А.П. Котенко, М.Б. Букаренко

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНЕЧНЫМИ АВТОМАТАМИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С РАЗЛИЧИМЫМИ КАНАЛАМИ

(Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет))

В нотификации [1, 2] рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с различимыми каналами (имеющими, к примеру, разную пропускную способность или раздельные очереди) сигнатуры T=T(μ1,μ2,…,μk;m1,m2,…,mk), где μi – пропускная способность, mi – число мест в очереди i-го канала, $i \in \overline{1,k}$; k>0. Оптимизация работы системы по среднему времени обслуживания заявок и минимизации вероятности отказа достигается с помощью следующего протокола диспетчеризации входных заявок.

Пусть очередная входная заявка обнаруживает систему в состоянии (x1,x2,…,xk;y1,y2,…,yk), не являющемся состоянием отказа (1,1,…,1;m1,m2,…,mk), где xi=1, если i-й канал занят, xi=0, если свободен, yi соответствует наполненности очереди этого канала. В случае, если существует один и только один канал (с номером i), способный принять заявку, то заявка направляется к нему. В противном случае оптимальным считаем выбор i-го канала обслуживания, способного обработать заявку с минимальным средним суммарным временем T обслуживания попавших в него заявок.

СМО с детерминированной диспетчеризацией и недетерминированной выработкой сигналов на освобождение приборов. Далее рассмотрим 2-канальную СМО с различимыми каналами пропускной способности $\mu_1>\mu_2$ без очереди $T=T(\mu_1,\mu_2;0,0)$. Представим её поведение в дискретном времени недетерминированным конечным автоматом (НКА) $K(S,A)$ с алфавитом внутренних состояний S={(00),(01),(10),(11)} без выделенных начального и конечного состояний, входным алфавитом A={0,1} и пустым выходным алфавитом. Буква 1 входного алфавита A соответствует приходу заявки в систему, а 0 – выработке сигнала освобождения заявки одним из каналов.

Рассмотрим все сочетания стохастической природы дуг орграфа, представленные (не)детерминированными конечными автоматами.

При детерминированной диспетчеризации входных заявок получим для $a=a(n)$, $s_1=s_1(n)$, $s_2=s_2(n)$ нелинейные нестационарные рекурсивные стохастические булевы функции в правой части уравнений состояний НКА $K(S,A)$:

$$s_1(n+1)=\begin{array}{|c|c|}\hline a\oplus s_1s_2\oplus as_1s_2 & a \\ \hline q_1 & q_2 \\ \hline\end{array},\quad s_2(n+1)=\begin{array}{|c|c|}\hline a\oplus as_1\oplus as_1s_2 & a\oplus s_1s_2\oplus as_1 \\ \hline q_1 & q_2 \\ \hline\end{array}.$$

Тогда *рекурсивную* (то есть разрешимую последовательно) систему линейных рекурсивных нестохастических уравнений состояний автомата $K(S,A_1)$

получим из соответствующей таблицы истинности при входном сигнале $a_1(n)a_2(n) = a_1a_2 \in A_1$:

$$s_1(n+1) = a_1 \oplus a_1a_2 \oplus a_2s_1 \oplus a_1a_2s_1 = \alpha_n \oplus \beta_n s_1(n) \; ,$$

$$s_2(n+1) = a_1s_1 \oplus a_1a_2s_1 \oplus a_2s_2 \oplus s_2 \oplus a_1a_2s_1s_2 = \gamma_n \oplus \delta_n s_2(n) \; ,$$

где $\alpha_n := a_1\overline{a_2}$, $\beta_n := \overline{a_1}a_2$, $\gamma_n := a_1\overline{a_2}s_1$, $\delta_n := \overline{a_2} \oplus a_1a_2s_1$.

Отсюда получим явный вид уравнений состояний

$$s_1(n+1) = \sum_{t=0}^{n} \alpha_{n-t} \prod_{\tau=0}^{t-1} \beta_{n-\tau} \oplus s_1(0) \prod_{\tau=0}^{n} \beta_{n-\tau} \, , \; s_2(n+1) = \sum_{t=0}^{n} \gamma_{n-t} \prod_{\tau=0}^{t-1} \delta_{n-\tau} \oplus s_2(0) \prod_{\tau=0}^{n} \delta_{n-\tau} \, .$$

Здесь для универсальности обозначений полагается равенство $\prod_{\tau=0}^{-1} \beta_{n-\tau} := 1$.

Поскольку, $\prod_{\tau=0}^{n} \beta_{n-\tau} = 0$, если $\exists k \in \overline{0,n} : \beta_k = \overline{a_1(k)}a_2(k) = 0$;

$\prod_{\tau=0}^{n} \delta_{n-\tau} = 0$, если $\exists k \in \overline{0,n} : \delta_k = \overline{a_2(k)} \oplus a_1(k)a_2(k)s_1(k) = 0$,

то явные уравнения состояний примут окончательный вид:

$$s_1(n+1) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{n} \alpha_{n-t} \oplus s_1(0) \leftarrow \left(\forall k \in \overline{0,n} \Rightarrow \beta_k = \overline{a_1}a_2 = 1\right), \\ \sum_{t=0}^{m-1} \alpha_{n-t} \leftarrow (m \le n) \wedge \left(\forall k \in \overline{0,m-1} \Rightarrow \beta_k = \overline{a_1}a_2 = 1\right) \wedge (\beta_m = 0); \end{cases}$$

$$s_2(n+1) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{n} \gamma_{n-t} \oplus s_2(0) \leftarrow \left(\forall k \in \overline{0,n} \Rightarrow \delta_k = \overline{a_2} \oplus a_1a_2s_1 = 1\right), \\ \sum_{t=0}^{m-1} \gamma_{n-t} \leftarrow (m \le n) \wedge \left(\forall k \in \overline{0,m-1} \Rightarrow \delta_k = 1\right) \wedge \left(\delta_m = \overline{a_2} \oplus a_1a_2s_1 = 0\right). \end{cases}$$

СМО со стохастической диспетчеризацией входных заявок и выработкой сигналов на освобождение приборов. В общем случае стохастического поведения пропускной способности дуг, выходящих из вершин (00) и (11), уравнения перехода зависят от совместного распределения вероятностей переходов по этим четырём дугам. В этом случае получим рекурсивные стохастические булевы функции в правых частях уравнений состояний НКА

$s_1(n+1) =$

$a \oplus s_1s_2 \oplus as_1s_2$	a	$s_1s_2 \oplus as_1 \oplus as_2$	$as_1 \oplus as_2 \oplus as_1s_2$
q_1p_1	q_2p_1	q_1p_2	q_2p_2

,

$s_2(n+1) =$

$a \oplus as_1 \oplus as_1s_2$	$a \oplus s_1s_2 \oplus as_1$	a	$a \oplus s_1s_2 \oplus as_1s_2$
q_1p_1	q_2p_1	q_1p_2	q_2p_2

.

Построим изоморфный ДКА $K(S,A_2)$ со входным алфавитом A_1={00,01,10,11}, обозначив буквой 00 сигнал освобождения канала 1 (в том числе «холостой ход» при простое (01) этого канала), буквой 01 – сигнал освобождения канала 2 (в том числе «холостой ход» при простое (10) этого канала), буквой 10 – сигнал прихода входной заявки, которую может обработать только канал 1, буквой 11 – сигнал прихода входной заявки, которую может обработать только канал 2. Отношение вероятностей появления букв 00 и 01 во входном потоке сигналов ДКА $K(S,A_2)$ равно q_1/q_2, а отношение вероятностей появления букв 10 и 11 во входном потоке сигналов равно p_1/p_2.

Аналогично первому случаю, составим таблицу истинности детерминированных булевых функций $s_1(n+1)$ и $s_2(n+1)$ ДКА $K(S,A_2)$ и выведем из их СДНФ линейные независимые рекурсивные детерминированные уравнения состояний

$$s_1(n+1) = a_1 \oplus a_1 a_2 \oplus a_2 s_1 = \alpha(n) \oplus \beta(n) s_1(n),$$
$$s_2(n+1) = s_2 \oplus a_2 s_2 \oplus a_1 a_2 = \gamma(n) \oplus \delta(n) s_2(n),$$

где $\alpha(n) := a_1 \overline{a_2}$, $\beta(n) := a_2$, $\gamma(n) := a_1 a_2$, $\delta(n) := \overline{a_2}$.

Отсюда получим явный вид уравнений состояний:

$$s_1(n+1) = \begin{cases} \sum\limits_{t=0}^{n} \alpha(n-t) \oplus s_1(0) \leftarrow \left(\forall k \in \overline{0,n} \Rightarrow \beta(k) = a_2(k) = 1\right), \\ \sum\limits_{t=0}^{m-1} \alpha(n-t) \leftarrow (m \le n) \wedge \left(\forall k \in \overline{0,m-1} \Rightarrow \beta(k) = a_2(k) = 1\right) \wedge \left(\beta(m) = a_2(m) = 0\right); \end{cases}$$

$$s_2(n+1) = \begin{cases} \sum\limits_{t=0}^{n} \gamma(n-t) \oplus s_2(0) \leftarrow \left(\forall k \in \overline{0,n} \Rightarrow \delta(k) = \overline{a_2(k)} = 1\right), \\ \sum\limits_{t=0}^{m-1} \gamma(n-t) \leftarrow (m \le n) \wedge \left(\forall k \in \overline{0,m-1} \Rightarrow \delta(k) = \overline{a_2(k)} = 1\right) \wedge \left(\delta(m) = \overline{a_2}(m) = 0\right). \end{cases}$$

СМО со стохастической диспетчеризацией и детерминированной выработкой сигналов на освобождение приборов. При недетерминированной диспетчеризации входных заявок с вероятностью $p_1<1$ перехода по оптимальной дуге (00)→(10) и вероятностью $p_2=1–p_1>0$ перехода по неоптимальной дуге (00)→(01) введём детерминированную диспетчеризацию выходных заявок: $q_1=1$, $q_2=0$.

Из таблицы истинности стохастических булевых функций $s_1(n+1)$ и $s_2(n+1)$ НКА $K(S,A)$ с двумя стохастическими дугами (00)→(10) и (00)→(01) получим нелинейные нестационарные рекурсивные стохастические булевы функции в правой части уравнений состояний НКА $K(S,A)$ с двумя оставшимися недетерминированными переходами (00)→(10) и (00)→(01):

$$s_1(n+1) = \begin{array}{|c|c|} \hline a \oplus s_1 s_2 \oplus a s_1 s_2 & a s_1 \oplus a s_2 \oplus s_1 s_2 \\ \hline p_1 & p_2 \\ \hline \end{array}, \quad s_2(n+1) = \begin{array}{|c|c|} \hline a s_1 \oplus a s_2 \oplus a s_1 s_2 & a \\ \hline p_1 & p_2 \\ \hline \end{array}.$$

Тогда уравнения состояний автомата $K(S,A_3)$ получим из таблицы истинности детерминированных булевых функций $s_1(n+1)$ и $s_2(n+1)$ при входном сигнале $a_1(n) a_2(n) = a_1 a_2 \in A_3$:

$$s_1(n+1) = a_1 a_2 \oplus a_1 s_1 \oplus a_1 a_2 s_1 \oplus s_1 s_2 \oplus a_1 s_1 s_2 \oplus a_2 s_1 s_2 \oplus a_1 a_2 s_1 s_2 = \alpha(n) \oplus \beta(n) s_1(n),$$
$$s_2(n+1) = a_1 \oplus a_1 a_2 \oplus a_1 a_2 s_2 = \gamma(n) \oplus \delta(n) s_2(n),$$

где $\alpha(n) := a_1(n) a_2(n)$, $\beta(n) := \overline{a_2}(n) \left\lfloor a_1(n) \oplus \overline{a_1(n)} s_2(n) \right\rfloor$, $\gamma(n) := a_1(n) \overline{a_2(n)}$, $\delta(n) := a_1(n) a_2(n)$.

Таким образом получим явный вид уравнений состояний

$$s_1(n+1)=\begin{cases}\sum\limits_{t=0}^{n}\alpha(n-t)\oplus s_1(0)\leftarrow\left(\forall k\in\overline{0,n}\Rightarrow\beta(k)=\overline{a_2(k)}\left[a_1(k)\oplus\overline{a_1(k)}s_2(k)\right]=1\right),\\ \sum\limits_{t=0}^{m-1}\alpha(n-t)\leftarrow(m\le n)\wedge\left(\forall k\in\overline{0,m-1}\Rightarrow\beta(k)=1\right)\wedge(\beta(m)=0);\end{cases}$$

$$s_2(n+1)=\begin{cases}\sum\limits_{t=0}^{n}\gamma(n-t)\oplus s_2(0)\leftarrow\left(\forall k\in\overline{0,n}\Rightarrow\delta(k)=a_1(k)a_2(k)=1\right),\\ \sum\limits_{t=0}^{m-1}\gamma(n-t)\leftarrow(m\le n)\wedge\left(\forall k\in\overline{0,m-1}\Rightarrow\delta(k)=1\right)\wedge(\delta(m)=0).\end{cases}$$

Заключение. Выкладки аналогично переносятся на случай большего числа каналов обслуживания, наличия очередей, а также совместного стохастического поведения параметров каналов обслуживания. Несмотря на значительное усложнение неклассического орграфа СМО явный вид уравнений переходов состояний позволяет проводить имитационное моделирование как в случае простейших, так и произвольных случайных процессов поступления и обработки заявок.

Литература

1. Котенко А.П. Аналитическое описание систем массового обслуживания с использованием колец вычетов [Текст] / А.П. Котенко, М.Б. Букаренко // Труды VII Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». – Самара: Изд-во СамГТУ, 2010. – С. 136-140.
2. Букаренко М.Б. Система массового обслуживания с раздельными очередями к каналам [Текст] / М.Б. Букаренко // Тезисы 42-й Всероссийской конференции «Современные проблемы математики». – Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2011. – С. 11-13.

Д.А. Кудрявцев, И.А. Лёзин

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДОВ И ПАРАМЕТРОВ ДВУМЕРНЫХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

(Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет))

В докладе рассматривается применение параметрической модели для определения вида и параметров двумерного распределения по имеющейся дискретной двумерной выборке. Предлагаемая методика основана на классификации законов распределения и определении параметров распределения с использованием нейронных сетей. В статье описаны используемые нейронные сети, реализованные в специальном программном обеспечении, произведены расчеты качества аппроксимации.