



их конкурентоспособности и надежности. В нашем случае, проведя инженерный анализ, получили параметры удовлетворяющие условиям эксплуатации.

В конечном итоге лопатка была изготовлена и проверена экспериментально, полученные экспериментальные данные были схожи с данными полученными с помощью цифровых методов.

### **Вывод**

В результате можно сказать, что цифровые методы позволили контролировать и вносить улучшения во время всего процесса создания изделия. Инженерный анализ позволил исследовать большое количество вариантов и при этом снизить себестоимость изделия, значительно экономя на натурных испытаниях, сокращая количество физических прототипов. Так же быстро принимать решения по дальнейшему созданию изделия. Инженерный анализ встроен в среду управления данными проектирования, что позволяет оптимизировать создание всего изделия.

В конечном итоге лопатка была изготовлена и проверена экспериментально, полученные экспериментальные данные были схожи с данными полученными с помощью цифровых методов, отсюда можно сделать вывод что использование таких методов значительно сократит финансовые затраты и время работы производства.

А.Г. Ермоленко, Г.Ю. Ермоленко, М.А. Степанова

## **МОДИФИЦИРОВАННОЕ ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В СРАВНЕНИИ С КЛАССИЧЕСКИМ**

(Самарский государственный университет путей сообщений)

Задача обеспечения высокой надёжности и прочности несущих конструкций средств транспорта и составляющих их агрегатов тесно связана с решением статических и динамических задач теории упругости. В последнее время в этой области созданы новые аналитические методы решения, позволяющие выражать искомые напряжения и деформации, возникающие в конструкциях в виде квадратуры от исходных начальных и краевых условий. Полученные таким образом квадратуры, как правило, являются сложными для их аналитического вычисления, поскольку содержат в себе вычисление прямых и обратных кратных преобразований Фурье. Поэтому для практических расчетов часто ставится вопрос об их численной реализации, при которой вместо аналитического преобразования Фурье используют дискретное преобразование Фурье.

Целью настоящей работы является конструирование модифицированного дискретного преобразования Фурье, обеспечивающего более высокую точность интерполяции применяемых в расчетах функций, чем классическое дискретное преобразование.

Дискретное преобразование Фурье функции  $y = f(x)$  [1].



$$f(x) = \sum_{-\frac{N}{2} < q \leq \frac{N}{2}} A_q \exp(2\pi i q x), \quad (1)$$

где коэффициенты  $A_q$  находится по формулам

$$A_q = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(x_l) \exp(-2\pi i q x_l), \quad (2)$$

ставит в соответствие периодической с периодом 1 функции тригонометрический многочлен  $S_N(x)$ .

Условие (2) минимизирует меру погрешности

$$\mu(f, S_N(x)) = \sum_{i=0}^N (f(x_i) - S_N(x_i))^2 \quad (3)$$

Мера погрешности (3), выбранная для сопоставления исходной функции  $y = f(x)$  ее наилучшего приближения  $S_N(x)$ , говорит о том, что исходные функции  $y = f(x)$  и многочлены  $S_N(x)$  образуют нормированное пространство, норма в котором задается соотношением:

$$\|f(x)\| = \sup \left( \sum_{i=0}^N (f(x_i))^2 \right), \quad (4)$$

а наилучшим приближением  $y = f(x)$  считается функция, удовлетворяющая условию:

$$\mu(f(x), \varphi_f(x)) = \inf(\mu(f(x), \varphi(x))). \quad (5)$$

В случае, когда в качестве  $\varphi(x)$  выбирается тригонометрические многочлены  $S_N(x)$ , мера погрешности оказывается равной нулю, то есть существует  $S_N(x)$  наилучшего приближения, совпадающий в точках  $x_0, x_1, \dots, x_N$  с приближаемой функцией  $f(x)$ .

Таким образом, соотношения (2), задающие коэффициенты многочлена  $S_N(x)$ , приближающего исходную функцию  $f(x)$ , обеспечивают их равенство в точках  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

Естественно, что на практике, используя  $S_N(x)$  вместо  $f(x)$ , необходимо знать какова ошибка в точках области определения функции  $f(x)$ , отличных от  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Кроме того, многочлен  $S_N(x)$  строится без учета дифференциальных свойств функции  $f(x)$  и по его поведению ничего нельзя сказать о производных исходной функции  $f(x)$  даже в узлах интерполяции  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , что на практике является большим недостатком.

Обычно, для оценки точности интерполяции функции  $y = f(x)$  функцией  $y = \varphi(x)$  используют оценки:

1.  $\Delta_1 = \sup(|f(x) - \varphi(x)|);$
2.  $\Delta_2 = \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx;$
3.  $\Delta_3 = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx;$



$$4. \Delta_4 = \int_a^b \left| \frac{f(x) - \varphi(x)}{f(x)} \right| dx.$$

На практике, помимо этих оценок, часто требуются соотношения, позволяющие оценивать интегральные и дифференциальные свойства функции  $\varphi(x)$ , выбранной в качестве функции, являющейся приближением исходной функции  $y = f(x)$ .

В качестве таких оценок, можно выбрать:

$$5. \Delta_5 = \sup |f^{(\alpha)}(x) - \varphi^{(\alpha)}(x)|;$$

$$6. \Delta_6 = \int_a^b |f^{(\alpha)}(x) - \varphi^{(\alpha)}(x)| dx \quad (7)$$

$$7. \Delta_7 = \int_a^b \left| \frac{f^{(\alpha)}(x) - \varphi^{(\alpha)}(x)}{f^{(\alpha)}(x)} \right| dx;$$

$$8. \Delta_8 = \frac{\int_a^b |f^{(\alpha)}(x) - \varphi^{(\alpha)}(x)| dx}{\int_a^b |f^{(\alpha)}(x)| dx}$$

Здесь  $\alpha$  - порядок производной.

Одно из наиболее простых улучшений дискретного преобразования Фурье состоит в учете дифференциальных свойств исходной функции. Для этого, например, достаточно потребовать, чтобы исходная функция  $f(x)$  и многочлен  $S_N(x)$ , а также их производные до некоторого порядка  $P$  совпадали в узлах интерполяции  $x_0, x_2, \dots, x_N$ , которые, вообще говоря, могут быть не равноотстоящими. Выполнение подобного требования обеспечит гарантированно точное значение в узлах не только самой исходной функции, но и производных до порядка  $P$ .

Остановимся на случае действительного дискретного преобразования Фурье функции  $y = f(x)$  периодической, с порядком  $2\pi$ :

$$f(x) = a_0 + \sum_{K=1}^{N_{\max}} (a_K \cos(Kx) + b_K \sin(Kx)) \quad (8)$$

с коэффициентами:

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} f(x_K), a_n = \frac{2}{N} \sum_{K=0}^{N-1} f(x_K) \cos(nx_K); b_K = \frac{2}{N} \sum_{K=0}^{N-1} f(x_K) \sin(nx_K). \quad (9)$$

Здесь точки  $x_K$  - узлы интерполяции,  $X_K = \frac{2\pi k}{N}, k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Потребуем, чтобы функция  $y = f(x)$  и ее многочлен (8) вместе со своими производными до порядка  $P$  включительно совпадали в узлах интерполяции. Установим связь между порядком  $N_{\max}$  многочлена, количеством узлов интерполяции  $N$  и порядком старшей производной  $P$ .

$$(P+1)N = 2N_{\max} + 1 \quad (10)$$

Анализ соотношения показывает, что порядок производной  $P$  не может быть нечётным числом.



Перечисленное выше позволяет составить систему  $2N_{\max} + 1$  алгебраических уравнений для поиска неизвестных коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_{N_{\max}}, b_1, b_2, \dots, b_{N_{\max}}$ .

Тригонометрический многочлен с найденными таким методом коэффициентами совпадает вместе со своими производными до порядка  $P$  с исходной функцией и ее производными в узлах интерполяции.

Преимущества модифицированного дискретного преобразования Фурье по сравнению с классическим исследовались с помощью численного эксперимента, на примере функции, представляющей собой многочлен пятой степени вида:

$$y = -\left(\frac{z}{2}\right)^5 + z^2 + z + 1 \quad (11)$$

На рис.1 представлены графики исходной функции  $y = f(x)$  и двух ее интерполяционных многочленов, построенных по методам классического и модифицированного преобразования Фурье по 19 точкам интерполяции. Непосредственно видно, что многочлен, построенный по методу модифицированного преобразования (мелкий пунктир), является лучшим приближением, чем многочлен, построенный по методу классического преобразования (длинный пунктир).

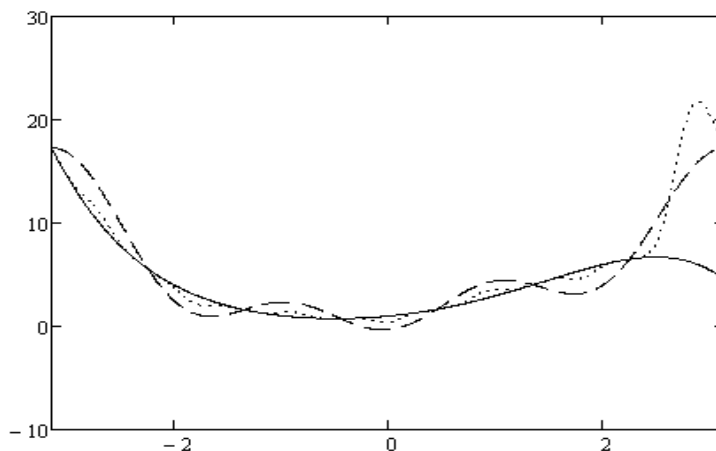


Рис. 1. Графики исходной функции и тригонометрических многочленов, построенных по методам классического и модифицированного дискретных преобразований Фурье

На рис.2 приведены графики первой производной исходной функции и производных интерполяционных многочленов. Как и в предыдущем случае, видно, что модифицированное преобразование Фурье обеспечивает лучшее приближение для производной исходной функции по сравнению с классическим.

Для количественной оценки ошибки приближения вычислялись для обоих преобразований взвешенные оценки 4, 7 и 8 для исходной функции и производной. Были получены следующие результаты.

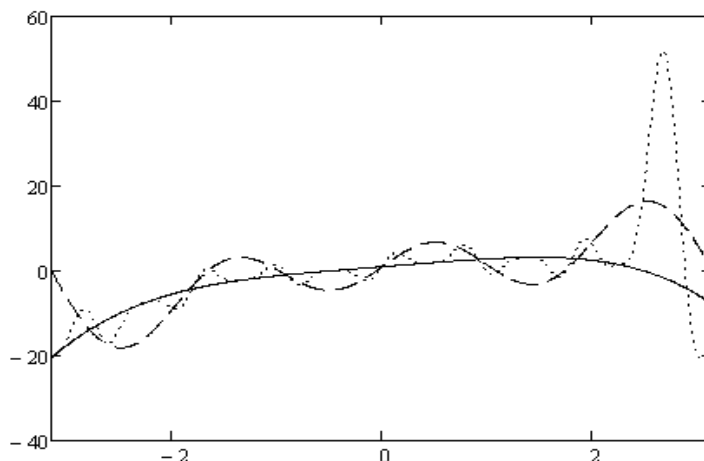


Рис. 2 Графики первой производной исходной функции и производных интерполяционных многочленов

Ошибка  $\Delta_4$  для классического дискретного преобразования Фурье оказалась равной:

$\Delta_4 = 1,364$ , а для модифицированного  $\Delta_4 = 0,649$ .

Взвешенная интегральная оценка  $\Delta_7$  для классического преобразования Фурье  $\Delta_7 = 0,19$ . Для модифицированного  $\Delta_7 = 0,10$ .

Ошибка интерполяции для производной в случае классического преобразования  $\Delta_7 = 35,0$ , а в случае модифицированного преобразования  $\Delta_7 = 8,7$ .

Взвешенная интегральная оценка  $\Delta_8$  для классического дискретного преобразования Фурье  $\Delta_8 = 1,6$ . Для модифицированного  $\Delta_8 = 1,0$ .

Приведенные результаты численного эксперимента показывают, что модифицированное преобразование обеспечивает ошибку от полутора до 4 раз меньшую, чем классическое дискретное преобразование для выбранной функции.

Таким образом, применение предложенного в данной работе модифицированного преобразования в расчетах прочности несущих конструкций средств транспорта позволит увеличить точность расчета напряженно-деформированного состояния и, как следствие, повысить безопасность их эксплуатации. Использование этого преобразования на стадии проектирования обеспечит выбор оптимальной формы несущей конструкции и экономию средств на ее производство.

### Литература

1. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. – М.: Наука, 1973. – 632с.