– в соответствующие интервалы времени, благоприятные, с точки зрения геометрии расположения орбитальной группировки, производить замеры лучевых данных при лазерном зондировании с последующим их пересчётом в хордовые данные круговых зон реконструкции.

Рис. 1 б) иллюстрирует процедуры доопределения исходных данных в одной проекции для круговой зоны восстановления (см. рис. 1 в)) На рис. 1 г) приведен результат реконструкции при автоматическом выборе оптимальных параметров восстановления (свёрточный алгоритм, формат 512×512 элементов).

Так как предполагается, что каждый миниспутник оборудован каналом обмена цифровыми данными с ближайшими соседями и с ОСД, то в такой системе несложно организовать процессы параллельных вычислений связанных с задачами реконструкции искомых функциональных распределений параметров атмосферы планеты. Именно эта возможность позволяет назвать описанную исследовательскую группировку малых спутников интеллектуальной группировкой, способной самостоятельно решать как задачи навигации, так и задачи реконструкции и передачи информации на основное средство доставки.

Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова, А.С. Лосев

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ НЕСВЯЗНОСТИ ПЛАНАРНОГО ВЗВЕШЕННОГО ГРАФА С ВЫСОКОНАДЕЖНЫМИ РЕБРАМИ

(ИПМ ДВО РАН, ДВФУ)

Введение

В настоящей работе построен алгоритм вычисления вероятности несвязности для планарного взвешенного графа с высоконадежными ребрами. Ранее такой алгоритм кубической сложности по числу ребер графа был построен в [1] для планарного графа с единичными весами ребер. Основу алгоритма данной работы, как и работы [1], составляет доказательство асимптотического соотношения и получение формул вычисления его параметров. В настоящей работе речь идет о минимальном объеме разреза и о некотором весовом коэффициенте. Расчет асимптотических констант в обоих случаях осуществлялся с использованием перехода к двойственному графу. Основным результатом работы является то, что построенный алгоритм имеет кубическую сложность по числу ребер в графе.

1. Основной результат

Рассмотрим неориентированный связный граф G без петель и кратных ребер с конечным множеством вершин U и ребер W. Пусть каждому ребру графа $w \in W$ соответствует вес $b_w > 0$. Обозначим $\mathcal{L}$ множество разрезов графа, $d(L)$ число ребер (объем) разреза L, D минимальный объем разрезов. Предположим, что ребра графа G отказывают независимо с вероятностями $\overline{p}(w)$, $w \in W$. Для вероятности несвязности $\overline{P}$ графа G (отсутствия хотя бы между двумя вершинами графа работающего пути) в работе[1] была сформулирована следующая теорема.

Теорема 1. Если $\overline{p}(w) \sim b_w h$, $h \to 0, w \in W$, то

$$\overline{P} \sim h^D \mathcal{B}_D \ , \ \mathcal{B}_D = \sum_{L \in \mathcal{L}: d(L) = D} \prod_{w \in L} b_w \ , \ h \to 0 . \tag{1}$$

Рассмотрим планарный граф G, каждое ребро которого принадлежит какому-либо простому циклу. Ребра планарного графа G разбивают плоскость на грани, обозначим n число граней (включая внешнюю), m число ребер графа. Графу G сопоставим двойственный граф G^*: грани z графа G соответствует вершина z графа G^*, ребру w графа G, принадлежащему граням z_1, z_2 соответствует ребро w, соединяющее вершины z_1, z_2 графа G^*.

Пусть элементы $a_{ij}, i, j = 1,...,n, a_{ii} = 0$ матрицы A определяют число ребер, содержащихся в пересечении граней $z_i \cap z_j, i \neq j$. Известно [3], что $D = \min(k : 2 \le k \le 5 : c_k > 0)$, где c_k число простых циклов длины k в G^* и определяется случае $k > 2$ по формулам из [2], в случае $k = 2$ по формулам из [1] следующим образом

$$c_2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \le i, j \le s} a_{ij}(a_{ij} - 1), \ c_3 = \frac{1}{6} tr\, A^3, \ c_4 = \frac{1}{8}\left(tr\, A^4 - 2m - 2 \sum_{1 \le i \neq j \le s} a_{ij}^{(2)} \right),$$

где $a_{ij}^{(l)}$ элементы степени матрицы $\mathrm{A}^l, l > 1,$ а $tr A$ след матрицы A.

Обозначим $\mathcal{K}^*$ множество циклов K^* графа G^*, $d(K^*)$ длину цикла K^*, D^* минимальную длину цикла. Известно [3],что циклам минимальной длины графа G^* соответствуют разрезы минимального объема графа G, причем $D^* = D$, тогда

$$\mathcal{B}_D = \sum_{K^* \in \mathcal{K}^* : d(K^*) = D} \ \prod_{w \in K^*} b_w . \tag{2}$$

Пусть константы $b_{ij}(k) = b_{ji}(k) = b_{w_k}, k = 1,..., a_{ij},$, определяют веса ребер w_k, содержащихся в пересечении граней $z_i \cap z_j, 1 \le i \neq j \le n$ графа G, при этом $b_{ii}(k) = 0$. В частности, в случае $D > 2, a_{ij} = 1, 1 \le i \neq j \le n$.

Теорема 2. Для планарного графа G, каждое ребро которого принадлежит какому-либо циклу, имеют место соотношения

$$\mathcal{B}_2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \le i, j \le n} \left(\left(\sum_{1 \le k \le a_{ij}} b_{ij}(k) \right)^2 - \sum_{1 \le k \le a_{ij}} b_{ij}^2(k) \right), \ \mathcal{B}_3 = \frac{1}{6} trB^3, \tag{3}$$

$$\mathcal{B}_4 = \frac{1}{8}\left(trB^4 - 2 \sum_{1 \le i, j, k \le n} b_{ij}^2(1) b_{jk}^2(1) + \sum_{1 \le i, j \le n} b_{ij}^4(1) \right), \tag{4}$$

$$\mathcal{B}_5 = \frac{1}{10}\left(trB^5 - 5 \sum_{1 \le i, j \le n} b_{ij}^2(1) b_{jj}^{(3)}(1) + 5 \sum_{1 \le i, j \le n} b_{ij}^3(1) b_{ji}^{(2)}(1) \right), \tag{5}$$

где $B = \left\| b_{ij}(1)_{i,j=1}^n \right\|$, а $b_{ij}^{(l)}(1), 1 \le i \neq j \le n,$ элементы матрицы $B^l, l > 1$.

2. Вычислительный эксперимент.

В работе был проведен вычислительный эксперимент на примере планарного графа с D=4 (рис. 1). Зададим веса ребер графа, находящихся в пересечении граней $z_i \cap z_j, 1 \le i \ne j \le 10$: $b_{12}(1) = b_{13}(1) = b_{14}(1) = b_{15}(1) = 1.01$ (ребра выделены фиолетовым цветом), остальные веса положим равными 1.02.

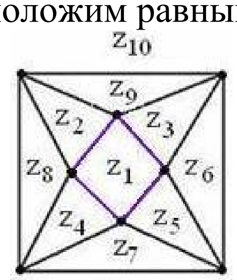

Рис. 1. Пример графа с D=4

Из формулы (2) нетрудно получить $\mathcal{B}_4 = 8.56190839$. Положим h=0.05 и вычислим вероятность несвязности $\bar{P}$ по асимптотической формуле (1) и методом Монте-Карло, обозначив ее $\bar{P}^*$, с числом реализаций 10^7 : $\bar{P} \approx$ 0.0000535119, $\bar{P}^* \approx$ 0.0000523. Время счета по формуле (1) составляет несколько секунд, а методом Монте-Карло - несколько часов.

Литература

1. Tsitsiashvili . G.Sh. Complete calculation of disconnection probability in planar graphs // Reliability: Theory and Applications — 2012. — Vol. 7, № 1. — 154 - 159 с.

2. Harary F., Manvel B. On the Number of Cycles in a Graph // Matematicky casopis — 1971. — Vol. 21, № 1. — 55 - 63 с.

3. Прасолов В.В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. — 2004. – М.: МЦНМО — с. 352 с.

И.А. Чернов

ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЕТИ

(Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН,
Петрозаводский государственный университет)

Рассмотрим вычислительную систему типа «грид», состоящую из сервера и клиентов, осуществляющих расчеты, причем клиенты — персональные компьютеры, принадлежащие сторонним лицам, участвующим в проекте добровольно [1,2]. Не исключено проникновение в сеть злоумышленников, намеренно отсылающие на сервер неверные ответы. Очевидным способом защиты является проверка ответов, в частности — репликация: задание посылается m различным узлам, причем ответ принимается только в том случае, если он одина-