О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭМДЕНА-ФАУЛЕРА

В.В. Рогачев

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

В данной работе изучаются свойства решений уравнений типа Эмдена–Фаулера с регулярной и сингулярной нелинейностью. Доказаны результаты о наличии у данного уравнения решений с заданным числом нулей на заданном множестве.

Рассматривается уравнения типа Эмдена – Фаулера

$$y^{(n)} = p_0 \,|\, y\,|^k \operatorname{sgn} y, \quad n \geq 3,\, k \in (0,1) \cup (1,\infty), \quad p_0 \neq 0, \tag{1}$$

и

$$y''' = p(x, y, y', y'')\,|\, y\,|^k \operatorname{sgn} y, \quad k \in (0,1) \cup (1,\infty). \tag{2}$$

Функция $p(x, y, y', y'')$ непрерывна, удовлетворяет условию Липшица по последним трём аргументам.

Исследуется существование решений с заданным числом нулей на заданной области определения. При доказательстве использованы теоремы из [1], частные случаи теорем 1 – 4 при $n = 3$ опубликованы в [3], доказательства теорем 2 – 5 при $n = 3$ и теоремы 1 при $n = 4$ опубликованы в [2].

Получены нижеследующие результаты.

Теорема 1. *Для любого целого* $m \geq 2$, *чётного* $n > 2$ *и действительных* $k > 1$, $p_0 < 0$, $-\infty < a < b < +\infty$, *у уравнения (1) существует решение, определённое на отрезке* $[a,b]$, *равное нулю в точках* a, b *и имеющее на этом отрезке ровно* m *нулей.*

Теорема 2. *Для любого целого* $m \geq 2$, *нечётного* $n > 2$ *и действительных* $k > 1$, $p_0 \neq 0$, $-\infty < a < b < +\infty$, *у уравнения (1) существует решение, определённое на отрезке* $[a,b]$, *равное нулю в точках* a, b *и имеющее на этом отрезке ровно* m *нулей.*

Теорема 3. *Для любого целого* $n > 2$ *и действительных* $k > 1$, $p_0 < 0$, $a < b < +\infty$, *у уравнения (1) существует решение, определённое на полуинтервале* $[a,b)$, *равное нулю в точке* a, *и имеющее на этом полуинтервале счётное число нулей.*

Теорема 4. *Для любого нечётного* $n > 2$ *и действительных* $k > 1$, $p_0 > 0$, $-\infty < a < b$,
у уравнения (1) существует решение, определённое на полуинтервале $(a,b]$, *равное нулю в точке* b *и имеющее на этом полуинтервале счётное число нулей.*

Теорема 5. *При* $n = 3$ *для любых* $0 < k < 1$, $p_0 \neq 0$, $a < b$, *и целого* $m \geq 2$, *уравнение (1) имеет решение, определенное на отрезке* $[a,b]$, *равное нулю в точках* a, b *и имеющее на этом отрезке ровно* m *нулей, а также решение, имеющее на этом отрезке счетное число нулей, и ненулевое решение, имеющее на этом отрезке континуум нулей.*

Теорема 6. *Пусть* $0 < M_1 \leq p(x, y_0, y_1, y_2) \leq M_2 < \infty$. *Тогда для любых* $k > 1$, $-\infty < a < b < +\infty$, *и целого* $m \geq 2$, *уравнение (2) имеет решение, определенное на отрезке* $[a,b]$, *равное нулю в точках* a, b *и имеющее на этом отрезке ровно* m *нулей. Существует также решение, определённое на полуинтервале* $(a,b]$, *равное нулю в точке* b *и имеющее на этом полуинтервале счётное число нулей.*

Литература

1. Astashova I.V. On special solutions to Emden – Fowler type differential equations. // Abstracts of Czech-Georgian Workshop on Boundary Value Problems. - (WBVP) January, 20 - 24, 2014, Brno, Czech Republic.

2. Асташова И.В., Рогачев В.В. О числе нулей осциллирующих решений уравнений третьего и четвертого порядков со степенной нелинейностью. // Нелінійні коливання. 2014.Т. 17(1). С. 16–31.
3. Асташова И.В., Рогачев В.В. О существовании решений с заданным числом нулей для уравнений типа Эмдена-Фаулера третьего и четвертого порядков // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49(11). С.1509–1510.