О КОЛЕБЛЮЩИХСЯ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА – ФАУЛЕРА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

И.В. Асташова

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Доказано существование квазипериодических колеблющихся решений для уравнений типа Эмдена – Фаулера высокого порядка с регулярной и сингулярной нелинейностью. Получена асимптотическая классификация решений в случае n=3,4. Для уравнения с отрицательным потенциалом при n=4 доказано существование периодических решений в случае регулярной и сингулярной нелинейности.

Рассматривается уравнение

$$y^{(n)}+p_0|y|^k\text{sgn }y=0,\ \ n>2,\ k,p_0\in\mathbf{R},\ \ k>0,\ k\neq 1,\ \ p_0\neq 0. \tag{1}$$

Приведем результаты о существовании квазипериодических колеблющихся решений уравнения (1). При этом будет использоваться обозначение

$$\alpha=\frac{n}{k-1}.$$

Отметим, что качественные свойства решений уравнения (1) изучались, в частности, в работах [1 – 17].

Теорема 1. *Для любого целого* $n>2$ *и любого действительного* $k>1$ *существует такая знакопеременная периодическая функция* h, *что для любых* $p_0>0$ *и* $x^*\in\mathbf{R}$ *функция*

$$y(x)=p_0^{-\frac{1}{k-1}}(x^*-x)^{-\alpha}h(\ln(x-x^*)),\quad -\infty<x<x^*, \tag{2}$$

является решением уравнения (1).

Следствие 1. *Для любого четного* $n>2$ *и любого действительного* $k>1$ *существует такая знакопеременная периодическая функция* h, *что для любых* $p_0>0$ *и* $x^*\in\mathbf{R}$ *функция*

$$y(x)=p_0^{-\frac{1}{k-1}}(x-x^*)^{-\alpha}h(\ln(x-x^*)),\quad x^*<x<\infty,$$

является решением уравнения (1).

Следствие 2. *Для любого нечетного* $n>2$ *и любого действительного* $k>1$ *существует такая знакопеременная периодическая функция* h, *что для любых* $p_0<0$ *и* $x^*\in\mathbf{R}$ *функция*

$$y(x)=|p_0|^{-\frac{1}{k-1}}(x-x^*)^{-\alpha}h(\ln(x-x^*)),\quad x^*<x<\infty,$$

является решением уравнения (1).

Теорема 2. *Для любого целого* $n>2$ *и любого действительного* $0<k<1$ *существует такая знакопеременная периодическая функция* h, *что для любых* p_0 *и* $x^*\in\mathbf{R}$, $(-1)^n p_0>0$, *функция* (2) *является решением уравнения* (1).

Получена полная асимптотическая классификация решений уравнения (1) при n=3,4 в случае регулярной и сингулярной нелинейности (в том числе, с переменным коэффициентом). При этом, в частности, доказано существование периодических решений уравнения (1) при n=4, $p_0<0$, $k>0$, $k\neq 1$. Результаты о классификации частично опубликованы в [16], [17].

Замечание. Отметим, что в работе [12] было доказано существование решений вида (2) с положительной периодической функцией h для уравнения (1) с достаточно большим n и $p_0=(-1)^{n+1}$. Аналогичный результат для n=12,13,14 был доказан в работе [14].

Литература

1. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.
2. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание под ред. И. В.Асташовой. М.: ЮНИТИ - ДАНА, 2012. С. 22-288.
3. Кондратьев В.А., Самовол В.С. О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена – Фаулера // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17(4). С. 749–750.
4. Асташова И.В. Об асимптотическом поведении знакопеременных решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядка // В сб.: Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ имени И. Н. Векуа. Тбилиси: ТГУ, 1988. Т. 3(3). С. 9–12.
5. Кигурадзе И.Т. Критерий колеблемости для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28(2). С. 207-219.
6. Kiguradze I.T., Kusano T. On periodic solutions of even-order ordinary differential equations // Ann. Mat. Pura Appl. 2001. Vol. 180(3). P. 285-301.
7. Astashova I.V. Application of Dynamical Systems to the Study of Asymptotic Properties of Solutions to Nonlinear Higher-Order Differential Equations // Journal of Mathematical Sciences. Springer Science+Business Media. 2005. Vol. 126(5). P. 1361—1391.
8. Асташова И.В. О колеблемости решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43(6). С. 852.
9. Astashova I.V. On Existence of Non-oscillatory Solutions to Quasi-linear Differential Equations // Georgian Mathematical Journal. 2007. Vol. 14(2). P. 223–238.
10. Astashova I. On Existence of Quasi-Periodic Solutions to a Nonlinear Higher-Order Differential Equation // Abstracts of International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations (QUALITDE--2013) December 20 - 22, 2013, Tbilisi, Georgia, 16-18. http://www.rmi.ge/eng/QUALITDE-2013/Astashova_workshop 2013.pdf.
11. Асташова И.В. О существовании квазипериодических колеблющихся решений уравнений типа Эмдена - Фаулера высокого порядка // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50(6). С. 847—848.
12. Kozlov V.A. On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations // Ark. Mat. 1999. Vol. 37(2). P. 305–322.
13. Коньков А.А. О свойствах решений одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Труды Семинара им. И.Г.Петровского. 2007. Т. 26. С. 194-221.
14. Astashova I.V.: On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden-Fowler type higher-order equations // Advances in Difference Equations. 2013. DOI: 10.1186/10.1186/1687-1847-2013-220
15. Асташова И.В. О колеблемости решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43(6). С. 852.
16. Astashova I.V. On asymptotic classification of solutions to nonlinear third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity// Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Серия "Естественные науки". 2015. № 2. С.. 3-25.
17. Асташова И.В. Асимптотическая классификация решений сингулярных нелинейных уравнений типа Эмдена - Фаулера четвертого порядка с постоянным положительным потенциалом // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51(6). С. 10-11.