УДК 629.785

Файн М. К., Старинова О. Л.

МЕТОДИКА ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕЛЁТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ДВИГАТЕЛЕМ МАЛОЙ ТЯГИ К ТОЧКЕ ЛИБРАЦИИ L1 СИСТЕМЫ ЗЕМЛЯ-СОЛНЦЕ

В настоящее время ведущие мировые космические державы проводят активные разработки в области проектирования миссий на гало-орбиты в окрестности точек либрации систем Земля-Луна и Земля-Солнце. Специфика решения таких задач состоит в выборе оптимальных траекторий перелёта.

Таким образом, актуальной является задача оптимизации широкого класса межпланетных миссий космических аппаратов (КА) с двигателем малой тяги.

Точка либрации L1 системы Земля-Солнце (рисунок 1) находится в 1,5 млн. км от Земли по направлению к нашему светилу.

Точка L2 противоположна первой, располагаясь в 1,5 млн. км позади Земли. У неё есть своё важное преимущество: для находящегося в ней аппарата Солнце, Земля и Луна вместе взятые закрывают совсем небольшую часть неба, и обзор отсюда открывается весьма широкий. На практике в L2 можно разместить целую группу телескопов. Это автоматически упростит их обслуживание, ведь ремонтный челнок можно посылать один для всех сразу.

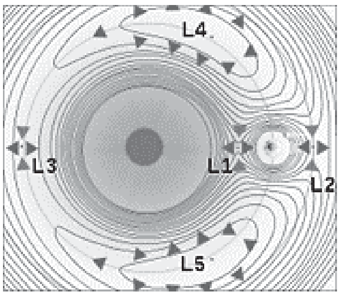

Рисунок 1 – Точки либрации системы Земля-Солнце

Существует несколько причин интенсивного использования окрестностей коллинеарных точек либрации:

- возможность уйти от влияния радиационных поясов и излучения Земли, оставаясь в пределах приемлемой дальности по условиям работы радиолиний;
- мало меняющийся тепловой режим космического аппарата, в том числе непопадание аппарата в тень Земли;
- возможность постоянного мониторинга солнечного ветра при полёте в окрестности L1 в той его части, которая достигает Земли;
- удобство построения группировок космических аппаратов в силу относительно

малого градиента силы тяжести.

Более половины грядущих научных проектов планируется проводить в окрестностях коллинеарных точек либрации.

На данный момент целый ряд космических аппаратов успешно функционирует в точках либрации, например:

- телескоп имени Джеймса Вебба;
- зонд «Explorer»;
- обсерватория для наблюдения за Солнцем и гелиосферой (SOHO);
- КА для изучения солнечного ветра «WIND»;
- зонд имени Уилкинсона для изучения реликтового излучения;
- Гайя.

В данной работе рассматривается оптимальный по расходу рабочего тела перелёт между круговыми компланарными орбитами, осуществляемый КА с двигательной установкой (ДУ) малой тяги. Начальной орбитой является орбита Земли относительно Солнца, конечной – орбита точки либрации L1 системы Земля-Солнце.

В рассматриваемой задаче оптимизируемый функционал примет вид:

$$I = m\,(t_k^{[5]}) + (r^{[5]}(t_k^{[5]}) - r_{L1})^2 + (\varphi^{[5]}(t_k^{[5]}) - \omega_3 \cdot t_k^{[5]})^2 + (v_r\,(t_k^{[5]}))^2 + (v_\varphi(t_k^{[5]}) - v_{\varphi_{L1}})^2 \to \min\,. \quad (1)$$

Движение КА с двигателем малой тяги описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = v_r\,, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{v_\varphi}{r}\,, \\ \dfrac{dv_r}{dt} = \dfrac{v_\varphi^2}{r} - \dfrac{1}{r^2} \pm \cos\lambda \cdot a, \\ \dfrac{dv_\varphi}{dt} = -\dfrac{v_r v_\varphi}{r} \pm \sin\lambda \cdot a, \\ \dfrac{dm}{dt} = \beta, \end{cases} \qquad (2)$$

где $\bar{x}(t)$ – вектор фазовых координат КА, который подчиняется граничным условиям, $\bar{x}(t) = (r,\ \ \varphi,\ \ V_r,\ \ V_\varphi,\ \ m)$; $\bar{u}\ (t)$ – вектор функций управлений: $\bar{u}\ (t)$ = (λ_1, λ_2, λ_3).

Точное оптимальное решение подобной задачи было получено с использованием формализма принципа максимума Понтрягина и численного решения краевой задачи. Анализ этого решения показывает, что на траектории перелёта имеются три участка работы двигателя, разделённые двумя пассивными участками (рис. 1).

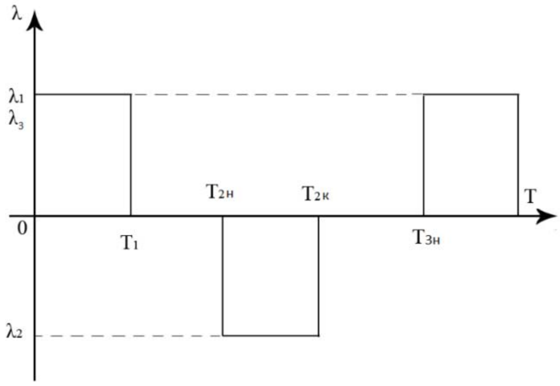

Рисунок 2 – Схема управления КА

$p^{[i]} = \{T_{1k}; T_{2н}; T_{2K}; T_{3H}\}$;

$q = \{T_0; T; a_0; c_0\}$, a_0 – ускорение КА, c_0 – скорость истечения газов.

Тогда для решения поставленной задачи необходимо найти частные производные функционала I по оптимизируемым параметрам:

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda_1}; \frac{\partial I}{\partial \lambda_2}; \frac{\partial I}{\partial \lambda_3}; \frac{\partial I}{\partial T_{1k}}; \frac{\partial I}{\partial T_{2н}}; \frac{\partial I}{\partial T_{2k}}; \frac{\partial I}{\partial T_{3н}}; \frac{\partial I}{\partial T_0}; \frac{\partial I}{\partial T}; \frac{\partial I}{\partial a_0}; \frac{\partial I}{\partial c_0}. \qquad (3)$$

Для нахождения производных (3) используется методика оптимизации параметров и управлений межпланетными траекториями космических аппаратов, которая базируется на идеях оптимизации составных динамических систем и на методе последовательной линеаризации Федоренко Р.П. Суть метода заключается в сведении вариационной задачи об оптимальном управлении к итерационно решаемой задаче линейного программирования путём последовательной линеаризации всех функционалов (критерия и ограничений) по кусочно-постоянным аппроксимациям управления в окрестности итерационно улучшаемых траектории и управления.

Сначала найдём $\dfrac{\partial I}{\partial \overline{u}}$.

Для этого найдём $\omega^{[i]}(s)$:

$$\omega^{[i]}(s) = \psi_i^T(s) \cdot f_u^i(s), \quad i = 1, ..., K;$$

где функции ψ_i являются решениями уравнений:

$$\frac{d\psi_i}{dt^i} = -(f_x^i)^T \psi_i, \quad i = 1, ..., K.$$

В рассматриваемом случае $\omega^{[i]}(s)$ примет следующий вид:

$$\omega_i = -\psi_{v_r} \frac{a_0 \cdot \delta}{1-m} Sin\lambda + \psi_{v_\varphi} \frac{a_0 \cdot \delta}{1-m} Cos\lambda. \qquad (4)$$

Таким образом, становится возможным нахождение $\frac{\partial I}{\partial\lambda_1};\frac{\partial I}{\partial\lambda_2};\frac{\partial I}{\partial\lambda_3}$:

$$\frac{\partial I}{\partial\lambda_1}=\omega_1=\int_0^{t_0}\omega(s)ds\,,$$

$$\frac{\partial I}{\partial\lambda_2}=\omega_2=\int_{t_{2H}}^{t_{2K}}\omega(s)ds\,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial I}{\partial\lambda_1}=\omega_1=\int_0^{t_0}\omega(s)ds\,.$$

Теперь определим $\frac{\partial I}{\partial\overline{q}}$:

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial\overline{q}}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\frac{Cos\lambda\cdot\delta}{1-m}&0\\0&0&\frac{Sin\lambda\cdot\delta}{1-m}&0\\0&0&\frac{\delta}{c_0}&-\frac{a_0\cdot\delta}{c_0^2}\\\frac{\partial\bar{f}}{\partial t_{10}}&\frac{\partial\bar{f}}{\partial t_k}&\frac{\partial\bar{f}}{\partial a_0}&\frac{\partial\bar{f}}{\partial c_0}\end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial\overline{q}}=&(\psi^{[1]}(t_0^{[1]}))^T\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}^{[0]}}{\partial\overline{q}}+(\psi^{[2]}(t_0^{[2]}))^T\cdot(\frac{\partial\overline{\varphi}^{[1]}}{\partial\overline{q}}+\overline{c}^{[1]}\frac{\partial\mu^{[1]}}{\partial\overline{q}}-f^{[2]}(t_0^{[2]})\cdot(\frac{\partial\tau^{[1]}}{\partial\overline{q}}+b^{[1]}\frac{\partial\mu^{[1]}}{\partial\overline{q}}))\\&+(\psi^{[3]}(t_0^{[3]}))^T\cdot(\frac{\partial\overline{\varphi}^{[2]}}{\partial\overline{q}}+\overline{c}^{[2]}\frac{\partial\mu^{[2]}}{\partial\overline{q}}-f^{[3]}(t_0^{[3]})\cdot(\frac{\partial\tau^{[2]}}{\partial\overline{q}}+b^{[1]}\frac{\partial\mu^{[2]}}{\partial\overline{q}}))+(\psi^{[4]}(t_0^{[4]}))^T\cdot(\frac{\partial\overline{\varphi}^{[3]}}{\partial\overline{q}}+\\&\overline{c}^{[3]}\frac{\partial\mu^{[3]}}{\partial\overline{q}}-f^{[4]}(t_0^{[4]})\cdot(\frac{\partial\tau^{[3]}}{\partial\overline{q}}+b^{[1]}\frac{\partial\mu^{[3]}}{\partial\overline{q}}))+\sum_{i=1}^{5}(\int_{t_0^i}^{t_k^i}(\psi^{[i]})^T\cdot\frac{\partial f^{[i]}}{\partial\overline{q}}ds)+\frac{\partial F}{\partial\overline{q}}+d\frac{\partial\mu^{[5]}}{\partial\overline{q}},\end{aligned} \tag{7}$$

$$\frac{\partial I}{\partial\overline{q}}=\left(\frac{\partial I}{\partial t_{10}};\frac{\partial I}{\partial t_k};\frac{\partial I}{\partial a_0};\frac{\partial I}{\partial c_0}\right)=\left(0;-d;\int_{t_0}^{t_k}(\psi_{v_r}\frac{Cos\lambda\cdot\delta}{1-m}+\psi_{v_\varphi}\frac{Sin\lambda\cdot\delta}{1-m}+\psi_m\frac{\delta}{c_0})ds;\int_{t_0}^{t_k}(-\psi_m\frac{a_0\delta}{c_0^2})ds\right). \tag{8}$$

Теперь найдём $\frac{\partial I}{\partial\overline{p}}$:

$$\frac{\partial I}{\partial\overline{p}}=(\frac{\partial I}{\partial p^{[1]}};\frac{\partial I}{\partial p^{[2]}};\frac{\partial I}{\partial p^{[3]}};\frac{\partial I}{\partial p^{[4]}})\cdot\begin{pmatrix}\delta p^{[1]}\\\delta p^{[2]}\\\delta p^{[3]}\\\delta p^{[4]}\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Так как все начальные условия являются константами, то:

$$\Pi^{0}\delta p^{[0]} = 0\,;$$

$$\Pi^{[1]} = (\psi^{[2]}(t_0^{[2]}))^T \cdot (\frac{\partial\overline{\varphi}^{[1]}}{\partial p^{[1]}} + \overline{c}^{[1]}\frac{\partial\mu^{[1]}}{\partial p^{[1]}} - f^{[2]}(t_0^{[2]})\cdot(\frac{\partial\tau^{[1]}}{\partial p^{[1]}} + b^{[1]}\frac{\partial\mu^{[1]}}{\partial p^{[1]}}))$$
$$+\int_{t_0^{[1]}}^{t_k^{[1]}}(\psi^{[1]}(s))^T\cdot\frac{\partial f^{[1]}}{\partial p^{[1]}}(s)ds = (\psi^{[2]}(t_k^{[2]}))^T(f^{[1]}(t_k^{[1]}) - f^{[2]}(t_0^{[2]})); \quad (10)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t_{1k}} = \Pi^{[1]} = \psi_{v_r}^{[2]}(t_0^{[2]})\cdot Cos\lambda_1\frac{a_0}{1-m(t_0^{[2]})} + \psi_{v_\varphi}^{[2]}(t_0^{[2]})\cdot Sin\lambda_1\frac{a_0}{1-m(t_0^{[2]})} + \psi_m^{[2]}(t_0^{[2]})\frac{a_0}{c_0}\,; \quad (11)$$

$$\Pi^{[2]} = (\psi^{[3]}(t_k^{[3]}))^T(f^{[2]}(t_k^{[2]}) - f^{[3]}(t_0^{[3]})); \quad (12)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t_{2H}} = \Pi^{[2]} = -\psi_{v_r}^{[3]}(t_0^{[3]})\cdot Cos\lambda_2\frac{a_0}{1-m(t_0^{[3]})} - \psi_{v_\varphi}^{[3]}(t_0^{[3]})\cdot Sin\lambda_2\frac{a_0}{1-m(t_0^{[3]})} - \psi_m^{[3]}(t_0^{[3]})\frac{a_0}{c_0}\,; \quad (13)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t_{2K}} = \Pi^{[3]} = \psi_{v_r}^{[4]}(t_0^{[4]})\cdot Cos\lambda_2\frac{a_0}{1-m(t_0^{[4]})} + \psi_{v_\varphi}^{[4]}(t_0^{[4]})\cdot Sin\lambda_2\frac{a_0}{1-m(t_0^{[4]})} + \psi_m^{[4]}(t_0^{[4]})\frac{a_0}{c_0}\,; \quad (14)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t_{3H}} = \Pi^{[4]} = -\psi_{v_r}^{[5]}(t_0^{[5]})\cdot Cos\lambda_3\frac{a_0}{1-m(t_0^{[5]})} - \psi_{v_\varphi}^{[5]}(t_0^{[5]})\cdot Sin\lambda_3\frac{a_0}{1-m(t_0^{[5]})} - \psi_m^{[5]}(t_0^{[5]})\frac{a_0}{c_0}\,. \quad (15)$$

Таким образом, найдены выражения для всех производных (3).

В процессе сравнения результатов, полученных при аналитической оптимизации и при численном моделировании, были получены следующие данные (таблица 1).

Таблица 1 – Сравнение численных и аналитических результатов интегрирования

Сравниваемая величина	Полученная аналитически	Полученная численно	Погрешность
λ_1	-3,553899e-4	-1,7139e-4	51,77 %
λ_2	1,74749e-3	2,6185e-3	49,84 %
λ_3	3,151693e-4	2,5644e-3	713,7 %
T_{1k}	0,1146029	0,108803549	5,06 %
$T_{2н}$	-0,118465515	-0,126818838	7,05 %
$T_{2к}$	0,124196	0,121420695	2,23 %
$T_{3н}$	-0,114652	-0,11990496	4,58 %
T_0	0	0	0 %
T	0,1243178	0,123532801	6,31 %
a_0	2,3569185355	2,412325163	2,35 %
c_0	-0,2814637828	-0,283181881	0,61 %

Отметим, что имеется высокая погрешность при численном определении производных для $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.