О РАЗМЕРНОСТИ ГРАНИЦ НЕКОТОРЫХ ФРАКТАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КВАЗИКАНОНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ СЧИСЛЕНИЯ

П.С. Богданов

Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королёва
(национально исследовательский университет)

В работе вычисляются фрактальные размерности границ фундаментальных областей всех бинарных и тернарных квазиканонических систем счисления в мнимых квадратичных полях. Для этого используется модификация метода, применяемого В. Джильбертом и Дж. Тусвальднером для вычисления размерности границ фундаментальных областей канонических систем счисления.

Введение

Начиная с основополагающих работ Б. Мандельброта [1-4], который ввёл в научный обиход понятие фрактальной геометрии, аппроксимационные модели, использующие фрактальные объекты, стали широко применяться в различных областях естествознания [5-7].

В работе [8] показана самоподобность объектов, исследуемых в нанофотонике, и перспективная возможность использования фрактальных моделей для их исследования. Следует отметить, что плоский характер отображения наблюдаемых в нанофотонике изображений, его самоподобные фрактальные свойства диктуют необходимость исследования изображения, как некоторой области плоскости, так и отдельно его границы. Необходимость исследования границы фрактального объекта в приложениях может объясняться, например, тем, что при решении задач, использующих в частности метод Монте-Карло и его разновидности, уже нельзя считать, что граница объекта имеет меру Лебега равную нулю. С этой точки зрения исследование различных частных случаев граничных свойств специфичных фрактальных объектов представляется весьма актуальной задачей. В частности, В. Джильберт в работах [9,10] исследовал фрактальную размерность границы фундаментальной области канонических систем счисления. В этих работах В. Джильбертом была указана явная связь между свойствами границ различных фракталов и представлением комплексных чисел в соответствующих канонических системах счисления. Дж. Тусвальднер в своей работе обобщил результат В. Джильберта на случай мнимых квадратичных полей [11], а затем и на случай двумерных канонических систем счисления [12].

В настоящей работе мы, следуя основной идее Джильберта, рассматриваем свойства фрактальных объектов, ассоциированных с представлением чисел в бинарных и тернарных квазиканонических системах счисления мнимых квадратичных полей.

Основные определения

Пусть $Q\left(i\sqrt{d}\right)$ - мнимое квадратичное поле, а $S\left(i\sqrt{d}\right)$ - кольцо его целых элементов, называемых целыми алгебраическими числами, а $\{\alpha; I\}$ - квазиканоническая система счисления в кольце $S\left(i\sqrt{d}\right)$ [13].

Определение 1. Фундаментальной областью $\Phi(\alpha,I)$ системы счисления $\{\alpha;I\}$ называется множество всех чисел поля $Q\left(i\sqrt{d}\right)$ с нулевой целой частью, то есть $\Phi(\alpha,I)=\left\{\sum_{j=-\infty}^{-1} a_j\alpha^j, a_j \in I\right\}$. Сходимость этого ряда понимается в смысле нормы кольца целых алгебраических чисел.

Если ко всем числам, составляющим фундаментальную область $\Phi(\alpha,I)$, добавить некоторое целое алгебраическое число z, то получаем сдвинутую относительно начала координат фундаментальную область. Обозначим ее $\Phi_z(\alpha,I)=\left\{z+\sum_{j=-\infty}^{-1} a_j\alpha^j, a_j\in I\right\}$.

При этом, для фундаментальной области $\Phi(\alpha,I)$ существует непустое множество точек $\Gamma(\alpha,I)$, таких, что $\Gamma(\alpha,I)=\bigcup_z\left(\Phi(\alpha,I)\cap\Phi_z(\alpha,I)\right)$. Множество точек Γ будем называть границей фундаментальной области.

Окрестностью точки $c=\sum_{j=-l}^{-1} a_j\alpha^j$, $c\in Q\left(i\sqrt{d}\right)$ назовем внутренность произвольной выпуклой плоской фигуры, симметричной относительно точки c. Равные окрестности точек $\sum_{j=-l}^{-1} a_j\alpha^j$ будем выбирать таким образом, чтобы их попарное пересечение было пустым множеством, а объединение их замыканий представляет собой замкнутое связное односвязное множество, которое будем называть l-приближением фундаментальной области.

В дальнейшем, в качестве окрестностей точек $\sum_{j=-l}^{-1} a_j\alpha^j$ будем рассматривать многоугольники, длины всех сторон которых равны некоторому числу L_l. Тогда граница l-приближения фундаментальной области состоит из S_l отрезков длиной L_l.

Определение 2. Фрактальной размерностью границы фундаментальной области $\Phi(\alpha,I)$ называется число d, такое, что выполняется равенство $\lim_{l\to\infty}\left(S_l\cdot L_l^d\right)=1$.

Если рассматривать в качестве окрестностей многоугольники, у которых не все стороны равны, то фрактальную размерность можно определить по формуле $\lim_{l\to\infty}\left(N(L_l)\cdot L_l^d\right)=1$, где $N(L_l)$ - минимальное количество отрезков длины L_l, полностью покрывающих границу фундаментальной области.

Для вычисления размерности границы фундаментальной области бинарной или тернарной квазиканонической системы счисления можно использовать метод, приведенный в работе В. Джильберта для квадратичного поля $Q(i)$ или его модификацию в случае остальных мнимых квадратичных полей. Согласно этому методу вначале последовательно строятся приближения фундаментальной области выбранной системы счисления $\{\alpha;I\}$. Начальным приближением служит правильная четырехугольная окрестность (квадрат) точки 0, с площадью равной 1. Каждое последующее приближение получается из предыдущего заменой одного квадрата на два квадрата меньшей площади, с их поворотом, соответствующим делению на α. При этом на шаге приближения с номером l площадь каждого квадрата будет равна $\left(\frac{1}{2}\right)^l$, а сторона, соответственно, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^l$.

Джильберт вычисляет длину границы каждого l - приближения по формуле $\begin{pmatrix} L_a & L_b & L_c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_a & L_b & L_c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2n-1 & 0 & 2n \\ n^2-2n+2 & 0 & (n-1)^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$. Здесь a_k, b_k, c_k - количество элементов вида $A, B, C,$ находящихся на границе l-приближения, а L_a, L_b, L_c - длины этих элементов. Вид самих элементов A, B, C для $l=1$ представлен на рисунке 1.

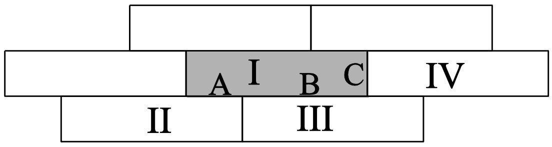


Рисунок 1 – Вид элементов *A, B, C* для *l*-приближения при *l*=1

Последняя формула была разработана Джильбертом только для канонических систем счисления в поле $Q(i)$. С некоторыми изменениями этот метод применим и для других систем счисления.

Стоит отметить, что эквивалентные системы счисления [13] будут иметь одинаковые фундаментальные области с точностью до поворота. Поэтому для каждого мнимого квадратичного поля достаточно посчитать размерность границы фундаментальной области лишь одной системы счисления из каждого класса эквивалентности. Кроме того, сам процесс вычисления этой размерности для различных систем счисления отличается лишь деталями, поэтому приведем вычисления только для одного класса тернарных квазиканонических систем счисления поля $Q\left(i\sqrt{2}\right)$.

Вычисление фрактальной размерности границы фундаментальной области системы счисления $\left\{-1-i\sqrt{2},\left\{0,1,i\sqrt{2}\right\}\right\}$

Общий вид фундаментальной области системы счисления $\left\{-1-i\sqrt{2},\left\{0,1,i\sqrt{2}\right\}\right\}$ приведён в таблице 1. Там же представлено её l-приближение при $l=2$, и выделены элементы, которые будут повторяться для каждого l-приближения. Из таблицы видно, что элемент A для границы l-приближения на $l+1$-приближении переходит в один элемент B, элемент B переходит в один C, а C – в один C, три A и один B.

Количество элементов A, B, C для l-приближения определяется следующим образом $\begin{pmatrix} a_l \\ b_l \\ c_l \end{pmatrix} = T^{l-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Начальным приближением считается l-приближение для $l=1$, где $a_1 = 2$, $b_1 = 2$, $c_1 = 2$. Тогда минимальное количество отрезков длины $K \cdot \sqrt{2} \cdot L_l$, полностью покрывающих границу l-приближения равно $N(L_l) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_l \\ b_l \\ c_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot T^{l-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$. Для матрицы T её собственные числа являются корнями уравнения $-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 3 = 0$, и приближённо равны $\lambda_1 \approx 2{,}13 > \sqrt{3}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda}_3 \approx -0{,}57 + 1{,}04 \cdot i$, $|\lambda_2| < \sqrt{3}$. Здесь $L_l = K \cdot 3^{-\frac{l}{2}}$, а K - константа, характеризующая длину большего ребра прямоугольника при $l=0$. Таким образом, общая длина границы l-приближения равна $N(L_l) \cdot L_l = K \cdot \dfrac{C_1\lambda_1^{l-1} + C_2\lambda_2^{l-1} + C_3\lambda_3^{l-1}}{3^{\frac{l}{2}}}$, и ее предел $\lim\limits_{l\to\infty}\left(N(L_l) \cdot L_l\right) = \infty$. Фрактальную размерность d границы фундаментальной области, в этом случае можно вычислить из равенства

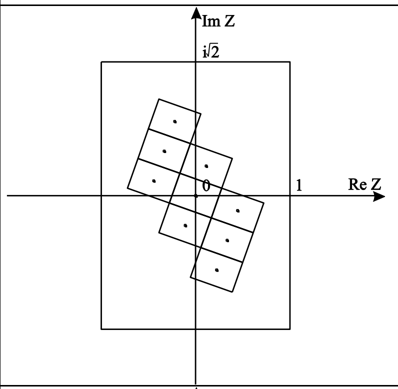
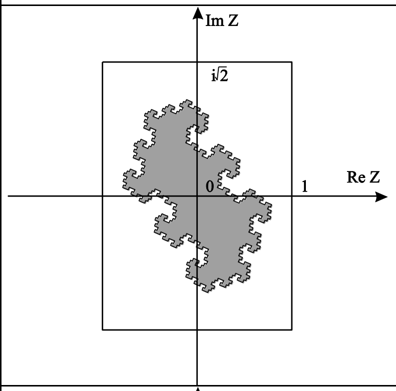
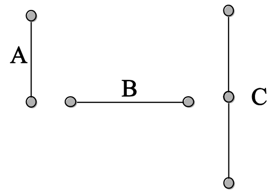
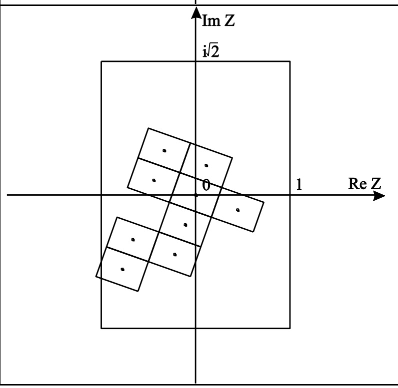
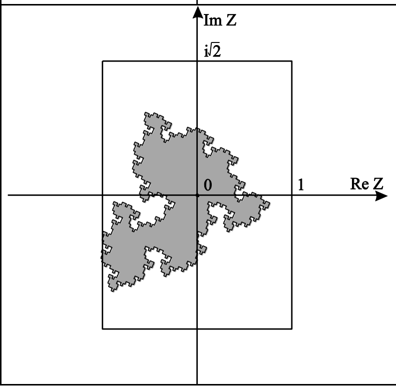
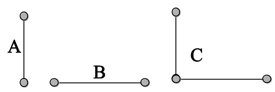
$$\lim_{l\to\infty}\left(S_l \cdot L_l\right) = \lim_{l\to\infty}\left(K \cdot \frac{C_1\lambda_1^{l-1} + C_2\lambda_2^{l-1} + C_3\lambda_3^{l-1}}{3^{\frac{dl}{2}}}\right) = \frac{K \cdot C_1}{\lambda_1} \cdot \lim_{l\to\infty}\left(\frac{\lambda_1}{3^{\frac{d}{2}}}\right)^l = 1 .$$

Последний предел будет конечен тогда и только тогда, когда $\dfrac{\lambda_1}{\sqrt{3}^d} = 1$, или $d = 2\log_3 \lambda_1 \approx 1{,}376841713$.

Размерности границ для остальных бинарных и тернарных квазиканонических систем счисления мнимых квадратичных полей

Фрактальные размерности границ фундаментальных областей рассчитаны для всех бинарных и тернарных квазиканонических систем счисления мнимых квадратичных полей. При расчетах использовался макрос, написанный на VB-script для программы Corel draw, использование которого позволило получить изображения l-приближения фундаментальных областей для всех таких систем счисления. Некоторые l-приближения, полученные с помощью этого макроса приведены в таблице 1.

Таблица 1. Общий вид фундаментальной области и размерность ее границы для некоторых исследованных систем счисления.

Система счисления	l-приближение (l=2)	Общий вид фундаментальной области	Размерность фундаментальной области и расположение элементов A, B, C
$\alpha = 1+i\sqrt{2}$ $I=\{0,1,-1\}$			 $d \approx 1{,}376841713$
$\alpha = -1-i\sqrt{2}$ $I=\{0,1,i\sqrt{2}\}$			 $d \approx 1{,}376841713$

Приведём в таблице 2 размерности границ фундаментальных областей для всех остальных бинарных и тернарных квазиканонических систем счисления.

Таблица 2. Общий вид фундаментальной области и размерность ее границы для некоторых исследованных систем счисления.

Система счисления	Размерность границы
$\{-1+i,\{0,1\}\}$	$d \approx 1{,}5236$
$\{i\sqrt{2},\{0,1\}\}$	$d = 1$
$\left\{\frac{1+i\sqrt{7}}{2},\{0,1\}\right\}$	$d \approx 1{,}210760534$
$\left\{\frac{1+i\sqrt{7}}{2},\{0,1,-1\}\right\}$	$d \approx 1{,}162039854$
$\left\{i\sqrt{3},\left\{0,1,\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right\}\right\}$	$d \approx 1{,}2619$

Заключение

Для всех бинарных и тернарных квазиканонических систем счисления в мнимых квадратичных полях вычислена размерность границы фундаментальной области. Для этого был модифицирован метод Джильберта, который он применял для вычисления фрактальной размерности границ фундаментальных областей канонических систем счисления. Кроме того, данный метод можно применять для вычисления размерности границ фундаментальных областей произвольных систем счисления.

Литература

1. Mandelbrot, B.B. How long is the coast of Britain / B.B. Mandelbrot // Science. – 1967. – V. 155. – P. 636-638.
2. Mandelbrot, B.B. A fast fractional Gaussian noise generator / B.B. Mandelbrot // Water Resour. Res. – 1971. – V. 7. – P. 543-553.
3. Mandelbrot, B.B. Fractals: Form, Chance, and Dimension / B.B. Mandelbrot. – San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1977. – 365 p.
4. Mandelbrot, B.B. The Fractal Geometry of Nature / B.B. Mandelbrot. – New York: W. H. Freeman and Company, 1982. – 468 p.
5. Feder, J.E. Fractals / E.J. Feder. – New York: Plenum Press, 1988. – 283 p.
6. Crownover, R.M. Introduction to fractals and chaos / R.M. Crownover. – Boston; London: Jones and Bartlett, 1995. – 306 p.
7. Schroeder, M.R. Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise / M.R. Schroeder. – New York: W.H. Freeman, 1990. – 429 p.
8. **Сойфер, В.А.** Анализ и распознавание наномасштабных изображений: Традиционные подходы и новые постановки задач / В.А. Сойфер, А.В. Куприянов // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 2. – С. 136-144. – ISSN 0134-2452.
9. Gilbert, W.J. The Fractal Dimension of Sets derived from Complex Bases / W.J. Gilbert // Can. Math. Bull. – 1986. – V. 29. – P. 495-500.
10. Gilbert, W. J. Complex bases and fractal similarity / W.J. Gilbert // Ann. sc. math. Quebec. – 1987. – V. 11(1). – P. 65-77.
11. Thuswaldner, J.M. Fractal dimension of sets induced by bases of imaginary quadratic fields / J.M. Thuswaldner // Math. Slovaca. – 1998. – V. 48. – P. 365-371.
12. Thuswaldner, J.M. Fractal Properties of Number Systems / J.M. Thuswaldner, W. Müller, R. F. Tichy // Period. Math. Hungar. – 2001. – V. 42. – P. 51-68.
13. Богданов П.С. О сходимости некоторых алгоритмов бинарной и тернарной машинной арифметики для вычислений в мнимых квадратичных полях // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, № 2. – С. 249-254.