ОБОБЩЁННЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА САМОПОДОБНЫХ ОБЛАСТЯХ

М.С. Каспарьян

Институт систем обработки изображений РАН

Вводится обобщённое синус-косинусное преобразование на самоподобных областях. Получены аналитические условия ортогональности тиках преобразований. Доказывается теорема, которые позволяют связать коэффициенты преобразования в ортогональном случае.

Введение

Вопросы обработки сигналов-изображений остаются в центре внимания специалистов различных специальностей. Изображения выступают и как результат и как объект исследований в физике, космонавтике, метеорологии, криминалистике и многих других областях науки и техники. Кроме того, системы обработки изображений в настоящее время используются для решения многих прикладных задач.

Несмотря на то, что проблема синтеза ДОП и их быстрых алгоритмов рассматривается уже давно, и существует множество работ и монографий, посвященных этой теме. Открытые проблемы в теории дискретного спектрального анализа, синтеза ДОП и их БА тем не менее остаются, а именно, это связано с тем, что классы обрабатываемых сигналов достаточно общие и достаточно широкий спектр вычислительных средств и в силу этого, асимптотически хороший алгоритм совершенно не обязательно является таковым же для данного значения ограничивающих параметров: длина преобразования, специфика обрабатываемого сигнала, специфика используемых вычислительных средств.

В связи с этим, понятным становятся проблемы теории ДОП, которая уже переросла утилитарную значимость, как средства обработки сигналов, и превратилась в самостоятельную научную дисциплину, находящуюся на стыке информатики и теоретической математики, причём в теоретической математике используются весьма нетривиальные факты абстрактной алгебры.

В обзорной статье [1] С. С. Агаяна обоснована необходимость рассмотрения дискретных тригонометрических ортогональных преобразований с базисными функциями вида

$$h_m(n) = \mathrm{A}(m)\cos\left(\frac{\pi}{N}\alpha_0(m+\alpha_1)(n+\alpha_2)\right) + \mathrm{B}(m)\sin\left(\frac{\pi}{N}\alpha_0(m+\alpha_1)(n+\alpha_2)\right), \quad (1)$$

где $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ – параметры, которые являются рациональными числами, а $(\mathrm{A}(m), \mathrm{B}(m))$ – коэффициенты преобразования, которые могут быть как действительными, так и комплексными.

В статье [2] сформулированы теоремы ортогональности базисных функций вида (1). В статье [3] синтезированы новые преобразования на областях, ассоциированных с фундаментальными областями канонических систем счисления (КСС). В данной статье будут введены обобщенные преобразования на фундаментальных областях КСС, базисные функции которых определяются аналогично базисным функциям (1).

Канонические системы счисления

Приведём краткие сведения о канонических системах счисления в мнимых квадратичных поля[4]-[6].

Определение 1.

Пусть $\mathrm{Q}(\sqrt{d})$ есть квадратичное поле:

$$\mathrm{Q}(\sqrt{d}) = \left\{ z = a + b\sqrt{d}; a, b \in \mathrm{Q} \right\}$$

d – целое число, свободное от квадратов.

Если для элемента $z = a + b\sqrt{d} \in Q\left(\sqrt{d}\right)$ норма и след есть целые числа,

$$Norm(z) = \left(a + b\sqrt{d}\right)\left(a - b\sqrt{d}\right), \tag{2}$$

$$Tr(z) = \left(a + b\sqrt{d}\right) + \left(a - b\sqrt{d}\right), \tag{3}$$

то элемент называется целым алгебраическим элементом поля $Q\left(\sqrt{d}\right)$. Целые элементы образуют решётку на комплексной плоскости.

Определение 2.

Целое алгебраическое число $\alpha = A + \sqrt{d}$ называется основанием канонической системы счисления в кольце целых элементов поля $Q\left(\sqrt{d}\right)$, если любой целый элемент этого поля однозначно представим в форме конечной суммы

$$\begin{gathered} z = \sum_{j=0}^{k(z)} z_j \cdot \alpha^j, \\ z_j \in N = \left\{0, 1, \cdots, \left|Norm(\alpha)\right| - 1\right\}. \end{gathered} \tag{4}$$

Пара $\{\alpha, N\}$ называется канонической системой счисления (КСС) в кольце целых элементов поля $Q\left(\sqrt{d}\right)$.

В работе рассматривается только случай $d < 0$, то есть мнимые квадратичные поля. Приведём несколько примеров канонических систем счисления с различными нормами.

Пример 1.

Пусть $Norm(\alpha) = 2$, тогда в силу (3) $N = \{0, 1\}$. В работе [КАТАИ] показано, что существует ровно три мнимых квадратичных поля для $d = -1, -2, -3$, в кольцах целых элементов которых существует бинарные КСС, а именно:

1) кольцо целых гауссовых чисел $\mathbf{Z}(i) \in Q(i)$ с основаниями, равными $\alpha = -1 \pm i$;
2) кольцо $S\left(i\sqrt{7}\right) \in Q\left(i\sqrt{7}\right)$ с основаниями, равными $\alpha = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$;
3) кольцо $S\left(i\sqrt{2}\right) \in Q\left(i\sqrt{2}\right)$ с основаниями, равными $\alpha = \pm i\sqrt{2}$.

Если в формуле (4) k фиксировано, то множество элементов, представимых $k-$членной суммой, представляет собой ограниченное множество на комплексной плоскости, которое будем называть $k-$фундаментальной областью, примеры таких областей изображены на рисунках 1а-1в.

Оттенки серого цвета на приведённых рисунках подчёркивают самоподобный «характер» $k-$фундаментальных областей при растущем k.

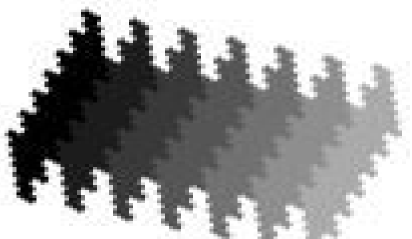

Рис. 1а $k = 6, \alpha = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{19}}{2}$

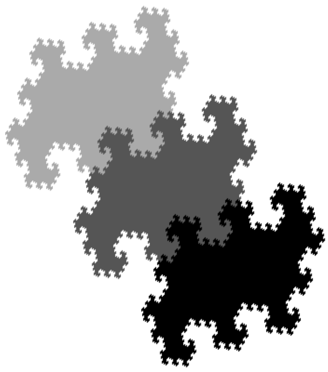

Рис. 1б $\mathrm{k} = 10,\ \alpha = -1 + \mathrm{i}\sqrt{2}$

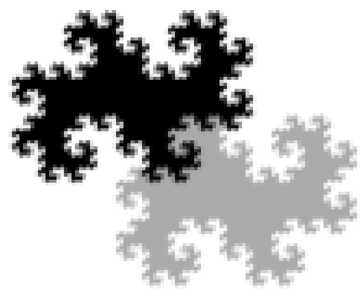

Рис. 1в $\mathrm{k} = 16,\ \alpha = -1 + \mathrm{i}$

Дискретные ортогональные преобразования на самоподобных областях

Следуя работе [3], введем ДОП на k – фундаментальной области D_k со свойствами базисных функций Λ_k, аналогичными свойствам базисных функций ДПФ:

1) $\Lambda_k(m+n)=\Lambda_k(m)\cdot\Lambda_k(n)$;
2) $\Lambda_k(\alpha^k)=1, \Lambda_k(0)=1$;
3) $\Lambda_k(\alpha^{k-1})=\exp\left\{\dfrac{2\cdot\pi\cdot i}{Norm(\alpha)^k}\right\}$;
4) $\Lambda_k(\alpha\cdot x)=\Lambda_{k-1}(x)$.

В работе [3] показано, что функция Λ_k имеет вид:

$$\Lambda_k(x)=\exp\left\{C_1\cdot x+C_2\cdot\bar{x}\right\},$$

где

$$\begin{cases} C_1=\dfrac{-2\cdot\pi\cdot i\cdot\bar{\alpha}^k}{Norm\left(\alpha^k\right)\cdot\left(\alpha-\bar{\alpha}\right)}, \\ C_2=\dfrac{2\cdot\pi\cdot i\cdot\alpha^k}{Norm\left(\alpha^k\right)\cdot\left(\alpha-\bar{\alpha}\right)}. \end{cases} \quad (5)$$

Тогда фрактальное дискретное преобразование Фурье (ФДПФ) будет иметь вид:

$$X(m)=\sum_{n\in G_k}x(n)\cdot\Lambda_k(m\cdot n),\ m\in D_k. \quad (6)$$

В работе [3] показано, что справедлива теорема:

Теорема 1.

Пусть α – основание канонической системы счисления с $Norm(\alpha)\geq 2$, множество D_k – k – фундаментальная область, тогда преобразование (6) с базисными функциями $\Lambda_k(n)=\exp\left\{C_1\cdot n+C_2\cdot\bar{n}\right\}$, где $n\in D_k$ и

$$\begin{cases} C_1=\dfrac{-2\cdot\pi\cdot i\cdot\bar{\alpha}^k}{Norm\left(\alpha^k\right)\cdot\left(\alpha-\bar{\alpha}\right)}, \\ C_2=\dfrac{2\cdot\pi\cdot i\cdot\alpha^k}{Norm\left(\alpha^k\right)\cdot\left(\alpha-\bar{\alpha}\right)}, \end{cases}$$

является ортогональным.

Учитывая коэффициенты (5) выражение для $\Lambda_k(x)$ может быть преобразовано к виду:

$$\Lambda_k(x)=\exp\left\{\frac{\pi\cdot i\cdot\mathrm{Im}\left(\alpha^k\cdot\bar{x}\right)}{Norm\left(\alpha^{k-1}\right)\cdot\mathrm{Im}(\alpha)}\right\}. \quad (7)$$

Обобщенные дискретные ортогональные преобразования на самоподобных областях

Аналогично тому, как вводятся функции обобщённого синус-косинусного преобразования [2], введем функции

$$h_p(n)=A_1\Lambda_k\left((p+a)(n+\beta)\right)+B_1\overline{\Lambda_k\left((p+a)(n+\beta)\right)}, \quad (8)$$

$$h_q^*(n)=A_2\Lambda_k\left((q+b)(n+\beta)\right)+B_2\overline{\Lambda_k\left((q+b)(n+\beta)\right)}. \quad (9)$$

Найдем параметры сдвигов a, b и β так, что бы функции (8) и (9) были ортогональны.

Перемножив (8) и (9) получим

$$\begin{aligned} h_p(n)\cdot\overline{h_q^*(n)}&=A_1\overline{A_2}X\Lambda_k\left((p+q+a+b)n\right)+B_1\overline{B_2}\,\overline{X}\,\overline{\Lambda_k\left((p+q+a+b)n\right)}+ \\ &+A_1\overline{B_2}Y\Lambda_k\left((p-q+a-b)n\right)+B_1\overline{A_2}\,\overline{Y}\,\overline{\Lambda_k\left((p-q+a-b)n\right)} \end{aligned} \quad (10)$$

где $X=\Lambda_k\left(\beta(p+q+a+b)\right)$ и $Y=\Lambda_k\left(\beta(p-q+a-b)\right)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $a-b=0$ и $a+b\neq 0(\bmod 1)$, тогда скалярное произведение $\sum_{n\in D_k} h_p(n)\cdot\overline{h_q^*(n)}$ разобьем на две суммы:

$$A_1\overline{A_2}X\sum_{n\in D_k}\Lambda_k\left(\left(p+q+a+b\right)n\right)+B_1\overline{B_2}\overline{X}\sum_{n\in D_k}\overline{\Lambda_k\left(\left(p+q+a+b\right)n\right)} \tag{11}$$

и

$$A_1\overline{B_2}Y\sum_{n\in D_k}\Lambda_k\left(\left(p-q\right)n\right)+B_1\overline{A_2}\overline{Y}\sum_{n\in D_k}\overline{\Lambda_k\left(\left(p-q\right)n\right)}. \tag{12}$$

Ввиду ортогональности систем функций $\left\{\Lambda_k(mn)\right\}_{m\in D_k}$ и $\left\{\overline{\Lambda_k(mn)}\right\}_{m\in D_k}$, выражение (12) можно записать в следующем виде

$$\left(A_1\overline{B_2}+B_1\overline{A_2}\right)\left(Norm(\alpha)^k\right)\delta_p^q. \tag{13}$$

Отдельно рассмотрим сумму $\sum_{n\in D_k}\Lambda_k\left(\left(p+q+a+b\right)n\right)$, представим ее в виде произведения. Ниже представлен шаг перехода и результат:

$$\sum_{n\in D_{k-1}}\Lambda_{k-1}\left(\left(p+q+a+b\right)n\right)\cdot\frac{1-\Lambda_k^N\left(p+q+a+b\right)}{1-\Lambda_k\left(p+q+a+b\right)}=\prod_{t=1}^{k}\frac{1-\Lambda_t^N\left(p+q+a+b\right)}{1-\Lambda_t\left(p+q+a+b\right)}. \tag{14}$$

Аналогичным образом запишем сумму $\sum_{n\in D_k}\overline{\Lambda_k\left(\left(p+q+a+b\right)n\right)}$, так же проведем дополнительные преобразования, которые нам будут необходимы

$$\sum_{n\in D_k}\overline{\Lambda_k\left(\left(p+q+a+b\right)n\right)}=\prod_{t=1}^{k}\frac{1-\overline{\Lambda_t^N\left(p+q+a+b\right)}}{1-\overline{\Lambda_t\left(p+q+a+b\right)}}=\prod_{t=1}^{k}\frac{1-\Lambda_t^N\left(p+q+a+b\right)}{1-\Lambda_t\left(p+q+a+b\right)}\prod_{t=1}^{k}\frac{\Lambda_t\left(p+q+a+b\right)}{\Lambda_t^N\left(p+q+a+b\right)}. \tag{15}$$

В (14) и (15) N есть норма α, т.е. $N=Norm(\alpha)$.

Теперь запишем (11) с учетом равенств (14) и (15)

$$\prod_{t=1}^{k}\frac{1-\Lambda_t^N\left(p+q+a+b\right)}{1-\Lambda_t\left(p+q+a+b\right)}\left(A_1\overline{A_2}X+B_1\overline{B_2}\overline{X}\prod_{t=1}^{k}\frac{\Lambda_t\left(p+q+a+b\right)}{\Lambda_t^N\left(p+q+a+b\right)}\right). \tag{16}$$

Так как мы хотим получить ортогональность, то нам нужно приравнять (16) к нулю, но так как левая часть не равна нулю, то достаточно приравнять правую часть к нулю

$$A_1\overline{A_2}X+B_1\overline{B_2}\overline{X}\prod_{t=1}^{k}\frac{\Lambda_t\left(p+q+a+b\right)}{\Lambda_t^N\left(p+q+a+b\right)}=0. \tag{17}$$

Рассмотрим произведение $\prod_{t=1}^{k}\frac{\Lambda_t\left(p+q+a+b\right)}{\Lambda_t^N\left(p+q+a+b\right)}$, используя свойство функции $\Lambda_t(\alpha n)=\Lambda_{t-1}(n)$ получим следующее

$$\prod_{t=1}^{k}\frac{\Lambda_t\left(p+q+a+b\right)}{\Lambda_t^N\left(p+q+a+b\right)}=\frac{\Lambda_k\left(\left(p+q+a+b\right)\sum_{i=0}^{k-1}\alpha^i\right)}{\Lambda_k\left(\left(p+q+a+b\right)N\sum_{i=0}^{k-1}\alpha^i\right)}=\Lambda_k\left(\left(p+q+a+b\right)\left(1-N\right)\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\right). \tag{18}$$

Подставим правую часть из (18) и X в равенство (17)

$$A_1\overline{A_2}\Lambda_k\left(\beta\left(p+q+a+b\right)\right)+B_1\overline{B_2}\Lambda_k\left(-\beta\left(p+q+a+b\right)\right)\Lambda_k\left(\left(p+q+a+b\right)\left(1-N\right)\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\right)=0. \tag{19}$$

Теперь из (19) легко найти β

$$\beta=\frac{\alpha^k-1}{1-\alpha}\frac{N-1}{2}. \tag{20}$$

(19) примет вид

$$A_1\overline{A_2}+B_1\overline{B_2}=0. \tag{21}$$

Полученное соотношение позволяет сформулировать теорему, которая схожа с теоремами из [2], но для фрактального случая.

Теорема 2.
Пусть

$$h_p(n) = A_1\Lambda_k\left((p+a)(n+\beta)\right) + B_1\overline{\Lambda_k\left((p+a)(n+\beta)\right)}$$

и

$$h_q^*(n) = A_2\Lambda_k\left((q+b)(n+\beta)\right) + B_2\overline{\Lambda_k\left((q+b)(n+\beta)\right)},$$

$\beta = \dfrac{\alpha^k - 1}{1-\alpha}\dfrac{N-1}{2}$, α – основание канонической системы счисления, $a - b = 0$ и $a + b \neq 0 \pmod 1$, тогда система функций $\left\{h_p\right\}_{p=0}^{N-1}$ ортогональна системе функций $\left\{h_q^*\right\}_{q=0}^{N-1}$, если выполнено условие $\begin{cases} A_1\overline{B_2} + B_1\overline{A_2} \neq 0, \\ A_1\overline{A_2} + B_1\overline{B_2} = 0. \end{cases}$

Литература

1. Распознавание, классификация, прогноз. Математические методы и их применение / С.С. Агаян, В.М. Антоненко, В.И. Васильев, А.В. Гончарский, Н.Г. Гуторова и др.; под ред. Ю.И. Журавлев - Вып. 3. – М.: Наука, 1992. – 320 с.
2. Каспарьян М.С. Обобщённые дискретные ортогональные синус-косинусные преобразования // Компьютерная оптика – 2014, – Т. 38, №4, С. 881-885.
3. Чернов В.М. Дискретные ортогональные преобразования на фундаментальных областях канонических систем счисления /Чернов В.М., Каспарьян М.С. // Компьютерная оптика – 2013, – Т. 37, №4, С. 484-487.
4. Katai, I. Canonical number system in imaginary quadratic fields / I.Katai, A.Kovacs // Acta Mathematica Hungarica. – 1981. – Vol.37. – P. 159-164.
5. Katai, I. Canonical number systems for comlex integers / I. Katai, J. Szabo // Acta Sci. Math.(Szeged). – 1975. – Vol. 37. – P.255-260.
6. Чернов В.М. Арифметические методы синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 264 с.