Литература

1. Канторович Л.В., Заллгаллер В.А. Рациональный раскрой промышленных материалов. СПб.: Невский диалект. 2012. -304 с.
2. Мухачева Э.А., Валиахметова Ю.И., Хасанова Э.И., Телицкий С.В. Проектирование размещения ортогональных объектов на полигонах с препятствиями. Информационные технологии. 2010. № 10. С. 16-22.
3. Филиппова А.С., Кузнецов В.Ю. Задачи о минимальном покрытии ортогональных многоугольников с запретными участками. Информационные технологии. 2008. № 9 (145). 2008. С. 60-65.
4. Фроловский В. Д., Забелин С.Л. Разработка и анализ приближенных методов решения оптимизационных задач геометрического покрытия. Информационные технологии в проектировании и производстве. № 3. 2011. С. 54-58.

Ю.М. Заболотнов, А.А. Лобанков

ОПТИМАЛЬНОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ЕГО ДВИЖЕНИИ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

(Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет))

В работе рассматривается метод расчета приближенно оптимального регулятора для стабилизации движения твердого тела относительно неподвижной точки. Предполагается, что движение твердого тела близко к движению в классическом случае Лагранжа. Метод основывается на совместном применении принципа динамического программирования Беллмана [1] и метода усреднения. Метод усреднения применяется для приближенного решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана, что позволяет осуществить синтез регулятора. Предлагаемый метод расчета регулятора может быть использован во многих задачах, близких к задаче о движении волчка Лагранжа (движение твердого тела в атмосфере, движение твердого тела на тросе при развертывании орбитальной тросовой системы и др.).

Синтез регулятора в данной работе проводится для малых углов нутации, то есть невозмущенная система представляет собой линейную систему с гироскопическими членами. После преобразования системы к нормальным координатам синтез управления осуществляется по квадратичному критерию оптимальности на асимптотически большом интервале времени. Обратное преобразование координат позволяет записать уравнение регулятора в исходных переменных и, тем самым, решить поставленную задачу.

Движение твердого тела вокруг неподвижной точки описывается классическими динамическими и кинематическими уравнениями Эйлера относительно некоторой неподвижной системы координат. При рассмотрении движения твердого тела в окрестности статически устойчивого положения равновесия (то есть при малых углах нутации) эти уравнения удобно записать в комплексной форме. Тогда, используя результаты работы [2], получим

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - i\,\bar{J}_z\omega_z\frac{d\xi}{dt} + \omega^2(r)\xi = \varepsilon F\left(r,\xi,\frac{d\xi}{dt},\omega_z,\Phi\right), \qquad (1)$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \varepsilon\, f\left(r,\xi,\omega_z,\Phi\right), \qquad (2)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega_z + \varepsilon R\left(\xi,\frac{d\xi}{dt}\right), \qquad (3)$$

где $\xi = \theta e^{i\psi}$, θ и ψ - углы нутации и прецессии твердого тела, $i^2 = -1$, r - вектор медленно изменяющихся переменных, $\omega^2(r) = \Delta z G(r)/J$, $J = \left(J_x + J_y\right)/2$; $\Delta z > 0$ - координата, определяющая положение центра масс тела относительно неподвижной точки; J_x, J_y, J_z - осевые моменты инерции тела; $\bar{J}_z = J_z / J$; $\Phi = \varphi + \psi$; $\varepsilon F\left(r,\xi,\frac{d\xi}{dt},\omega_z,\Phi\right)$, $\varepsilon\, f\left(r,\xi,\omega_z,\Phi\right)$, $\varepsilon R\left(\xi,\frac{d\xi}{dt}\right)$ - известные функции, характеризующие действие малых возмущений [2]. Для упрощения асимптотического анализа все возмущающие функции масштабируются одним малым параметром ε.

Невозмущенное движение тела описывается следующими уравнениями

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - i\,\bar{J}_z\omega_z\frac{d\xi}{dt} + \omega^2(r)\xi = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega_z, \quad \omega_z = const, \quad r = const. \qquad (5)$$

Решение невозмущенного уравнения (4) можно записать в виде

$$\xi = a_1 e^{i\psi_1} + a_2 e^{i\psi_2}, \qquad (6)$$

где a_1 и a_2 - амплитуды колебаний (вещественные величины), $\psi_1 = \omega_1 t + \psi_1(0)$ и $\psi_2 = \omega_2 t + \psi_2(0)$ - фазы; $\psi_1(0), \psi_2(0)$ - начальные значения фаз; $\omega_{1,2} = \bar{J}_z\omega_z/2 \pm \omega_\theta$ - частоты колебаний; $\omega_\theta = \sqrt{\bar{J}_z^2\omega_z^2/4 + \omega^2}$.

Резонансные случаи движения твердого тела, когда угловая скорость $\omega_z \approx \omega_{1,2}$ в данной работе не рассматриваются, так как требуют особого анализа.

С учетом вышесказанного ставится задача определения управления εu, обеспечивающего динамическую устойчивость движения твердого тела вокруг неподвижной точки исходя из минимума квадратичного критерия оптимальности

$$I=\varepsilon\int_0^T W\left(a_1,a_2,u_\alpha,u_\beta\right)dt\,, \tag{7}$$

где $W\left(a_1,a_2,u_\alpha,u_\beta\right)=b_1a_1^2+b_2a_2^2+c\left(u_\alpha^2+u_\beta^2\right)$, $b_1,b_2,c>0$ - весовые коэффициенты. Причем амплитуды колебаний определяются в силу возмущенной системы и должны удовлетворять условиям динамической устойчивости $\dfrac{da_1}{dt},\dfrac{da_2}{dt}<0$ в каждый момент времени.

Движение твердого тела рассматривается на асимптотически большом промежутке времени $T=L/\varepsilon$, где $L<\infty$ - некоторая константа, поэтому функционал (7) изменяется на величину порядка $O(1)$.

После перехода к переменным «амплитуды-фазы» и определения оптимального управления приходим к уравнению в частных производных Гамильтона – Якоби – Беллмана

$$\varepsilon\frac{\partial V}{\partial a}\cdot X\left(a,\phi,r\right)+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial \phi}\cdot Y\left(a,\phi,r\right)+\frac{\partial V}{\partial \phi}\cdot\omega\left(r\right)+\frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt}+\varepsilon\sum_{k=1}^{2}b_ka_k^2+U=0, \tag{8}$$

Здесь $\dfrac{dr}{dt}=O\left(\varepsilon\right)$, $\quad U=-\varepsilon c\left[\left(u_\alpha^o\right)^2+\left(u_\beta^o\right)^2\right]$, где

$$u_\alpha^o=\frac{1}{4c\omega_\theta}\sum_{k=1}^{2}\left(-1\right)^k\left(\frac{\partial V}{\partial a_k}\cos\psi_k-\frac{1}{a_k}\frac{\partial V}{\partial \psi_k}\sin\psi_k\right), \tag{9}$$

$$u_\beta^o=\frac{1}{4c\omega_\theta}\sum_{k=1}^{2}\left(-1\right)^{k+1}\left(\frac{\partial V}{\partial a_k}\sin\psi_k+\frac{1}{a_k}\frac{\partial V}{\partial \psi_k}\cos\psi_k\right). \tag{10}$$

Для определения приближенного решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана используется метод усреднения. В итоге получаем

$$\varepsilon\frac{\partial V_0}{\partial a}\cdot\left\langle X\left(a,\phi,r\right)\right\rangle+\varepsilon\sum_{k=1}^{2}b_ka_k^2+\left\langle U\right\rangle+O\left(\varepsilon^2\right)+\ldots=0, \tag{11}$$

где $\left\langle\cdot\right\rangle$ - стандартный оператор усреднения по фазам,

$$\left\langle U\right\rangle=-\frac{\varepsilon}{16c\omega_\theta^2}\left[\left(\frac{\partial V_0}{\partial a_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V_0}{\partial a_2}\right)^2\right].$$

Усреднение функций $X\left(a,\phi,r\right)$, входящих в уравнение первого приближения (11), когда $\varepsilon F=0$ при наличии линейных возмущающих функций, дает

$$\left\langle X\left(a,\phi,r\right)\right\rangle=\frac{1}{2\omega_\theta}\begin{pmatrix}\nu_1a_1\\ \nu_2a_2\end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $\nu_1=\mu_z\omega_z+\mu\omega_1$, $\nu_2=-\mu_z\omega_z-\mu\omega_2$, μ_z и μ - параметры, характеризующие действующие возмущения.

Решение уравнения (11) в этом случае нетрудно найти, используя метод неопределенных коэффициентов. Тогда, определяя решение в виде $V_0 = \sum_{k=1}^{2} B_k a_k^2$, подставляя его в (11) и приравнивая к нулю коэффициенты при a_1^2 и a_2^2, получим

$$B_k = 2\omega_\theta \left[c\nu_k + \sqrt{c^2\nu_k^2 + cb_k} \right], \qquad k = 1,2. \tag{13}$$

Тогда функции оптимального управления (9-10) примут вид

$$u_\alpha^o = \frac{1}{4c\omega_\theta} \sum_{k=1}^{2} (-1)^k \left(\frac{\partial V_0}{\partial a_k} \cos\psi_k - \frac{\varepsilon}{a_k} \frac{\partial V_1}{\partial \psi_k} \sin\psi_k \right), \tag{14}$$

$$u_\beta^o = \frac{1}{4c\omega_\theta} \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} \left(\frac{\partial V_0}{\partial a_k} \sin\psi_k + \frac{\varepsilon}{a_k} \frac{\partial V_1}{\partial \psi_k} \cos\psi_k \right). \tag{15}$$

После подстановки оптимального управления (15) в уравнения для амплитуд и усреднения по фазам, получим в первом приближении метода усреднения

$$\frac{da_{1,2}}{dt} = -\frac{\varepsilon a_{1,2}}{2\omega_\theta} \sqrt{\nu_{1,2}^2 + b_{1,2} / c}\,. \tag{16}$$

Условие $da_{1,2} / dt < 0$, которое следует из выражения (16), обеспечивает динамическую устойчивость движения твердого тела вокруг неподвижной точки.

Для определения регулятора в других переменных осуществляется обратное по отношению к замене переменных (6) преобразование координат.

В качестве примера расчета оптимального регулятора рассматривается случай демпфирования колебаний твердого тела при следующих исходных данных:

$\omega = 0.8c^{-1}$, $\omega_z(0) = 1c^{-1}$, $\bar{J}_z = 0.8$, $\theta(0) = \pi / 2$, $\mu = 0.05$, $\mu_z = 0.01$, $b_1 = b_2 = 1$, $c = 100$.

На рис.1 показан процесс демпфирования нутационных колебаний с помощью определенного приближенно оптимального регулятора, рассчитанный по исходной нелинейной модели движения твердого тела.

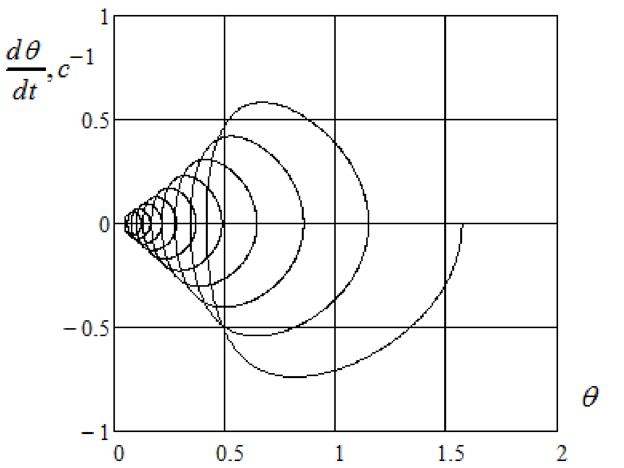

Рис. 1

Литература

1. Беллман Р. Динамическое программирование. Москва. ИЛ. 1960.
2. Заболотнов Ю. М., Любимов В.В. Вторичные резонансные эффекты при вращении твердого тела вокруг неподвижной точки // Механика твердого тела. 2002. № 1. С. 49-59.

А.И. Заико, Э.А. Кильметов

ПРИМЕНЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ МАГНИТОРЕЗИСТИВНЫХ ДАТЧИКОВ ДЛЯ РЕГИСТРАЦИИ ГМВ

(Уфимский государственный авиационный технический университет)

В настоящие время широкое распространение получают датчики, основанные на анизотропном магниторезистивном (АМР) эффекте. Информационно-измерительные системы (ИИС), построенные на базе АМР датчиков получаются менее габаритными, тем самым получают возможность встраивания в различные готовые решения.

Создание специализированных геоинформационных систем, обеспечивающих регистрацию параметров геомагнитных возмущений (ГМВ) естественной природы происхождения, является актуальным.

В случае приложения внешнего (исследуемого) магнитного поля H, к отдельно взятому АМР-элементу, поле поворачивает вектор намагниченности тонкой магнитной пленки на угол β. Значение β зависит от направления и величины H, при этом сопротивление пермаллоевой пленки имеет не линейную зависимость от приложенного поля. В значительной мере лианеризовать выходную характеристику АМР-элемента возможно, путем задания так называемой «зазубренной» (в оригинале от англ. barber-pole) [4] структуры, схематически представленной на рис. 1. В этом случае, когда H<<H0 сопротивление AMR-сенсора будет определяться соотношением