ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРОГО ДИСКРЕТНОГО-ВЕЙВЛЕТ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА БАЗЕ СПЛАЙНОВЫХ ВЕЙВЛЕТОВ ДЛЯ ОСЛАБЛЕНИЯ КОРРЕЛИРОВАННОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДАННЫХ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

И.А. Блатов, Ю.А. Герасимова, И.В. Карташевский

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики

Поставлена задача ослабления коррелированности последовательности сильнокоррелированных случайных величин в рамках теории массового обслуживания. Рассмотрен метод быстрого дискретного вейвлет-преобразования в пространстве сплайновых вейвлетов на конечном отрезке. Описан алгоритм применения сплайновых вейвлетов к ослабления коррелированности последовательности сильнокоррелированных случайных величин. Изучены свойства матриц, полученных в результате применения алгоритма преобразования. Приведены результаты численных экспериментальных исследований.

Введение. Сильная коррелированность последовательностей случайных величин может создавать значительные трудности в решении задач теории массового обслуживания. Пусть имеется некоторый вектор $X = (x_0, \dots, x_n)^T$ с известной корреляционной матрицей A. Требуется провести анализ трафика, характеризуемого вектором X, с учётом его корреляционных свойств.

Известно, что трафик, как случайный процесс, обладает самоподобными свойствами, косвенным признаком которых является наличие «тяжелых хвостов», т.е. большой избыточности соответствующих интегральных функций распределения. Поэтому в такой ситуации часто используется прием, заключающийся в предварительном выполнении некоторого ортогонального преобразования, определяемого матрицей $T = (t_{ij})$, целью которого является устранение или снижение корреляции исходных данных. Использование современных методов анализа из теории массового обслуживания относительно вектора $\tilde{X} = TX$, а не вектора X, оказывается гораздо более эффективным.

Устранить коррелированность и получить наилучший результат можно путем использования преобразования Карунена-Лоэва. В этом случае матрица T состоит из собственных векторов матрицы A, и полученная корреляционная матрица будет иметь диагональный вид. Однако у этого метода есть ряд недостатков: отсутствие быстрых алгоритмов вычисления; зависимость от структуры матрицы A; высокая ресурсоемкость задачи построения такого базиса. Поэтому актуальна задача построения более доступных базисов, в которых коррелированность можно если не устранить, то существенно ослабить. В настоящем докладе для этой цели используются сплайновые вейвлеты.

Построение систем полуортогональных сплайновых вейвлетов. Пусть $[a, b]$ – произвольный отрезок, $m \geq 1$ – натуральное число, n_0 – такое целое число, что $2^{n_0} < 2m + 1 < 2^{n_0+1}$ и k – такое целое число, что $2^k > 2m - 1$. Рассмотрим семейство $\Delta = \{\Delta_n, n = n_0, n_0 + 1, \dots\}$ разбиений отрезка $[a, b]$ с шагом $h = h_n = (b - a)/2^n$. Обозначим через $S(\Delta_n, m, k)$ совокупность сплайнов степени m дефекта k, определенных на сетке Δ_n. На каждом разбиении рассмотрим пространство сплайнов $L_n = S(\Delta_n, m - 1,1)$. Тогда для каждого $k \geq n_0$ пространство $S(\Delta_n, m - 1,1)$ можно представить в виде прямой суммы $L_k = L_{n_0} \oplus W_{n_0+1} \oplus W_{n_0+2} \oplus \dots \oplus W_k$, где через W_k обозначено ортогональное дополнение пространства L_{k-1} до пространства L_k. Вейвлет-базис получается как объединение базиса в L_{n_0} и всех базисов в пространствах $W_n, n_0 \leq n \leq k$.

Для $i \geq 0$, такого, что отрезок $[x_i^{n-1}, x_{i+2m-1}^{n-1}]$ целиком содержится в $[a, b]$, функцию $\psi_{i,n}(x) \in W_n$ будем искать по формуле

$$\psi_{i,n}(x) = \sum_{j=2i}^{2i+3m-2} \alpha_j \phi_{j,n-1},$$

где $\phi_{k,n-1}$ – нормированный B-сплайн. Коэффициенты α_j находятся из условия

$$(\psi_{i,n}(x), \phi_{k,n-1}) = 0, k = i - m + 1, i - m + 2, \dots, i + 2m - 2$$

Совокупность построенных вейвлет-функций получается сдвигом одной единственной функции $\psi_{0,n}$ по формуле $\psi_{i,n}(x) = \psi_{0,n}(2^{n-n_0}x - i(b-a)/2^{n_0-1})$.

Быстрое дискретное вейвлет-преобразование в пространстве сплайновых вейвлетов на конечном отрезке. Задача прямого преобразования заключается в поиске набора коэффициентов

$$\{d_{0j}, -m + 1 \le j \le 2^{n_0} - 1\} \bigcup \bigcup_{i=1}^{k-n_0} \{c_{ij}, -m + 1 \le j \le 2^{n_0+i-1} - m\}$$

по заданной функции $f = \{f_{ij}\}, 0 \le i \le 2^k - 1, 1 \le j \le s$.

Задача обратного вейвлет-преобразования заключается в восстановлении всех значений $f_{ij}, 0 \le i \le 2^k - 1, 1 \le j \le s$ функции $\{f_{ij}\} \in \tilde{S}(\Delta_k, m - 1, 1)$ по заданному набору коэффициентов, если

$$f = \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0-1}} d_{0j}\phi_{j,n_0} + \sum_{i=1}^{k-n_0} \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+i-1}-m} c_{ij}\psi_{j,n_0+1}$$

Подробнее, построение систем полуортогональных сплайновых вейвлетов и алгоритм быстрого дискретного вейвлет-преобразования описаны в [1].

Применение сплайновых вейвлетов для ослабления коррелированности последовательности сильнокоррелированных случайных величин. Пусть A – корреляционная матрица, вычисленная для последовательности сильнокоррелированных случайных чисел, характеризующих трафик. Тогда

$$T^{-1}AT = \tilde{A}, \tag{1}$$

где T^{-1}, T – соответственно прямое и обратное быстрое дискретное вейвлет-преобразование в пространстве сплайновых вейвлетов.

Элементы полученной матрицы $\tilde{A}$ будут близки нулю, что свидетельствует о наличие слабой коррелированности. Это объясняется тем, что носители базисных функций (замыкание множеств, на которых функции отличны от нуля) разнесены в пространстве (или во времени).

Реализация численного эксперимента. Был проведен эксперимент по ослаблению коррелированности данных*, представляющих собой последовательность Y из $n = 9999$ случайных величин, каждая из которых – время обработки пакета трафика в системе.

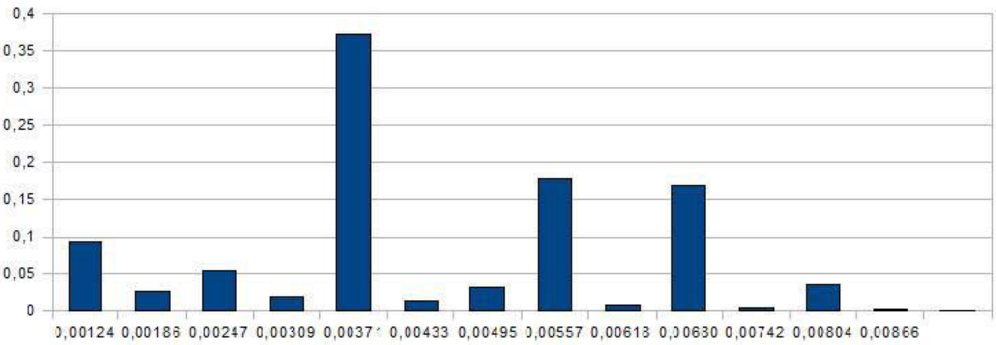

Рисунок 1 - Гистограмма вариационного ряда экспериментальных данных

На основе экспериментальных данных были вычислены коэффициенты корреляции и получена корреляционная матрица (подробнее см. [3]).

* Постановка задачи о декорреляции и данные для эксперимента были предоставлены к.т.н., доцентом кафедры Теории передачи сигналов ПГУТИ И.В. Карташевским.

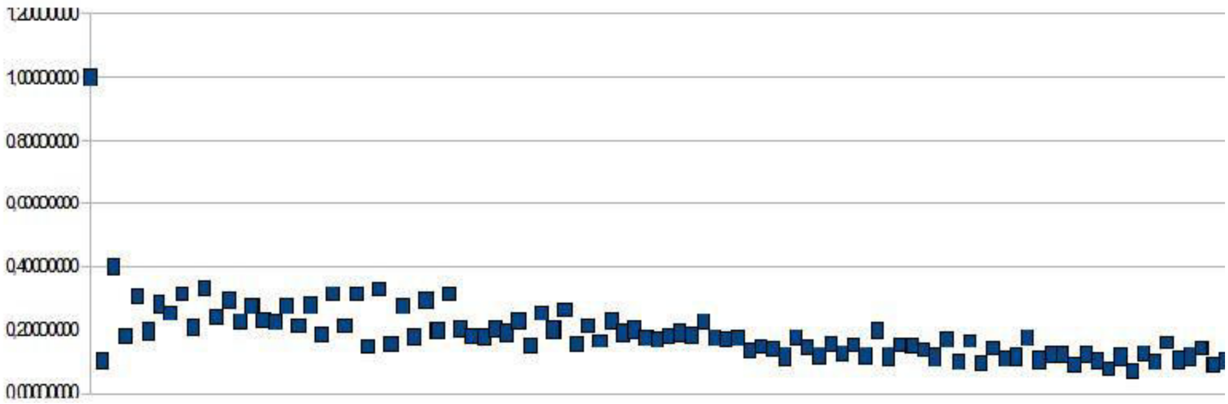

Рисунок 2 - Коэффициенты корреляции, вычисленные для экспериментальных данных

Рассмотрим случай для линейного сплайна. С помощью формулы (1), была получена матрица $\tilde{A}$.

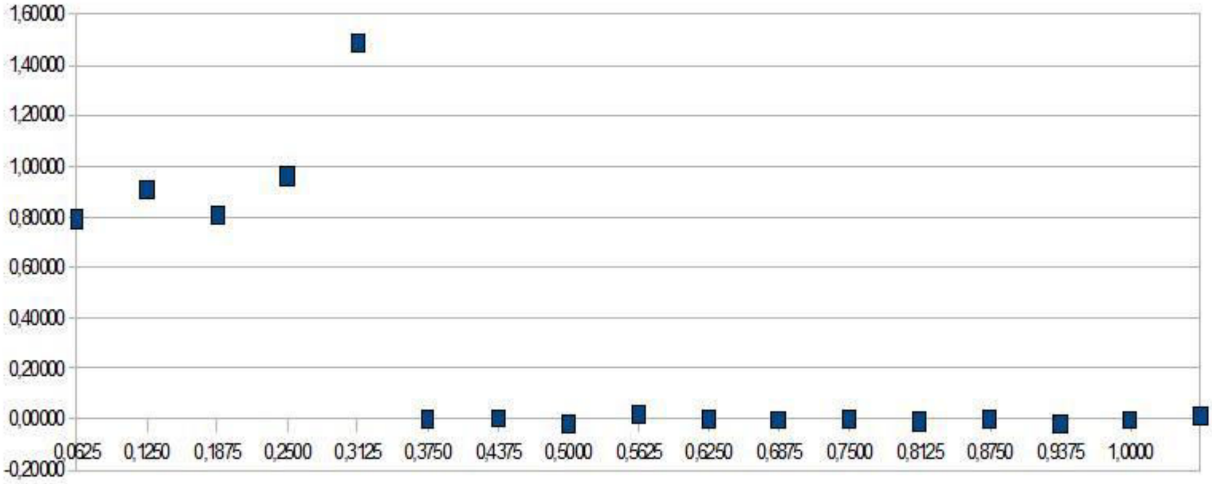

Рисунок 5 - Разброс средних значений элементов матрицы $\tilde{\boldsymbol{A}}$ для линейного сплайна

Как видно из рис. 5, бóльшая часть вариации данных сосредоточена в первых элементах, что позволяет, при необходимости, перейти к пространству меньшей размерности.

Аналогичный результат был получен для квадратичного и кубического сплайнов.

Заключение. В качестве резюме можно утверждать, что применение быстрого дискретного алгоритма вейвлет-преобразования в пространстве сплайновых вейвлетов позволяет ослабить коррелированность последовательности сильнокоррелированных случайных величин, что подтверждают данные, полученные в ходе численных экспериментов.

Литература

1. Блатов И.А. Полуортогональные сплайновые вейвлеты и метод Галеркина численного моделирования тонкопроволочных антенн / И.А. Блатов, Н.В. Рогова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – Самара, том 53, №5 : 2013. – 727-736 с.

2. Карташевский И.В. Использование уравнения Линдли для решения задач обработки коррелированного трафика // Журнал «Электросвязь». - №12 : 2014. – 41-42 с.

3. Карташевский И.В. Расчет коэффициентов корреляции временных интервалов в последовательности событий // Журнал «Электросвязь». - №10 : 2012. – 37-39 с.

4. Умняшкин С.В. Анализ эффективности использования ортогональных преобразований для цифрового кодирования коррелированных данных/ С.В. Умняшкин, М.Е. Кочетков // Известия вузов. Электроника. - №6 : 1998. -79-84 с.