ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ РОБЕНА

А.В. Филиновский

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)

Рассматривается краевая задача на собственные значения для оператора Лапласа с граничным условием Робена, содержащим большой параметр. Устанавливаются асимптотические разложения собственных значений при больших положительных значениях параметра.

В ограниченной области $\Omega \subset R^n, n \ge 2,$ с гладкой границей Γ рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$\Delta u + \lambda u = 0, \ \ x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0, \tag{1}$$

где ν - единичный вектор внешней нормали к Γ, α - вещественный параметр. Обозначим через $\{\lambda_k(\alpha)\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность собственных значений задачи (1), занумерованных в соответствии с их кратностями.

Задача (1) возникает при исследовании колебаний мембраны с упруго закрепленным краем. Она называется задачей Робена для $\alpha > 0$ и обобщенной задачей Робена для $\alpha < 0$.

Рассмотрим также последовательность собственных значений $\{\lambda_k^D\}_{k=1}^{\infty}$ задачи Дирихле

$$\Delta u + \lambda u = 0, \ \ x \in \Omega, \quad u = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

Известно, что $\lambda_1(\alpha)$ и λ_1^D - простые собственные значения, $\lambda_k(\alpha) \le \lambda_k^D$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k(\alpha) = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k^D = +\infty$. В работе [1] при $n = 2$ были получены двусторонние оценки первого собственного значения задачи (1) для положительных значений α, из которых следует, что $\lambda_1^D - C_2\alpha^{-1} \le \lambda_1(\alpha) \le \lambda_1^D - C_1\alpha^{-1}$, $0 < C_1 < C_2$, при $\alpha \ge \alpha_1 > 0$. В работе [2] для $n \ge 2$ установлены оценки снизу всех собственных значений: $\lambda_k^D - C_3(\lambda_k^D)^2\alpha^{-1} \le \lambda_k(\alpha)$, $k = 1,2,\ldots,$ $\alpha \ge \alpha_1 > 0$.

Теорема 1. *Пусть* λ_k^D *- простое собственное значение. Тогда существует число* α_k, *такое, что при всех* $\alpha > \alpha_k$ *собственное значение* $\lambda_k(\alpha)$ *также простое.*

Теорема 2. *Пусть* λ_k^D *- простое собственное значение. Тогда существует число* α_k *(определенное в Теореме 1), такое, что при всех* $\alpha > \alpha_k$ *собственное значение* $\lambda_k(\alpha)$ *является дифференцируемой функцией* α *и*

$$\lambda_k'(\alpha) = \frac{\int_\Gamma u_{k,\alpha}^2 ds}{\int_\Omega u_{k,\alpha}^2 dx} > 0,$$

где $u_{k,\alpha}(x)$ *- соответствующая* $\lambda_k(\alpha)$ *собственная функция задачи (1).*

Теорема 3. *Пусть* λ_k^D *- простое собственное значение. Тогда справедливо асимптотическое разложение*

$$\lambda_k(\alpha) = \lambda_k^D - \frac{\int\limits_{\Gamma} \left(\dfrac{\partial u_k^D}{\partial \nu} \right)^2 ds}{\int\limits_{\Omega} (u_k^D)^2 dx} \alpha^{-1} + o\left(\alpha^{-1}\right) \qquad , \qquad \alpha \to +\infty,$$

где $u_k^D(x)$ *- соответствующая* λ_k^D *собственная функция задачи (2).*

Литература

1. Sperb R. Untere und obere schranken fur den tiefsten eigenwert elastisch gestutzen membran // Zeitschrift Angew. Math. Phys. 1972. V. 23. no. 2. P. 231 - 244.

2. Филиновский А.В. Оценки собственных значений задачи Робена при больших значениях параметра// Дифф. уравнения, 2014, Т. 50, № 11, С. 1567 –1568.