j,j}(\mathbf{R}_\beta \mathbf{r}). \quad (42)$$

Для исследования пучка вдоль оси Z_1 после прохождения через цилиндрическую линзу воспользуемся методом ABCD-матриц, представленным в работе [110*]. В этом случае комплексная амплитуда (42) примет следующий вид:

$$asLG_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta, \beta) = (-1)^n / (2^{n+\ell} n!) \frac{1}{\sqrt{\bar{w}_x \bar{w}_y}} \times \\ \times \sum_{j=0}^{2n+\ell} (-1)^j \left\{ \sum_{k=0}^{2n+\ell} (-i)^k c_k^{(n,n+\ell)} \left(\frac{\pi}{4} \right) \varepsilon_\kappa c_j^{(2n+\ell-k,k)}(-\beta) \exp(ik\Gamma_{xy}) \right\} HG_{2n+\ell-j,j}(\mathbf{R}_\beta \mathbf{r}), \quad (43)$$

где $\mathbf{r} = (x / \bar{w}_x, y / \bar{w}_y)$, \bar{w}_x , \bar{w}_y – безразмерные радиусы перетяжки пучка вдоль осей x и y , рассчитанные по формулам (28) и (29), Γ_{xy} – разность фаз Гуй, определяемая в формулах (30), (31), а $q_x(Z_1)$ и $q_y(Z_1)$ – комплексные параметры пучка, выраженные через матрицы ABCD, как указано в формулах (25) и (27).

На рисунке 13 представлены теоретические и экспериментальные распределения интенсивности асЛГ-пучков при общем астигматизме для наборов квантовых чисел $n = \ell = 4, 8, 12$ и соответствующих фазовых параметров $\theta = 0,236, 0,12, 0,078$. Последовательность кадров демонстрируют эволюцию структуры при распространении вдоль оси z . Визуальное сопоставление диаграмм интенсивности показывает хорошее соответствие результатов симплектического ABCD-подхода с экспериментальными данными. Более точная оценка согласования задается степенью корреляции $Q \approx 0,95$. Сразу за астигматическим элементом ($Z_1 = z_1/z_0 = 0,1$) сохраняется тонкая структура интенсивности, при этом осевая симметрия исходной ЛГ-моды нарушена лишь слабо. В плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы ($z_1 = 2f_{CL} = 1$ м) наблюдается характерное модовое преобразование, используемое для определения ТЗ вихревых пучков с параметрами (n, ℓ) [111, 112]. Кроме того, в этой плоскости экспериментально наблюдается асЛГ-пучок с почти прямоугольной симметрией, нарушенной лишь слабыми астигматическими искажениями.

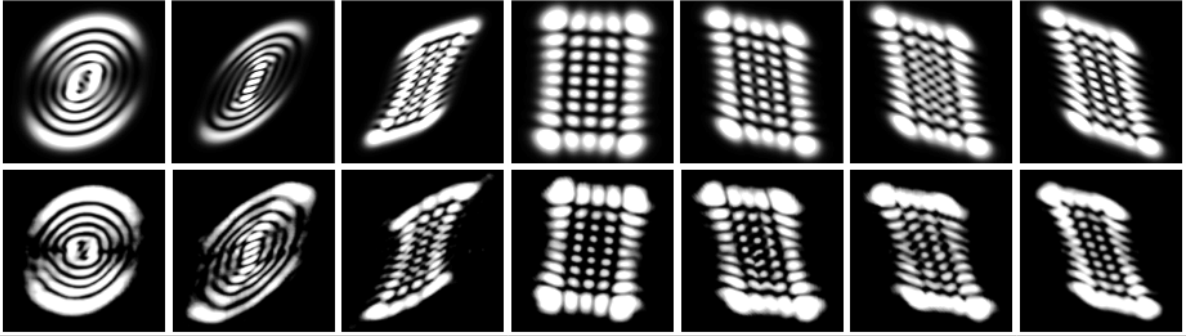
Для расчета удельного ОУМ ℓ_z необходимо найти амплитуды мод:

$$C_j = (-1)^j \sum_{k=0}^{2n+\ell} (-i)^k c_k^{(n, n+\ell)} (\pi/4) \varepsilon_\kappa c_j^{(2n+\ell-k, k)} (-\beta) \exp(ik\Gamma_{xy}). \quad (44)$$

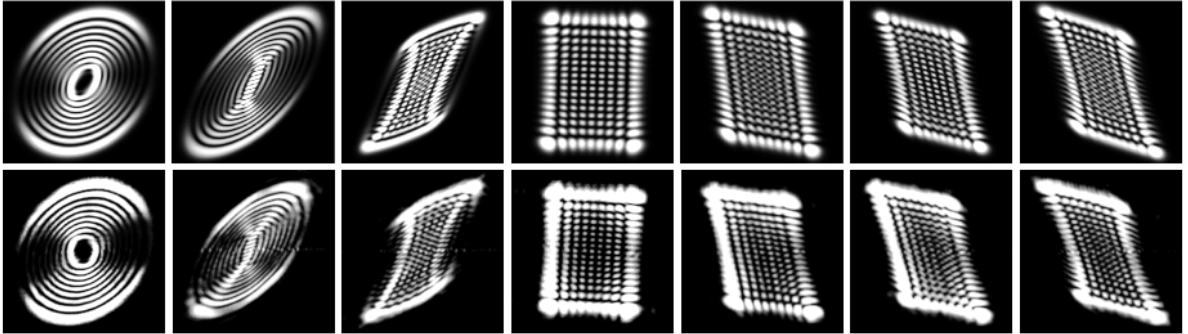
Тогда выражение для удельного ОУМ принимает вид:

$$\ell_z(\varepsilon, \theta, \beta, Z_1) = \frac{2 \sum_{j=0}^{2n+\ell-1} (j+1)!(2n+\ell-j)! \operatorname{Im}(C_j^* C_{j+1})}{\sum_{j=0}^{2n+\ell} j!(2n+\ell-j)! |C_j|^2}. \quad (45)$$

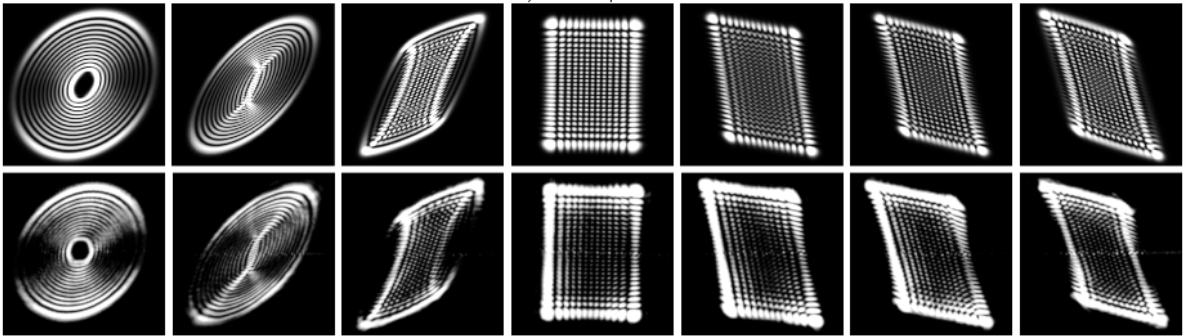
$$n=4, \ell=4, \theta=0.236$$



$$n=8, \ell=8, \theta=0.12$$



$$n=12, \ell=12, \theta=0.078$$


 $Z_1=0.1$

0.3

0.5

1

1.5

2

3

Рисунок 13 – Эволюция теоретических (нечётные ряды) и экспериментальных (чётные ряды) картин интенсивности вдоль оси пучка Z_1 , для различных радиальных n и азимутальных ℓ чисел, а также управляющего параметра θ

Для анализа характеристик ОУМ многопараметрических асЛГ-пучков были построены трёхмерные зависимости этой величины от управляющих параметров, представленные на рисунке 14. Из представленных графиков следует, что наибольший интерес представляет случай, когда радиальное и азимутальное квантовые числа совпадают, то есть $n = \ell$. Именно при этих условиях проявляются основные особенности динамики ОУМ.

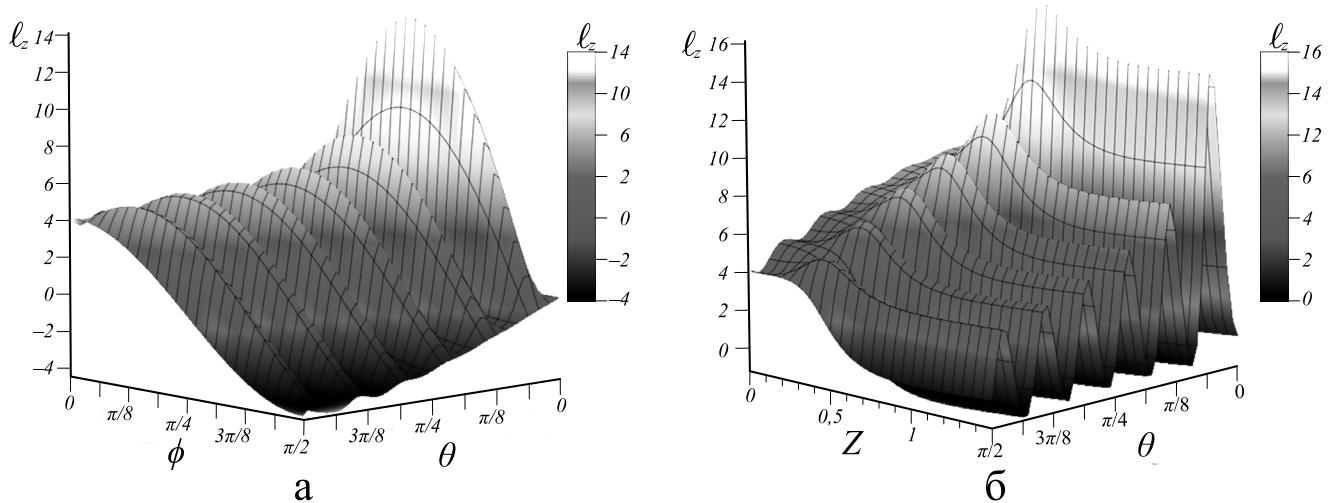


Рисунок 14 – Зависимость ОУМ l_z асЛГ-пучка от параметров пучка при $n = \ell = 10$, $z_0 = 1$, $f_{CL} = 0,5$ м: (а) $l_z(\theta, \beta)$ при фиксированном $Z_1 = 1$; (б) $l_z(\theta, Z_1)$ при фиксированном $\beta = \pi/4$

Левый график на рисунке 14 демонстрирует, что максимумы ОУМ для различных значений n , ℓ и фазового параметра θ располагаются при угле поворота цилиндрической линзы $\beta = \pi/4$. Важно отметить, что первый всплеск ОУМ наблюдается при малых значениях фазового параметра θ , близких к нулю. В отличие от случая простого астигматизма, наибольший всплеск ОУМ наблюдается вблизи фокальной плоскости цилиндрической линзы, а не в области её двойного фокуса. Подробная структура всплесков ОУМ проиллюстрирована на рисунке 15. Так, на рисунке 15а показана зависимость положения резких всплесков ОУМ от фазового параметра θ . Например, для сравнительно малых квантовых чисел $n = \ell = 4$ всплеск ОУМ наблюдается при $\theta = 0,236$, тогда как для $n = \ell = 12$ он смещается к $\theta = 0,062$. Эти данные указывают на высокую чувствительность структуры пучка даже к незначительным нарушениям его осевой симметрии. Такие возмущения, вызванные общим астигматизмом, приводят к разрушению кольцевых дислокаций ЛГ-моды и формированию пар вихрей с несимметричным распределением ТЗ, что, в свою очередь вызывает резкий всплеск ОУМ, превышающий как радиальное, так и азимутальное квантовые числа.

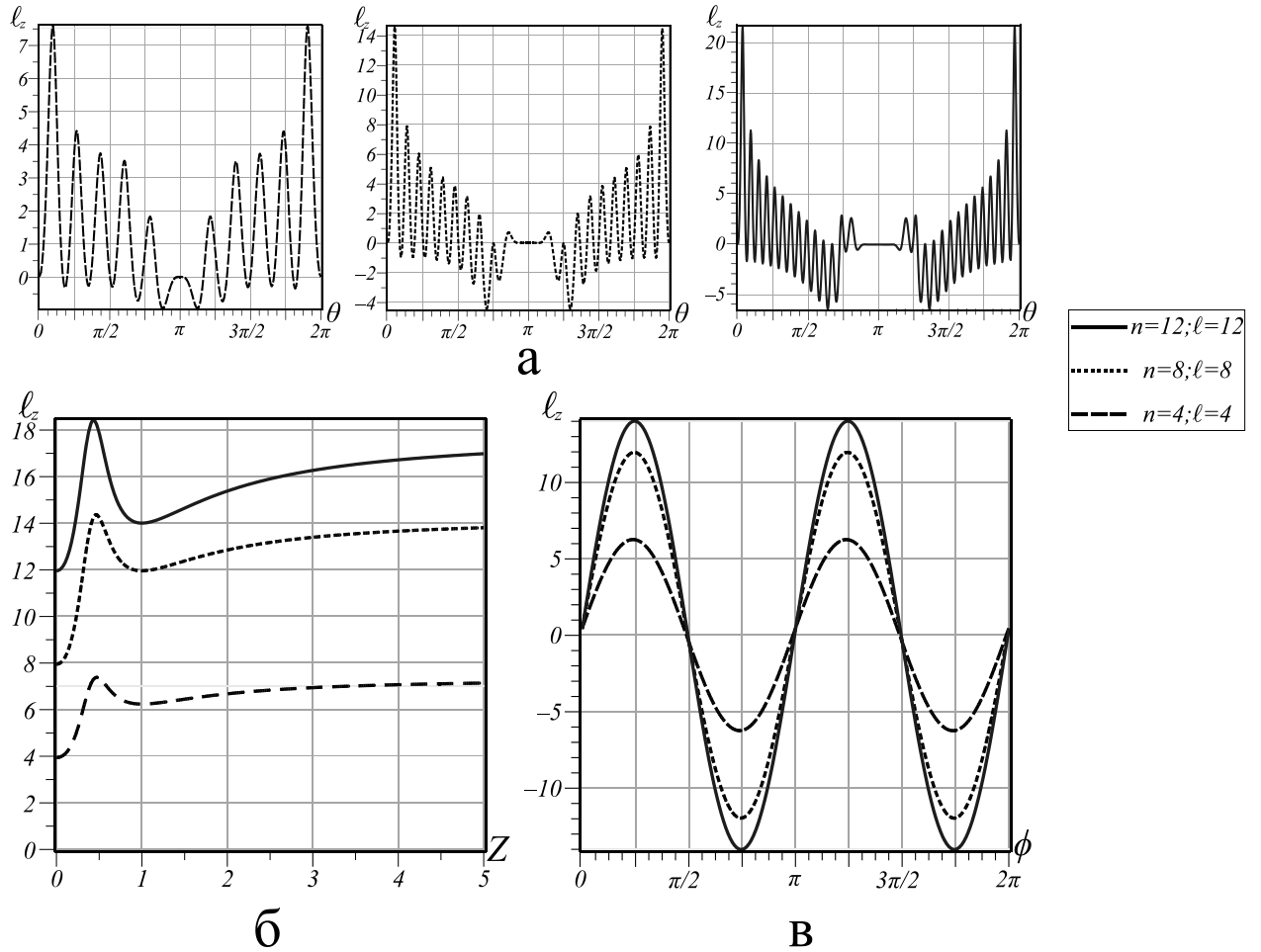


Рисунок 15 – Зависимости ОУМ ℓ_z асЛГ-пучка: (а) $\ell_z(\theta, \beta = \pi/4, Z_1 = 1)$ для одинаковых квантовых чисел $n = \ell$; (б) $\ell_z(Z_1, \beta = \pi/4)$ при фиксированных значениях фазового параметра θ , соответствующих основным всплескам ОУМ на графике (а); (в) $\ell_z(\beta, Z_1 = 1)$ при $n = 4, \ell = 4, \theta = 0,236$; $n = 8, \ell = 8, \theta = 0,12$ и $n = 12, \ell = 12, \theta = 0,078$. Во всех случаях использованы параметры: $z_0 = 1$ м, $f_{CL} = 0,5$ м

На рисунке 15б показана плоскость, соответствующая максимальному значению удельного ОУМ. Оптимальная плоскость регистрации пучка, соответствующая наибольшему значению ℓ_z , совпадает с фокальной плоскостью цилиндрической линзы. При этом любое отклонение от этой плоскости, независимо от выбранных параметров n и ℓ , приводит к уменьшению ОУМ. Кроме того, как следует из анализа (см. рисунок 15в), при повороте оси астигматизма на угол $\Delta\beta = \pi/2$ происходит инверсия знака орбитального момента. Это

свидетельствует о высокой чувствительности ОУМ к ориентации оптических элементов преобразования, что согласуется с ранее представленными результатами нашей работы [110*].

1.3.2 Адиабатическое следование картины интенсивности сЛГ-пучка после поворота цилиндрической линзы

Как ранее было нами показано [78*, 79*], асЛГ-пучки при определённых условиях могут распространяться в среде с простым астигматизмом (при углах $\beta = 0$ или $\pi/2$) без нарушения своей внутренней структуры. Такое поведение достигается при строгом согласовании параметров пучка с характеристиками астигматической системы. Однако наши предварительные теоретические и экспериментальные исследования показали отсутствие таких условий для среды с общим астигматизмом ($\beta \neq 0$) – нарушение условия подобия масштабов вдоль осей x и y при фокусировке пучка всегда приводит к разрушению симметрии исходного пучка.

Несмотря на это, полное разрушение структуры не является обязательным условием. При повороте оптической оси астигматического элемента может сохраняться (частично или полностью) деформированная структура пучка. Данный аспект представляет собой основной предмет рассмотрения в настоящем подразделе.

Предпосылки существования эффекта следования структуры пучка за направлением оси астигматизма прослеживаются в форме траекторий на сфере (см. рисунок 16). В частности, на рисунке 16б траекторий состояний пучка разбиваются главными меридианами на четыре квадранта и различаются видом отклика структуры пучка на направление оси астигматизма β . При этом параметр $\tilde{\theta}(\theta, \beta)$, ответственный за структуру пучка, почти не изменяется в окрестности фазовых параметров $\theta = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$.

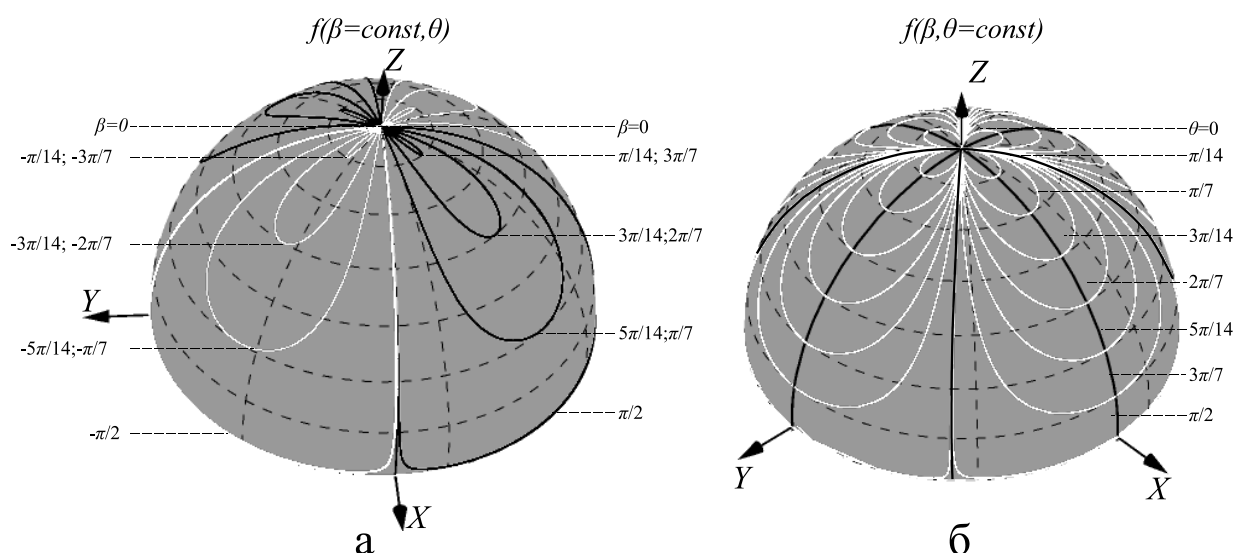


Рисунок 16 – Теоретически рассчитанные траектории состояний асЛГ-пучка на полусфере единичного радиуса в зависимости от: (а) фазового параметра θ при постоянном угле астигматизма β ; (б) угле астигматизма β при постоянном фазовом параметре θ . На полусфере (а) черная кривая соответствует вращению цилиндрической линзы против часовой стрелки, а светлая кривая – по часовой стрелке. На полусфере (б) светлая кривая соответствует изменению угла астигматизма ($-\pi < \beta < \pi$), а черные кривые соответствуют главным квадрантам полушарий

Экспериментальные наблюдения показали, что при определённых значениях параметра θ происходит синхронное вращение картины интенсивности вслед за изменением ориентации цилиндрической линзы в ограниченном диапазоне углов β . Было установлено, что эффект проявляется по-разному при вращении цилиндрической линзы по и против часовой стрелки, что указывает на направленную чувствительность механизма и обусловило необходимость более детального изучения его физической природы.

При изменении угла β (движение по экватору на рисунке 16б) картина интенсивности поворачивается на угол ϕ , который определяется из соотношения:

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \tilde{\phi}). \quad (46)$$

Семейство кривых, приведённое на рисунке 17, иллюстрирует зависимость (46), где функция $\tilde{\varphi}(\theta, \beta)$ определяется выражением (А6) из Приложения А в работе [109*]. Анализ показал, что при фазовом параметре $\theta = 0,51\pi$ кривая имеет выраженный ступенчатый характер: в широких интервалах угла β положение картины интенсивности остаётся неизменным, затем следует резкий поворот оси картины интенсивности. По мере приближения θ к значению π кривая постепенно сглаживается (см. серую кривую), и в окрестности $\theta \approx \pi$ зависимость приобретает линейный вид $\phi = -\beta$ (чёрная кривая). Следует отметить, что сами зависимости $\phi(\beta)$, представленные на рисунке 17, не содержат информации о характере изменения внутренней структуры пучка при повороте оси астигматической линзы. Этот аспект был детально изучен с использованием численного моделирования и экспериментальных наблюдений. Основные результаты приведены на рисунке 18.

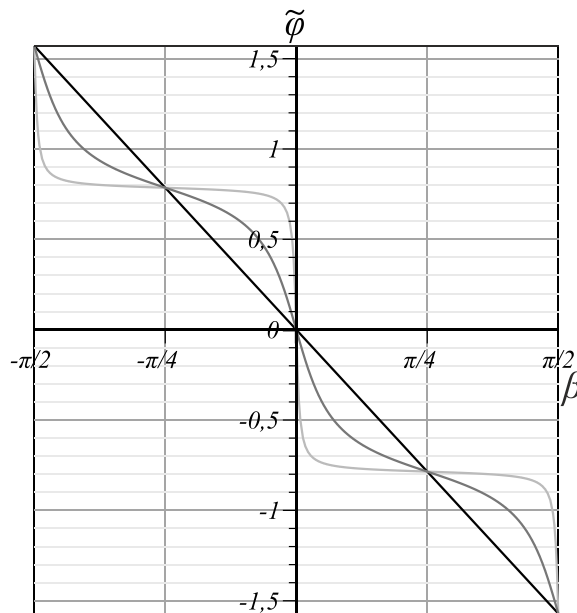


Рисунок 17 – Теоретическая зависимость угла поворота $\tilde{\varphi}(\beta)$ картины интенсивности на угол β вращения цилиндрической линзы для фазового параметра θ : (светлая кривая) – $\theta = 0,51\pi$; (серая кривая) – $\theta = 0,6\pi$; (черная кривая) – $\theta = 0,98\pi$

Экспериментальные исследования изменения картины интенсивности и её структурной перестройки при вращении цилиндрической линзы проводились на

оптической установке, детально описанной в подразделе 1.2.3 или в работе [101] (см. также рисунок 7 в [101]). В эксперименте использовалась цилиндрическая линза с фокусным расстоянием $f_{CL} = 15$ см, установленная в прецизионное поворотное крепление на оптическом столе. Это устройство обеспечивало возможность задания угла наклона оптической оси линзы β с высокой точностью – до четверти углового градуса.

Формирование сЛГ-пучка осуществлялось с помощью пространственного модулятора света (SLM), который обеспечивал управление радиальным n и азимутальным ℓ числами пучка, а также его амплитудным ε и фазовым θ параметрами. Регистрация картины интенсивности осуществлялась в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы $z_1 = 2f_{CL}$, после чего изображение подвергалось цифровой обработке.

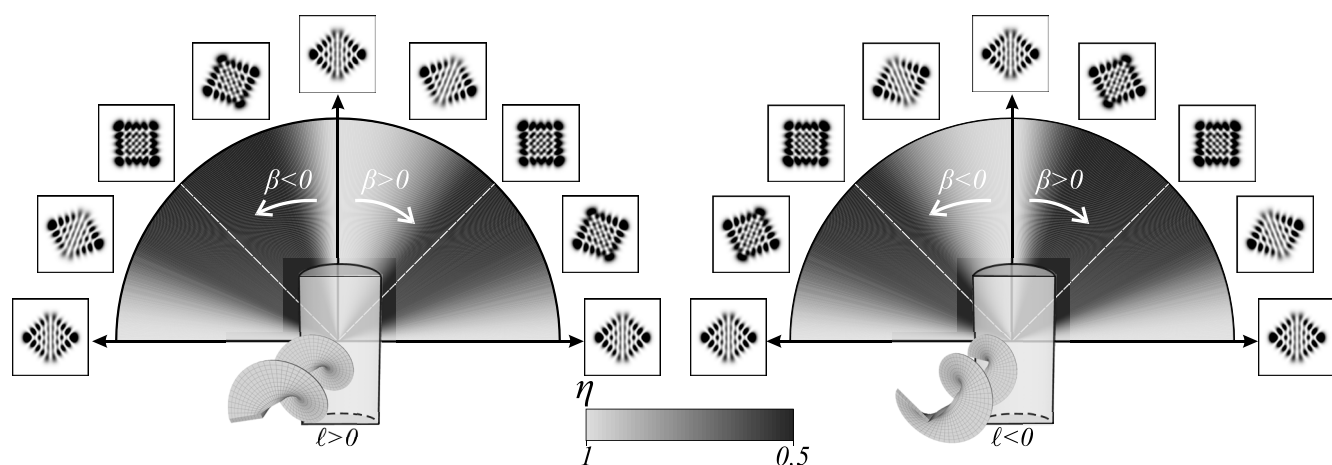


Рисунок 18 – Моделирование структуры асЛГ-пучка после вращения цилиндрической линзы для $(n = 4; \ell = \pm 1)$. Картина интенсивности (инверсия) повторяет вращение оси цилиндрической линзы для $\ell > 0, \beta > 0$ и $\ell < 0, \beta < 0$, в то время как при $\ell > 0, \beta < 0$ и $\ell < 0, \beta > 0$ картина интенсивности быстро изменяется

Верхняя часть рисунка 18 демонстрирует распределения интенсивности асЛГ-пучка при фиксированном значении угла β , определяющего ориентацию оси астигматизма. Градации серого на полукруглой шкале визуализируют степень корреляции η между текущей структурой пучка и его исходным состоянием.

В нижней части полукруга представлена схема геликоидального волнового фронта пучка, падающего на цилиндрическую линзу. Характер направления закрутки геликоида соответствует знаку ТЗ исходного ЛГ-пучка. Проведённый анализ показал, что степень сохранения структуры пучка – выраженная через корреляционную величину η – при повороте цилиндрической линзы существенно зависит от взаимной ориентации знаков ТЗ и угла поворота β цилиндрической линзы. В частности, при совпадении знаков ℓ и β , то структура пучка слабо изменяется в процессе структурного отслеживания оси линзы. В противоположном случае структура пучка быстро разрушается.

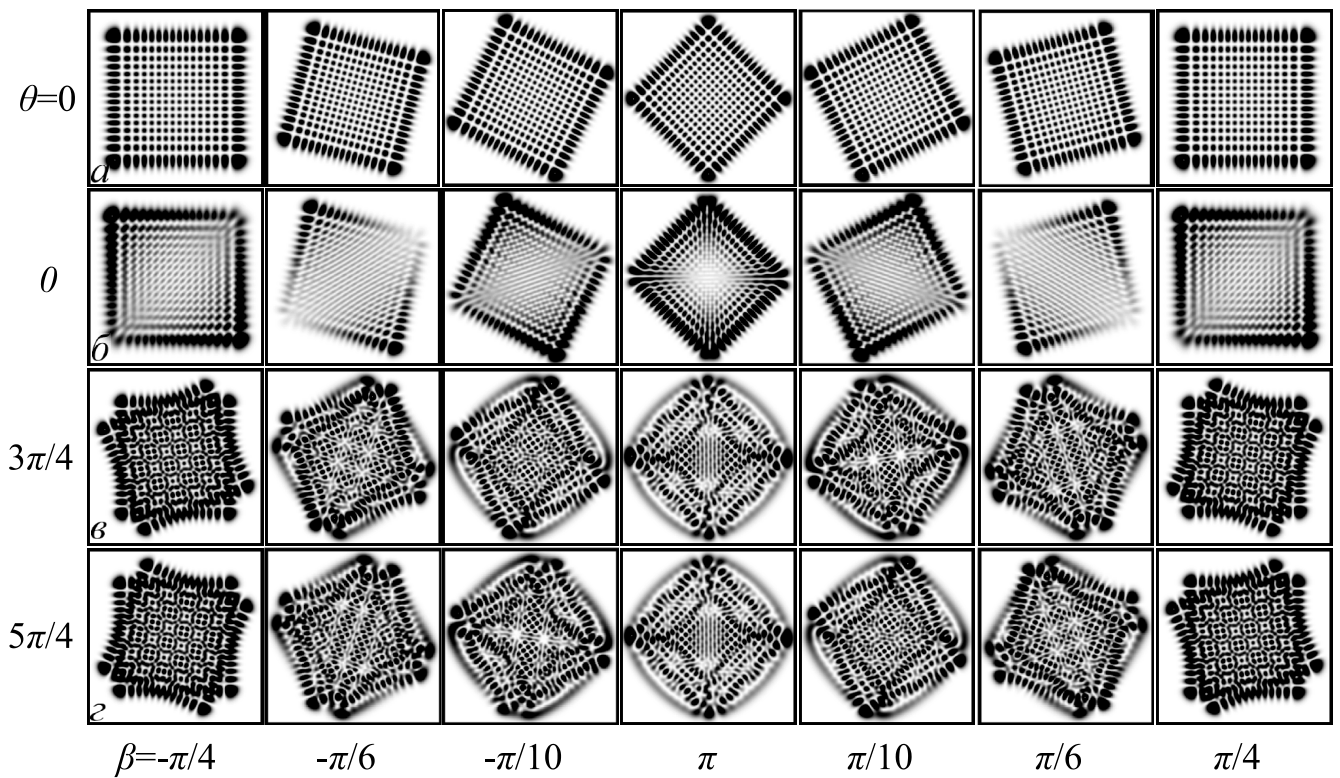


Рисунок 19 – Компьютерное моделирование интенсивности (инверсия) асЛГ-пучка для (а, б) ($n = 15; \ell = 0$); (в, г) ($n = 15; \ell = 1$) при различных параметрах θ и β

Особый интерес представляет поведение пучка вблизи критических значений фазового параметра $\theta = \pi/4, 3\pi/4$, при которых, как известно, возникает резкий всплеск ОУМ, а пространственная структура пучка становится похожей на распределение интенсивности ЭГ-моды. Степень изменения структуры пучка проиллюстрирована на рисунке 19. Первая строка на рисунке 19 показывает

распределения интенсивности асЛГ-пучка при фазовом параметре $\theta = 0$ и $\ell = 0$ для различных значений угла поворота β . В данном режиме отмечается согласованное вращение картины интенсивности вслед за поворотом линзы, при котором структура пучка сохраняется без признаков разрушения.

Однако для ненулевого ТЗ ($\ell = 1$) возникает частичное разрушение исходной картины интенсивности для различных знаков ТЗ и β (вторая строка), хотя главные диагонали прямоугольников в картинах интенсивности строго следуют за поворотом цилиндрической линзы.

При увеличении фазового параметра θ наблюдается качественное изменение поведения пучка (третья и четвёртая строки рисунка 19). В этом режиме поворот цилиндрической линзы приводит к существенной перестройке картины интенсивности. Особенно выраженный эффект наблюдается при смене знака ТЗ, как видно на четвёртой строке рисунка 19. Несмотря на явное разрушение пространственной структуры пучка, сохраняется высокая степень корреляции между распределениями интенсивностей при вращении линзы в противоположные стороны. Как следует из сравнения картин интенсивности в третьей и четвертой строках рисунка 19 показывает, что их тонкая структура совпадает, если направление вращения цилиндрической линзы изменяется одновременно с изменением знака ОУМ, т.е. произведение ОУМ на знак вращения линзы $\ell_z \cdot \text{sign}(\beta) = \text{const}$ должно оставаться неизменным.

Для проверки справедливости полученных теоретических выводов было проведено сопоставление распределений интенсивностей пучков при различных значениях фазового параметра θ , угла поворота цилиндрической линзы β и ОУМ ℓ_z . В качестве критерия сопоставления использовалась степень корреляции η , полученная в результате эксперимента и представленная на рисунке 20.

Анализ кривых для случая $\theta = \pi$ показал, что для пучков с нулевым значением ОУМ ($\ell_z = 0$) функция $\eta(\beta)$ сохраняет симметрию при повороте линзы в обоих направлениях – по и против часовой стрелки. При этом погрешность измерений не превышает 5%. Симметрия кривой $\eta(\beta)$ нарушается для ненулевых

значений ОУМ, когда знаки β и ℓ_z могут быть одинаковыми или различными. Важно отметить, что в интервале углов вращения линзы $\beta \in (0, \pm \pi/8)$ наблюдается эффект следования структуры пучка за осью вращения цилиндрической линзы при выполнении условия $\ell_z \cdot \text{sign}(\beta) = \text{const}$. Подобное поведение подтверждено как экспериментальными измерениями, так и численным моделированием, выполненными в работе [109*].

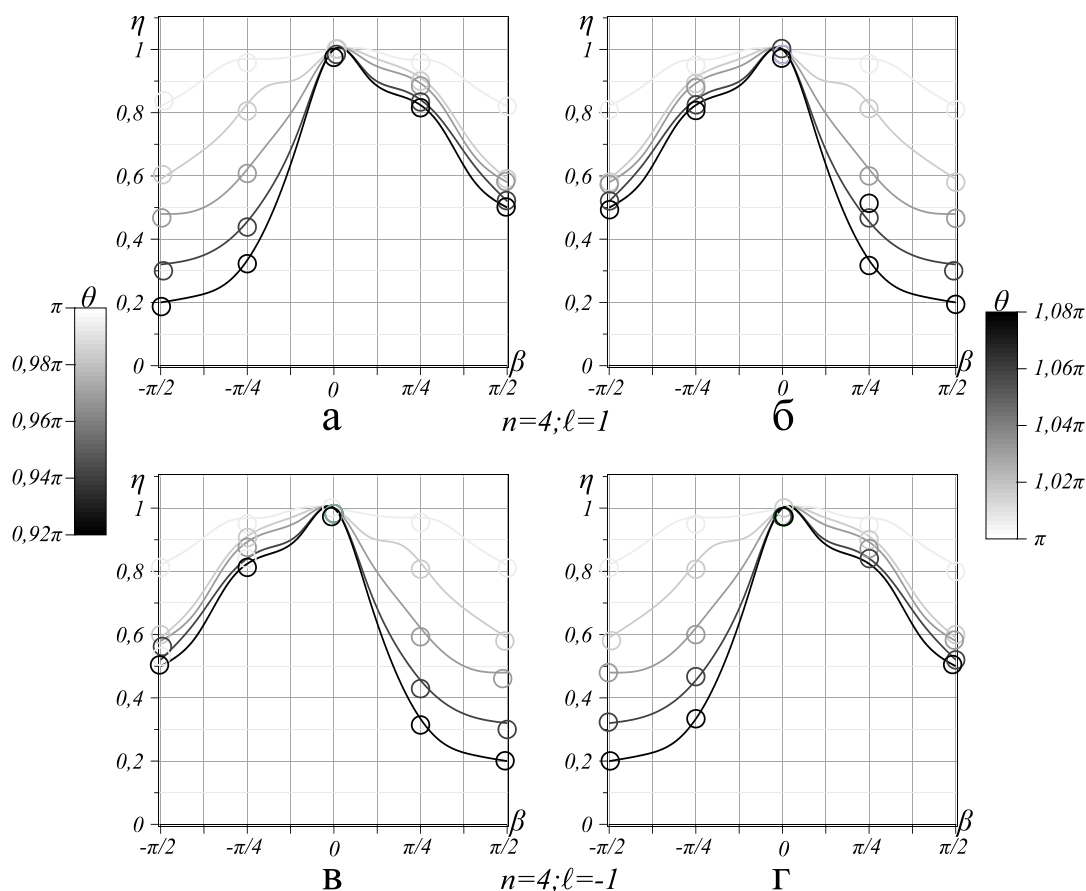


Рисунок 20 – Кривые степени корреляции (теория) $\eta(\beta)$ для картин интенсивности в зависимости от угла поворота цилиндрической линзы асЛГ-пучка с положительным и отрицательным ТЗ: (а,б) ($n = 4; \ell = 1$) и (в,г) ($n = 4; \ell = -1$). Каждая кривая на графике соответствует определённому значению фазового параметра θ , представленному на рисунке в виде градиента: слева для (а, в), справа для (б,г). Экспериментальные точки на графике обозначены окружностями

1.4 Выводы к главе 1

1. Рассмотрены сЛГ-пучки, которые представляют собой класс структурно устойчивых лазерных пучков с двумя управляющими параметрами семейства: амплитудным ε и фазовым θ , обладающих ОУМ, максимальная величина которого не превышает значения ТЗ исходной ЛГ-моды. Показано, что при увеличении радиального числа n ОУМ пучка испытывает быстрые осцилляции, число которых напрямую зависит от величины радиального числа [53*, 57*].

2. Используя ABCD-формализм, получена комплексная амплитуда сЛГ-пучка прошедшего через цилиндрическую линзу (простой астигматизм). Показано, что астигматическое преобразование приводит к возникновению всплесков ОУМ при различных значениях фазового параметра θ , величина которых равняется половине радиального числа пучка. Теоретически и экспериментально показано, что при значении фазового параметра $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$ сЛГ-пучок соответствует суперпозиции мод ЛГ и ЭГ с одинаковыми амплитудными коэффициентами, что приводит к тому, что пучок не изменяет свое распределение интенсивности и величину ОУМ при простом астигматическом преобразовании [77*, 78*, 79*].

3. Теоретически и экспериментально рассмотрено влияние цилиндрической линзы с произвольным углом поворота (общий астигматизм) на сЛГ-пучок. Показано, что поворот цилиндрической линзы позволяет управлять ОУМ, величина которого может превышать сумму радиального и азимутального квантовых чисел ($\text{ОУМ} > n + \ell$). Кроме того, было обнаружено, что картина интенсивности астигматического сЛГ-пучка может следовать за поворотом осей астигматического элемента (эффект отслеживания структурой пучка оси вращения цилиндрической линзы) при определенных соотношениях между управляющими параметрами сЛГ-пучка и астигматического элемента [109*, 110*].

ГЛАВА 2. МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ОРБИТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СТОКСА СТРУКТУРИРОВАННОГО ПУЧКА ЛАГЕРРА–ГАУССА

Большинство работ, рассмотренных во Введении, сосредоточены на разработке и применении методов измерения отдельных характеристик вихревых лазерных пучков. К ним, в частности, относятся исследования, направленные на определение качества лазерного излучения [28], на измерение ОУМ [21–26], а также на классификацию пучков по определённым признакам, например по степени астигматизма [43–45] (см. также стандарт ISO [18] и приведённую в нем литературу). Несмотря на ценность таких подходов, они имеют ограниченную область применения и, как правило, ориентированы лишь на одну характеристику излучения. В условиях растущего интереса к многофункциональным и структурированным пучкам требуется более универсальная методика, способная охватить широкий спектр параметров, включая пространственные, угловые и орбитальные свойства.

В рамках данной работы нас интересует подход, позволяющий в единой схеме измерять ключевые характеристики сложных сЛГ-пучков независимо от их симметрий, модовой структуры и классификационных особенностей. Важным достоинством метода является то, что он основан на использовании одного или двух снимков картины интенсивности, зарегистрированных в оптической системе первого порядка, что делает его экспериментально простым и практически реализуемым.

С нашей точки зрения, наиболее перспективным инструментом для решения этой задачи выступает метод матрицы вторых моментов интенсивности [17, 113]. В его основе лежит идея представления пучка через статистические моменты распределения интенсивности, что фактически сводит процедуру измерений к математической обработке зарегистрированных распределений интенсивности. Таким образом, вместо сложных интерферометрических схем и многоступенчатых экспериментов можно ограничиться вычислительным анализом, который даёт прямую связь с фундаментальными характеристиками излучения.

Однако за видимой простотой данного подхода скрываются нетривиальные проблемы. Прежде всего необходимо выделить те элементы матрицы вторых моментов интенсивности размерности 4×4 [17, 30], которые непосредственно отражают фундаментальные свойства структурированных пучков, такие как ОУМ, астигматизм и пространственная симметрия. Не менее важно определить, в каких плоскостях распространения пучка целесообразно проводить измерения, чтобы исключить избыточные данные и повысить точность восстановления параметров.

Результаты настоящей главы развивают предложенный нами ранее метод [114*, 115*], где показано, что для восстановления состояния пучка достаточно двух картин интенсивности – в фокальной плоскости сферической линзы, расположенной перед цилиндрической, и в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы. В результате была продемонстрирована возможность прямого определения орбитальных параметров Стокса и их последующего отображения на орбитальную сферу Пуанкаре. Для обеспечения экспериментальной реализации метода разработаны программные средства, защищённые свидетельствами о государственной регистрации программ для ЭВМ: программа для экспериментального определения орбитальных параметров Стокса (RU2025685861, 2025) [116*] и программа для анализа эллипса интенсивности и угла его наклона по вторым моментам распределения (RU2025685862, 2025) [117*]. Эти разработки обеспечили не только экспериментальное подтверждение теоретических положений, но и создали основу для практического применения метода в задачах оптической метрологии, диагностики когерентных источников и передачи информации.

2.1 Матрица моментов интенсивности второго порядка сЛГ-пучка

Исследование параметров парааксиальных лазерных пучков играет ключевую роль в современной оптике, поскольку именно от них зависят как фундаментальные свойства света, так и возможности его практического применения в оптических системах обработки информации, микроманипуляции и квантовых технологиях. Одним из наиболее универсальных и надежных методов

диагностики пучков является метод моментов интенсивности второго порядка [28, 32, 113]. Данный подход позволяет не только охарактеризовать пространственные свойства излучения, но и определить параметры, связанные с ОУМ и особенностями внутренней структуры пучка [30, 66].

Формализм метода основан на использовании симплектической четырёхмерной (4D) матрицы моментов интенсивности, которая описывает распределение энергии и фазовых характеристик светового поля. В общем случае эта матрица включает 16 элементов, однако вследствие симметрии природы параксиальных пучков независимыми являются только десять компонентов [46, 51, 52]. Они поддаются экспериментальному определению с помощью оптических систем, содержащих цилиндрические и сферические линзы. Количество независимых элементов определяется степенью симметрии исследуемого пучка: для простых гауссовых и некоторых структурированных мод число измеряемых параметров может существенно сокращаться [118, 119].

Особый интерес представляет случай структурно устойчивых сЛГ-пучков. В этих случаях количество независимых элементов 4D-матрицы снижается до четырёх за счёт существования строгой связи между поперечным смешанным моментом и ОУМ пучка. Таким образом, метод матрицы моментов интенсивности позволяет напрямую связывать измеряемые величины с фундаментальными характеристиками пучка [120].

Практическая значимость использования 4D-матрицы вторых моментов интенсивности заключается в том, что данный подход открывает новые возможности для прикладной фотоники и лазерных технологий. Во-первых, он обеспечивает компактный и высокоточный способ измерения параметров пучков без необходимости применения сложных интерферометрических схем [28, 32]. Во-вторых, метод позволяет в реальном времени контролировать динамику ОУМ и внутренней структуры пучка, что особенно важно для систем оптической связи, где передача информации осуществляется за счёт модового мультиплексирования [113, 120]. В-третьих, применение 4D-матрицы даёт возможность разработки эффективных алгоритмов адаптивной оптики для коррекции аберраций в

микроскопии и лазерной обработке материалов [119]. Кроме того, данный метод может быть использован в квантовой оптике для диагностики многомодовых состояний и управления спутанными состояниями [122].

2.1.1 Определение 4D-матрицы моментов интенсивности

Функция распределения Вигнера была предложена ещё в 1932 году для учета квантовых поправок к классической статистической физике [123]. Её введение рассматривалось как попытка описать квантовую систему в фазовом пространстве через аналог траекторий. Однако вследствие принципа неопределённости координата и импульс не могут быть одновременно определены с произвольно высокой точностью. В связи с этим было введено распределение, которое не обязано обладать всеми свойствами классической функции распределения вероятности. Существенным недостатком такого описания являлась возможность отрицательных значений функции Вигнера для некоторых состояний, что послужило критерием выделения неклассических режимов. Несмотря на этот формальный недостаток, распределение Вигнера оказалось полезным инструментом и получило широкое применение в оптике: как для геометрической интерпретации состояний лазерных пучков, так и для анализа их параметров [124].

Функция распределения Вигнера для параксиального пучка определяется в четырёхмерном фазовом пространстве, образованном координатами \mathbf{r} и импульсами \mathbf{p} , при условии его распространения вдоль оси z . Координату и импульс монохроматического пучка удобно задать вектор-столбцами [17, 32]:

$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, а пространственную когерентность – функцией корреляции

$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z)$ при волновом числе k . В этом случае функция Вигнера может быть записана в виде:

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, z) = k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{r}' / 2, \mathbf{r} - \mathbf{r}' / 2; z) \exp(\pm i k \mathbf{r}' \mathbf{p}) d\mathbf{r}'. \quad (47)$$

Такое представление удобно интерпретировать в терминах геометрической оптики в фазовом пространстве (x, y, ξ, η) . В частности, распределение интенсивности пучка в поперечном сечении выражается как:

$$I(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, z) d\mathbf{p}, \quad (48)$$

распределение по импульсам (направлениям распространения) задаётся формулой:

$$I(\mathbf{p}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, z) d\mathbf{r}, \quad (49)$$

а полная интенсивность пучка, соответствующая нулевому моменту, вычисляется как:

$$J_{00} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, z) d\mathbf{r} d\mathbf{p}. \quad (50)$$

При прохождении пучка через линейную оптическую систему функция Вигнера пучка и моменты интенсивности преобразовываются. Для учёта этих преобразований используется четырёхмерная симплектическая ABCD-матрица [16], действие которой на столбец исходных координат и импульсов $(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)^T$ удобно представить в форме [30]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{p}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{p}_0 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Симплектичность матрицы \mathbf{S} выражается условиями:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^T & -\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T \end{pmatrix}^{-1}, \quad (52)$$

или в эквивалентной форме:

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{J} \mathbf{S} \mathbf{J}, \quad \mathbf{J} = i \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1}, \quad (53)$$

где \mathbf{I} – единичная 2×2 матрица. Дополнительные свойства матрицы \mathbf{S} включают [30]:

$$(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A})^T = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}, \quad (\mathbf{D} \mathbf{B}^{-1})^T = \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1}, \quad (-\mathbf{B}^{-1}) = \mathbf{C} - \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \mathbf{D}^T - \mathbf{B} \mathbf{C}^T = \mathbf{I}. \quad (54)$$

Функция распределения Вигнера (47) позволяет выразить физически измеримые параметры пучка через матрицу моментов интенсивности второго порядка [17]:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{J_0} \int \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} (\mathbf{r}^T \quad \mathbf{p}^T) W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{r} d\mathbf{p} = \frac{1}{J_0} \int \begin{pmatrix} xx & xy & x\xi & x\eta \\ xy & yy & y\xi & y\eta \\ x\xi & y\xi & \xi\xi & \xi\eta \\ x\eta & y\eta & \xi\eta & \eta\eta \end{pmatrix} W(x, y, \xi, \eta) d\mathbf{r} d\mathbf{p}. \quad (55)$$

После интегрирования её удобно представить в блочной форме [32]:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \langle xx \rangle & \langle xy \rangle & \langle x\xi \rangle & \langle x\eta \rangle \\ \langle xy \rangle & \langle yy \rangle & \langle y\xi \rangle & \langle y\eta \rangle \\ \langle x\xi \rangle & \langle y\xi \rangle & \langle \xi\xi \rangle & \langle \xi\eta \rangle \\ \langle x\eta \rangle & \langle y\eta \rangle & \langle \xi\eta \rangle & \langle \eta\eta \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{xx} & W_{xy} & M_{x\xi} & M_{x\eta} \\ W_{xy} & W_{yy} & M_{y\xi} & M_{y\eta} \\ M_{x\xi} & M_{y\xi} & U_{\xi\xi} & U_{\xi\eta} \\ M_{x\eta} & M_{y\eta} & U_{\xi\eta} & U_{\eta\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{U} \end{pmatrix}, \quad (56)$$

где подматрицы W , U , M описывают распределение интенсивности в ближней и дальней зонах, а также фазовые свойства пучка.

По определению матрица моментов интенсивности \mathbf{P} является действительной, симметричной и положительно определённой. При этом число её независимых элементов составляет десять. Фактически, каждую компоненту матрицы \mathbf{P} можно рассматривать как математическое ожидание соответствующих элементов матрицы:

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} xx & xy & x\xi & x\eta \\ xy & yy & y\xi & y\eta \\ x\xi & y\xi & \xi\xi & \xi\eta \\ x\eta & y\eta & \xi\eta & \eta\eta \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Элементы субматрицы W определяют пространственное распределение интенсивности пучка в плоскости наблюдения. Так, компонента W_{xx} соответствует среднеквадратическому отклонению от оси пучка и, по сути, задаёт ширину пучка в x -направлении: $\omega_x^2 = W_{xx}$. Аналогично, величина W_{yy} характеризует ширину пучка вдоль оси y : $\omega_y^2 = W_{yy}$. Компонента W_{xy} отвечает за асимметрию пучка. В общем случае все преобразования элементов субматрицы \mathbf{W} можно представить

через характеристический эллипс (или эллипс интенсивности), который задаётся уравнением:

$$W_{yy}x^2 + W_{xx}y^2 - 2W_{xy}xy = \det \mathbf{W}. \quad (58)$$

Наклон большой полуоси этого эллипса выражается через угол:

$$\psi_{\mathbf{W}} = \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \left(\frac{W_{xx} - W_{yy}}{2W_{xy}} \right), \quad (59)$$

а его эллиптичность равна:

$$Q_{\mathbf{W}} = \sqrt{\frac{W_{xx} + W_{yy} + \sigma \sqrt{(W_{xx} - W_{yy})^2 + 4W_{xy}}}{W_{xx} + W_{yy} - \sigma \sqrt{(W_{xx} - W_{yy})^2 + 4W_{xy}}}}, \quad (60)$$

с $\sigma = \operatorname{sgn}(W_{xx} - W_{yy})$.

Субматрица \mathbf{U} описывает свойства пучка в дальней зоне, то есть его дифракционное распределение или угловую структуру поля в фокальной плоскости сферической линзы. Её элементы также формируют характеристический эллипс, ориентация большой оси которого задаётся углом:

$$\psi_{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \left(\frac{U_{xx} - U_{yy}}{2U_{xy}} \right), \quad (61)$$

а эллиптичность определяется выражением:

$$Q_{\mathbf{U}} = \sqrt{\frac{U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \sigma_U \sqrt{(U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta})^2 + 4U_{\xi\eta}}}{U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} - \sigma_U \sqrt{(U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta})^2 + 4U_{\xi\eta}}}}, \quad (62)$$

с $\sigma_U = \operatorname{sgn}(U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta})$. Кроме того, элементы субматрицы \mathbf{U} позволяют вычислить обобщённый угол расходимости пучка:

$$\vartheta = 2\sqrt{2} \sqrt{U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta}}. \quad (63)$$

Несмотря на сложность фазовых свойств частично когерентных пучков, субматрица \mathbf{M} даёт возможность определить наиболее подходящую фазовую функцию, являющуюся квадратичной (билинейной) по x - и y -направлениям:

$$\Phi(x, y) = k(ax^2 + 2bxy + cy^2). \quad (64)$$

Параметры a , b , c в выражении (64) определяются путём минимизации обобщённого угла расходимости (63). Если фазовую функцию (64) вычесть из фактического распределения фаз в плоскости наблюдения (например, путем введения цилиндрической линзы), то придем к следующим выражениям:

$$a = \frac{W_{yy}M_{x\eta}(W_{xx} + W_{yy}) - W_{xy}^2(M_{x\xi} - M_{y\eta}) - W_{xy}W_{yy}(M_{x\eta} + M_{y\xi})}{Sp\mathbf{W} \det \mathbf{W}}, \quad (65)$$

$$b = \frac{W_{yy}M_{x\eta}(M_{x\eta} + M_{y\xi}) - W_{xy}(W_{xx}M_{y\eta} - W_{yy}M_{x\xi})}{Sp\mathbf{W} \det \mathbf{W}}, \quad (66)$$

$$c = \frac{W_{yy}M_{x\eta}(W_{xx} + W_{yy}) - W_{xy}^2(M_{x\xi} - M_{y\eta}) - W_{xy}W_{xx}(M_{x\eta} + M_{y\xi})}{Sp\mathbf{W} \det \mathbf{W}}. \quad (67)$$

Распределение фазовых параметров (65)–(67) позволяет определить угол наклона параболоида волнового фронта:

$$\psi_M = \arctg\left(\frac{2b}{a-c}\right), \quad (68)$$

а также радиусы кривизны вдоль его главных осей:

$$R_x = 2 \left[a + c + \mu \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} \right]^{-1}, \quad (69)$$

$$R_y = 2 \left[a + c - \mu \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} \right]^{-1}, \quad (70)$$

с $\mu = \text{sgn}(a-c)$. Радиусы $R_{x,y}$ могут быть как положительными, так и отрицательными, а в случае плоского фронта – стремиться к бесконечности.

Особый интерес представляют недиагональные элементы субматрицы \mathbf{M} , так как именно они определяют проекцию ОУМ на ось распространения:

$$\ell_z = M_{x\eta} - M_{y\xi}. \quad (71)$$

Матрица моментов интенсивности \mathbf{P} обладает рядом инвариантов, которые сохраняются при прохождении пучка через оптические системы первого порядка, включая среды с общим астигматизмом.

Первый инвариант связан с детерминантом матрицы \mathbf{P} . Он ограничен условием:

$$\det \mathbf{P} \geq \det \mathbf{P}_0 = \frac{1}{(4k^2)^2}, \quad (72)$$

где $\det P_0$ соответствует фундаментальному гауссову пучку. При этом значение детерминанта для любого другого пучка меньше или равно данному пределу.

Второй инвариант задаётся выражением:

$$T = (W_{xx}U_{\xi\xi} - M_{x\xi}^2) + (W_{yy}U_{\eta\eta} - M_{y\eta}^2) + 2(W_{xy}U_{\xi\eta} - M_{x\eta}M_{y\xi}) \geq 1/2k^2, \quad (73)$$

Кроме того, для пучков с астигматизмом вводится дополнительный инвариант, отражающий его «скрытый» характер [32]:

$$A = 2k^2T - M_{eff}^4 \geq 0, \quad (74)$$

где

$$M_{eff}^4 = 4k^2 \sqrt{\det \mathbf{P}}. \quad (75)$$

Если $A > 0$, то пучок обладает скрытым астигматизмом, характерным, в частности, для вихревых пучков. Напротив, для безвихревых пучков с общим астигматизмом, полученных из стигматических пучков с помощью симплектической системы, величина A равна нулю. В этом случае такие пучки можно преобразовать обратно в стигматические.

Таким образом, матрица моментов интенсивности \mathbf{P} содержит полную информацию о ключевых физических характеристиках лазерных пучков и позволяет выявлять как явные, так и скрытые проявления астигматизма.

2.1.2 4D-матрица моментов интенсивности сЛГ-пучка

Чтобы вывести явный вид элементов матрицы \mathbf{P} для сЛГ-пучка, воспользуемся представлением комплексной амплитуды во входной плоскости $z = 0$ [58], записанным ранее в формуле (4) пп. 1.1.1 «Комплексная амплитуда сЛГ-пучка». Тогда 4D-матрица моментов интенсивности имеет вид:

$$\mathbf{P}_{sLG} = \begin{pmatrix} K_x/2 & \operatorname{Re} M & 0 & 2 \operatorname{Im} M \\ \operatorname{Re} M & K_y/2 & -2 \operatorname{Im} M & 0 \\ 0 & -2 \operatorname{Im} M & 2K_x & 4 \operatorname{Re} M \\ 2 \operatorname{Im} M & 0 & 4 \operatorname{Re} M & 2K_y \end{pmatrix}, \quad (76)$$

где

$$K_x = \frac{1}{2E} \sum_{k=0}^N (2N - 2k + 1) |C_k|^2 (N - k)! k!, \quad (77)$$

$$K_y = \frac{1}{2E} \sum_{k=0}^N (2k + 1) |C_k|^2 (N - k)! k!, \quad (78)$$

$$M = \frac{1}{2E} \sum_{k=0}^N C_k C_{k+1}^* (N - k)! (k + 1)!, \quad (79)$$

$$E = \frac{J_{00}}{\pi 2^{N-1} A^2} = \sum_{k=0}^N |C_k|^2 (N - k)! k!, \quad (80)$$

и звёздочка означает комплексное сопряжение.

Из (76) видно, что субматрицы \mathbf{W} и \mathbf{U} симметричны и связаны соотношением $\mathbf{U} = 4\mathbf{W}$. Ненулевые элементы субматрицы \mathbf{M} располагаются на побочной диагонали и отличаются только знаком. Отсюда следует, что из десяти возможных дополнительных степеней свободы сЛГ-пучка (не считая N главных собственных степеней свободы каждой ЭГ-моды) фактически остаются лишь четыре. Напомним, исходное разложение (72) задано в плоскости $z = 0$, поэтому матрица моментов (76) также относится к начальной плоскости. Эволюция матрицы вторых моментов при прохождении оптической системы первого порядка описывается симплектической 4D-ABCD-матрицей \mathbf{T} и задаётся соотношением [32]: $\mathbf{P}_{out} = \mathbf{T}\mathbf{P}_{in}\mathbf{T}^t$.

Каждой 2×2 субматрице матрицы \mathbf{P} соответствует свой характеристический эллипс. Для субматрицы \mathbf{W} уравнение эллипса, угол наклона его большей полуоси и эллиптичность заданы ранее формулами (58)–(60). Для субматрицы \mathbf{U} соответствующие выражения (угол наклона и степень эллиптичности) приведены в формулах (61) и (62). Сравнивая субматрицы \mathbf{W} и \mathbf{U} , видим, что они имеют одинаковые углы наклона характеристических эллипсов.

2.2 Орбитальные параметры Стокса сЛГ-пучка

Классические параметры Стокса были введены Дж. Стоксом в 1852 году для описания состояния поляризации света. Четыре величины – S_0 , S_1 , S_2 , S_3 –

полностью характеризуют поляризационное состояние и позволяют наглядно представлять его на сфере Пуанкаре [125]. Данный подход оказался настолько универсальным, что впоследствии аналогичная идея была перенесена на другие степени свободы света. В конце 1990-х годов Паджетт и Кортиал предложили орбитальную сферу Пуанкаре, предназначенную для описания суперпозиций вихревых мод, несущих ОУМ [36].

Основой для такого переноса стало открытие Аллена и соавторов о том, что моды ЛГ с азимутальным индексом ℓ переносят ОУМ $\ell_z = \ell\hbar$ на фотон [126]. С этого момента возникла необходимость в простом и универсальном способе описания состояний света, обладающего орбитальной степенью свободы. Орбитальные параметры Стокса стали естественным решением: по аналогии с поляризацией они позволяют свести описание суперпозиции мод к трём независимым координатам на сфере, где каждая точка соответствует уникальному распределению ОУМ.

Метод основывается на выборе базисных мод, ортогональных друг другу и обладающих противоположными ТЗ, например LG_0^{+1} и LG_0^{-1} . В данном подходе орбитальные параметры Стокса вводятся по аналогии с поляризационными, однако их физический смысл определяется через пространственные характеристики пучка. В частности, параметр S_1 связан с разностью квадратов радиусов перетяжки пучка вдоль осей x и y , а параметр S_2 – с разностью квадратов радиусов перетяжки в диагональных направлениях. Параметр S_3 характеризует продольный ОУМ пучка и определяется разностью вкладов мод с противоположными ТЗ [36, 33]. Тем самым орбитальная сфера Пуанкаре выступает наглядным инструментом для анализа и визуализации модовой структуры светового пучка.

Особый интерес орбитальная сфера Пуанкаре представляет при применении к структурированным световым пучкам. Для гибридных мод ЭЛГ изменение управляющего параметра α соответствует движению состояния по большому кругу: от полюса ($\ell_z = +\ell$) через экватор ($\ell_z = 0$) к противоположному полюсу ($\ell_z = -\ell$) [42, 127, 128]. Такой переход наглядно демонстрирует плавное изменение

ОУМ. Однако в случае двухпараметрических сЛГ-пучков, введённых А.В. Воляром и соавторами [38, 108, 111], ситуация становится существенно сложнее. Здесь используются два независимых управляющих параметра – амплитудный ε и фазовый θ , которые задают относительные веса и фазы мод ЭГ в разложении исходного ЛГ-пучка. В результате орбитальные траектории на сфере Пуанкаре приобретают пространственный характер и могут иметь самопересечения [111].

Подобные траектории связаны с появлением новых эффектов: осцилляции ОУМ при распространении, формирование вихревых диполей с противоположными ТЗ и накопление геометрической фазы Берри при обходе замкнутых контуров [129, 130]. Эти явления существенно расширяют возможности управления ОУМ в структурированных пучках и делают орбитальные параметры Стокса важным инструментом для анализа динамики и эволюции сложных световых полей.

Наряду с теоретическим интересом, орбитальные параметры Стокса имеют прикладное значение. Каждое состояние на орбитальной сфере может рассматриваться как отдельный канал передачи данных, что открывает перспективы для мультиплексирования в оптических линиях связи [14]. Управление положением точки на сфере позволяет изменять величину и знак ОУМ, что используется для манипулирования микрочастицами в оптических ловушках [129]. Дополнительно траектории на сфере напрямую связаны с накоплением геометрических фаз, что важно для квантовой криптографии и квантовых коммуникаций [37].

Особое значение имеют работы А.В. Воляра и его соавторов, в которых предложены методы прямого измерения орбитальных параметров Стокса. В частности, показано, что для восстановления параметров достаточно двух распределений интенсивности пучка после прохождения через цилиндрическую линзу [115*, 131*]. Это существенно упрощает диагностику ОУМ и делает данный подход применимым в экспериментах.

2.2.1 Связь орбитальных параметров Стокса с матрицей моментов интенсивности второго порядка

Чтобы обосновать применяемый далее экспериментальный подход, сначала зададим орбитальные параметры Стокса через моменты интенсивности симплектической матрицы \mathbf{P} [120, 132], ранее введённой (см. выражение (56)). Непосредственному измерению подлежит лишь субматрица \mathbf{W} , элементы которой определяются соотношением:

$$(W_{xx} \quad W_{xy} \quad W_{yy})^T = \int (x^2 \quad xy \quad y^2)^T I(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (81)$$

где $I(\mathbf{r})$ – распределение интенсивности в некоторой z -плоскости параксиального пучка. Субматрице \mathbf{W} соответствует характеристический эллипсу (58) [39].

Воспользовавшись вращательной симметрией вектора пучка в четырёхмерном фазовом пространстве [33] и введя вектор $(\mathbf{r} - i\mathbf{p}/2)$ [120], приходим к эрмитовой двумерной матрице:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{J_{00}} \int_{\mathbb{R}^4} (\mathbf{r} - i\mathbf{p}/2)(\mathbf{r} - i\mathbf{p}/2)^\dagger W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{p} = \begin{pmatrix} S_0 + S_1 & S_2 + iS_3 \\ S_2 - iS_3 & S_0 - S_1 \end{pmatrix}, \quad (82)$$

где орбитальные параметры Стокса записываются в виде:

$$S_0 + S_1 = W_{xx} + U_{\xi\xi} / 4, \quad (83)$$

$$S_0 - S_1 = W_{yy} + U_{\eta\eta} / 4, \quad (84)$$

$$S_2 = W_{xy} + U_{\xi\eta} / 4, \quad (85)$$

$$S_3 = (M_{x\eta} - M_{y\xi}) / 2. \quad (86)$$

При этом величина $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ инвариантна относительно преобразований оптических систем первого порядка.

Для последующего анализа потребуется также стандартная процедура определения поляризационных параметров Стокса и связанных с ними элементов симплектической эрмитовой матрицы когерентности векторных пучков (см. формулы (10.8.4) и (10.8.63а) в [133]). В классической схеме используется поляризатор с углом ориентации оси пропускания ζ и фазовый компенсатор,

создающий разность фаз γ (для четвертьволновой пластинки $\gamma = \pi/2$). Параметры рассчитываются на основании шести измерений интенсивности $I(\zeta, \gamma)$:

$$S_1^{pol} = \langle |E_x|^2 - |E_y|^2 \rangle = I(0^\circ, 0) - I(90^\circ, 0), \quad (87)$$

$$S_2^{pol} = \langle 2\text{Re}(E_x^* E_y) \rangle = I(45^\circ, 0) - I(135^\circ, 0), \quad (88)$$

$$S_3^{pol} = \langle 2\text{Im}(E_x^* E_y) \rangle = I(45^\circ, \pi/2) - I(135^\circ, \pi/2). \quad (89)$$

Предложенный нами метод измерений орбитальных параметров Стокса (83)-(86) базируется на аналогии с методом измерения поляризационных параметров Стокса (87)-(89), основанным на использовании поляризационной матрицы когерентности и эрмитовой орбитальной матрицы (82) [134]. Следуя этой аналогии, рассмотрим оптическую систему, содержащую одну цилиндрическую линзу, расположенную в плоскости $z = 0$. Первые два орбитальных параметра Стокса определяются посредством измерения элементов W_{xx} , W_{yy} и W_{xy} субматрицы \mathbf{W} в плоскости $z = 0$ перед цилиндрической линзой, выполняющую роль поляризатора. В скалярном приближении они записываются следующим образом:

$$S_1 = W_{xx}(z=0) - W_{yy}(z=0) = \frac{1}{J_{00}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} x^2 I(x, y, z=0) dx dy - \int_{\mathbb{R}^2} y^2 I(x, y, z=0) dx dy \right), \quad (90)$$

$$\begin{aligned} S_2 &= W_{xy}(z=0) - W_{yx}(z=0) = \\ &= \frac{1}{J_{00}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (x+y)^2 I(x, y, z=0) dx dy - \int_{\mathbb{R}^2} (x-y)^2 I(x, y, z=0) dx dy \right), \end{aligned} \quad (91)$$

где J_{00} обозначает полную интенсивность пучка. Здесь аналогом интенсивности после поляризатора в x - и y -направлениях являются квадраты радиусов перетяжки параксиального пучка вдоль осей x и y для параметра S_1 и квадраты радиусов перетяжки вдоль $\phi_1 = \pi/4$ и $\phi_2 = -\pi/4$ направлений для S_2 параметра. Очевидно, что такой подход измерения первых двух орбитальных параметров Стокса можно использовать как для устойчивых, так и неустойчивых структурированных пучков. Чтобы определить метод измерения третьего

орбитального параметра S_3 , рассмотрим в деталях преобразование структуры пучка после цилиндрической линзы.

2.2.2 Отображение сЛГ-пучка на орбитальную сферу Пуанкаре

Представляет интерес вопрос, какая геометрическая структура скрыта за изменением элементов матрицы (76) при варьировании управляющих параметров сЛГ-пучка. Удобнее всего интерпретировать ответ через анализ траекторий на двумерной сфере Пуанкаре. Для этого требуется понизить размерность симплектической матрицы \mathbf{P} . В работах Алиевой и соавт. [33, 135] для указанной цели предложено использовать комплексную запись двумерных векторов координата–импульс в виде $\mathbf{r} - i\mathbf{p}/2$ и ввести эрмитову 2D-матрицу, аналогичную оптической матрице когерентности [136], ранее представленную в формулах (82)–(86).

Ключевым элементом в построении эрмитовой матрицы (82) является матрица $\mathbf{q}\mathbf{q}'$, где $\mathbf{q} = \mathbf{r} - i\mathbf{p}/2$. Дело в том, что начиная с функции распределения Вигнера $W(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ (47) мы использовали безразмерные векторы \mathbf{r} и \mathbf{p} . Тогда, чтобы не нарушить безразмерную структуру дальнейших рассуждений, в частности, в преобразовании Фурье:

$$\int \exp(-i\mathbf{p}'\mathbf{r} - \mathbf{r}^2/w_0^2) d\mathbf{r} = \pi w_0^2 \exp(-w_0^2 \mathbf{p}'^2/4), \quad (92)$$

(w_0 – радиус перетяжки гауссова пучка в плоскости $z = 0$) мы используем вектор $\mathbf{q} = \mathbf{r}/w_0 - iw_0 \mathbf{p}/2$, полагая $w_0 = 1$, вместо $\mathbf{q} = \mathbf{r} - i\mathbf{p}$, как это делают авторы статьи [5]. Использование матрицы \mathbf{P} для сЛГ-пучка позволяет получить параметры Стокса в виде:

$$S_0 = (K_x + K_y)/2, \quad (93)$$

$$S_1 = (K_x - K_y)/2, \quad (94)$$

$$S_2 = 2 \operatorname{Re} M, \quad (95)$$

$$S_3 = 2 \operatorname{Im} M, \quad (96)$$

а инварианты (72) и (73) как:

$$INV_1 = K_x K_y - 4|M|^2, \quad (97)$$

$$INV_2 = K_x^2 + K_y^2 + 8|M|^2. \quad (98)$$

Рассматривая (S_1, S_2, S_3) как три независимых параметра, находим, что их сумма квадратов также является инвариантом:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2 = (INV_2 - 2 \cdot INV_1)/4. \quad (99)$$

Фактически соотношение (97) и (98) задает сферу радиуса S в декартовых координатах (S_1, S_2, S_3) , которую называют орбитальной сферой Пуанкаре [33, 135]. Переход к сферическим координатам:

$$S_1 = S \cos \beta \cos 2\phi, \quad (100)$$

$$S_2 = S \cos \beta \sin 2\phi, \quad (101)$$

$$S_3 = S \sin \beta, \quad (102)$$

позволяет рассматривать эволюцию преобразований сЛГ-пучка при изменении фазового параметра θ на сфере посредством соотношений (76) – (80).

Связь углов (β, ϕ) с моментами интенсивности находится сопоставлением формул (93) – (96) и (100) – (102). Движение рабочей точки на сфере определяется двумя углами: ϕ задающим перемещение вдоль экватора, и β отвечающим за продвижение по меридианам. Типичные пространственные траектории для различных значений амплитудного параметра ε и квантовых чисел n и ℓ показаны на рисунке 21, координаты нормированы на радиус сферы, $S_{1,2,3} \rightarrow S_{1,2,3}/S$, согласно (99). В отличие от гибридного ЭЛГ-пучка, формирующего плоскую круговую траекторию ($S_1 = 0$), траектории сЛГ-пучка имеют существенно более сложную пространственную форму с множеством лепестков, число которых равно $N = 2n + \ell$, то есть числу ЭГ-мод. При $\varepsilon \leq 1$ траектории преимущественно располагаются в северном полушарии сферы Пуанкаре, соответствующем значениям $S_3 > 0$, тогда как южному полушарию соответствует значение $S_3 < 0$: северному полюсу соответствуют ЛГ-моды с $\ell_z = \ell$, южному – с $\ell_z = -\ell$. Экватор ($S_3 = 0$) при этом образуют, как правило, суперпозиции ЭГ-мод с нулевым ОУМ

($\ell_z = 0$), а не только чистые ЭГ-моды, как в случае гибридного ЭЛГ-пучка [36, 42, 132]. Изменение ОУМ происходит вдоль меридианов на угол $\beta = \arcsin(S_3/S)/2$, тогда как поворот картины интенсивности описывается соотношением $\text{tg} 2\phi = S_2/S_1$. Из (76), (59) и (93)–(96) следует:

$$\text{tg} 2\phi = \text{tg} 2\psi_W = 4 \frac{\text{Re} M}{K_x - K_y}, \quad (103)$$

то есть углы наклона характеристических эллипсов субматриц W и U совпадают с углом поворота картины интенсивности сЛГ-пучка ($\phi = -\psi_W$) на экваторе сферы.

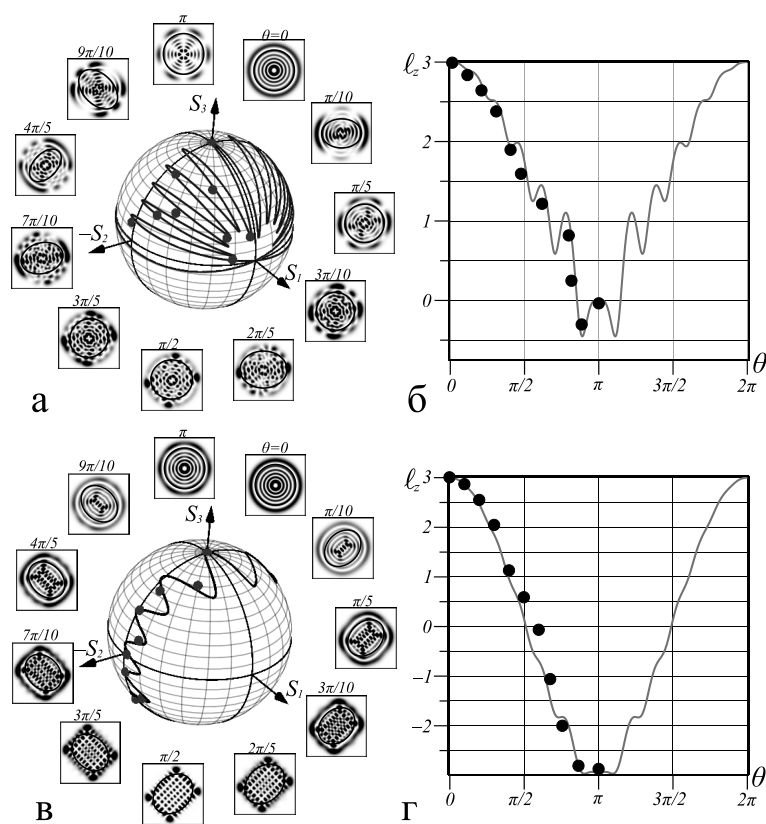


Рисунок 21 – (а, в) Отображение сЛГ-пучка с $(n, \ell) = (5, 3)$ на сферу Пуанкаре с нормированными координатами $S_{1,2,3} \rightarrow S_{1,2,3}/S$ для $\varepsilon = 1$ (а) и $\varepsilon = 10$ (в).

Характеристические эллипсы субматрицы W показаны на фоне распределений интенсивности. Каждая картина интенсивности (б, г) соответствует экстремумам ОУМ в зависимости $\ell_z(\theta)$. Жирные точки отмечают данные, полученные

экспериментально

Примеры пространственных траекторий, иллюстрирующие отображение преобразований сЛГ-пучка на сферу Пуанкаре при изменении $\theta \in (0, 2\pi)$, приведены на рисунке 21 (для удобства на всех рисунках выбраны нормированные параметры Стокса, $S_{1,2,3} \rightarrow S_{1,2,3}/S$). Заметим, что вариации параметра θ можно рассматривать как способ передачи данных.

Рассмотрим характерные особенности при сравнительно больших квантовых чисел n и ℓ . Как видно из рисунка 21а, для $n = 5$ и $\ell = 3$ траектории приобретают многолепестковую форму, число лепестков совпадает с числом степеней свободы $N = 2n + \ell$. Большинство лепестков сосредоточено в восточной части северного полушария сферы Пуанкаре (область $S_1 > 0$, $S_3 > 0$), исключение составляет нижняя траектория, где на экваторе ($S_3 = 0$) возникает точка самопересечения. Симметричная ей точка располагается на экваторе в западной части ($S_1 < 0$, $S_3 = 0$), на рисунке не показана. Наблюдается соответствие между вершинами лепестков и экстремумами ОУМ на рисунке 21б, жирные маркеры вблизи указанных участков подчёркивают эту связь. При увеличении амплитудного параметра ε лепестки сглаживаются (рисунок 21в), однако соответствие между их вершинами и экстремумами S_3 сохраняется (рисунок 21г). Отображение на сфере (рисунок 21а, в) окружено экспериментальными картинками интенсивности, соответствующими состояниям сЛГ-пучка в вершинах лепестков.

2.3 Метод измерения орбитальных параметров Стокса сЛГ-пучка

За последние десятилетия интерес к структурированным пучкам – семействам ЭГ, ЛГ, ЭЛГ, а также к вихревым пучкам Айнса–Гаусса и их взаимосвязям – значительно возрос как в отношении их геометрических, так и векторных свойств [2, 24, 42, 83, 137–140]. Ключевым инструментом описания «скрытой геометрии» таких полей стало отображение состояний на сферу Пуанкаре: подход, предложенный Паджеттом и Кортиэлом для пучков низшего порядка [36], получил операторное обоснование у ван Энка [141], а также интерпретацию в терминах орбитальных параметров Стокса в работах Алиевой и

Бастианса [33], дополнительно его геометрические и симплектические свойства были развиты в ряде исследований [33, 36, 42, 142-143].

Для однопараметрических гибридных ЭЛГ-пучков это отображение приводит к плоской замкнутой траектории вдоль главного меридиана сферы ($S_2 = 0$), на которой ОУМ l_z непрерывно изменяется от $+\ell_z$ до $-\ell_z$ через нулевое значение [35, 143]. Пространственный характер траекторий достигается введением дополнительного управляющего параметра – поворота призм Дове, – что сопряжено с управляемой геометрической фазой [37, 144].

Существенно иная картина возникает для двухпараметрических сЛГ-пучков: представление ЛГ-пучка в виде суммы ЭГ-мод с добавленными амплитудно-фазовыми возмущениями (ε, θ) порождает управляемую трансформацию кольцевых дислокаций, образование топологических диполей и быстрые осцилляции ОУМ, зависящие от радиального числа n [58]. Эти механизмы непосредственно отражаются на форме и топологии траекторий на сфере Пуанкаре, включая возможность их самопересечений [58, 39]. При этом отмечалось, что опубликованные к настоящему времени исследования скрытой геометрии преимущественно теоретические и опираются на численное моделирование, что выдвигает на первый план задачу прямого экспериментального измерения орбитальных параметров Стокса [39, 114*–117*].

Надёжной основой для такой измерительной схемы служит метод матриц моментов интенсивности второго порядка: в симплектической 4D-матрице \mathbf{P} лишь десять элементов независимы и могут быть восстановлены с помощью комбинации цилиндрических и сферических линз [18, 32]. Для структурно устойчивых сЛГ-пучков число параметров дополнительно сокращается благодаря связи между измеряемым элементом W_{xy} и ОУМ [120]. В настоящем разделе этот формализм используется для разработки и обоснования метода прямого измерения орбитальных параметров Стокса сЛГ-пучка, позволяющего сократить число экспериментально регистрируемых распределений интенсивности и обеспечить корректную визуализацию состояний на орбитальной сфере Пуанкаре.

2.3.1 Теоретическое обоснование метода измерения орбитальных параметров Стокса сЛГ-пучка

В дальнейшем ограничимся анализом устойчивых структурированных пучков, то есть таких, чьи моды обладают одинаковыми начальными радиусами перетяжки ω_0 и совпадающими фазами Гуи. Согласно [132], ОУМ такого пучка определяется через произведение комплексных амплитуд соседних мод $C_j^* C_{j+1}$ и задаётся формулой:

$$\ell_z = 2 \sum_{j=0}^{N-1} (j+1)!(N-j)! \text{Im}(C_j^* C_{j+1}) / J_0, \quad (104)$$

где $N = 2n + \ell$ для ЛГ мод и $N = n + m$ для ЭГ мод.

В качестве примера рассмотрим преобразование сЛГ-пучка с длиной Рэлея мод z_0 на цилиндрической линзе фокусного расстояния f_{CL} . Комплексная амплитуда, заданная в (4), может быть переписана в компактной форме [58]:

$$sLG(\mathbf{r}|\varepsilon, \theta) = \sum_{j=0}^N C_j(\varepsilon, \theta) HG_{N-j,j}(\mathbf{r}), \quad (105)$$

где $HG_{N-j,j}(\mathbf{r}) = H_{N-j}(\sqrt{2}x)H_j(\sqrt{2}y)\exp(-x^2 - y^2)$, $H_m(\sqrt{2}x)$ - многочлен Эрмита, ε и θ – амплитудный и фазовый управляющие параметры сЛГ-пучка, явный вид амплитуд мод C_j можно найти в статьях [39, 58, 120] и сделана замена $(x, y) \Leftrightarrow (x/w_0, x/w)$, $z \Leftrightarrow z/z_0$, $z_0 = kw_0^2/2$ – длина Рэлея.

Заметим, что ЭГ-пучки являются собственными модами цилиндрической линзы [34]. Это свойство радикально изменяет, как картину интенсивности пучка, так и фазовое распределение собственных мод, делая структурированный пучок неустойчивым при распространении вдоль оси z . При ориентации главных осей линзы вдоль x и y компоненты $H_{N-j}(\sqrt{2}x)\exp(-x^2)$ и $H_j(\sqrt{2}y)\exp(-y^2)$ приобретают различную кривизну волнового фронта; соответственно, различаются радиусы пучка $\bar{w}_x(z)$, $\bar{w}_y(z)$ и фазы Гуи $\Gamma_x(z)$, $\Gamma_y(z)$ [16]. Расчёт показывает [120], что элементы субматрицы \mathbf{W} имеют вид:

$$W_{xy} = (\bar{w}_x(z) \bar{w}_y(z) / 2J_{00}) \sum_{j=0}^{N-1} (N-j)!(j+1)! \operatorname{Re}(C_j C_{j+1}^*), \quad (106)$$

$$W_{xx} = (\bar{w}_x^2(z) / 4J_{00}) \sum_{j=0}^N (2N-2j+1)(N-j)! j! |C_j|^2, \quad (107)$$

$$W_{yy} = (\bar{w}_y^2(z) / 4J_{00}) \sum_{j=0}^N (2j+1)(N-j)! j! |C_j|^2, \quad (108)$$

где \bar{w}_x^2 , \bar{w}_y^2 заданы в (28), (29), а Γ_x , Γ_y – в (30), (31),

$$C_k = \sum_{k=0}^N (-1)^k c_k^{(n,n+l)} (\pi/4) c_k^{(N-k,k)}(0) \exp(i j \Gamma_{xy}). \quad (109)$$

Особенности преобразований сЛГ-пучка после цилиндрической линзы удобнее всего проследить параллельно в нескольких проекциях: по спектрам фаз и амплитуд, по изменению ℓ_z , по поведению взаимной интенсивности W_{xy} вдоль осей x и y , а также через отображение состояний на сфере Пуанкаре (см. рисунок 22). Диаграмма амплитуд (рисунок 22а) остаётся неизменной при распространении – перекрёстной перекачки между x - и y -составляющими мод не возникает. Зато спектр фаз (рисунок 22б) существенно перестраивается, поскольку собственные ЭГ-моды приобретают различные фазы Γ_x и Γ_y вследствие неодинаковой кривизны фронта в направлениях x и y . Это, в свою очередь, ведёт к заметным изменениям картины интенсивности (рисунок 22в), что сразу проявляется в быстром изменении ОУМ и моменте взаимной интенсивности $W_{xy}(\theta, z)$ на рисунке 22г, д. Характерно, что зависимости $\ell_z(\theta, z)$ и $W_{xy}(\theta, z)$ переходят друг в друга: ОУМ $\ell_z(\theta, z=0)$ перед линзой превращается в взаимную интенсивность $4W_{xy}(\theta, z=1)$ в плоскости двойного фокуса, тогда как учетверённая взаимная интенсивность перед линзой переходит в орбитальный момент в двойном фокусе, $4W_{xy}(\theta, z=0) \rightarrow \ell_z(\theta, z=1)$. Такая взаимодополняемость непосредственно вытекает из сравнения (104) и (106): отличия сводятся к замене $\operatorname{Im}(C_j^* C_{j+1}) \leftrightarrow \operatorname{Re}(C_j^* C_{j+1})$. Поскольку амплитуды ЭГ-мод в (109) зависят от

разности фаз Гуи $\Gamma_{xy} = \Gamma_x - \Gamma_y$, то в плоскости двойного фокуса $z = 2f_{CL}$ при условии $z_0 = 2f_{CL}$ имеем $\Gamma_{xy} = \Gamma_x - \Gamma_y = (j+1)\pi/2 - j\pi/2 = \pi/2$, т.е. сдвиг между соседними модами не зависит от номера. Отсюда и следует преобразование $\ell_z(\theta, z=0) \rightarrow 4W_{xy}(\theta, z=1)$ в (104), (106). Эту взаимную замену ℓ_z и $4W_{xy}$ будем называть принципом взаимности. Он и позволяет измерять третий орбитальный параметр Стокса, равный ОУМ, по формуле:

$$S_3 = \ell_z = \frac{1}{J_0} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (x+y)^2 I(x, y, z=2f_{CL}) dx dy - \int_{\mathbb{R}^2} (x-y)^2 I(x, y, z=2f_{CL}) dx dy \right). \quad (110)$$

На первый взгляд принцип взаимности выглядит парадоксально: ℓ_z определяется мнимой частью $C_j^* C_{j+1}$ (см. (104)), тогда как в (106) фигурирует действительная часть. Однако учёт набега разности фаз Гуи после цилиндрической линзы (см. [120] и ссылки там) устраняет противоречие: замена $\text{Im} \leftrightarrow \text{Re}$ эквивалентна повороту траектории состояний на орбитальной сфере Пуанкаре как единого целого.

Геометрически принцип взаимности проявляется как поворот отображения состояний на сфере Пуанкаре по мере распространения до плоскости $z=1$ (рисунок 22е). Поворот цилиндрической линзы на $\pi/2$ ведёт к вращению вокруг оси S_2 , при произвольном угле ось вращения лежит в плоскости $S_1 S_2$. В обоих случаях циклическая модуляция фазового параметра θ сопровождается изменением ОУМ. Если требуется вращение только вокруг оси S_3 без изменения орбитального момента, следует использовать вращение призмы Дове, установленной перед цилиндрической линзой без изменения ориентации её осей.

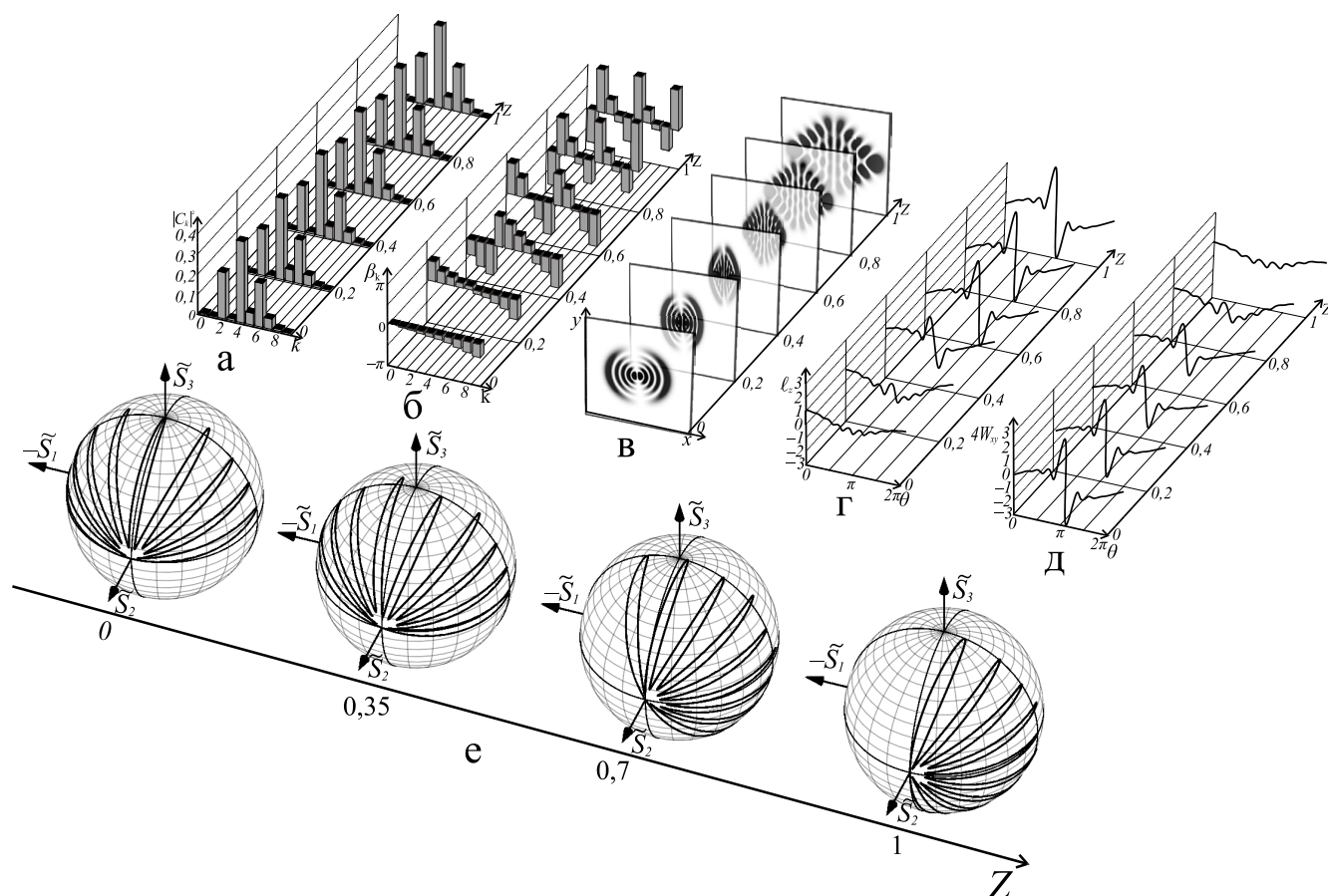


Рисунок 22 – Модель эволюции астигматического преобразования сЛГ-пучка с $(n; \ell = 4; 1)$, $z_0 = 1$ м и $(\varepsilon; \theta = 1; 0,8\pi)$ при прохождении через цилиндрическую линзу с фокусным расстоянием $f_{CL} = 0,5$ м; (а) – спектры квадрата модуля амплитуды и (б) – фаз мод ЭГ, соответствующих всплеску ОУМ при $z = 2f_{CL}$; (в) – эволюция распределения интенсивности сЛГ-пучка вдоль оси $Z = z/z_0$; (г) – преобразование ОУМ $\ell_z(\theta)$ и (д) – перекрёстного момента интенсивности $4W_{xy}$ сЛГ пучка вдоль оси Z ; (е) - преобразования пространственного отображения состояний сЛГ-пучка на сфере Пуанкаре вдоль оси Z

2.3.2 Экспериментальная реализация метода измерения орбитальных параметров Стокса сЛГ-пучка

Основная цель данного параграфа – разработать экспериментальной методики прямого измерения орбитальных параметров Стокса и, тем самым, обеспечение отображения состояний устойчивых структурированных пучков на орбитальную сферу Пуанкаре. Простота подхода обусловлена тем, что требуется

всего два снимка распределения интенсивности с последующей компьютерной обработкой для вычисления параметров по формулам (90), (91), (110) с использованием программы для ЭВМ [116*].

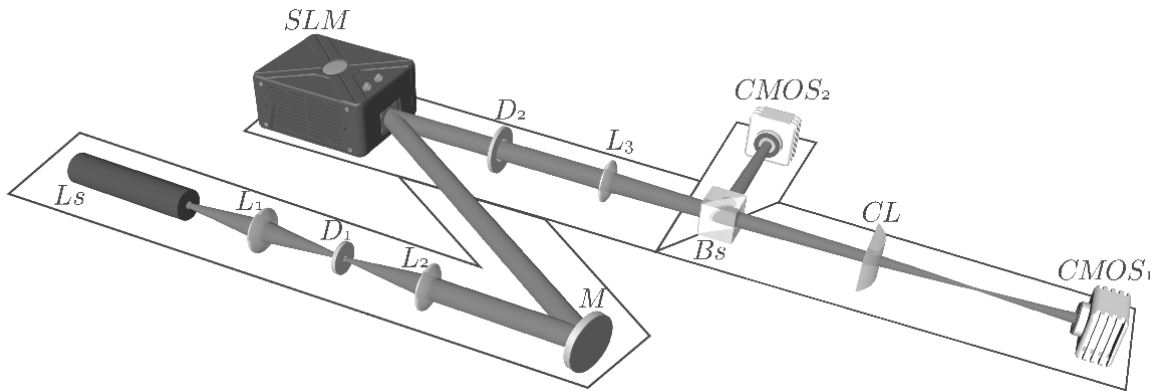


Рисунок 23 – Схема экспериментальной установки: L_s – лазер, L_{1-3} – сферические линзы, $D_{1,2}$ – диафрагмы, M – зеркало, SLM – пространственный модулятор света, CL – цилиндрическая линза, B_s – делительная призма, $CMOS_{1,2}$ – детекторы

Схема установки приведена на рисунке 23 [114*, 115*], сопутствующая процедура восстановления спектра ЭГ-мод (амплитуд и фаз) обсуждалась в Главе 1 и в [120, 38]. Поэтому далее акцент сделан на прямом измерении орбитальных параметров Стокса. Регистрация выполнялось в прямом плече установки таким образом, чтобы фотодетектор $CMOS_2$ находился в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы. Фокусное расстояние цилиндрической линзы $f_{CL} = 0,5$ м, а радиус перетяжки гауссова пучка w_0 при формировании цифровой голографической решётки на SLM подбирался так, чтобы длина Рэлея удовлетворяла условию $z_0 = 2f_{CL} = 1$ м. Для определения орбитальных параметров Стокса достаточно двух изображений: в фокальной плоскости сферической линзы и в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы. Обработка снимков по формулам (81), (90), (91), (110) позволяет рассчитать искомые параметры. Предварительная коррекция изображений (включая удаление точечных дефектов чувствительных элементов $CMOS$ -камеры) заметно снижает инструментальную погрешность. Важным является также точное согласование апертуры пучка с

размерами компьютерно-синтезированной голограммы на пространственном модуляторе света. Высокая воспроизводимость результатов обеспечивалась использованием фазового *SLM*-модулятора Thorlabs EXULUS-4K1/M, позволяющего формировать пучки с числом мод до ~ 350 благодаря высокому разрешению матрицы. Для регистрации интенсивности применялись две *CMOS*-камеры (*CMOS*_{1,2}, Microme 20). Точная установка плоскости регистрации после цилиндрической линзы *CL* требовала прецизионного позиционирования сферической линзы L_3 , которое осуществлялось на 6D-столиках с трёхосевыми поступательными и угловыми перемещениями (Thorlabs MAX603D). Суммарная погрешность восстановления спектра ЭГ-мод $|C_k|^2$ и разности фаз β_k во втором плече не превышала 5–6%, тогда как ошибка измерения параметров Стокса в первом плече была ниже 4%.

В качестве объекта исследования выбрано семейство двухпараметрических устойчивых сЛГ-пучков. Рассматривались две группы квантовых чисел: (1) $n=4, \ell=1$ и (2) $n=6, \ell=1$, амплитудные параметры – $\varepsilon=1$ и $\varepsilon=10^4$. Фазовый параметр θ изменяли в диапазоне $\theta \in (0, 2\pi)$ с шагом $\Delta\theta = \pi/60$, что позволяло корректно восстановить траекторию состояний на сфере с фиксацией лепестковой структуры. Среднеквадратичная ошибка оценки $S_3 = \ell_z$ вычислялась по методике [145] и на рисунке 24 не превышала 5%. Для сопоставления параллельно выполнялись измерения спектра ЭГ-мод во втором плече методом высших моментов интенсивности [120, 38], их погрешность достигала 7%, что выше, чем при прямом определении орбитальных параметров Стокса, и согласуется с ранее полученными результатами [39].

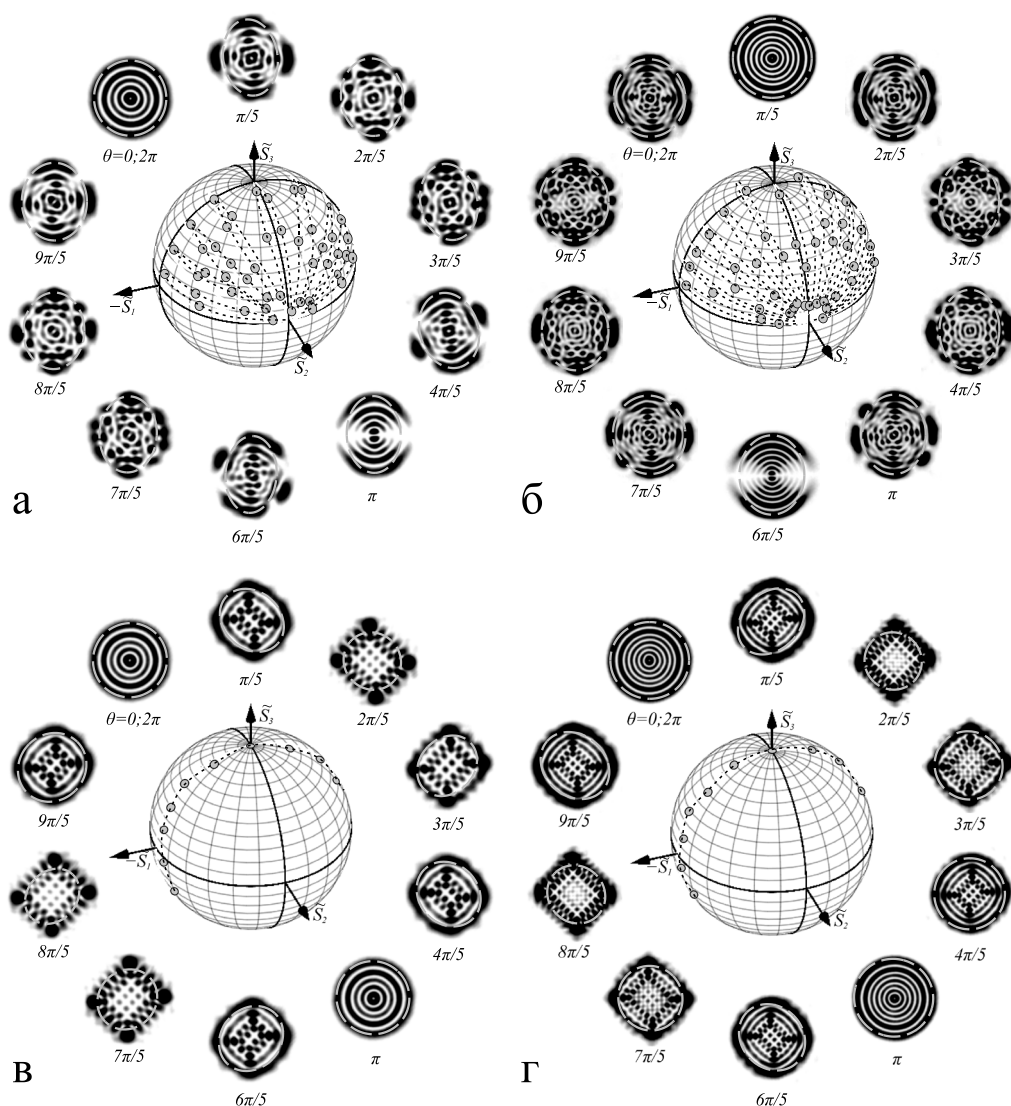


Рисунок 24 – Экспериментально полученные кривые отображения сЛГ-пучков на орбитальной сфере Пуанкаре; (а,в) – $(n, \ell = 4, 1), \varepsilon = 1$; (б,г) – $(n, \ell = 6, 1), \varepsilon = 10^4$.

Каждая орбитальная сфера Пуанкаре сопровождается экспериментальными картинками интенсивности с соответствующими точкам на сфере. На фоне каждого распределения интенсивности серой пунктирной линией приведены экспериментальные ассоциированные эллипсы субматрицы \mathbf{W} , построенные при помощи программы для ЭВМ [117*]

Для перехода к анализу асимптотических состояний сЛГ-пучка воспользуемся ранее введённым представлением комплексной амплитуды (6) [56]. При малых значениях амплитудного параметра $\varepsilon \sim 1$ в орбитальные параметры Стокса вносят вклад оба слагаемых выражения (6), что приводит к формированию сложной многолепестковой траектории, как это показано на рисунке 24а, б. В

пределе $\varepsilon \gg 1$ доминирует второй член выражения (6), соответствующий гибриднему ЭЛГ-пучку [146], повернутому на угол $-\pi/4$. В этом случае состояния однопараметрического ЭЛГ-пучка отображаются на сфере Пуанкаре в виде плоской траектории вдоль главного меридиана ($S_2 = 0$), что подтверждается экспериментальными точками на рисунке 24в, г.

2.4 Выводы к главе 2

1. Теоретически найдены и экспериментально измерены элементы $4D$ симплектической матрицы моментов интенсивности второго порядка \mathbf{P} для параксиальных сЛГ-пучков с двумя управляющими параметрами – амплитудным ε и фазовым θ . Симплектические свойства матрицы позволили получить $2D$ эрмитову матрицу (аналогичную матрице когерентности в оптике) и рассчитать орбитальные параметры Стокса (S_1, S_2, S_3). Сумма квадратов орбитальных S_i -параметров образует инвариант S оптической системы первого порядка. В терминах элементов матрицы \mathbf{P} орбитальные параметры Стокса параметризуются параметром θ сЛГ-пучка. Вариация амплитудного параметра контролирует площадь, охваченную траекторией, ее форму и положение точек самопересечения [115*, 117*].

2. Разработан метод прямого измерения орбитальных параметров Стокса, в основе которого лежит аналогия со стандартным подходом к измерению поляризационных параметров Стокса структурированных пучков. В качестве четвертьволновой пластинки выступает цилиндрическая линза, а действие поляризатора ассоциируется с действием матричного оператора моментов интенсивности \mathbf{P} второго порядка на картину интенсивности структурированного пучка, снятую перед цилиндрической линзой и в плоскости двойного фокуса. Для этого использовались физически измеряемые элементы симплектической $4D$ -матрицы \mathbf{P} , а именно, элементы $2D$ -субматрицы \mathcal{W} . Процесс измерений предполагает только два снимка распределения интенсивности, компьютерная обработка которых позволяет вычислить шесть ключевых компонент искомым

параметров. Вычисление первых двух орбитальных параметров Стокса S_1 и S_2 предполагает компьютерную обработку первого снимка картины интенсивности перед цилиндрической линзой. Третий орбитальный параметр Стокса S_3 вычисляется при компьютерной обработке второго снимка картины интенсивности в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы и вычисления перекрестного момента интенсивности W_{xy} . Основанием к такому выбору подхода к измерению параметра S_3 является обнаруженный принцип взаимности между орбитальным угловым моментом исследуемого пучка и недиагональными элементами W_{xy} в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы. Полученные экспериментальные результаты хорошо согласуются с компьютерным моделированием [116*, 131*].

ГЛАВА 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СТОКСА СТРУКТУРИРОВАННЫХ АСТИГМАТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ В ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Распространение лазерного пучка через оптическую систему, содержащую астигматические линзы, сопровождается радикальной перестройкой его фазовой и амплитудной структуры, в частности, ОУМ [16, 31, 34, 147]. Так, например, свободный от оптических вихрей лазерный пучок может приобрести аномально большой ОУМ под действием цилиндрической линзы [148, 149]. Важным этапом в этих исследованиях стало открытие конверсии ОУМ в оптической системе из двух цилиндрических линз [126, 150-152], где пучки ЭГ преобразуются в пучки ЛГ и наоборот, а также может осуществляться конверсия знака ОУМ. Однако конверсию ОУМ можно реализовать и в простейшей системе, состоящей из двух сферических линз и одной цилиндрической линзы, как это предсказали авторы [153]. Одна из таких оптических схем рассмотрена в работе [34] и включает две последовательно расположенные сферические линзы и одну цилиндрическую линзу.

Несколько иначе происходит преобразование устойчивых сЛГ-пучков цилиндрической линзой [91, 154, 155], поскольку такие пучки представляют собой суперпозицию множества ЭГ-мод с управляемыми амплитудами и фазами [58]. Показано, что некоторые состояния сЛГ-пучков сохраняют свою внутреннюю структуру даже под действием цилиндрической линзы [108], за исключением её собственных ЭГ-мод. Авторы [150] подошли к этой проблеме с другой стороны, используя цилиндрическую линзу для определения топологического заряда оптического вихря. Данный подход был впоследствии расширен до измерения орбитальных параметров Стокса (включая ОУМ) в однородных, свободных от астигматизма, структурированных сЛГ-пучках [115*]. С другой стороны, было обнаружено [120], что Фурье-преобразование астигматического пучка в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы освобождает пучок от астигматизма, т.е. восстанавливает пучок, идентичный входному. Исследование такого действия сферической линзы, наряду с корректирующим преобразованием на наличие

дополнительных геометрических свойств в определённых критических плоскостях, где тонкая структура пучка существенно изменяется.

Принято считать, что распространение как стандартных, так и устойчивых структурированных пучков через свободное пространство или систему сферических линз не изменяет их ОУМ [1, 157]. Изменяется лишь масштаб и возникает дополнительная фаза, известная как фаза Гуи. Однако при этом часто забывают указать одну деталь: пучки должны быть однородными. Ярким примером является конверсия ОУМ в модовом конверторе, предсказанная ещё в начале 1990-х годов Абрамочкиным и Волостниковым [34]. Позднее Аллен и соавторы в [43] показали, что система из двух цилиндрических линз преобразует пучок ЭГ без ОУМ в пучок ЛГ, обладающий ОУМ. При этом цилиндрическая линза формирует условия для преобразования, тогда как окончательная конверсия ОУМ обусловлена астигматической фазой Гуи, возникающей в неоднородном ЭГ-пучке между линзами. Вслед за ними ван Енк и Ниенхис [158], используя операторный подход, показали, что цилиндрическая линза не изменяет полный ОУМ. Но оставалось непонятным, как цилиндрическая линза может не изменять ОУМ, если структура свободно распространяющегося пучка после неё радикально изменяется, т.е. может заменять оптические вихри, переносящие ОУМ, на свободные от ОУМ краевые дислокации.

Эта проблема была проанализирована Ананьевым и Бекшаевым [30] в рамках метода матрицы вторых моментов интенсивности, где полный ОУМ представлен как сумма вихревой и астигматической составляющих. Эти компоненты могут перераспределять вклад при распространении, однако их сумма остаётся инвариантной. По сути, проблема сводится к вопросу: какой ОУМ измеряется на эксперименте и как измерить полный ОУМ? Немного позже Бекшаев с соавторами [31] теоретически продемонстрировали такое представление полного ОУМ на примере ЛГ-пучка с нулевым радиальным числом. Скрытая геометрия астигматических преобразований проявилась в отображении двухпараметрического сЛГ-пучка на орбитальную сферу Пуанкаре [39]. Показано, что траектория состояний свободного от астигматизма сЛГ-пучка образует

замкнутую пространственную кривую при циклическом изменении параметров, а действие цилиндрической линзы соответствует повороту этой траектории на 90° вокруг одной из осей сферы без изменения её формы [115*]. Кроме того, установлено, что Фурье-преобразование на сферической линзе подавляет астигматическую составляющую ОУМ. Дополняют эти результаты исследования [131*], посвящённые прямому измерению орбитальных параметров Стокса в неоднородных астигматических пучках с их последующим отображением на сферу Пуанкаре. Поскольку амплитуды собственных мод остаются неизменными при распространении, управление ОУМ осуществляется через астигматическую фазу Гуи, определяемую разностью фаз вдоль главных осей.

Следует отметить, что в произвольном сечении структурированного пучка непосредственно измеримы только три элемента матрицы вторых моментов интенсивности – среднеквадратичные отклонения распределения интенсивности вдоль различных направлений [32], определяющие первые два орбитальных параметра Стокса. Определение третьего параметра Стокса, связанного с ОУМ, требует специальных условий, реализуемых в критических плоскостях [120].

Результаты, изложенные в настоящей главе, развивают предложенный нами модифицированный метод прямого измерения орбитальных параметров Стокса для структурированных астигматических пучков в оптической системе первого порядка – в конфигурации линз «сферическая–цилиндрическая–сферическая», формирующей две критические плоскости: (i) Фурье-плоскость сферической линзы, установленной после цилиндрической, и (ii) плоскость восстановления исходного пучка, положение которой определяется по алгоритмам «Программы определения эллипса интенсивности и угла его наклона по вторым моментам распределения» (RU2025685862, 2025) [117*]. Метод сформулирован в наших работах [57*, 78*, 131*], где показано, что для определения орбитальных параметров Стокса достаточно двух изображений интенсивности, зарегистрированных в указанных плоскостях. Полученные параметры позволяют экспериментально восстановить пространственную траекторию состояния пучка и отобразить её на орбитальной сфере Пуанкаре с помощью программы для ЭВМ

«Программа экспериментального определения орбитальных параметров Стокса» (RU2025685861, 2025) [116*]. При этом метрологическая достоверность сохраняется при минимальном объёме исходных данных [32, 115*, 120, 152]. В такой конфигурации наглядно проявляется предсказанный Бекшаевым обмен между вихревой и астигматической составляющими ОУМ при сохранении их суммы. Для астигматического входного пучка в первой плоскости происходит подавление астигматической компоненты при доминировании вихревого ОУМ, тогда как во второй плоскости подавляется вихревой вклад и преобладает астигматическая составляющая. Для неастигматического входного пучка реализуется противоположная картина [30, 31]. Таким образом, двухкадровая процедура позволяет восстановить эволюцию состояния пучка на орбитальной сфере Пуанкаре на основе параметров Стокса, определённых из экспериментальных измерений.

3.1 Теоретическое обоснование преобразования сЛГ-пучка в оптической системе состоящей из цилиндрической и сферической линзы

Астигматические преобразования вырожденных однопараметрических гибридных пучков ЭЛГ подробно рассмотрены в ряде статей Абрамочкина и соавторов [22]. Пространственное вырождение ЭЛГ пучков снимается в сЛГ-пучках, которые можно представить в виде суммы наклоненного под углом $3\pi/4$ стандартного ЭЛГ и ЛГ-пучка, делая его двухпараметрической волновой структурой [20].

3.1.1 ABCD матричный формализм

Распространение однородного структурированного сЛГ-пучка через оптическую систему (см. рисунок 25) с двумя сферическими линзами L_1 , L_2 и цилиндрической линзой CL , расположенной между ними, сопровождается рядом астигматических преобразований.

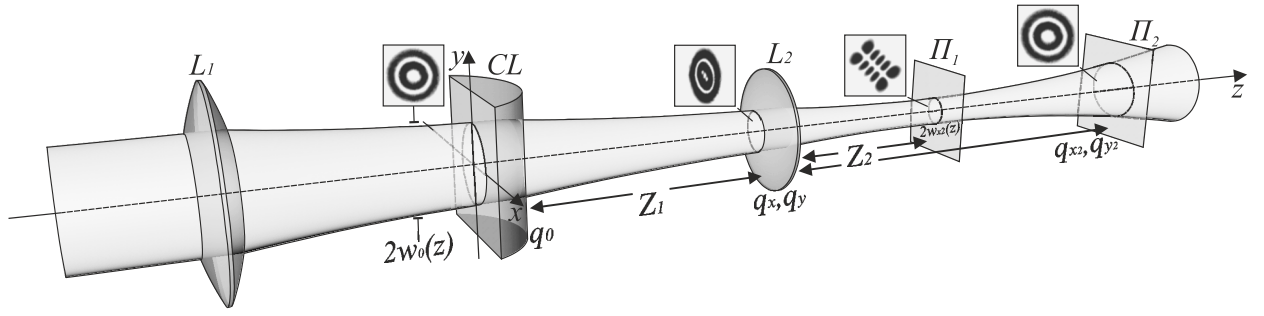


Рисунок 25 – Эскиз оптической системы из двух сферических линз L_1 , L_2 и цилиндрической линзы CL , расположенной между ними

Первая линза L_1 формирует на входе цилиндрической линзы CL сЛГ-пучок с радиусом перетяжки w_0 при условии $z_0 = (kw_0 / 2) = 2f_{CL}$, где f_{CL} – фокусное расстояние цилиндрической линзы. Цилиндрическая линза преобразует сЛГ-пучок в асЛГ-пучок с простым астигматизмом. Сферическая линза L_2 с фокусным расстоянием f_{L2} проецирует картину поля пучка из плоскости, расположенной на расстоянии $Z_1 = z_1 / z_0$ перед L_2 линзой в плоскость, расположенную на расстоянии $Z_2 = z_2 / z_0$ после L_2 линзы. Эта последовательность преобразований задает комплексную амплитуду асЛГ-пучка в виде [120]:

$$asLG_{n,\ell}(x, y, z | \varepsilon, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\bar{w}_{x2}\bar{w}_{y2}}} \exp\left(i\left[\frac{x^2}{\bar{q}_{x2}} + \frac{y^2}{\bar{q}_{y2}}\right]\right) e^{i\Phi_{n,\ell}} \times \sum_{k=0}^{2n+\ell} C_k H_{2n+\ell-k}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\bar{w}_{x2}}\right) H_k\left(\frac{\sqrt{2}y}{\bar{w}_{y2}}\right), \quad (111)$$

где $x, y \rightarrow x / w_0, y / w_0$,

$$C_k = (2i)^k P_k^{(n+\ell-k, n-\ell)}(0) \varepsilon_k \exp(ik\Gamma_{xy}), \quad (112)$$

где $\Phi_{n,\ell} = (2n + \ell + 1/2)\Gamma_x / 2 + \Gamma_y / 2$, $\varepsilon_k = (1 + \varepsilon e^{ik\theta})$, $\kappa_{sh} = z_0 / f_{L2}$,

$$\bar{q}_{x2} = \frac{\bar{q}_x}{-\kappa_{sh}\bar{q}_x + 1} + Z_2, \quad \bar{q}_{y2} = \frac{(1 - Z_2\kappa_{sh})(Z - i) + Z_2}{1 + i\kappa_{sh}(iZ + 1)}, \quad (113)$$

$$\frac{1}{\bar{w}_{x2}^2} = -\operatorname{Re}\left(\frac{i}{\bar{q}_{x2}}\right), \quad \frac{1}{\bar{w}_{y2}^2} = -\operatorname{Re}\left(\frac{i}{\bar{q}_{y2}}\right), \quad (114)$$

$$\Gamma_{x2} = \arg \sqrt{\frac{1}{\bar{q}_{x2}}}, \quad \Gamma_{y2} = \arg \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{q}_{y2}}} \right), \quad \Gamma_{xy} = \Gamma_{x2} - \Gamma_{y2}. \quad (115)$$

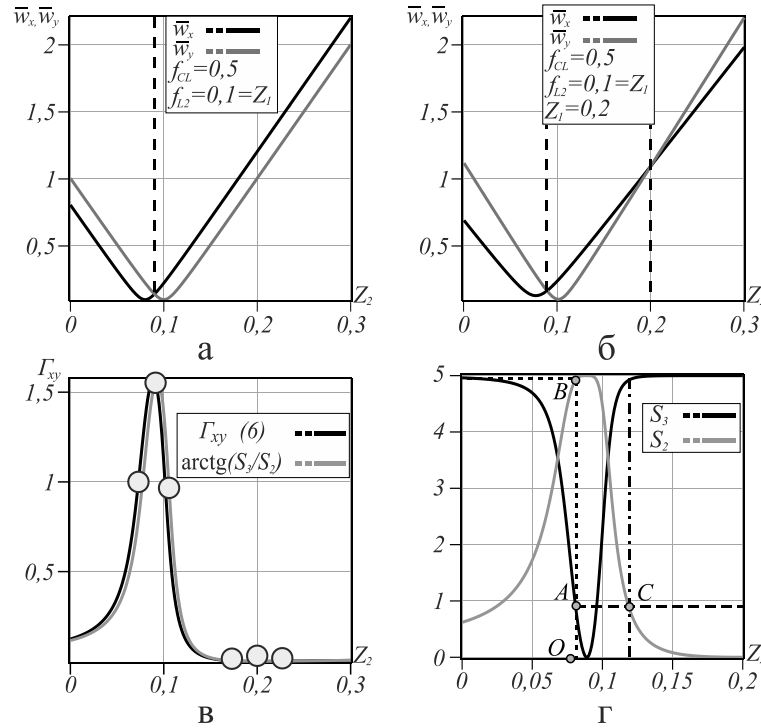


Рисунок 26 – Зависимость: (а, б) \bar{w}_x и \bar{w}_y радиусов перетяжек пучков от положения Z_2 плоскости наблюдения при различных положениях Z_1 сферической линзы, (в) фаза Гуй Γ_{xy} , (черная кривая) рассчитанная по стандартной формуле (115) и (серая кривая) через отношение $\arctg(S_3/S_2)$; (г) пунктирные и точечные прямые в точках пересечения с S_3 и с S_2 кривыми указывают на положение первой и второй плоскостей измерения $S_3 = \ell_z$ и

$$S_2 = 4W_{xy} \text{ для } n = 3, \ell = 5$$

В основу наших исследований преобразования неоднородного пучка в оптической системе с цилиндрической и сферической линзами положены два условия для его пространственных факторов, зависящих от координат x и y (не являющихся компонентами вектора электрической напряжённости), а именно, условие равенства радиусов перетяжек $\bar{w}_x = \bar{w}_y$ и условие наличия особенностей в разности фаз Гуй Γ_{xy} в (111) после сферической линзы. Проявление этих условий иллюстрируют кривые на рисунке 26а-в. Оказывается, что их выполнение зависит

от положения сферической линзы Z_1 и положения плоскости наблюдения $Z_2 = \Pi_{1,2}$, как это видно из рисунка 26а, б. Если положение сферической линзы L_2 меньше ее фокусного расстояния $Z_1 \leq f_{L2}$, то наблюдается только одно условие равенства радиусов $\bar{w}_x(Z) = \bar{w}_y(Z)$, как видно из рисунка 26а. Если же $Z_1 > f_{L2}$, то возникает уже два случая, где выполняется это условие в различных положения $Z_2 = \Pi_{1,2}$ плоскости наблюдения. При положении плоскости наблюдения $Z_2 = \Pi_1 = 0,09$ одновременно выполняются два критических условия: равенство x и y радиусов пучков $\bar{w}_x(\Pi_2 = 0,09) = \bar{w}_y(\Pi_2 = 0,09)$ (рисунок 26б) и разность фаз $\Gamma_{xy}(\Pi_2 = 0,09) = \pi/2$ для пучка с $n=3$, $\ell=5$ на рисунке 26в. Сдвиг плоскости наблюдения в положение $Z_2 = \Pi_2 = 0,2$ вновь приводит к новому выполнению критических условий: $\bar{w}_x(\Pi_2 = 0,2) = \bar{w}_y(\Pi_2 = 0,2)$, так что разность фаз $\Gamma_{xy}(\Pi_2 = 0,2) = 0$ обращается в ноль. Фактически, в области $\Pi_2 = 0,09$ разность фаз Γ_{xy} носит резонансный характер в виде узкого всплеска, до $\Gamma_{xy} = \pi/2$, а затем быстро снижается. Положения плоскостей наблюдения, где одновременно выполняются, как условие равенства радиусов $\bar{w}_x = \bar{w}_y$, так и кратность разности фаз Γ_{xy} $\pi/2$ или 0 будем называть первой и второй критической плоскостью, соответственно. Ниже мы покажем, что в этих плоскостях возникает радикальная перестройка тонкой структуры пучков.

3.1.2 Преобразования ЛГ и ЭГ мод

Сначала рассмотрим детали процесса конверсии ОУМ и восстановления исходной тонкой структуры ЛГ-пучка после прохождения через цилиндрическую и сферическую линзы, а затем распространим эти условия на весь класс структурированных сЛГ-пучков.

ОУМ структурированного пучка рассчитывался по формуле (104) с учетом амплитуд мод (112). Для исходного ЛГ-пучка в формуле (111) полагалось $\varepsilon = 0$. Преобразование ОУМ в плоскости наблюдения Z_2 представлено на рисунке 27а-г.

На входе цилиндрической линзы формировался ЛГ-пучок с картиной интенсивности на расстоянии $Z_2 = 0$, который представлен на рисунке 27б, г. На рисунке 27в приведена сетка линий равной фазы, характерная идеальному вихрю с ОУМ $\ell_z = 5$ и тремя кольцевыми дислокациями с $n = 3$. В окрестности первого фокуса сферической линзы L_2 при $f_{L_2} = 0,1$ м и $Z_1 = 0,2$ возникает резкий провал ОУМ, который достигает нуля $\ell_z = 0$ при $Z_2 = \Pi_1 = 0,09$, который соответствует выполнению первого условия для равенства радиусов перетяжек пучка $\bar{w}_x = \bar{w}_y$ и разности фаз Гуй равной $\pi/2$ на рисунке 26в. Такое положение плоскости

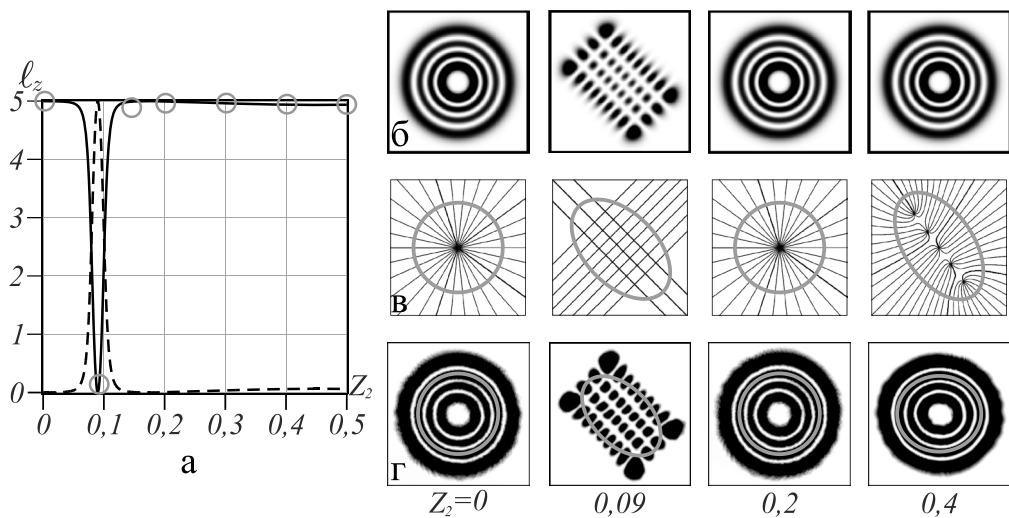


Рисунок 27 – (а) Преобразование ОУМ (сплошная кривая) и поперечный момент интенсивности $4W_{xy}$ (пунктирная кривая) в ЛГ пучке с $n = 3$, $\ell = 5$ после цилиндрической линзы с $f_{CL} = 0,5$ м и сферической линзы с $f_{L_2} = 0,1$ м, расположенной на расстоянии $Z_1 = 0,2$. (б) Компьютерное моделирование картины интенсивности пучка при различных Z_2 . (в) Эллипс интенсивности на фоне сетки линий равной фазы пучка при различных Z_2 . (г) Экспериментальные картины интенсивности пучка и их эллипсы интенсивности при различных Z_2

наблюдения $Z_2 = \Pi_1$ после сферической линзы соответствует формированию ЭГ-моды, картина интенсивности которой приведена на рисунке. 27б, г. Небольшой сдвиг от $Z_2 = 0,09$ приводит к резкому увеличению ОУМ до $\ell_z \approx 5$. Однако структура исходной ЛГ-моды полностью не восстанавливается. Полное восстановление структуры ЛГ-моды возникает только в плоскости $Z_2 = \Pi_2 = 0,2$,

что соответствует второму условию равенства радиусов перетяжек пучка $\bar{w}_x = \bar{w}_y$ на рисунке 26б и нулевой разности фаз Γ_{xy} на рисунке 26г. Небольшое отклонение плоскости наблюдения от этого положения приводит к слабой эллиптической деформации картины интенсивности и распаду осевого вихря с $TЗ = 5$ на пять единичных вихрей, что слабо сказывается на величине ОУМ. Эллипс интенсивности [31, 32, 147] на рисунке 27в при $Z_2 = 0,4$, охватывающий пять единичных вихрей, соответствуют экспериментальным характеристическим эллипсам, полученным при измерении орбитальных параметров Стокса (см. статью [115*] и следующий раздел Эксперимент). Важно отметить, что конверсия знака ОУМ не возникает ни при каких значениях Z_1 и плоскости наблюдения Z_2 сферической линзы L_2 . В дополнение к кривой ОУМ на рисунке 27а приведена пунктирная кривая зависимости нормированного поперечного момента интенсивности $4W_{xy}^{norm}$, который, как мы покажем далее, играет ключевую роль в процессе измерения. Важно подчеркнуть, что W_{xy} в первой критической $\Pi_1 = 0,09$ плоскости имеет выраженный максимум.

3.1.3 Отображение астигматических преобразований сЛГ-пучка на орбитальную сферу Пуанкаре

Прежде чем углубиться в исследование процесса измерения, сфокусируемся не едином представлении множества состояний асЛГ-пучка и его отображении на орбитальной сфере Пуанкаре, заданную в декартовых координатах орбитальных параметров Стокса [115*]:

$$S_1 = W_{xx}(Z_1, Z_2) - W_{yy}(Z_1, Z_2), \quad (116)$$

$$S_2 = W_{xy}(Z_1, Z_2) - W_{yx}(Z_1, Z_2), \quad (117)$$

где

$$\begin{pmatrix} W_{xx} \\ W_{yy} \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{00}} \int_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} I(x, y, Z_1, Z_2) dx dy, \quad (118)$$

$$\begin{pmatrix} W_{xy} \\ W_{yx} \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{00}} \int_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} (x+y)^2 \\ (x-y)^2 \end{pmatrix} I(x, y, Z_1, Z_2) dx dy. \quad (119)$$

Термин орбитальные параметры Стокса введен благодаря третьему параметру, связанному на недиагональные элементы M_{xy} и M_{yx} матрицы моментов интенсивности \mathbf{P} [120], характеризующими ОУМ:

$$S_3 = \ell_z = M_{xy}(Z_1, Z_2) - M_{yx}(Z_1, Z_2), \quad (120)$$

где

$$\begin{pmatrix} M_{xy} \\ M_{yx} \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{00}} \int_{\mathbb{R}^2} asLG^*(x, y, Z_1, Z_2) \begin{pmatrix} x\partial_y \\ y\partial_x \end{pmatrix} asLG(x, y, Z_1, Z_2) dx dy. \quad (121)$$

К сожалению, его нельзя измерить непосредственно на эксперименте, но, как мы покажем далее, он жестко связан с физически измеряемыми элементами матрицы \mathbf{P} на критических плоскостях.

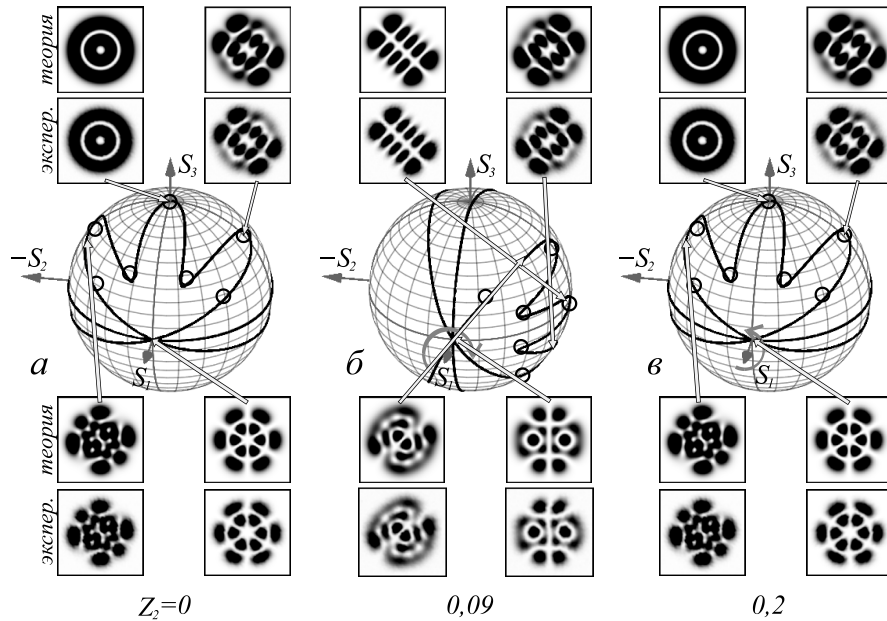


Рисунок 28 – Отображение состояний сЛГ-пучка при различных значениях θ с $n = 1$, $\ell = 3$, $\varepsilon = 1$ на орбитальную сферу Пуанкаре в трехлинзовой системе: (а) сЛГ-пучок на входе цилиндрической линзы $Z_1 = 0,2$, $Z_2 = 0$; (б) $Z_1 = 0,2$, $Z_2 = 0,09$, (в) $Z_1 = 0,2$, $Z_2 = 0,2$; $f_{CL} = 0,5$ м, $f_{L2} = 0,1$ м, $z_0 = 1$, $\varepsilon = 1$. Сверху и снизу сферы представлены теоретические и экспериментальные картины интенсивности состояний пучка, указанных стрелками на сфере экспериментальные точки (черные круги)

Вычисление орбитальных параметров Стокса (116)–(121) на основе выражения (111) приводит к формулам (106)–(108), ранее полученным в рамках метода прямого измерения, с учетом соотношения (104), используемого для расчёта ОУМ.

Полученные выражения позволяют единым образом показать действие оптической системы из трех линз на все возможные состояния сЛГ-пучка, представленные в виде траектории на орбитальной сфере Пуанкаре на рисунке 28 (построение траекторий детально рассмотрено в работе [115*]). Напомним, что северному полюсу $\{S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 1\}$ соответствуют положительные максимальные значения ОУМ, а южному полюсу – отрицательные значения $\{S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = -1\}$. На экваторе $S_3 = 0$ ОУМ всех состояний равно нулю. Движение точки по экватору или параллелям соответствует вращению оси характеристического эллипса моментов интенсивности без изменения ОУМ, а движение вдоль меридианов сопровождается изменением ОУМ при постоянной ориентации характеристического эллипса. На рисунке 28 представлены траектории состояний сЛГ-пучка с $n = 1$, $\ell = 3$ для трех положений плоскости наблюдения Z_2 и постоянном положении сферической линзы L_2 с $Z_1 = 0, 2$: (а) асЛГ-пучок перед цилиндрической линзой, (б) $Z_2 = \Pi_1 = 0, 09$ – первая критическая плоскость; (в) $Z_2 = \Pi_2 = 0, 2$, вторая критическая плоскость. Траектория асЛГ-пучка перед цилиндрической линзой (рисунок 28а) на сфере Пуанкаре имеет три лепестка. При $Z_2 = 0$ трехлистник ориентирован вертикально, так что верх центрального лепестка достигает максимального ОУМ. При сдвиге плоскости наблюдения в положение первой критической плоскости $Z_2 = \Pi_1 \rightarrow 0, 09$ траектория на сфере начинает вращаться вокруг оси S_1 как единое целое и поворачивается на угол $\pi/2$ для пучка в первой критической плоскости $\Pi_2 = 0, 09$ (рисунок 28б). Здесь центральный лепесток ориентирован вблизи экватора, а его максимальный ОУМ стал равным нулю, в то время как точка на экваторе $\{S_1 = 0, S_2 = -1, S_3 = 0\}$ преобразовалась в точку на южном полюсе с минимальным ОУМ $\{S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = -1\}$.

Неподвижными точками при вращении остаются только состояния с нулевым ОУМ $\{S_1 = \pm 1, S_2 = 0, S_3 = 0\}$. Дальнейший сдвиг плоскости наблюдения $Z_2 \rightarrow 0,2$ приводит к обратному вращению траектории. При сдвиге плоскости наблюдения в положение второй критической плоскости $Z_2 = \Pi_2 = 0,2$ траектории на орбитальной сфере Пуанкаре (рисунок 28в) полностью совмещаются с исходной траекторией, так что все состояния сЛГ-пучка полностью воспроизводятся. Расчет степени корреляции экспериментальных и теоретических картин интенсивности на рисунке 28а-в составляет $\eta \approx 0,96$.

3.1.4 Эффекты взаимного самосогласования и самовосстановления в критических плоскостях

Приведенная геометрическая интерпретация роли критических плоскостей в астигматических преобразованиях структурированного пучка подчеркивает глубинную связь между орбитальными параметрами Стокса и физически измеряемыми средними квадратичными моментами интенсивности W_{xx} , W_{yy} , W_{xy} , в частности, между ними и ОУМ. Но это утверждение требует количественного подтверждения как при компьютерном моделировании, так и на эксперименте. Как показано, в первой критической плоскости, происходит поворот траектории на угол $\pi/2$ со сменой мест параметров S_3 и S_2 , причём параметр S_2 задается поперечным моментом интенсивности $l_z \rightarrow 4W_{xy}$. Назовем этот процесс эффектом самосогласования ОУМ и поперечного момента интенсивности. Во второй критической плоскости наблюдается обратное преобразование $l_z \leftarrow 4W_{xy}$, при котором восстанавливается исходное состояние структурированного пучка перед цилиндрической линзой. Этот процесс будем называть эффектом самовосстановления. Количественное соответствие указанных эффектов иллюстрируется на рисунке 29.

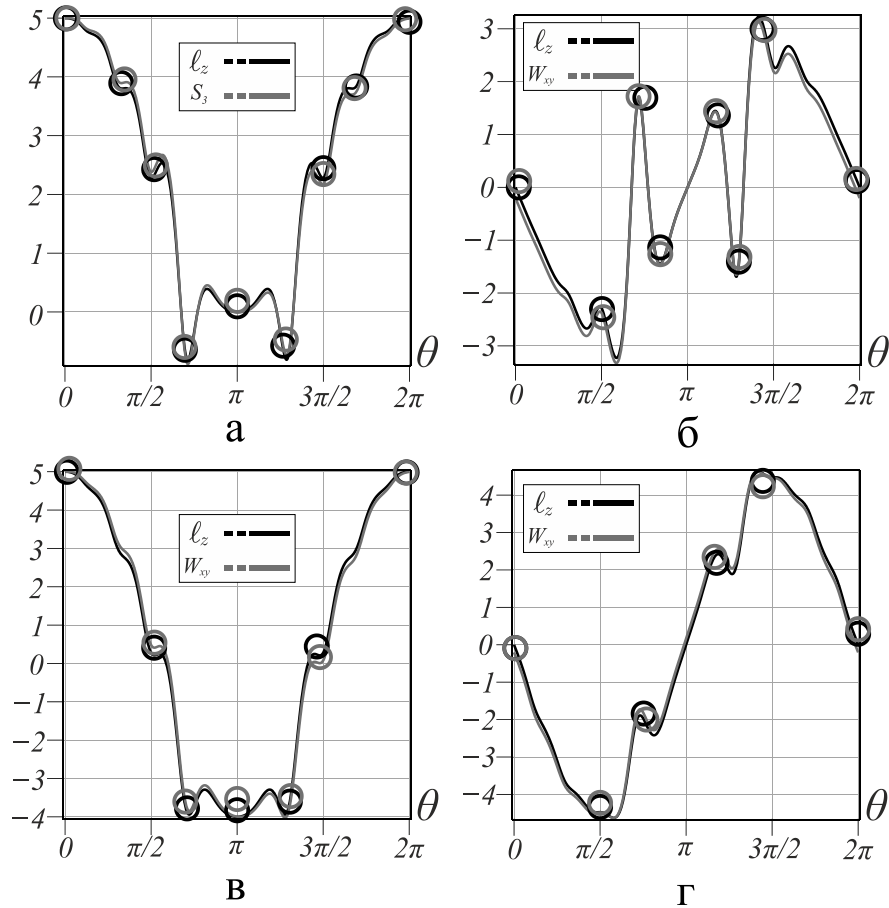


Рисунок 29 – (а) Самовосстановление ОУМ $\ell_z(Z_1 = 0) = S_3(\Pi_2 = 0.2)$ и (б)

самосогласование ОАМ и поперечного момента интенсивности $4W_{xy}$:

$4W_{xy}(\Pi_2 = 0.2) = \ell_z(\Pi_1 = 0.09)$. Кривые 2 искусственно сдвинуты на $\pi/40$, чтобы их различать. Экспериментальные точки на графике обозначены окружностями

Самовосстановление структуры пучка, в частности, совмещение ОУМ $S_3(Z_1 = 0) = \ell_z(\Pi_2 = 0,2)$ в плоскости цилиндрической линзы $Z_1 = 0$ и во второй критической $Z_2 = \Pi_2 = 0,2$ плоскости иллюстрирует рисунок 29а. Самосогласование ОУМ и поперечного момента интенсивности во второй и первой критических плоскостях $\ell_z(\Pi_2 = 0,09) = 4W_{xy}(\Pi_1 = 0,2)$ показано на рисунке 29б. Можно показать, что это процесс воспроизводится для любых n и ℓ квантовых чисел. Аналогичные совмещения кривых на рисунке 29в, г показывают, что эффекты самосогласования и самовосстановления проявляются при любых амплитудных параметрах, в частности для $\varepsilon = 1$. Взаимосвязь между ОУМ $S_3 = \ell_z$ и физически измеряемым поперечным моментом интенсивности $4W_{xy}$, объясняется

достаточно просто. Дело в том, что ℓ_z и W_{xy} являются мнимой (Im) и действительной (Re) частью одной и той же функции комплексного переменного, различающимися только умножением на i – мнимую единицу [120], без учета масштабного множителя. Изменение разности фаз между x - и y -направлениях амплитуд соседних, k -ой и $k+1$ -ой, ЭГ модами в (111) контролируется разностью фаз Γ_{ui} $\pi/2$, которая наблюдения в первой критической плоскости (см. рис. 2бв, г).

Симметрии прямого и обратного вращения на орбитальной сфере Пуанкаре и эффектам самовосстановления и самосогласования в системе из двух сферических и цилиндрической линзы между ними соответствует два инварианта:

$$Inv_1 = S_1(Z_1, Z_2) = const, \quad (122)$$

$$Inv_2 = S_2^2(Z_1, Z_2) + 16W_{xy}^2(Z_1, Z_2) = const, \quad (123)$$

при заданных ε и θ управляющих параметрах. Ключевым моментом процесса измерений является преобразование моды ЛГ в моду ЭГ и наоборот в первой и второй критических плоскостях. Такими преобразованиями управляет астигматическая разность фаз Γ_{ui} Γ_{xy} , возникающая при распространении пучка через цилиндрическую и сферическую линзу. Если воспользоваться общими свойствами параметров Стокса [30], то $S_2 \sim \cos \Gamma_{xy}$ и $S_3 \sim \sin \Gamma_{xy}$, так что астигматическая разность фаз задается как $\Gamma_{xy} = \arctg(S_3 / S_2)$. Контуры кривых практически совпадают, что указывает на возможность, как вычисления, так и измерения астигматической фазы через момент интенсивности W_{xy} . В первой критической плоскости $Z_2 = 0,09$ астигматическая фаза $\Gamma_{xy} = \pi/2$. Во второй критической плоскости астигматическая фаза компенсируется $\Gamma_{xy} = 0$, что соответствует восстановлению исходного состояния пучка.

Полученные результаты позволяют распространить метод измерения орбитальных параметров Стокса, разработанный для пучков свободных от астигматизма (см. статьи [115*, 120]), и на астигматические пучки, как мы увидим в следующем разделе.

3.2 Модифицированный метод измерения орбитальных параметров Стокса сЛГ и асЛГ пучков

Ранее нами был разработан экспериментальный метод измерения орбитальных параметров Стокса структурированных пучков, который работает по аналогии с измерением поляризационных параметров Стокса [115*]. Здесь роль поляризатора выполняют физически измеряемые моменты интенсивности W_{xx} , W_{yy} , W_{xy} пучка на входной плоскости цилиндрической линзы, которые определяют первые два орбитальных параметра S_1 и S_2 . Для измерения третьего орбитального параметра Стокса $S_3 = \ell_z$ необходимо, чтобы выполнялось условие $z_0 = 2f_{CL}$ на цилиндрической линзе. Кроме того, измерение поперечного момента интенсивности W_{xy} проводится в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы $Z = 2f_{CL}$. Оказывается, что плоскость перед цилиндрической линзой и плоскость в ее двойного плоскости являются критическими плоскостями, где выполняется условие $\ell_z = 4W_{xy}$ с точностью до масштаба множителя. Таким образом, цилиндрическая линза и свободное пространство до плоскости ее двойного фокуса играют роль четверть волновой пластинки в поляризационной оптике.

В данном подразделе мы рассмотрим модификацию существующего метода, а также распространим его, как на астигматические, так и свободные от астигматизма структурированные пучки. Главное отличие модифицированного метода измерения орбитальных параметров Стокса от ранее известного метода для не астигматических пучков связано с оптимальным выбором критических плоскостей в оптической системе первого порядка. Рассмотрим два примера измерения орбитальных параметров Стокса: 1) в не астигматическом сЛГ-пучке и 2) в астигматическом сЛГ-пучке [120]. Обозначим через Π_1 и Π_2 положение первой и второй критических плоскостей.

3.2.1 Измерение сЛГ-пучка

В этом случае первые два орбитальных параметра Стокса S_1 и S_2 необходимо измерять во второй критической плоскости $Z_2 = \Pi_2$. Для этого достаточно сделать только один снимок картины интенсивности в этой плоскости. Далее, осуществить компьютерную обработку картины интенсивности в соответствии с формулами:

$$S_1 = W_{xx}(Z_2 = \Pi_2) - W_{yy}(Z_2 = \Pi_2), \quad (124)$$

$$S_2 = W_{xy}(Z_2 = \Pi_2) - W_{yx}(Z_2 = \Pi_2), \quad (125)$$

где

$$\begin{pmatrix} W_{xx}(Z_2 = \Pi_2) \\ W_{yy}(Z_2 = \Pi_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{00}} \int_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} I(x, y, Z_2 = \Pi_2) dx dy, \quad (126)$$

$$\begin{pmatrix} W_{xy}(Z_2 = \Pi_2) \\ W_{yx}(Z_2 = \Pi_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{00}} \int_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} (x+y)^2 \\ (x-y)^2 \end{pmatrix} I(x, y, Z_2 = \Pi_2) dx dy. \quad (127)$$

Для измерения S_3 воспользуемся эффектом взаимности ℓ_z и W_{xy} , и измерения проводим в первой критической плоскости $Z_2 = \Pi_1$:

$$S_3 = W_{xy}(Z_2 = \Pi_1) - W_{yx}(Z_2 = \Pi_1), \quad (128)$$

где

$$\begin{pmatrix} W_{xy}(Z_2 = \Pi_1) \\ W_{yx}(Z_2 = \Pi_1) \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{00}} \int_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} (x+y)^2 \\ (x-y)^2 \end{pmatrix} I(x, y, Z_2 = \Pi_1) dx dy. \quad (129)$$

3.2.2 Измерение асЛГ пучка

Для измерения асЛГ пучка, воспользуемся эффектом самовосстановления перед цилиндрической линзой и в двойном фокусе цилиндрической линзы, и заменив критическую плоскость Π_2 на Π_1 в уравнениях (124)-(127):

$$S_1 = W_{xx}(Z_2 = \Pi_1) - W_{yy}(Z_2 = \Pi_1), \quad (130)$$

$$S_2 = W_{xy}(Z_2 = \Pi_1) - W_{yx}(Z_2 = \Pi_1), \quad (131)$$

Для измерения S_3 асЛГ-пучка воспользуемся эффектом самосогласования и переместимся во вторую критическую плоскость $Z_2 = \Pi_2$ и аналогично (128) найдем S_3 параметр:

$$S_3 = W_{xy}(Z_2 = \Pi_2) - W_{yx}(Z_2 = \Pi_2). \quad (132)$$

Важной частью наших экспериментальных исследований явилось измерение астигматической разности фаз Гуи, как в первой и второй критических плоскостях, так и в их окрестности. Очевидно, что смещение от критических плоскостей, требует уточнения метода измерений. Последовательность измерительного процесса иллюстрирует рисунок 26г. Предположим, что нам требуется измерить параметры S_2 и S_3 в точке $Z_2 = O = 0,08$. Перпендикуляр к точке O (точечная линия OB на рисунке 26г) пересечет кривую S_3 в точке A и кривую S_2 в точке B . Поскольку мы не можем непосредственно измерить ОУМ $\ell_z = S_3$, мы измеряем S_2 в точке B (на самом деле, измеряется поперечный момент интенсивности W_{xy} в этой плоскости, через который вычисляется S_2 по формуле (131), где $Z_2 = B = 0,08$). Для измерения параметра S_3 вернемся к точке A и проведем через нее прямую AC , параллельную оси Z_2 , пересекающую кривую $S_2(Z_2)$ в точке $Z_2 = C = 0,13$. В этой второй плоскости измеряется поперечный момент интенсивности в соответствии с формулой (131), где $Z_2 = 0,13$. Измерение параметров S_2 и S_3 позволяет рассчитать астигматическую разность фаз Гуи Γ_{xy} . На рисунке 26в экспериментальные точки обозначены окружностями.

3.3 Преобразование астигматической фазы Гуи в оптической системе первого рода

Рассмотрим распространение сЛГ-пучка в оптической системе из двух сферических и одной цилиндрической линзы (схема представлена ранее на рисунке 25 [131]), используемой для измерения орбитальных параметров Стокса. Комплексная амплитуда после такой системы описывается выражением (111) [131]. Безразмерные лучевые параметры, радиусы перетяжки и фазы Гуи вдоль

осей x и y после цилиндрической линзы задаются соотношениями (33), (28)–(29), (30)–(31) и после сферической линзы – соотношениями (113), (114), (115), соответственно.

Безразмерный лучевой параметр $\bar{q}_{x,y}(Z)$ не зависит от длины Рэлея. При этом безразмерная длина $Z_1 = z_1/z_0$ задаёт расстояние между сферической линзой с безразмерным фокусным расстоянием $\kappa_{sh}^{-1} = f_{L2} / z_0$ и плоскостью, расположенной после цилиндрической линзы с безразмерным фокусным расстоянием $\kappa_x^{-1} = f_{CL} / z_0$, а длина $Z_2 = z_2/z_0$ задаёт положение плоскости после сферической линзы. Поскольку координаты x и y нормированы на радиус перетяжки w_0 , то комплексная амплитуда (111) не зависит от геометрических параметров исходного пучка, а определяется исключительно управляющими параметрами ε , θ и положением плоскости наблюдения z_2/z_0 .

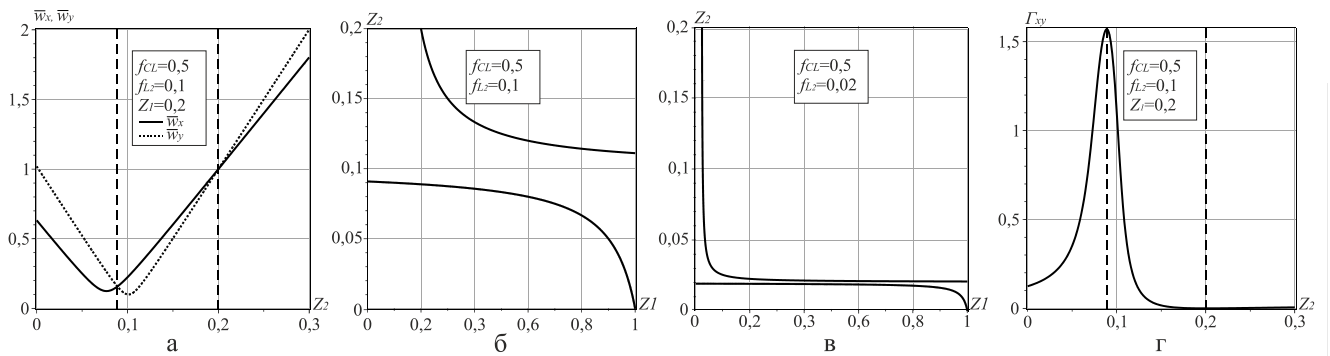


Рисунок 30 – (а) Пересечение кривых безразмерных радиусов астигматического пучка, (б, в) положение первой (нижняя кривая) и второй (верхняя кривая) критических плоскостей на параметрической плоскости (Z_1, Z_2) , (г) астигматическая фаза Гуи. Пунктирные прямые указывают на положение критических плоскостей

Критические преобразования структуры пучка происходят в критических плоскостях оптической системы, в которых и измеряются орбитальные параметры Стокса [131*]. Положение критических плоскостей определяется равенством радиусов перетяжки $\bar{w}_x(Z_2)$ и $\bar{w}_y(Z_2)$, показанных на рисунке 30а–в. В первой критической плоскости фаза Гуи на рисунке 30г достигает максимума $\Gamma_{xy} = \pi/2$, а

во второй критической плоскости обращается в ноль $\Gamma_{xy} = 0$. Ширина всплеска фазы Γ_{xy} зависит от соотношения между фокусным расстоянием сферической линзы f_{L2} и положением второй критической плоскости Z_2 . По мере приближения положения Z_2 к фокусному расстоянию f_{L2} ширина возрастает и, как будет показано далее, стремится к бесконечности при их равенстве $Z_2 = f_{L2}$.

Если симплектическая матрица ABCD позволяет определить лучевой комплексный параметр $q_{xy}(z)$ структурированного пучка (111), то за измерение основных параметров пучка (радиуса перетяжки, кривизны волнового фронта, эллипса интенсивности, ОУМ, орбитальных параметров Стокса (S_1, S_2, S_3) и др.) отвечают 10 элементов матрицы моментов интенсивности второго порядка [39]. Но только 3 из них W_{xx}, W_{yy}, W_{xy} можно непосредственно измерить на эксперименте. Как показано в [131*], поперечный параметр W_{xy} может быть связан с ОУМ ℓ_z в критических плоскостях, тогда как W_{xx} и W_{yy} измеримы в любой плоскости пучка. Этого достаточно для восстановления всех трёх орбитальных параметров Стокса, соответствующие выражения приведены ранее в (116)–(121) [131*].

Здесь S_3 определяется через разность недиагональных элементов 2D-субматрицы \mathbf{M} в 4D-матрице моментов интенсивности \mathbf{P} (см. [39, 131*]) и совпадает с ОУМ:

$$\mathbf{U} = -\frac{1}{J} \iint_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} \partial_x \Psi \partial_x \Psi^* & \partial_x \Psi \partial_y \Psi^* \\ \partial_x \Psi \partial_y \Psi^* & \partial_y \Psi \partial_y \Psi^* \end{pmatrix} d^2 \mathbf{r}. \quad (133)$$

Если измерены параметры S_2 и S_3 , то астигматическая фаза Γ_{xy} выражается как:

$$\Gamma_{xy} = \arctan(S_3 / S_2), \quad (134)$$

Кривые зависимости $\ell_z(Z_2)$ и $4W_{xy}(Z_2)$ на рисунке 31а, б демонстрируют эволюцию сЛГ-пучка с начальными состояниями сЛГ ($\varepsilon = 0$) и асЛГ ($\varepsilon = 0$) вдоль оси пучка Z_2 после сферической линзы. Максимумы и минимумы соответствуют первой критической плоскости; при этом максимум ОУМ на рисунке 31а достигает $\ell_z \approx 28$, то есть почти удваивает радиальное число $n = 15$.

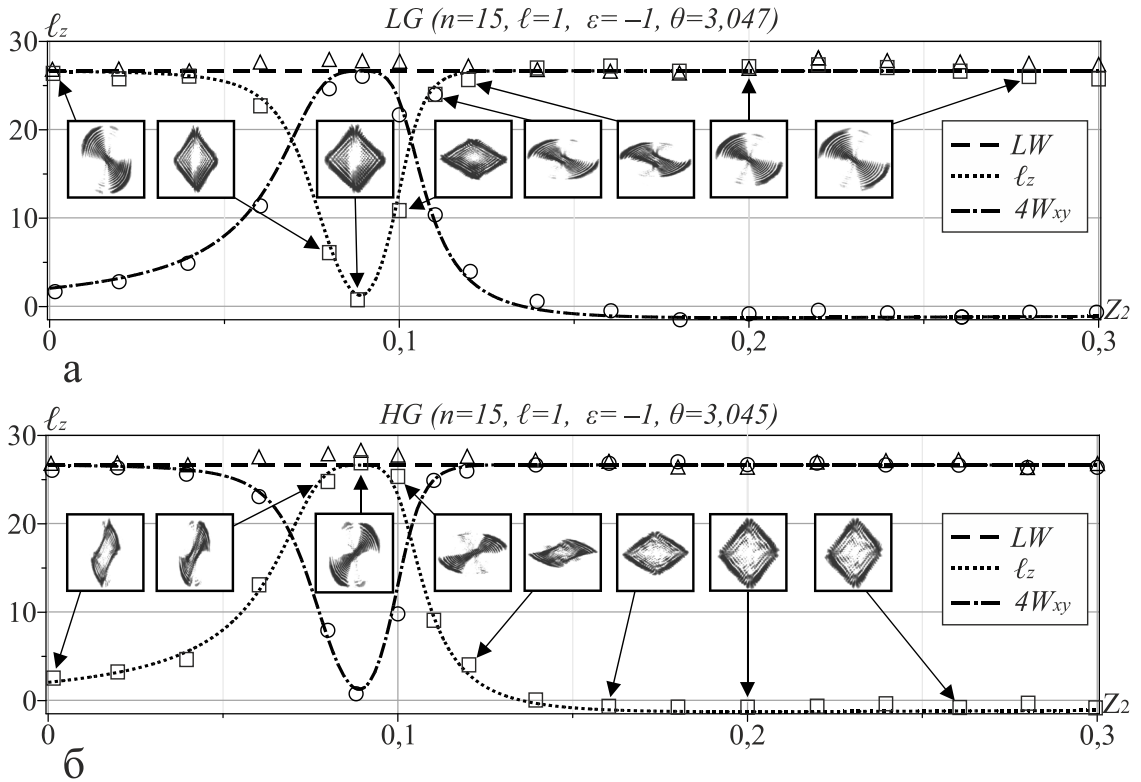


Рисунок 31 – Эволюция максимума ОУМ ℓ_z и безразмерного поперечного момента интенсивности $4W_{xy}$ вдоль оси пучка после сферической линзы ($f_{CL} = 0,5$ м, $f_{L2} = 0,1$ м, $z_0 = 1$ м) пучка в (а) начальном сЛГ состоянии: с параметрами $\varepsilon = 1$, $\theta = 3,047$, (б) в начальном асЛГ состоянии с $\varepsilon = 1$, $\theta = 3,045$, $n = 15$, $\ell = 1$. Пунктирная прямая соответствует инварианту

$$LW^2 = \ell_z^2(Z_2) + (4W_{xy}(Z_2))^2 = \ell_z^2(Z_2 = 0).$$

На вставках приведены картины интенсивности пучков в соответственных плоскостях. Круги, квадраты и треугольники указывают на экспериментальные точки

Во-первых, сравнение $\ell_z(Z_2)$ и $4W_{xy}(Z_2)$ показывает, что переход от начального ЛГ-состояния к первоначальному асЛГ-состоянию сопровождается взаимной заменой кривых $\ell_z(Z_2)$ и $4W_{xy}(Z_2)$. Во-вторых, сумма квадратов $\ell_z(Z_2)$ и $4W_{xy}(Z_2)$ вдоль оси пучка не изменяется и образует инвариант:

$$LW = \ell_z(\varepsilon, \theta) = \pm \sqrt{\ell_z^2(\varepsilon, \theta, Z_2) + (4W_{xy}(\varepsilon, \theta, Z_2))^2} = const, \quad (135)$$

равный исходному значению $\ell_z(\varepsilon, \theta, Z_2)$, знак (\pm) задаётся начальным ОУМ $\ell_z(\varepsilon, \theta)$. Численное моделирование показывает, что этот инвариант сохраняется

для всех состояний сЛГ-пучка при различных амплитудных и фазовых параметрах. Данное соотношение поддаётся экспериментальной проверке.

3.4 Фурье-инварианты сЛГ- и асЛГ-пучков

В астигматических оптических системах ОУМ структурированных пучков может перераспределяться между вихревой и астигматической составляющими, при этом их сумма сохраняется. Возникает естественный вопрос о Фурье-инвариантах – таких комбинациях параметров пучка, которые остаются неизменными при преобразовании Фурье сферической линзой и/или при прохождении через каскад цилиндрическая – сферическая линзы. В данном подразделе мы вводим и анализируем класс подобных инвариантов для сЛГ-пучков с управляющими параметрами ε и θ , опираясь на формализм вторых моментов интенсивности и орбитальные параметры Стокса с их отображением на орбитальную сферу Пуанкаре. Особое внимание уделяется тем величинам, которые поддаются прямому восстановлению по двум картинам интенсивности в согласованных плоскостях эксперимента (Фурье-плоскость и плоскость восстановления исходного пучка), что обеспечивает как теоретическую строгость, так и практическую воспроизводимость результата при минимальном объёме исходных данных.

3.4.1 Вихревой, астигматический и общий ОУМ

В этом разделе мы сфокусируемся на поиске условий, при которых ОУМ сложного структурированного пучка сохраняется при распространении через астигматическую оптическую систему. При этом особое внимание обращается на возможность прямого измерения полученных теоретических предсказаний. Прежде всего, обратимся к основополагающим статьям [30, 31]. Так в статье [30] авторы предположили, что использование квадратичного фазового элемента позволяет скорректировать действие астигматизма в оптической системе. Более детальное описание этого процесса было дано в статье [31]. Здесь авторы предсказали, что полный ОУМ вихревого пучка складывается из чисто

симметричной вихревой составляющей и несимметричной астигматической составляющей, тогда как полный ОУМ характеризуется состоянием вихревого пучка на входе астигматического элемента. При этом квадратичный фазовый корректор выделяет именно вихревую составляющую. Связав астигматизм системы с астигматической линзой с двумя фокусными расстояниями f_x и f_y , авторы получили явный вид вихревой и астигматической ОУМ составляющими для простейшего ЛГ-пучка с нулевым радиальным числом в виде:

$$\Lambda_V(z) = \ell \left[(z/z_0)^2 + (1 - z/f_x)(1 - z/f_y) \right] / \mathfrak{R}, \quad (136)$$

$$\Lambda_A(z) = (\ell/2)(z/f_x - z/f_y)^2 / \mathfrak{R}, \quad (137)$$

где $\mathfrak{R}(z) = (z/z_0)^2 + (1 - z/f_x)^2/2 + (1 - z/f_y)^2/2$.

Здесь мы ввели безразмерные величины ОУМ, нормировав соответствующие выражения из работы [31] на полный поток энергии. Полный поток должен сохраняться, т.е. является инвариантом астигматического преобразования:

$$\ell_{total}(z=0) = \Lambda_V(z) + \Lambda_A(z). \quad (138)$$

С другой стороны, отображение состояний асЛГ-пучка на орбитальную сферу Пуанкаре показало, траектория на сфере, вращается вокруг оси S_1 без изменения площади, ограниченной траекторией на сфере. Отсюда сразу следует сохранение корня квадратов ОУМ $\ell_z(z)$ и поперечного момента интенсивности $4W_{xy}(z)$, равного ОУМ $\ell_z(z=0)$ на входе в цилиндрическую линзу. Сравнение этих двух подходов демонстрирует рисунок 32. Мы видим, что несмотря на различие в форме кривых $\Lambda_V(z)$, $\Lambda_A(z)$ и $\ell_z(z)$, $4W_{xy}(z)$, сумма $\Lambda_V(z) + \Lambda_A(z) = \ell_z(0)$ и $\pm \sqrt{\ell_z^2(\varepsilon, \theta, Z_2) + (4W_{xy}(\varepsilon, \theta, Z_2))^2} = \ell_z(\varepsilon, \theta)$ равны общему ОУМ $\ell_z(z=0)$ на входе в цилиндрическую линзу. Однако это не значит, что поперечный момент интенсивности $4W_{xy}(z)$ и астигматическая $\Lambda_A(z)$ часть ОУМ описывают один и тот же астигматический процесс, хотя $W_{xy}(z)$ и характеризует асимметрию пучка [32]. С нашей точки зрения, более надежный подход в

определении общего ОУМ является метод коррекции с помощью сферической линзы, совершающей Фурье-преобразование [120].

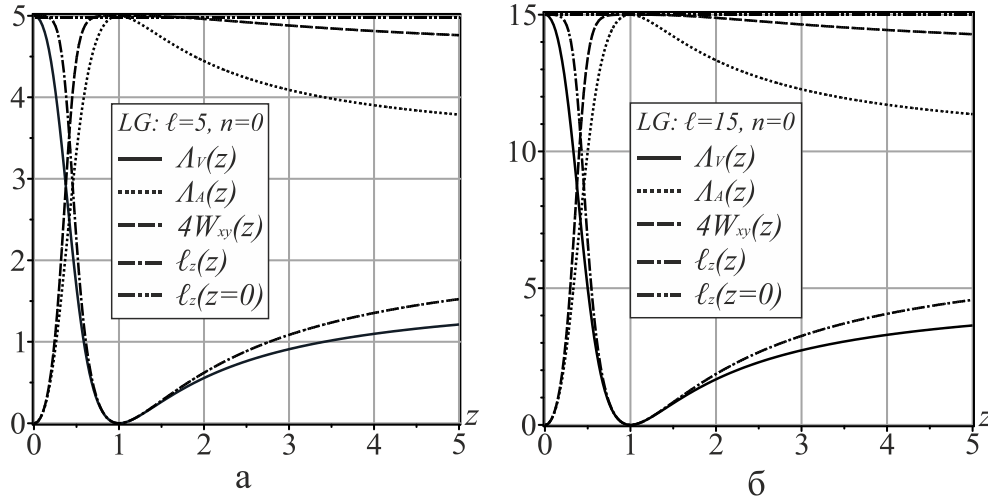


Рисунок 32 – Эволюция вихревого $\Lambda_V(z)$, астигматического $\Lambda_A(z)$, общего $\ell_{total}(z=0)$ ОУМ и их сравнение с $4W_{xy}(z)$, $\ell_z(z)$ рассчитанные по формулам (136), (137), (138), (106) и (104) соответственно, после цилиндрической линзы с $f_{CL} = 0,5$ м, $z_0 = 1$ м

3.4.2 Фурье-инварианты ОУМ астигматического преобразования и их разрушение

Авторы статьи [159] (см. также главу 6 в монографии [104] и литературу в ней) предложили особый вид структурированного пучка, содержащий вихревую эллиптическую моду и астигматическую безвихревую моду с согласованными радиусами перетяжек. Они показали, что сумма вихревого ОУМ от вихревой моды и астигматического ОУМ от астигматической моды сохраняется при распространении в дальней зоне дифракции (аналог Фурье-преобразования). Такое семейство пучков стали называть Фурье-инвариантными гауссовыми пучками. В то же время, недавно в работе [120] было показано, что Фурье-преобразование, сЛГ пучка, позволяет подавить астигматическую составляющую ОУМ, так что в Фурье-плоскости восстанавливается пучок с исходной картиной интенсивности до цилиндрической линзы и тем же ОУМ. Однако эти экспериментальные исследования касались только астигматического преобразования ЭГ-пучков. В

этом разделе мы постараемся распространить этот принцип на широкий класс структурированных пучков, и сравним полученные результаты с подходом вихревых и астигматических ОУМ, составляющих общий ОУМ.

Стандартное преобразование Фурье сферической линзой соответствует такому положению линзы, когда объект и его образ располагаются на расстояниях, равных фокусному расстоянию линзы [160], т.е. для нашего случая на рисунке 25 это значит $Z_1 = Z_2 = f_{L2}$. Поскольку ОУМ обобщенного сЛГ-пучка зависит от фазового θ -параметра, то эта зависимость $\ell_z(\theta)$ предопределяет все исследования Фурье-инвариантов. В качестве примера на рисунке 33а представлена зависимость $\ell_z(\theta)$ для $n=10$, $\ell=1$, $\varepsilon=1$. Рисунок 33б иллюстрирует эволюцию сЛГ-пучка вдоль оси Z_2 при $Z_2 = f_{L2} = 0,1$ для фазового параметра $\theta = 3,043$, соответствующего максимуму ОУМ. Здесь следует заметить, что максимум ОУМ

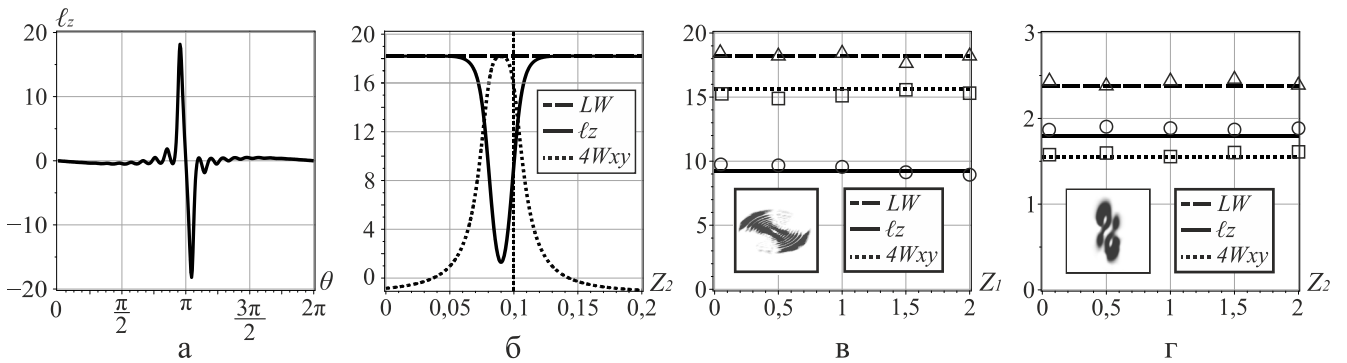


Рисунок 33 – Фурье-инварианты астигматического преобразования сЛГ-пучка (а)

кривая ОУМ по фазовому θ -параметру; (б) эволюция ОУМ, поперечного момента интенсивности $4W_{xy}$ и полного углового момента LW , пунктирная линия указывает на Фурье-плоскость; (в) Фурье-инварианты ОУМ для $n=10$, $\ell=1$, $\varepsilon=1$, $\theta=3$; (г) $n=1$, $\ell=1$, $\varepsilon=1$, $\theta=3,045$. Круги, квадраты и треугольники – экспериментальные точки. На выноске – картины интенсивности при первом всплеске ОУМ для $Z_1 = Z_2 = f_{L2} = 0,1$

приходится на положение первой критической плоскости $Z_2 = 0,09$, в то время как состояние ОУМ пучка и другие его параметры наблюдаются в Фурье-плоскости

$Z_2 = 0,1$ (пунктирная прямая на рисунке 33б). Для наблюдения Фурье-инвариантов вдоль оси Z_1 после цилиндрической линзы необходимо зафиксировать положение наблюдения $Z_2 = f_{L2} = 0,1$ и сдвигаться вдоль оси Z_1 . Оказалось, что Фурье-инвариантами являются не только общий ОУМ LW , но и ОУМ $\ell_z(\theta)$ вместе с поперечным моментом интенсивности $4W_{xy}(\theta)$, как показано на рисунке 33в для $n = 10$, $\ell = 1$, $\varepsilon = 1$, $\theta = 3$ и на рисунке 33г для $n = 1$, $\ell = 1$, $\varepsilon = 1$, $\theta = 3,045$.

Однако есть ряд деталей, при которых Фурье-инвариантность может нарушаться. Действительно, процессом преобразования состояния пучка управляет астигматическая фаза Гуи. Ее узкий всплеск на рисунке 30г заставляет быстро изменяться тонкой структуры поля вблизи первой критической плоскости, которая располагается в области фокуса сферической линзы. Чтобы состояние системы не изменялось при сдвиге плоскости наблюдения Z_2 , требуется радикально увеличить контур астигматической фазы. Фурье-преобразование выполняет это действие, что подтверждает прямая линия при $Z_2 = Z_1 = f_{L2} = 0,1$ на рисунке 34. Тем не менее, стоит только немного сдвинуть плоскость наблюдения Z_2 , как Фурье-инвариантность резко нарушается (см. рисунок 34). Степень такого нарушения зависит от длины Рэлея z_0 . Кривые на рисунке 34 соответствуют небольшому сдвигу $\Delta Z_2 = \pm 0,01$. Для компьютерного моделирования формировался пучок с длиной Рэлея $z_0 = 1$ м, так что такой сдвиг соответствует $\Delta Z_1 = 0,01$. Это некритично при использовании стандартного оптомеханического оборудования. Однако при длине Рэлея $z_0 = 10$ см. сдвиг уменьшается до $\Delta Z_1 = 0,001$, что указывает на использование специальных устройств. Однако даже небольшое смещение плоскости наблюдения может стать критическим даже при большой длине Рэлея при измерении ОУМ. Об этом свидетельствует рисунок 33б, где резкий всплеск ОУМ как раз приходится на область Фурье-преобразования.

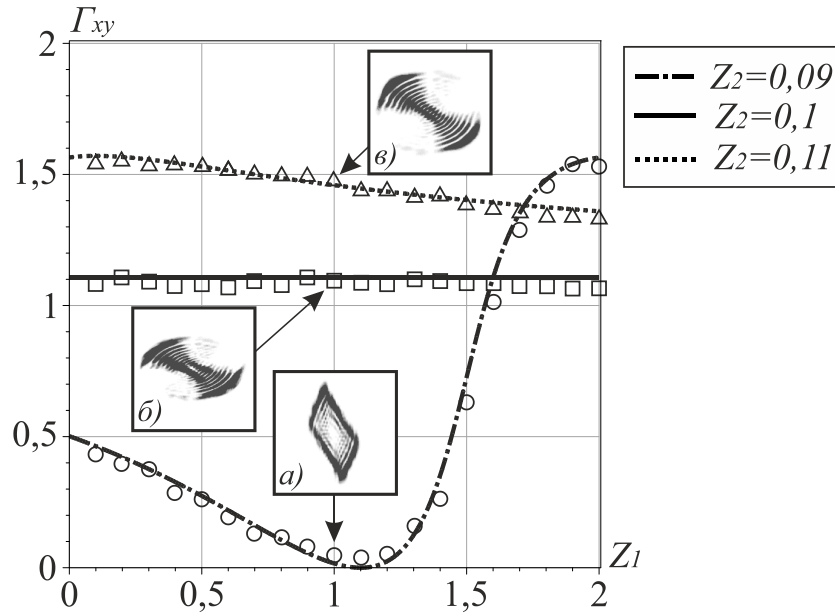


Рисунок 34 – Астигматическая фаза Γ_{xy} Фурье инвариантного преобразования при $Z_2 = 0,1$ и ее изменения при небольшом сдвиге $Z_2 = 0,09$ и $Z_2 = 0,11$ плоскости наблюдения. Вставка: картины интенсивности для $n = 10$, $\ell = 1$, $\varepsilon = 1$, $\theta = 3,047$ (а) $Z_2 = 0,09$, (б) $Z_2 = 0,1$ и (в) $Z_2 = 0,11$. Окружности, треугольники и квадраты – эксперимент

3.5 Экспериментальная реализация модифицированного метода определения орбитальных параметров Стокса

Преобразование цилиндрической линзой устойчивых сЛГ-пучков, состоящих из множества ЭГ-мод с управляемыми фазами и амплитудами [58], имеет ряд особенностей. В частности, показано, что некоторые состояния сЛГ-пучков способны сохранять свою внутреннюю структуру даже под действием цилиндрической линзы [108], за исключением собственных ЭГ-мод. Развивая предсказания авторов статьи [153], мы подошли к задаче астигматических преобразований с новой стороны – через анализ свойств критических плоскостей структурированных пучков. В этих плоскостях радиусы пучка в направлениях x и y становятся равными, фаза мод испытывает резкие изменения, а элементы матрицы моментов интенсивности второго порядка либо переходят друг в друга, либо воспроизводятся. Следует отметить, что астигматические преобразования на одной цилиндрической линзе ранее использовались для измерения орбитальных

параметров Стокса однородных сЛГ-пучков [120, 115*]. Однако открытым оставался вопрос измерения орбитальных параметров Стокса в неоднородных структурированных пучках в системах с астигматическими элементами.

Известно, что распространение стандартных и устойчивых структурированных пучков через свободное пространство или систему сферических линз не изменяет их полный ОУМ [157, 1]. Меняются лишь масштаб пучка и фаза Гуи. Однако эта инвариантность справедлива только для однородных пучков. Характерным примером является модовый конвертер, предсказанный Абрамочкиным и Волостниковым [34] и реализованный Алленом и соавт. [43], где свободный от ОУМ пучок ЭГ преобразуется в ЛГ-пучок, переносящий ОУМ. При этом цилиндрическая линза задаёт основу преобразования, а завершающую роль играет астигматическая фаза Гуи, возникающая в промежутке между линзами. Позднее ван Енк и Ниенхис [158] показали, что цилиндрическая линза не изменяет полный ОУМ, а перераспределяет его между вихревой и астигматической составляющими. Эту идею развили Ананьев и Бекшаев [30], а затем Бекшаев и соавт. [31], предложив трактовку полного ОУМ как суммы двух взаимосвязанных компонент.

Отсутствие явных геометрических иллюстраций и экспериментального подтверждения долгое время оставалось проблемой, хотя эксперименты показывали быстрое преобразование тонкой структуры пучков после цилиндрической линзы. Значимым результатом оказалось использование представления двухпараметрического сЛГ-пучка на орбитальной сфере Пуанкаре [8,9]. При этом циклическое изменение параметров соответствует замкнутой траектории на сфере, а преобразование цилиндрической линзой проявляется как поворот этой траектории на 90° без изменения формы. Важное дополнение внесла работа [10], в которой был реализован прямой метод измерения орбитальных параметров Стокса, включая ОУМ, в неоднородных астигматических пучках.

Поскольку амплитуды собственных мод остаются неизменными при распространении после цилиндрической линзы, контроль преобразования ОУМ осуществляется астигматической фазой Гуи, представленной разностью фаз вдоль

главных осей линзы. Таким образом, накопленный теоретический и экспериментальный опыт открывает путь к более детальному анализу преобразований и инвариантов ОУМ в сложных структурированных пучках.

3.5.1 Положение критических плоскостей

Как мы уже отмечали, для определения орбитальных параметров Стокса достаточно двух снимков картины интенсивности, зарегистрированных в критических плоскостях оптической системы. Однако для определения их положения на практике можно опираться лишь на измерение моментов интенсивности W_{xx} , W_{yy} и W_{xy} , характеризующих среднеквадратичные отклонения распределения интенсивности структурированного пучка. Как будет показано далее, для этого необходимо использовать дополнительные геометрические свойства астигматических пучков. Основным элементом процесса измерения является эллипс интенсивности [18, 30, 32, 35, 115*, 120, 161], введённый ранее в Главе 2 выражением (58), где $\det \mathbf{W} = W_{xx}W_{yy} - W_{xy}^2$ задает эллиптичность Q в выражении (60) и угол наклона ψ большой оси эллипса согласно выражению (59).

Чтобы экспериментально определить положение критических плоскостей, обратимся к преобразованию ОУМ $\ell_z(Z_2)$ исходного ЛГ-пучка вдоль оси Z_2 после сферической линзы (рисунок 27). В первой критической плоскости $\Pi_2 = 0,09$ наблюдается узкий провал ОУМ, тогда как поперечный момент интенсивности W_{xy} демонстрирует резкий всплеск (рисунок 35а). Однако наиболее оптимальным является измерения эллиптичности $Q(Z_2)$ и угла наклона $\psi(Z_2)$, где проявляются их особенности. Так, эллиптичность Q в окрестности первой критической плоскости на рисунке 35б имеет М-образную форму в виде двух максимумов и минимума, в то время как угол наклона эллипса ψ резко изменяется.

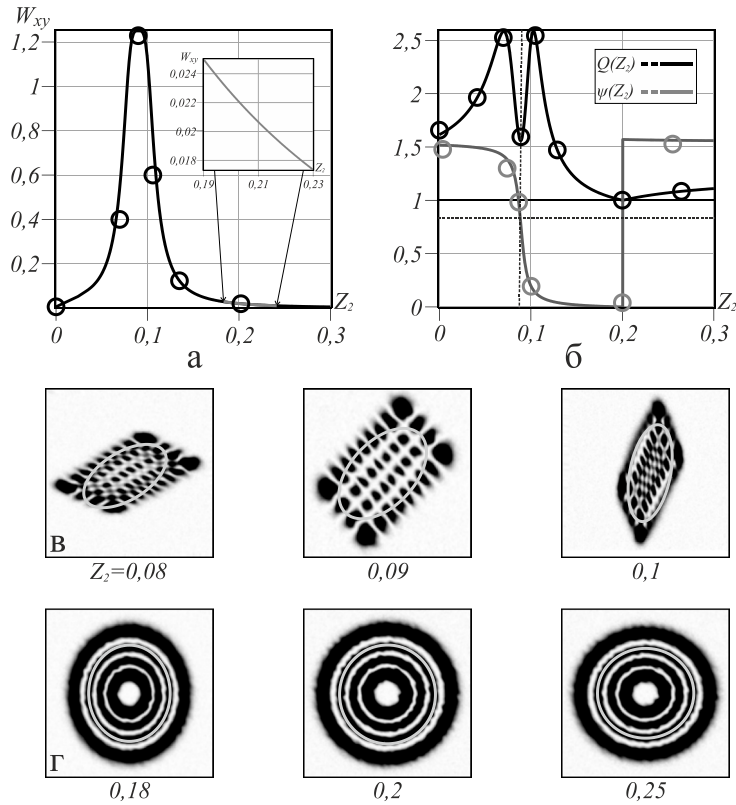


Рисунок 35 – (а) Изменения перекрестного момента интенсивности W_{xy} вдоль длины Z_2 , на вставке показано изменение W_{xy} вблизи второй критической плоскости $Z_2 = 0,2$. (б) Изменение эллиптичности Q , и угла наклона ψ эллипса интенсивности вдоль длины Z_2 . (в) Экспериментальные картины интенсивности в окрестности первой критической плоскости $Z_2 = 0,09$ и (г) в окрестности второй критической плоскости $Z_2 = 0,2$. Экспериментальные эллипсы интенсивности на рисунке (в, г) представлены на фоне картин интенсивности. Окружности на кривых (а, б) обозначают экспериментальные результаты измерений

Эти изменения связаны с быстрыми преобразованиями структуры пучка в этих точках, представленными на рисунке 35в. Определению положения второй критической плоскости также способствуют особенности $Q(Z_2)$ и $\psi(Z_2)$, возникающие в ее окрестности. Здесь эллиптичность равна единице $Q(Z_2) = 1$, где угол наклона становится неопределенным, что проявляется в повороте эллипса на $\pi/2$ в окрестности плоскости. Как видно из рисунка 35г, эти изменения легко отследить через измерения моментов интенсивности W_{xx} , W_{yy} и W_{xy} [162*, 163*].

Для быстрого вычисления эллиптичности и угла наклона нами разработана и зарегистрирована программа для ЭВМ «Программа определения эллипса интенсивности и угла его наклона по вторым моментам интенсивности лазерного пучка» [117*], работающая в среде Wolfram Mathematica по следующему алгоритму:

1. Пользователь запускает программу и выбирает одно или несколько изображений распределения интенсивности через диалоговое окно;
2. Изображения переводятся в градации серого и преобразуются в числовые матрицы яркости;
3. Выполняется нормировка по суммарной интенсивности;
4. Вычисляются вторые моменты интенсивности:

$$W_{xx} = \frac{\sum x^2 L}{\sum L}, \quad W_{yy} = \frac{\sum y^2 L}{\sum L}, \quad W_{xy} = \frac{\sum xy L}{\sum L};$$

5. По моментам формируется уравнение эквивалентного эллипса

$$El(x, y) = \frac{x^2 W_{yy} + y^2 W_{xx} - 2xy W_{xy}}{W_{xx} W_{yy} - W_{xy}^2} = c;$$

6. Определяется угол наклона главной оси $\alpha = \frac{1}{2} \text{atan2}(2W_{xy}, W_{xx} - W_{yy})$;
7. На исходное изображение накладываются контур эллипса и числовое значение α ;
8. Пользователь выбирает формат (PNG/JPG/TIFF) и директорию сохранения;
9. Результаты сохраняются в указанную папку. При пакетной обработке формируется серия файлов с нанесёнными эллипсами и углами.

3.5.2 Измерение орбитальных параметров Стокса

В основу процесса измерений положена экспериментальная установка, представленная на рисунке 36, а эскиз её рабочей части показан на рисунке 25. В качестве голографического устройства для формирования структурированных пучков использовался пространственный модулятор света типа Thorlabs EXULUS-4K1/M, а детекторами служили полупроводниковые металлооксидные сенсоры типа Michrome 20. Цилиндрическая линза с фокусным расстоянием $f_{CL} = 0,5$ м. устанавливалась неподвижно, тогда как сферическая линза с фокусным расстоянием $f_{L4} = 0,1$ м. и фотодетектор закреплялись на оптических столиках типа Thorlabs, USA “MAX603D” с 3D продольными смещениями и 3D вращениями. Это позволяло устанавливать положение линзы и фотодетектора в плоскости наблюдения с точностью $\Delta z \approx 0,1$ мм. Во входной плоскости цилиндрической линзы формировалось пятно гауссова пучка так, чтобы его длина Рэлея была порядка $z_0 = 1 \pm 1.5 \cdot 10^{-3}$ м.

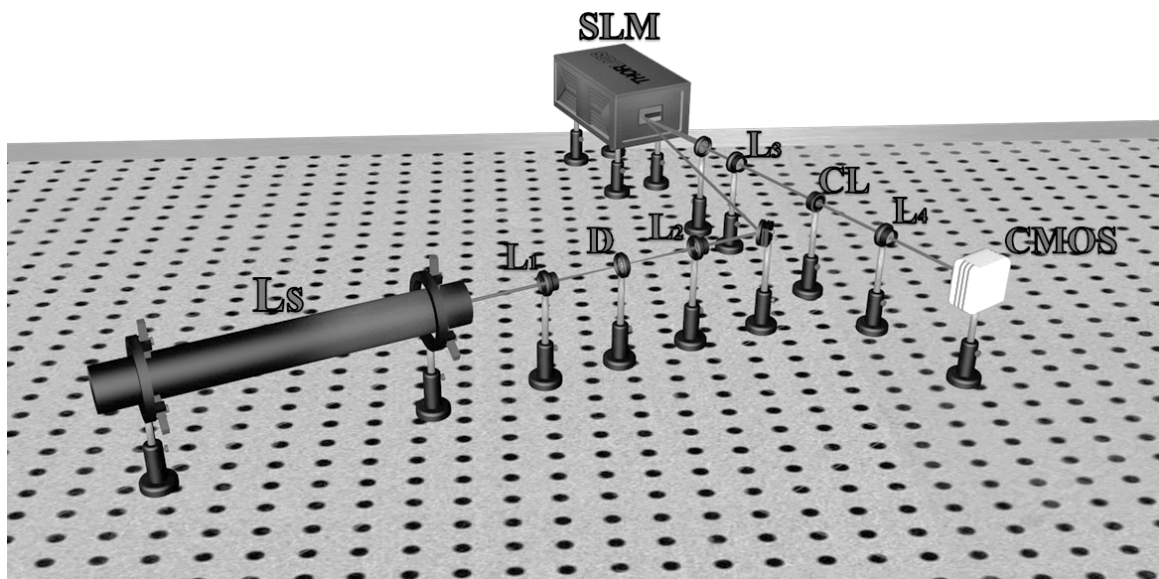


Рисунок 36 – Схема экспериментальной установки: L_s – лазер, L_{1-4} – сферические линзы, D – диафрагма, M – зеркало, SLM – пространственный модулятор света, CL – цилиндрическая линза, $CMOS$ – детекторы

Сначала измерялись положения критических плоскостей посредством измерения W_{xx} , W_{yy} и W_{xy} моментов интенсивности в окрестности теоретического

положения критических плоскостей. Для этого осуществлялось до 5 снимков картин интенсивности, как для положения первой $Z_2 = \Pi_1 = 0,09$, так и второй $Z_2 = \Pi_2 = 0,2$ критических плоскостей с шагом 1 мм. Компьютерная обработка картин интенсивности в соответствии с формулами (126) и (127) позволяет вычислить три момента интенсивности: W_{xx} , W_{yy} и W_{xy} . Полученные экспериментальные результаты сравнивались с результатами компьютерного моделирования. Выбирались наиболее оптимальные значения моментов интенсивности, которые отличались от результатов компьютерного моделирования на величину не более 4%. На основе этих результатов вычислялись первые два S_1 и S_2 орбитальные параметры Стокса по формулам (124), (125) для сЛГ пучка, так и для асЛГ пучка по формулам (130), (131) [116*], изменяя лишь порядок анализа критических плоскостей, далее строились характеристические эллипсы интенсивности (58), эллиптичность и угол наклона большой оси эллипса по формулам (60) и (59) [117*], соответственно. Для расчета третьих S_3 параметров Стокса использовались формулы (128) и (132) для сЛГ и асЛГ-пучка, соответственно. Результаты измерений представлены экспериментальными точками на рисунке 27 и рисунке 35а, б и характеристическими эллипсами на рисунке 35в, г. Кроме того, все картины интенсивности на рисунках получены экспериментально. Сравнение экспериментальных и теоретических результатов дает рассогласование не более 4% [162*].

3.5.3 Экспериментальное исследование Фурье-инвариантов сЛГ- и асЛГ-пучков в оптической системе первого порядка

Для экспериментального исследования Фурье-инвариантов астигматического преобразования была модернизирована экспериментальная установка, эскиз которой приведен на рисунке 37. Для формирования сЛГ-пучка использовался пространственный модулятор света (SLM) типа Thorlabs EXULUS-4K1/M, а в качестве фотодетектора применялась CMOS-камера типа Michrome 20, расположенная на расстоянии $Z_1 = Z_2 = f_{L2} = 0,1$. Фотодетектор совместно со

сферической линзой $f_{L2} = 0,1$ м. располагались на оптическом столике типа Thorlabs “MAX603D”. В процессе измерений сферическая линза и CMOS-камера смещались совместно вдоль оси оптической системы для исследования Фурье-инвариантов астигматического сЛГ пучка. Изменялись орбитальные параметры Стокса для сЛГ пучка с начальным сЛГ состоянием для $n = 10, \ell = 1$ и $n = 1, \ell = 1$ с управляющими параметрами $\varepsilon = 1, \theta = 3,043$ при смещении системы «цилиндрическая линза – CMOS-камера» вдоль оси пучка. Фазовый параметр $\theta = 3,043$ выбирался для максимального значения ОУМ как показано на рисунке 33г. Эволюция Фурье-инвариантного сЛГ-пучка представлена на рисунке 33в, г. Экспериментальные точки вдоль прямых $\ell_z(Z_1), W_{xy}(Z_1), LW(Z_1)$ свидетельствует о том, что ОУМ, W_{xy} и LW являются инвариантами астигматического преобразования.

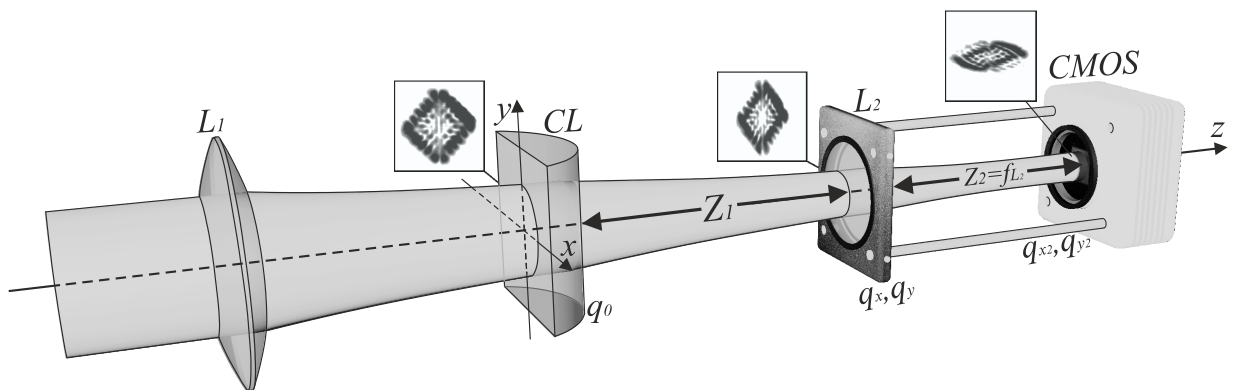


Рисунок 37 – Эскиз части экспериментальной установки с двумя сферическими L_1, L_2 линзами и одной цилиндрической линзой CL между ними. CMOS камера помещена в плоскости $Z_1 = Z_2 = f_{L2} = 0,1$. и смещается вдоль оси астигматической системы вместе со сферической линзой

Даже небольшое нарушение условий Фурье-инвариантов приводит к изменению астигматической фазы Γ_{ui} Γ_{xy} , что существенно влияет на ОУМ и поперечный момент интенсивности W_{xy} в окрестности первой критической плоскости. Как правило, измерение фазы Γ_{ui} сводится к использованию специальных интерферометрических методов (см., например, работу [164*, 165]),

и требует тщательного контроля процесса измерений. Тем не менее, предложенный нами подход на основе матрицы моментов интенсивности позволяет непосредственно измерять астигматическую фазу Γ_{xy} , не прибегая к интерферометрии, а используя выражение (134), представляющее её в виде арктангенса отношения третьего и второго орбитальных параметров Стокса. Для выявления отклонений астигматической фазы от линейной зависимости на рисунке 33в, г плоскость наблюдения (CMOS-детектор) смещалась на величину $\Delta Z_1 = \pm 0,01$. Измерения осуществлялись для двух типов сЛГ-пучков с параметрами $n = 10, \ell = 1$ и $n = 1, \ell = 1$ в области резкого изменения ОУМ для (см. рисунок 33б) для $\theta = 3,2994$ и $\theta = 3,043$, соответственно, при амплитудном параметре $\varepsilon = 1$. Экспериментальные данные с хорошей точностью соответствуют изменениям кривых аномальной фазы на рисунке 33в, г. Обращает на себя внимание несимметричное поведение кривых при одинаковых смещениях $\Delta Z_1 = -0,01$ и $\Delta Z_1 = 0,01$. Данная асимметрия объясняется положением плоскости наблюдения относительно области максимума ОУМ (рисунок 33б). Пунктирная линия на рисунке указывает на положение плоскости Фурье-инвариантности. Смещение $\Delta Z_1 = -0,01$ сдвигает плоскость наблюдения в область максимума ОУМ, где его величина медленно изменяется. Соответственно, медленно изменяется аномальная фаза на верхней кривой на рисунке 34. Смещение плоскости наблюдения в противоположном направлении приходится на участок быстрого изменения ОУМ на рисунке 33б, что и отражается в быстром изменении аномальной фазы на нижней кривой на рисунке 34г.

3.6 Выводы к главе 3

1. Разработан и воплощен метод измерения орбитальных параметров Стокса, включая ОУМ, как для обычных структурированных пучков света, так и для астигматических структурированных пучков в оптической системе первого порядка. Основными элементами оптической системы являются две сферические линзы и цилиндрическая линза между ними. Первым условием измерительного

процесса является требование, чтобы длина Рэлея z_0 гауссова пучка на входе цилиндрической линзы была равна ее двойному фокусу. Важным этапом процесса измерений является определение положения критических плоскостей, где проявляются четыре свойства структурированных пучков. Первым свойством является равенство радиусов пучков в x - и y -направлениях. Второе свойство относится к разности фаз Гуи Γ_{xy} в x - и y -компонент астигматического пучка, так что в первой плоскости выполняется условие кратности разности фаз $\Gamma_{xy} = \pi/2$, и во второй плоскости разность фаз равна $\Gamma_{xy} = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Третье свойство проявляется в эффекте взаимности между ОУМ ℓ_z и поперечным моментом интенсивности W_{xy} в первой и второй критической плоскости. Четвертым свойством является эффект самовоспроизведения структурированного пучка во второй критической плоскости, идентичного пучку и на входе цилиндрической линзы. Геометрической иллюстрацией преобразования астигматического структурированного пучка между критическими плоскостями является прямое и обратное вращение его траектории как единого целого на орбитальной сфере Пуанкаре [131*, 162*, 163*].

2. Теоретически обнаружено и экспериментально подтверждено, что распространение структурированного пучка между второй сферической линзой и первой критической плоскостью отображается поворотом траектории его состояний на 90° . Распространение пучка между первой и второй критическими плоскостями сопровождается обратным вращением траектории до полного совмещения с исходной на второй критической плоскости. Мы также провели измерение астигматической разности фаз Гуи Γ_{xy} , ответственной за эволюцию третьего орбитального параметра Стокса $\ell_z = S_3$. Астигматическая разность фаз определялась как арктангенс отношения S_3/S_2 . Эти свойства позволяют измерять орбитальные параметры Стокса по аналогии с измерением поляризационных параметров Стокса, где роль поляризатора и четвертьволновой пластинки выполняют моменты интенсивности W_{xx} , W_{yy} и W_{xy} , как средние квадратичные отклонения в картине интенсивности [115*, 164*].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе получены следующие основные научные результаты:

1. Разработан и экспериментально реализован метод прямого измерения орбитальных параметров Стокса структурированных пучков, основанный на анализе моментов интенсивности второго порядка в оптической системе первого рода. Метод требует регистрации двух распределений интенсивности – в фокусе сферической линзы и в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы – и позволяет определить все три орбитальных параметра Стокса. Полученный метод может быть использован для экспериментальной диагностики структурированных пучков света и анализа их орбитального углового момента.

2. В оптической системе первого порядка, состоящей из двух сферических линз и расположенной между ними цилиндрической линзы, выявлены две выделенные плоскости, в которых происходит преобразование пространственной структуры структурированных пучков Лагерра–Гаусса. Показано, что на орбитальной сфере Пуанкаре этим плоскостям соответствуют поворот траектории состояния пучка на 90° и её последующее обратное вращение, приводящее к восстановлению исходной структуры. Установлено, что при равенстве длины Рэлея гауссова пучка на входе цилиндрической линзы её удвоенному фокусному расстоянию указанные плоскости могут быть использованы для реализации модифицированного метода измерения орбитальных параметров Стокса. Полученные результаты могут быть использованы для экспериментальной диагностики структурированных пучков, контроля их орбитального углового момента, а также в задачах оптической связи, микроманипулирования и обработки информации.

3. Теоретически и экспериментально установлено, что астигматическая фаза Гуи определяет эволюцию состояния структурированного пучка при астигматическом преобразовании и выражается через орбитальные параметры Стокса соотношением $\arctan(S_3/S_2)$, где S_2 , S_3 – второй и третий орбитальные параметры Стокса. Установлено, что данная фаза является ключевой

характеристикой, связывающей параметры интенсивности с орбитальными свойствами пучка, и может рассматриваться как фундаментальный инвариант астигматических преобразований.

4. Установлено, что при астигматическом преобразовании структурированных пучков Лагерра–Гаусса величина их орбитального углового момента определяется не только топологическим зарядом, но и радиальным числом. Показано, что астигматическое преобразование приводит к возникновению экстремальных значений орбитального углового момента, а поворот цилиндрической линзы позволяет управлять его величиной. Установлено сохранение инварианта астигматических преобразований $\sqrt{S_2^2 + S_3^2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Forbes, A. Structured light / A. Forbes, M. de Oliveira, M.R. Dennis // *Nature Photonics*. – 2021. – Vol. 15. – P. 253–262.
- [2] He, C. Towards higher-dimensional structured light / C. He, Y. Shen, A. Forbes // *Light: Science & Application*. – 2022. – Vol. 11. – 205.
- [3] Shen, Y. Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities / Y. Shen, X. Wang, Z. Xie, C. Min, X. Fu, Q. Liu, M. Gong, X. Yuan // *Light: Science & Application*. – 2019. – Vol. 8. – 90.
- [4] Rosales-Guzmán, C. A review of complex vector light fields and their applications / C. Rosales-Guzmán, B. Ndagano, A. Forbes // *Journal of Optics*. – 2018. – Vol. 20. – 123001.
- [5] Cardano, F. Spin–orbit photonics / F. Cardano, L. Marrucci // *Nature Photonics*. – 2015. – Vol. 9. – P. 776–778.
- [6] Willner, A.E. Orbital angular momentum beams for high-capacity communications / A.E. Willner, H. Song, K. Zou, H. Zhou, X. Su // *Journal of Lightwave Technology*. – 2023. – Vol. 41(7). – P. 1918–1933.
- [7] Bokić, B. Structured light from classical to quantum perspectives / B. Bokić, Y. de Coene, M.A. Ferrara, T. Verbiest, Y. Caudano, B. Kolaric // *Symmetry*. – 2024. – Vol. 16(8). – 1053.
- [8] Buono, W.T. Nonlinear optics with structured light / A. Forbes, W.T. Buono // *Opto–Electronic Advances*. – 2022. – Vol. 5(6). – 210174.
- [9] Lee, D. Orbital angular momentum multiplexing using radio wave and its extension to multishape radio / D. Lee, H. Sasaki, Ya. Yagi, H. Shiba // *Journal of Lightwave Technology*. – 2023. – Vol. 41(7). – P. 1985–1996.
- [10] Shi, C. High-speed acoustic communication by multiplexing orbital angular momentum / C. Shi, M. Dubois, Y. Wang, X. Zhang // *Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.* – 2017. – Vol. 114(28). – P. 7250–7253.
- [11] Forbes, A. Creation and detection of optical modes with spatial light modulators / A. Forbes, A. Dudley, M. McLaren // *Advances in Optics and Photonics*. – 2016. – Vol. 8(2). – P. 200–227.

- [12] Scholes, S. Structured light with digital micromirror devices: a guide to best practice / S. Scholes, R. Kara, J. Pinnell, V. Rodriguez-Fajardo, A. Forbes // *Optical Engineering*. – 2019. – Vol. 59(4). – 041202.
- [13] Coppola, G. Polarized Digital Holography as Valuable Analytical Tool in Biological and Medical Research / G. Coppola, G. Zito, A.C.D. Luca, M.A. Ferrara // *In Proceedings of the Digital Holography and Three-Dimensional Imaging 2019*. – Washington, DC, USA: Optica Publishing Group, 2019. – Paper Th4A.5.
- [14] Rubinsztein-Dunlop, H. Roadmap on structured light / H. Rubinsztein-Dunlop, A. Forbes, M.V. Berry, M.R. Dennis, D.L. Andrews, M. Mansuripur, C. Denz, C. Alpmann, P. Banzer, T. Bauer, E. Karimi, L. Marrucci, M. Padgett, M. Ritsch-Marte, N.M. Litchinitser, N.P. Bigelow, C. Rosales-Guzmán, A. Belmonte, J.P. Torres, T.W. Neely, M. Baker, R. Gordon, A.B. Stilgoe, J. Romero, A.G. White, R. Fickler, A.E. Willner, G. Xie, B. McMorran, A.M. Weiner // *Journal of Optics*. – 2016. – Vol. 19. – 013001.
- [15] Fang, X. Orbital angular momentum holography for high-security encryption / X. Fang, H. Ren, M. Gu // *Nature Photonics*. – 2020. – Vol. 14. – P. 102–108.
- [16] Luneberg, R.K. *Mathematical Theory of Optics* / R.K. Luneberg. – Berkeley; Los Angeles: University of California Press, 1966. – 478 p.
- [17] Bastiaans, M.J. *Wigner Distribution in Optics* / M.J. Bastiaans. – New York: McGraw-Hill, 2009. – 44 p.
- [18] ISO 11146-2:2021. Lasers and laser-related equipment – Test methods for laser beam widths, divergence angles and beam propagation ratios – Part 2: General astigmatic beams. – Geneva: ISO, 2021.
- [19] Gbur, G.J. *Singular Optics* / G.J. Gbur. – Boca Raton: CRC Press, 2016. – 563 p.
- [20] Soskin, M.S. Chapter 4 – Singular optics / M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // *Progress in Optics* / ed. E. Wolf. – Vol. 42. – Amsterdam: Elsevier, 2001. – P. 219–276.
- [21] Harris, M. Laser modes with helical wave fronts / M. Harris, C.A. Hill, P.R. Tapster, J.M. Vaughan // *Physical Review A*. – 1994. – Vol. 49(4). – P. 3119–3122.

- [22] Chen, M. Detection of phase singularities with a Shack-Hartmann wavefront sensor / M. Chen, F.S. Roux, J.C. Olivier // *Journal of the Optical Society America A.* – 2007. – Vol. 24(7). – P. 1994–2002.
- [23] Khonina, S.N. Experimental selection of spatial Gauss-Laguerre modes / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, Y. Wang // *Computer Optics.* – 1999. – № 19. – P. 115–117.
- [24] Fatkhiev, D.M. Recent advances in generation and detection of orbital angular momentum optical beams – a review / D.M. Fatkhiev, M.A. Butt, E.P. Grakhova, R.V. Kutluyarov, I.V. Stepanov, N.L. Kazanskiy, S.N. Khonina, V.S. Lyubopytov, A.K. Sultanov // *Sensors.* – 2021. – Vol. 21(15). – 4988.
- [25] Berkhout, G.C.G. Efficient sorting of orbital angular momentum states of light / G.C.G. Berkhout, M.P.J. Lavery, J. Courtial, M.W. Beijersbergen, M.J. Padgett // *Physical Review Letters.* – 2010. – Vol. 105. – 153601.
- [26] Berkhout, G.C.G. Measuring orbital angular momentum superpositions of light by mode transformation / G.C.G. Berkhout, M.P.J. Lavery, M.J. Padgett, M.W. Beijersbergen // *Optics Letters.* – 2011. – Vol. 36(10). – P. 1863–1865.
- [27] Flusser, J. Moments and moment invariants in pattern recognition / J. Flusser, T. Suk, B. Zitová. – UK: John Wiley & Sons, Ltd., 2009. – 296 p.
- [28] Siegman, A.E. How to (maybe) measure laser beam quality / A.E. Siegman // *DPSS (Diode Pumped Solid State) Lasers: Applications and Issues* / ed. M. Dowley. – Vol. 17 of *OSA Trends in Optics and Photonics.* – Washington, DC: Optica Publishing Group, 1998. – Paper MQ1.
- [29] Alperin, S.N. Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens / S.N. Alperin, R.D. Niederiter, J.T. Gopinath, K.E. Siements // *Optics Letters.* – 2016. – Vol. 41(21). – P. 5019–5022.
- [30] Anan'ev, Yu.A. Theory of intensity moments for arbitrary light beams / Yu.A. Anan'ev, A.Ya. Bekshaev // *Optics and Spectroscopy.* – 1994. – Vol. 76(4). – P. 624–635.
- [31] Bekshaev, A.Ya. Optical vortex symmetry breakdown and decomposition of the orbital angular momentum of light beams / A.Ya. Bekshaev, M.S. Soskin,

M.V. Vasnetsov // *Journal of the Optical Society of America A.* – 2003. – Vol. 20(8). – P. 1635–1643.

[32] Nemes, G. Measurement of all ten second-order moments of an astigmatic beam by the use of rotating simple astigmatic (anamorphic) optics / G. Nemes, A.E. Siegman // *Journal of the Optical Society of America A.* – 1994. – Vol. 11(8). – P. 2257–2264.

[33] Alieva, T. Phase-space rotations and orbital Stokes parameters / T. Alieva, M.J. Bastiaans // *Optics Letters.* – 2009. – Vol. 34(4). – P. 410–412.

[34] Abramochkin, E. Beam transformations and nontransformed beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // *Optics Communications.* – 1991. – Vol. 83(1–2). – P. 123–135.

[35] Abramochkin, E. Generalized Gaussian beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics.* – 2004. – Vol. 6. – P. S157–S161.

[36] Padgett, M.J. Poincaré–sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum / M.J. Padgett, J. Courtial // *Optics Letters.* – 1999. – Vol. 24(7). – P. 430–432.

[37] Calvo, G.F. Wigner representation and geometric transformations of optical orbital angular momentum spatial modes / G.F. Calvo // *Optics Letters.* – 2005. – Vol. 30(10). – P. 1207–1209.

[38] Volyar, A. Fine structure of perturbed Laguerre–Gaussian beams: Hermite–Gaussian mode spectra and topological charge / A. Volyar, E. Abramochkin, Yu. Egorov, M. Bretsko, Ya. Akimova // *Applied Optics.* – 2020. – Vol. 59(25). – P. 7680–7687.

[39] Volyar, A. Mapping structured Laguerre–Gaussian beam states onto the orbital Poincaré sphere in the form of controllable spatial trajectories / A. Volyar, M. Bretsko // *Journal of the Optical Society of America A.* – 2024. – Vol. 41(9). – P. 1648–1655.

[40] Volyar, A. Measurement of the vortex spectrum in a vortex-beam array without cuts and gluing of the wavefront / A. Volyar, M. Bretsko, Ya. Akimova, Yu. Egorov // *Optics Letters.* – 2018. – Vol. 43(22). – P. 5635–5638.

[41] Volyar, A. Measurement of the vortex and orbital angular momentum spectra with a single cylindrical lens / A. Volyar, M. Bretsko, Ya. Akimova, Yu. Egorov // *Applied Optics.* – 2019. – Vol. 58(21). – P. 5748–5755.

- [42] Dennis, M.R. Swings and roundabouts: optical Poincaré spheres for polarization and Gaussian beams / M.R. Dennis, M.A. Alonso // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. – 2017. – Vol. 375. – 20150441.
- [43] Allen, L. Orbital angular momentum and the transformation of Gauss-Laguerre modes / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman // *Physical Review A*. – 1992. – Vol. 45. – P. 8185–8189.
- [44] Berry, M.V. Paraxial beams of spinning light / M.V. Berry // *Singular Optics: Proceedings of SPIE*. – 1998. – Vol. 3487. – P. 6–11.
- [45] Van Enk, S.J. Commutation rules and eigenvalues of spin and angular momentum of radiation fields / S.J. Van Enk, G. Nienhuis // *Journal of Modern Optics*. – 1994. – Vol. 41(5). – P. 963–977.
- [46] Fadeyeva, T.A. Does the optical angular momentum change smoothly in fractional-charged vortex beams? / T.A. Fadeyeva, A.F. Rubass, R.V. Aleksandrov, A.V. Volyar // *Journal of the Optical Society of America B*. – 2014. – Vol. 31(4). – P. 798–805.
- [47] Kotlyar, V.V. Vortex-free laser beam with an orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *Computer Optics*. – 2017. – Vol. 41(4). – P. 573–576.
- [48] Izdebskaya, Y.V. Symmetric array of off-axis singular beams: spiral beams and their critical points / Y.V. Izdebskaya, V.G. Shvedov, A.V. Volyar // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2008. – Vol. 25(1). – P. 171–181.
- [49] Aksenov, V.P. Vortex beams with zero orbital angular momentum and non-zero topological charge / V.P. Aksenov, V.V. Dudorov, G.A. Filimonov, V.V. Kolosov, V.Yu. Venediktov // *Optics and Laser Technology*. – 2018. – Vol. 104. – P. 159–163.
- [50] Kovalev, A.A. Asymmetric Laguerre–Gaussian beams / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, A.P. Porfirev // *Physical Review A*. – 2016. – Vol. 93. – 063858.
- [51] Najafi-Nezhad, F. Superposition of shifted Laguerre–Gaussian beams / F. Najafi-Nezhad, Y. Azizian-Kalandaragh, A. Akhlaghi, P. Amiri, A. Porfirev, S. Khonina, G. Najarbashi // *Optik – International Journal for Light and Electron Optics*. – 2021. – Vol. 227. – P. 165147.

- [52] Shen, Y. Structured ray-wave vector vortex beams in multiple degrees of freedom from a laser / Y. Shen, X. Yang, D. Naidoo, X. Fu, A. Forbes // *Optica*. – 2020. – Vol. 7(7). – P. 820–831.
- [53*] Bretsko, M.V. Orbital angular momentum of structured LG beams after astigmatic transformation / M.V. Bretsko, Ya.E. Akimova, A.V. Volyar, **S.I. Khalilov**, Yu.A. Egorov, A.O. Ivakhnenko // *Optical Memory and Neural Networks*. – 2023. – Vol. 32(Suppl. 1). – P. S75–S83.
- [54] Abramochkin, E.G. *Modern Optics of Gaussian Beams* [in Russian] / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov. – Moscow: Fizmatlit, 2010. – 248 p.
- [55] Berry, M.V. Wave dislocations in non-paraxial Gaussian beams / M.V. Berry // *Journal of Modern Optics*. – 1998. – Vol. 45. – P. 1845–1858.
- [56] Volyar, A.V. Can the radial number of vortex modes control the orbital angular momentum? / A.V. Volyar, E.G. Abramochkin, M.V. Bretsko, Ya.E. Akimova, Yu.A. Egorov // *Computer Optics*. – 2022. – Vol. 46(6). – P. 853–863.
- [57*] Volyar, A.V. Orbital angular momentum burst control in astigmatic structured beams in ABCD-matrix transforms / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, **S.I. Khalilov**, Ya.E. Akimova // *Computer Optics*. – 2024. – Vol. 48(2). – P. 171–179.
- [58] Volyar, A. Control of the orbital angular momentum via radial numbers of structured Laguerre–Gaussian beams / A. Volyar, Y. Akimova, M. Bretsko, Y. Egorov // *Optics Letters*. – 2022. – Vol. 47(10). – P. 2402–2405.
- [59] Kogelnik, H. Laser beams and resonators / H. Kogelnik, T. Li // *Applied Optics*. – 1966. – Vol. 5(10). – P. 1550–1567.
- [60] Siegman, A.E. *Lasers* / A.E. Siegman. – Mill Valley, CA: University Science Books, 1986. – 1283 p.
- [61] Soifer, V.A. Laser beam mode selection by computer-generated holograms / V.A. Soifer, M.A. Golub. – Boca Raton: CRC Press, 1994. – 296 p.
- [62] Kotlyar, V.V. *Vortex Laser Beams* / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev. – Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2019. – 198 p.

- [63] Fadeyeva, T. Quadrefringence of optical vortices in a uniaxial crystal / T. Fadeyeva, A. Rubass, Yu. Egorov, A. Volyar, G. Swartzlander Jr. // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2008. – Vol. 25(7). – P. 1634–1641.
- [64] Fadeyeva, T. Vector erf-Gaussian beams: fractional optical vortices and asymmetric TE and TM modes / T. Fadeyeva, C. Alexeyev, A. Rubass, A. Volyar // *Optics Letters*. – 2012. – Vol. 37(8). – P. 1397–1399.
- [65] Collins, S.A. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics / S.A. Collins // *Journal of the Optical Society of America* – 1970. – Vol. 60(9). – P. 1168–1177.
- [66] Bélanger, P.A. Beam propagation and the ABCD ray matrices / P.A. Bélanger // *Optics Letters*. – 1991. – Vol. 16(4). – P. 196–198.
- [67] Taché, J.P. Derivation of ABCD law for Laguerre-Gaussian beams / J.P. Taché // *Applied Optics*. – 1987. – Vol. 26(14). – P. 2698–2700.
- [68] Alieva, T. Alternative representation of the linear canonical integral transform / T. Alieva, M.J. Bastiaans // *Optics Letters*. – 2005. – Vol. 30(24). – P. 3302–3304.
- [69] Alieva, T. Mode mapping in paraxial lossless optics / T. Alieva, M.J. Bastiaans // *Optics Letters*. – 2005. – Vol. 30(12). – P. 1461–1463.
- [70] Beijersbergen, M.W. Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum / M.W. Beijersbergen, L. Allen, H.E.L.O. van der Veen, J.P. Woerdman // *Optics Communications*. – 1993. – Vol. 96(1–3). – P. 123–132.
- [71] Courtial, J. Performance of a cylindrical lens mode converter for producing Laguerre–Gaussian laser modes / J. Courtial, M.J. Padgett // *Optics Communications*. – 1999. – Vol. 159(1). – P. 13–18.
- [72] Khonina, S.N. Functional enhancement of mode astigmatic converters on the basis of application of diffractive optical elements [in Russian] / S.N. Khonina, S.V. Karpeev, A.V. Ustinov // *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*. – 2009. – Vol. 11(5). – P. 13–23.
- [73] Abramochkin, E. General astigmatic transform of Hermite–Laguerre–Gaussian beams / E. Abramochkin, E. Razueva, V. Volostnikov // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2010. – Vol. 27(11). – P. 2506–2513.

- [74] Wada, A. Propagation analysis of the Laguerre–Gaussian beam with astigmatism / A. Wada, T. Ohtani, Y. Miyamoto, M. Takeda // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2005. – Vol. 22(12). – P. 2746–2755.
- [75] Alieva, T. Orthonormal mode sets for the two-dimensional fractional Fourier transformation / T. Alieva, M.J. Bastiaans // *Optics Letters*. – 2007. – Vol. 32(10). – P. 1226–1228.
- [76] Volyar, A. Astigmatic-invariant structured singular beams / A. Volyar, E. Abramochkin, Y. Akimova, M. Bretsko // *Photonics*. – 2022. – Vol. 9(11). – 842.
- [77*] Volyar, A. General astigmatism of structured LG beams: Evolution and transformations of the OAM super-bursts / A. Volyar, E. Abramochkin, M. Bretsko, **S. Khalilov**, Y. Akimova // *Photonics*. – 2023. – Vol. 10(7). – 727.
- [78*] Volyar, A.V. Structurally stable astigmatic vortex beams with super high orbital angular momentum (ABCD matrix approach) / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, **S.I. Khalilov**, Y.E. Akimova // *Photonics*. – 2023. – Vol. 10(9). – 1048.
- [79*] **Khalilov, S.I.** Astigmatic Laguerre–Gaussian beams with rapid oscillations of orbital angular momentum / **S.I. Khalilov**, M.V. Bretsko, S.I. Yakubov, S.N. Lapaeva, D.V. Maksimov, A.V. Volyar, Ya.E. Akimova // *Optical Memory and Neural Networks*. – 2024. – Vol. 33(Suppl. 1). – P. S189–S197.
- [80] Bekshaev, A.Ya. Transformation of higher-order optical vortices upon focusing by an astigmatic lens / A.Ya. Bekshaev, M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // *Optics Communications*. – 2004. – Vol. 241(4-6). – P. 237–247.
- [81] Kotlyar, V.V. Orbital angular momentum of paraxial propagation-invariant laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2022. – Vol. 39(6). – P. 1061–1065.
- [82] Gerrard, A. Introduction to matrix methods in optics / A. Gerrard, J.M. Burch. – Mineola, New York: Dover Publications, 1994. – 280 p.
- [83] Wang, Z. Astigmatic hybrid SU(2) vector vortex beams: towards versatile structures in longitudinally variant polarized optics / Z. Wang, Y. Shen, D. Naidoo, X. Fu, A. Forbes // *Optics Express*. – 2021. – Vol. 29(1). – P. 315–329.

- [84] Wan, Z. Digitally tailoring arbitrary structured light of generalized ray-wave duality / Z. Wan, Z. Wang, X. Yang, Y. Shen, X. Fu // *Optics Express*. – 2020. – Vol. 28(21). – P. 31043–31056.
- [85] Singh, K. Accelerating polarization structures in vectorial fields / K. Singh, W. Buono, A. Forbes, A. Dudley // *Optics Express*. – 2021. – Vol. 29(2). – P. 2727–2737.
- [86] De Oliviera, M. Experimental high-dimensional quantum secret sharing with spin-orbit-structured photons / M. De Oliviera, I. Nape, J. Pinnell, N. Tabebordbar, A. Forbes // *Physical Review A*. – 2020. – Vol. 101(4). – 042303.
- [87] Forbes, A. Sculpturing electric currents with structured light / A. Forbes // *Nature Photonics*. – 2020. – Vol. 14. – P. 656–657.
- [88] Shen, Y. Polygonal vortex beams / Y. Shen, Z. Wan, Y. Meng, X. Fu, M. Gong // *IEEE Photonics Journal*. – 2018. – Vol. 10(4). – 503016.
- [89] Lin, Z. Single-shot Kramers–Kronig complex orbital angular momentum spectrum retrieval / Z. Lin, J. Hu, Y. Chen, C.-S. Brès, S. Yu // *Advanced Photonics*. – 2023. – Vol. 5(3). – 036006.
- [90] Shen, Y. Topology, skyrmions, and superoscillation of structured light / Y. Shen, A.V. Zayats // *Proceedings of SPIE*. – 2023. – PC12436.
- [91] Volyar, A. Generation of single-charge optical vortices with an uniaxial crystal / A. Volyar, V. Shvedov, T. Fadeyeva, A.S. Desyatnikov, D.N. Neshev, W. Krolikowski, Yu.S. Kivshar // *Optics Express*. – 2006. – Vol. 14. – P. 3724–3729.
- [92] Porfirev, A.P. Phase singularities and optical vortices in photonics / A.P. Porfirev, A.A. Kuchmizhak, S.O. Gurbatov, S. Juodkazis, S.N. Khonina, Yu.N. Kulchin // *Physics-Uspekhi*. – 2022. – Vol. 65(8). – P. 789–811.
- [93] Daukantas, P. Structured light without distortion / P. Daukantas // *Optics & Photonics News*. – 2023. – Publication date: Feb 15, 2023.
- [94] Palagi, S. Structured light enables biomimetic swimming and versatile locomotion of photoresponsive soft microrobots / S. Palagi, A.G. Mark, S.Y. Reigh, K. Melde, T. Qiu, H. Zeng, C. Parmeggiani, D. Martella, A. Sanchez-Castillo, N. Kapernaum, F. Giesselmann, D.S. Wiersma, E. Lauga, P. Fischer // *Nature Materials*. – 2016. – Vol. 15(6). – P. 647–653.

- [95] Wang, X.-L. Quantum teleportation of multiple degrees of freedom of a single photon / X.-L. Wang, X.-D. Cai, Z.-E. Su, M.-C. Chen, D. Wu, L. Li, N.-L. Liu, C.-Y. Lu, J.-W. Pan // *Nature*. – 2015. – Vol. 518. – P. 516–519.
- [96] Lukin, V.P. Outer scale of turbulence and its influence on fluctuations of optical waves / V.P. Lukin // *Physics-Uspekhi*. – 2021. – Vol. 191(3). – P. 292–317.
- [97] Aksenov, V.P. Synthesized vortex beams in the turbulent atmosphere / V.P. Aksenov, V.V. Dudorov, V.V. Kolosov, M.E. Levitsky // *Frontiers in Physics*. – 2020. – Vol. 8. – 143.
- [98] Cox, M.A. Structured light in turbulence / M.A. Cox, N. Mphuthi, I. Nape, N. Mashaba, L. Cheng, A. Forbes // *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*. – 2021. – Vol. 27(2). – 7500521.
- [99] Klug, A. Robust structured light in atmospheric turbulence / A. Klug, C. Peters, A. Forbes // *Advanced Photonics*. – 2023. – Vol. 5. – 016006.
- [100] Volyar, A.V. Beyond the light intensity or intensity moments and measurements of the vortex spectrum in complex light beams / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, Ya.E. Akimova, Yu.A. Egorov // *Computer Optics*. – 2018. – Vol. 42(5). – P. 736–743.
- [101] Volyar, A.V. Huge spikes and dips of the orbital angular momentum in structured Laguerre-Gaussian beams resistant to simple astigmatism / A.V. Volyar, E.G. Abramochkin, Y.E. Akimova, M.V. Bretsko // *Computer Optics*. – 2023. – Vol. 47(3). – P. 350–360.
- [102] Allen, L. *Optical Angular Momentum* / L. Allen, S.M. Barnett, M.J. Padgett. – Boca Raton: CRC Press, 2003. – 284 p. – ISBN: 978-0-429-17494-0.
- [103] Torres, J.P. *Twisted Photons: Applications of Light with Orbital Angular Momentum* / J.P. Torres, L. Torner. – Bristol: Wiley-VCH, 2011. – 268 p.
- [104] Kotlyar, V.V. *Topological Charge of Optical Vortices* / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.G. Nalimov. – Boca Raton: CRC Press, 2022. – 224 p.
- [105] Berry, M.V. Wave dislocation reactions in non-paraxial Gaussian beams / M.V. Berry // *Journal of Modern Optics*. – 1998. – Vol. 45(9). – P. 1845–1858.

- [106] Vasnetsov, M.V. Wavefront motion in the vicinity of a phase dislocation: “optical vortex” / M.V. Vasnetsov, V.N. Gorshkov, I.G. Marienko, M.S. Soskin // *Optics and Spectroscopy*. – 2000. – Vol. 88(2). – P. 260–265.
- [107] Kreminskaya, L.V. The Gaussian lenses give birth to optical vortices in laser beams / L.V. Kreminskaya, M.S. Soskin, A.I. Khizhnyak // *Optics Communications*. – 1998. – Vol. 145(1). – P. 377–384.
- [108] Volyar, A. Super bursts of the orbital angular momentum in astigmatic-invariant structured LG beams / A. Volyar, E. Abramochkin, Y. Akimova, M. Bretsko // *Optics Letters*. – 2022. – Vol. 47(21). – P. 5537–5540.
- [109*] Volyar, A.V. Control of giant orbital angular momentum bursts of structured Laguerre-Gaussian beams in a medium with general astigmatism / A.V. Volyar, E.G. Abramochkin, M.V. Bretsko, **S.I. Khalilov**, Y.E. Akimova // *Computer Optics*. – 2024. – Vol. 48(1). – P. 35–46.
- [110*] Bretsko, M.V. Astigmatic structured Laguerre–Gaussian beams: Orbital angular momentum and its transformation / M.V. Bretsko, **S.I. Khalilov**, S.I. Yakubov, D.V. Maksimov, A.V. Volyar, Ya.E. Akimova // *Optical Memory and Neural Networks*. – 2024. – Vol. 33(Suppl. 1). – P. S139–S145.
- [111] Volyar, A. Fast oscillations of orbital angular momentum and Shannon entropy caused by radial numbers of structured vortex beams / A. Volyar, E. Abramochkin, Ya. Akimova, M. Bretsko, Yu. Egorov // *Applied Optics*. – 2022. – Vol. 61(21). – P. 6398–6407.
- [112] Kotlyar, V.V. Orbital angular momentum of structurally stable laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *Computer Optics*. – 2022. – Vol. 46(4). – P. 517–521.
- [113] Eppich, B. Determination of the ten second order intensity moments / B. Eppich, C. Gao, H. Weber // *Optik*. – 1998. – Vol. 109(3) – P. 123–129.
- [114*] Volyar, A.V. Direct measurement of Stokes orbital parameters / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, **S.I. Khalilov**, Y.E. Akimova // *Computer Optics*. – 2025. – Vol. 49(5). – P. 715–722.

- [115*] Volyar, A. Simple direct measurement of the orbital Stokes parameters in structured vortex beams / A. Volyar, M. Bretsko, **S. Khalilov**, Y. Akimova // *Photonics*. – 2024. – Vol. 11(11). – 1095.
- [116*] Программа экспериментального определения орбитальных параметров Стокса лазерных пучков по двум распределениям интенсивности (сферический фокус / двойной фокус цилиндрической линзы) [Программа для ЭВМ] / М.В. Брецько, **С.И. Халилов**, Я.Е. Акимова, А.В. Воляр. – RU2025685861; заявл. 26.09.2025. – Зарегистр. в Реестре программ для ЭВМ РФ.
- [117*] Программа определения эллипса интенсивности и угла его наклона по вторым моментам интенсивности лазерного пучка [Программа для ЭВМ] / М.В. Брецько, **С.И. Халилов**, Я.Е. Акимова, А.В. Воляр. – RU2025685862; заявл. 26.09.2025. – Зарегистр. в Реестре программ для ЭВМ РФ.
- [118] Starikov, S.N. Second-order intensity moment analysis of Gaussian beams / S.N. Starikov, I.G. Marienko // *Quantum Electronics*. – 1994. – Vol. 24(6). – P. 521–525.
- [119] Malyutin, A.A. Intensity moment matrix method for description of paraxial beams / A.A. Malyutin // *Optics and Spectroscopy*. – 1996. – Vol. 81(6). – P. 919–924.
- [120] Volyar, A. Engineering orbital angular momentum in structured beams in general astigmatic systems via symplectic matrix approach / A. Volyar, E. Abramochkin, M. Bretsko, Y. Akimova // *Photonics*. – 2024. – Vol. 11(3). – 191.
- [121] Gori, F. Matrix treatment for the propagation of Gaussian Schell-model beams / F. Gori // *Optics Communications*. – 1983. – Vol. 46(3). – P. 149–154.
- [122] Bastiaans, M.J. Application of the Wigner distribution function to partially coherent light / M.J. Bastiaans // *J. Opt. Soc. Am. A*. – 1986. – Vol. 3(8). – P. 1227–1238.
- [123] Wigner, E. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium / E. Wigner // *Phys. Rev.* – 1932. – Vol. 40(5). – P. 749–759.
- [124] Kenfack, A. Negativity of the Wigner function as an indicator of nonclassicality / A. Kenfack, K. Życzkowski // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. – 2004. – Vol. 6(10). – P. 396–404.

- [125] Stokes, G.G. On the composition and resolution of streams of polarized light / G.G. Stokes // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. – 1852. – Vol. 9. – P. 399–416.
- [126] Allen, L. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman // Physical Review A. – 1992. – Vol. 45(11). – P. 8185–8189.
- [127] Milione, G. Higher-order Poincaré sphere: Complex polarization states and the orbital angular momentum basis / G. Milione, H.I. Sztul, D.A. Nolan, R.R. Alfano // Physical Review Letters. – 2011. – Vol. 107. – 053601.
- [128] Shen, Y. Hybrid topological evolution of multi-singularity vortex beams: generalized nature for helical-Ince–Gaussian and Hermite–Laguerre–Gaussian modes / Y. Shen, X. Wang, Z. Xie, A. Forbes // Journal of the Optical Society of America A. – 2019. – Vol. 36(4). – P. 578–587.
- [129] Forbes, A. Structured light / A. Forbes, M. de Oliveira, M. Dennis // Nature Photonics. – 2016. – Vol. 10(6). – P. 327–338.
- [130] Allen, L. The orbital angular momentum of light / L. Allen, M.J. Padgett, M. Babiker // Progress in Optics. – 1999. – Vol. 39. – P. 291–372.
- [131*] Volyar, A. Self-healing and self-matching effects in astigmatic structured beams as a basis for measuring orbital Stokes parameters / A. Volyar, M. Bretsko, **S. Khalilov**, Ya. Akimova // Applied Optics. – 2025. – Vol. 64(12). – P. 3241–3249.
- [132] Weber, H. Laser physics and applications. Subvolume A: Laser fundamentals / eds. H. Weber, G. Herziger, R. Poprawe. – Berlin: Springer, 2004. – (Landolt-Börnstein: Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology. New Series; Group VIII: Advanced Materials and Technologies; Vol. 1A). – ISBN 978-3-540-44821-1.
- [133] Born, M. Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light / M. Born, E. Wolf. – 7th ed. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – 952 p. – ISBN 0-521-64222-1.
- [134] Guillemin, V. Symplectic techniques in physics / V. Guillemin, S. Sternberg. – Cambridge: Cambridge University Press, 1984. – 468 p. – ISBN 0-521-38990-9.

- [135] Alieva, T. Beam mapping on the orbital Poincaré sphere / T. Alieva, A. Cámara, M.J. Bastiaans // *Proceedings of SPIE*. – 2011. – Vol. 8011. – 801160.
- [136] Wolf, K.B. Geometric optics on phase space / K.B. Wolf. – Berlin; New York: Springer, 2004. – 373 p. – ISBN 3-540-22039-9.
- [137] Volyar, A.V. The structure of a nonparaxial Gaussian beam near the focus: II. Optical vortices / A.V. Volyar, V.G. Shvedov, T.A. Fadeeva // *Optics and Spectroscopy*. – 2001. – Vol. 90(1). – P. 93–100.
- [138] Volyar, A.V. Vector singularities of Gaussian beams in uniaxial crystals: Optical vortex generation / A.V. Volyar, T.A. Fadeeva, Y.A. Egorov // *Technical Physics Letters* – 2002. – Vol. 28(12). – P. 958–961.
- [139] Dennis, M.R. Gaussian mode families from systems of rays / M.R. Dennis, M.A. Alonso // *Journal of Physics: Photonics*. – 2019. – Vol. 1(2). – 025003.
- [140] Alekseev, K.N. Spin-orbit interaction and evolution of optical eddies in perturbed weakly directing optical fibers / K.N. Alekseev, A.V. Volyar, T.A. Fadeeva // *Optics and Spectroscopy*. – 2002. – Vol. 93(4). – P. 588–597.
- [141] Van Enk, S.J. Geometric phase, transformations of Gaussian light beams and angular momentum transfer / S.J. van Enk // *Optics Communications*. – 1993. – Vol. 102(1–2). – P. 59–64.
- [142] Alonso, M.A. Ray-optical Poincaré sphere for structured Gaussian beams / M.A. Alonso, M.R. Dennis // *Optica*. – 2017. – Vol. 4(4). – P. 476–486.
- [143] Shen, Y. SU(2) Poincaré sphere: A generalized representation for multidimensional structured light / Y. Shen, Z. Wang, X. Fu, D. Naidoo, A. Forbes // *Physical Review A*. – 2020. – Vol. 102(3). – 031501.
- [144] Berry, M.V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes / M.V. Berry // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. – 1984. – Vol. 392(1802). – P. 45–57.
- [145] Letsch, A. Characterization of general astigmatic laser beams / A. Letsch, A. Giesen // *Proceedings of SPIE*. – 2006. – Vol. 6101. – 610117.

- [146] Bastiaans, M.J. Wigner distribution function and its application to first-order optics / M.J. Bastiaans // *Journal of the Optical Society of America*. – 1979. – Vol. 69(12). – P. 1710–1716.
- [147] Arnaud, J.A. Gaussian light beams with general astigmatism / J.A. Arnaud, H. Kogelnik // *Applied Optics*. – 1969. – Vol. 8(8). – P. 1687–1693.
- [148] Courtial, J. Gaussian beams with very high orbital angular momentum / J. Courtial, K. Dholakia, L. Allen, M.J. Padgett // *Optics Communications*. – 1997. – Vol. 144(4). – P. 210–213.
- [149] Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Porfirev A.P. Astigmatic laser beams with a large orbital angular momentum // *Optics Express*. – 2018. – Vol. 26(1). – P. 141–156.
- [150] Franke-Arnold, S. Advances in optical angular momentum / S. Franke-Arnold, L. Allen, M. Padgett // *Laser & Photonics Reviews*. – 2008. – Vol. 2(4). – P. 299–313.
- [151] Zhang, K. A review of orbital angular momentum vortex beams generation: from traditional methods to metasurfaces / K. Zhang, Y. Wang, Y. Yuan, S.N. Burokur // *Applied Sciences*. – 2020. – Vol. 10(3). – 1015.
- [152] Karpeev, S.V. Generation and conversion of mode beams and their polarization states on the basis of diffractive optical elements application / S.V. Karpeev, S. Alferov, S.N. Khonina // *Optical Engineering*. – 2013. – Vol. 52(9). – 091718.
- [153] Абрамочкин, Е.Г. Обобщенные гауссовы пучки и их преобразование в оптических системах с астигматизмом / Е.Г. Абрамочкин, Е.В. Разуева, В.Г. Волостников // *Вестник Самарского университета. Естественная серия* – 2006. – № 2(42). – С. 103–121.
- [154] Shvedov, V. Focusing and correlation properties of white-light optical vortices / V. Shvedov, W. Krolikowski, A. Volyar, D.N. Neshev, A.S. Desyatnikov, Yu.S. Kivshar // *Optics Express*. – 2005. – Vol. 13(19). – P. 7393–7398.
- [155] Porfirev, A.P. Formation of laser beams with a structured polarization distribution for the fabrication of spiral microreliefs in thin films of chalcogenide glasses / A.P. Porfirev, S.N. Khonina, N.A. Ivliev, D.P. Porfirev // *Computer Optics*. – 2024. – Vol. 48(5). – P. 676–680.

- [156] Kotlyar, V.V. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56(14). – P. 4095–4104.
- [157] Weng, Y. Orbital angular momentum based sensing and their applications: a review / Y. Weng, Z. Pan // *Journal of Lightwave Technology*. – 2023. – Vol. 41(7). – P. 2007–2016.
- [158] Van Enk, S.J. Eigenfunction description of laser beams and orbital angular momentum of light / S.J. Van Enk, S.J. Nienhuis // *Optics Communications*. – 1992. – Vol. 94(1–3). – P. 147–158.
- [159] Kotlyar, V.V. A variety of Fourier-invariant Gaussian beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Computer Optics*. – 2018. – Vol. 42(5). – P. 727–735.
- [160] Goodman, J.W. *Introduction to Fourier Optics* / J.W. Goodman. – 3rd ed. – Roberts and Company Publishers, 2005. – 491 p. – ISBN 978-0-9747077-2-3.
- [161] Volyar, A.V. Shaping and processing the vortex spectra of singular beams with anomalous orbital angular momentum / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, Ya.E. Akimova, Yu.A. Egorov // *Computer Optics*. – 2019. – Vol. 43(4). – P. 517–527.
- [162*] **Khalilov, S.I.** Measurement of orbital Stokes parameters of structured beams in critical planes of a first-order optical system / **S.I. Khalilov**, M.V. Bretsko, S.I. Yakubov, D.V. Maksimov, Ya.E. Akimova // *Optical Memory and Neural Networks*. – 2025. – Vol. 34(3). – P. S392–S401.
- [163*] Volyar, A.V. Measurement of the orbital Stokes parameters in structured astigmatic beams in critical planes of the first-order optical system / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, **S.I. Khalilov**, Y.E. Akimova // *Computer Optics*. – 2025. – Vol. 49(6). – P. 876–884.
- [164*] Volyar, A.V. Dynamics of the OAM in stable generalized structured Laguerre–Gaussian and rotated polygon beams in the astigmatic optical system / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, **S.I. Khalilov**, D.V. Maksimov // *Optical Memory and Neural Networks*. – 2025. – Vol. 34(3). – P. S543–S555.
- [165] Stoyanov, L. Experimental verification of the Gouy phase for higher-order Hermite-Gaussian beams / L. Stoyanov, N. Gorunski, M. Mincheva, P. Drenkov,

E. Lazarov, A. Dreischuh // Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences. – 2024.
– Vol. 77(8). – P. 1138–1145.