ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

А.Ю. Сеницкий, Н.Н.Евдокимова

Самарский государственный университет путей сообщения

В данной работе рассмотрены случаи интегрируемости гиперболического уравнения с переменными коэффициентами. Для этой цели используется преобразование Фурье в сочетании со специальным представлением трансформанты в пространстве изображений. С помощью введенных при этом произвольных функций строятся различные варианты замкнутых решений. Полученные решения отсутствуют в известных справочных руководствах по дифференциальным уравнениям.

В настоящей работе предложена процедура построения общего решения гиперболического уравнения общего вида, которая является весьма эффективной наряду с приемами преобразованиями уравнений использующих групповой анализ [1,2] и методы факторизации [3,4].

В области $\Omega:\{t>0, 1<r<a\}$ рассмотрено следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 U(r,t)}{\partial r^2}-\frac{\partial^2 U(r,t)}{\partial t^2}+A(r)\frac{\partial U(r,t)}{\partial r}+B(r)U(r,t)=0, \tag{1}$$

где $A(r), B(r) \in C_{[1,0]}$.

Будем считать, что функция $U(r,t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, следовательно, ее можно представить интегралом Фурье, записываемых в виде формул:

$$\widetilde{U}(r,p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} U(r,t)e^{-ipt}dt; \tag{2}$$

$$U(r,p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} \widetilde{U}(r,t)e^{ipt}dp. \tag{3}$$

Считая, что $U(r,0)=\dfrac{\partial U(r,0)}{\partial t}=0$, применим преобразование (2) к (1). Тогда в пространстве изображений получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}(r,p)}{\partial r^2}+A(r)\frac{\partial \widetilde{U}(r,p)}{\partial r}+[B(r)+p^2]\widetilde{U}(r,p)=0. \tag{4}$$

Решение уравнения представляется в форме:

$$U(r,p)=\varphi(r)\cdot G(s),\ s=p\psi(r), \tag{5}$$

где $\varphi(r), \psi(r)\, u\, G(s)$ - дважды непрерывно-дифференцируемые функции своих аргументов.

В результате постановки (5) в (4) получаем дифференциальное соотношение

$$s^2\left[\frac{d^2G}{ds^2}+\frac{1}{(\psi')^2}G\right]+s\left[\frac{\psi''\psi}{(\psi')^2}+\frac{2\varphi'\psi}{\varphi\psi'}+\frac{A\psi}{\psi'}\right]\frac{dG}{ds}+\frac{\psi^2}{\varphi\,(\psi')^2}\left[\varphi''+A\varphi'+B\varphi\right]G=0, \tag{6}$$

которое может быть удовлетворено различными способами. В работах [4,5] получены замкнутые решения уравнения (1), содержащие волновые функции. Рассмотрим альтернативный вариант построения общего решения уравнения (1), не содержащий волновые функции. Полагая, что $\psi'(r)=1$, т.е.

$$\psi(r)=r. \tag{7}$$

Случай 1.

Пусть имеют место следующие равенства:

$$\frac{\psi''(r)\cdot\varphi(r)}{[\psi'(r)]^2}+2\frac{\psi(r)\cdot\varphi'(r)}{\varphi(r)\psi'(r)}+\frac{A(r)\cdot\psi(r)}{\psi'(r)}=0; \qquad (8)$$

$$\frac{\psi^2(r)}{\varphi(r)[\psi'(r)]^2}\left[\varphi''(r)+A(r)\varphi'(r)+B(r)\varphi(r)\right]=-6; \qquad (9)$$

В этом случае равенство (6) преобразуется к следующему виду

$$s^2\frac{d^2G(s)}{ds^2}+(s^2-6)G(s)=0 .$$

Общее решение последнего уравнения можно представить следующим образом [6]:

$$G(s)=C_1(p)\left\{\frac{3}{s}\cos[s+C_2(p)]+(1-\frac{3}{s^2})\sin[s+C_2(p)\right\}. \qquad (10)$$

Выполняя обращение равенств (5), (10), находим

$$U(r,t)=\frac{\varphi(r)}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}C_1(p)\left\{\frac{3}{s}\cos[s+C_2(p)]+(1-\frac{3}{s^2})\sin[s+C_2(p)\right\}e^{ipt}dp . \qquad (11)$$

Из соотношения (8) определяем

$$\varphi(r)=\exp[-\frac{1}{2}\int A(r)dr]. \qquad (12)$$

Наконец из уравнения (9) получаем

$$B(r)=\frac{1}{4}\left[2A'(r)+A^2(r)-\frac{24}{r^2}\right]. \qquad (13)$$

Теорема 1.

Если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют соотношению (13) , то выражения (11), (12) являются его общим решением.

Случай 2.

Пусть выполняется условие (7) и справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\psi''(r)\cdot\psi(r)}{[\psi'(r)]^2}+\frac{A(r)\cdot\psi(r)}{\psi'(r)}+2\frac{\psi(r)\cdot\varphi'(r)}{\varphi(r)\psi'(r)}=1; \qquad (14)$$

$$\frac{\psi^2(r)}{\varphi(r)[\psi'(r)]^2}\left[\varphi''(r)+A(r)\varphi'(r)+B(r)\varphi(r)\right]=-\nu^2; \qquad (15)$$

где $\nu\in R$.

Тогда (6) трансформируется в уравнение Бесселя, т.е.

$$s^2\frac{d^2G(s)}{ds^2}+s\frac{dG(s)}{ds}+(s^2-\nu^2)G(s)=0 .$$

Его решение записывается в виде

$$G(s)=C_1(p)I_\nu(s)+C_2(p)Y_\nu(s) . \qquad (16)$$

Здесь $I_\nu(s),Y_\nu(s)$ - функции Бесселя "ν"- го порядка I-го и II-го рода.

Выполняя обращение выражения (5), с учетом (16) определяем $U(r,t)$. Имеем

$$U(r,t)=\frac{\varphi(r)}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\left[C_1(p)I_\nu(s)+C_2(p)Y_\nu(s)\right]e^{ipt}dp . \qquad (17)$$

Принимая во внимание (7), из (14) находим функцию

$$\varphi(r) = r^{1/2} \exp[-\frac{1}{2}\int A(r)dr]\,. \tag{18}$$

Далее из (15) следует, что

$$B(r) = \frac{1}{4}\left[2A'(r) + A^2(r) + \frac{1-4\nu^2}{r^2}\right]\quad . \tag{19}$$

Теорема 2.

При выполнении условия (19) выражение (17) является замкнутым решением уравнения (1).

Литература

1.Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. М: Наука, 1993. 462с.

2.Зайцев В.Ф. Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений. //Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25. №3.С.379-387.

3.Беркович Л.М. Факторизация и преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений./ Под ред. Н.Х.Розова. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1989. 192 с.

4.Сеницкий А.Ю. Об интегрируемости волнового уравнения с переменными коэффициентами.//Известия высших учебных заведений. Математика.-1998. №7-С.39-46.

5.Евдокимова Н.Н., Сеницкий А.Ю., Харьковский С.И. Исследование волновых процессов в бесконечных анизотропных средах.// Межд.научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики». Материалы конференции. Тула: ТГУ,2007.С.145-147.

6.Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 3-е изд.М.:Наука,1965.703с.