СТЕНДОВАЯ СЕКЦИЯ

Подсекция 1: Математическое моделирование

МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ДВИЖЕНИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В АТМОСФЕРЕ

Ю.М. Заболотнов, А.А. Лобанков

Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королёва
(национально исследовательский университет)

В работе рассматривается метод расчета приближенно оптимального регулятора для стабилизации движения относительно центра масс космического аппарата в атмосфере. Предполагается, что движение космический аппарат по форме близок к телу вращения. Метод основывается на совместном применении принципа динамического программирования Беллмана и метода усреднения. Синтез регулятора в данной работе проводится для малых углов атаки, то есть невозмущенная система представляет собой линейную систему с гироскопическими членами. После преобразования системы к нормальным координатам синтез управления осуществляется по квадратичному критерию оптимальности на асимптотически большом интервале времени. Обратное преобразование координат позволяет записать уравнение регулятора в исходных переменных и, тем самым, решить поставленную задачу.

Движение космического аппарата (КА) вокруг центра масс в атмосфере описывается классическими динамическими и кинематическими уравнениями Эйлера относительно траекторной системы координат $CX_\nu Y_\nu Z_\nu$ (рис.1). Имея в виду синтез управления, стабилизирующего движение твердого тела относительно статически устойчивого положения равновесия, определим углы Эйлера относительно системы координат $CX_\nu Y_\nu Z_\nu$ так, как это показано на рис.1, где ψ, α и φ - углы прецессии, угла атаки и собственного вращения; $CXYZ$ - связанная с КА система координат.

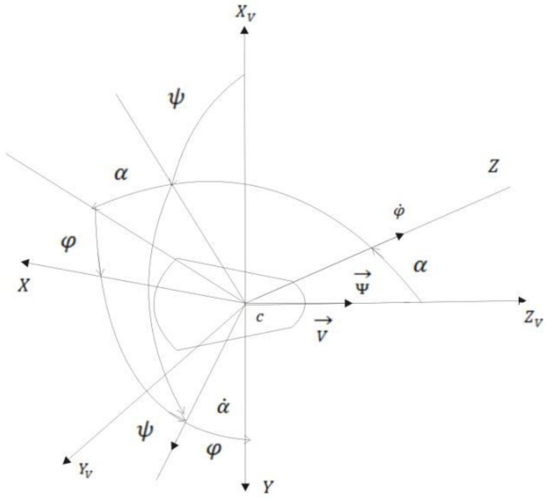

Рисунок 1 – Системы координат

Математическая модель движения центра масс космического аппарата в атмосфере запишем в виде [1]

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{C_{xv} q S}{m} - g \sin\theta, \tag{1}$$

$$V \frac{d\theta}{dt} = -\cos\theta \left(g - \frac{V^2}{R_3 + H} \right), \tag{2}$$

$$\frac{dH}{dt} = V \sin\theta, \tag{3}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{R_3 V \cos\theta}{R_3 + H}, \tag{4}$$

где V - скорость, θ - угол наклона траектории, L - продольная дальность полета, H - высота, R_3 - средний радиус Земли, m - масса КА, $g = g_0 \left(\frac{R_3}{R_3 + H} \right)^2$ - гравитационное ускорение, g_0 - гравитационное ускорение на поверхности Земли, C_{xv} - коэффициент лобового сопротивления КА, $q = \rho V^2 / 2$ - скоростной напор, $\rho = \rho_0 e^{-\lambda H}$ - плотность атмосферы, ρ_0 - плотность на поверхности Земли, $\lambda = 1/7000\,м^{-1}$.

При рассмотрении движения КА в окрестности статически устойчивого положения равновесия (то есть при малых углах атаки) эти уравнения удобно записать в комплексной форме. Тогда, используя результаты работы [2], получим

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - i \bar{J}_z \omega_z \frac{d\xi}{dt} + \omega^2(r)\xi = \varepsilon F\left(r, \xi, \frac{d\xi}{dt}, \omega_z, \Phi \right), \tag{5}$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \varepsilon f\left(r, \xi, \omega_z, \Phi \right), \tag{6}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega_z + \varepsilon R\left(\xi, \frac{d\xi}{dt} \right), \tag{7}$$

где $\xi = \alpha e^{i\psi}$, $i^2 = -1$, r - вектор медленно изменяющихся переменных, $\omega^2(r) = \Delta z R_a(r) / J$, $J = \left(J_x + J_y \right)/2$; $\Delta z > 0$ - координата, определяющая положение центра масс тела относительно неподвижной точки; J_x, J_y, J_z - осевые моменты инерции КА; $\bar{J}_z = J_z / J$; $\Phi = \varphi + \psi$; $\varepsilon F\left(r, \xi, \frac{d\xi}{dt}, \omega_z, \Phi\right)$, $\varepsilon f\left(r, \xi, \omega_z, \Phi\right)$, $\varepsilon R\left(\xi, \frac{d\xi}{dt}\right)$ - известные функции, характеризующие действие малых возмущений [2], $R_a(r)$ - сила лобового сопротивления. Для упрощения асимптотического анализа все возмущающие функции масштабируются одним малым параметром ε.

Невозмущенное движение КА описывается следующими уравнениями

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - i\bar{J}_z\omega_z\frac{d\xi}{dt} + \omega^2(r)\xi = 0, \tag{8}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega_z, \quad \omega_z = const, \quad r = const. \tag{9}$$

Решение невозмущенного уравнения (8) можно записать в виде

$$\xi = a_1 e^{i\psi_1} + a_2 e^{i\psi_2}, \tag{10}$$

где a_1 и a_2 - амплитуды колебаний (вещественные величины), $\psi_1 = \omega_1 t + \psi_1(0)$ и $\psi_2 = \omega_2 t + \psi_2(0)$ - фазы; $\psi_1(0), \psi_2(0)$ - начальные значения фаз; $\omega_{1,2} = \bar{J}_z\omega_z / 2 \pm \omega_\theta$ - частоты колебаний; $\omega_\theta = \sqrt{\bar{J}_z^2\omega_z^2 / 4 + \omega^2}$.

Резонансные случаи движения твердого тела, когда угловая скорость $\omega_z \approx \omega_{1,2}$ в данной работе не рассматриваются, так как требуют особого анализа.

С учетом вышесказанного ставится задача определения управления εu, обеспечивающего динамическую устойчивость движения КА исходя из минимума квадратичного критерия оптимальности [3]

$$I = \varepsilon\int_0^T W\left(a_1, a_2, u_\alpha, u_\beta\right)dt, \tag{11}$$

где $W\left(a_1, a_2, u_\alpha, u_\beta\right) = b_1 a_1^2 + b_2 a_2^2 + c\left(u_\alpha^2 + u_\beta^2\right)$, $b_1, b_2, c > 0$ - весовые коэффициенты. Причем амплитуды колебаний определяются в силу возмущенной системы и должны удовлетворять условиям динамической устойчивости $\frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt} < 0$ в каждый момент времени.

После перехода к переменным «амплитуды-фазы» и определения оптимального управления приходим к уравнению в частных производных Гамильтона – Якоби – Беллмана [4]

$$\varepsilon\frac{\partial V}{\partial a}\cdot X\left(a, \phi, r\right) + \varepsilon\frac{\partial V}{\partial \phi}\cdot Y\left(a, \phi, r\right) + \frac{\partial V}{\partial \phi}\cdot\omega(r) + \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt} + \varepsilon\sum_{k=1}^{2} b_k a_k^2 + U = 0, \tag{12}$$

Здесь $\frac{dr}{dt} = O(\varepsilon)$, $U = -\varepsilon c\left[\left(u_\alpha^o\right)^2 + \left(u_\beta^o\right)^2\right]$.

Для определения приближенного решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана используется метод усреднения. После усреднения получаем

$$\varepsilon \frac{\partial V_0}{\partial a} \cdot \left\langle X\left(a,\phi,r\right)\right\rangle + \varepsilon \sum_{k=1}^{2} b_k a_k^2 + \left\langle U \right\rangle + O\left(\varepsilon^2\right) + ... = 0, \quad (13)$$

где $\left\langle \cdot \right\rangle$ - стандартный оператор усреднения по фазам,

$$\left\langle U \right\rangle = -\frac{\varepsilon}{16 c \omega_\theta^2} \left[\left(\frac{\partial V_0}{\partial a_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_0}{\partial a_2} \right)^2 \right].$$

Усреднение функций $X\left(a,\phi,r\right)$, входящих в уравнение первого приближения (13) при наличии линейных возмущающих функций $\varepsilon F\left(r,\xi,\frac{d\xi}{dt}\right) = \varepsilon\left(i\mu_z\omega_z\xi + \mu\frac{d\xi}{dt}\right)$, дает

$$\left\langle X\left(a,\phi,r\right)\right\rangle = \frac{1}{2\omega_\theta}\begin{pmatrix} \nu_1 a_1 \\ \nu_2 a_2 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $\nu_1 = \mu_z\omega_z + \mu\omega_1$, $\nu_2 = -\mu_z\omega_z - \mu\omega_2$, μ_z и μ - параметры, характеризующие действующие возмущения.

Решение уравнения (13) в этом случае нетрудно найти, используя метод неопределенных коэффициентов. Тогда, определяя решение в виде $V_0 = \sum_{k=1}^{2} B_k a_k^2$, подставляя его в (13) и приравнивая к нулю коэффициенты при a_1^2 и a_2^2, получим

$$B_k = 2\omega_\theta\left[c\nu_k + \sqrt{c^2\nu_k^2 + cb_k} \right], \qquad k = 1,2. \quad (15)$$

Тогда функции оптимального управления примут вид

$$u_\alpha^o = \frac{1}{4c\omega_\theta}\sum_{k=1}^{2}\left(-1\right)^k\left(\frac{\partial V_0}{\partial a_k}\cos\psi_k - \frac{\varepsilon}{a_k}\frac{\partial V_1}{\partial \psi_k}\sin\psi_k\right), \quad (16)$$

$$u_\beta^o = \frac{1}{4c\omega_\theta}\sum_{k=1}^{2}\left(-1\right)^{k+1}\left(\frac{\partial V_0}{\partial a_k}\sin\psi_k + \frac{\varepsilon}{a_k}\frac{\partial V_1}{\partial \psi_k}\cos\psi_k\right). \quad (17)$$

После подстановки оптимального управления (16-17) в уравнения для амплитуд и усреднения по фазам, получим в первом приближении метода усреднения

$$\frac{da_{1,2}}{dt} = -\frac{\varepsilon a_{1,2}}{2\omega_\theta}\sqrt{\nu_{1,2}^2 + b_{1,2}/c}\,. \quad (18)$$

Условие $da_{1,2}/dt < 0$, которое следует из выражения (18), обеспечивает динамическую устойчивость движения КА в атмосфере.

В качестве примера расчета оптимального регулятора рассматривается случай демпфирования колебаний КА при следующих исходных данных:

$m = 12 кг$, $L = 0.4 м$, $S = \pi L^2/4$, $\omega = \sqrt{\frac{C_{xv}\Delta SqL}{J}}$, $C_{xv} = 1$, $\Delta = 0.02$, $J = \frac{1}{10}mL^2$, $\bar{J}_z = 0.5, V_0 = 7.7 км/с$, $H_0 = 110 км$, $\theta_0 = -1.5 град$, где V_0, H_0, θ_0 - начальные условия движения КА при входе в атмосферу.

На рис.2 показан процесс демпфирования колебаний относительно центра масс КА с помощью определенного приближенно оптимального регулятора, рассчитанный по исходной нелинейной модели движения.

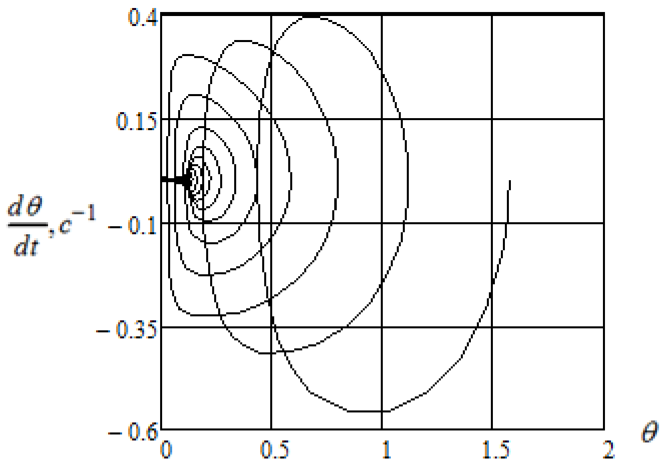

Рисунок 2 – Процесс демпфирования колебаний

Литература

1. Ярошевский В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. Москва. Машиностроение. 1978. 168 с.
2. Заболотнов Ю. М., Любимов В.В. Вторичные резонансные эффекты при вращении твердого тела вокруг неподвижной точки // Механика твердого тела. 2002. № 1. С. 49-59.
3. Летов А.М. Динамика полета и управление. Москва. Наука. 1969. 360 с.
4. Беллман Р. Динамическое программирование. Москва. ИЛ. 1960.