ОЦЕНКИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КВАЗИПРОИЗВОДНОЙ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Д.А. Безухов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

В работе изучаются дифференциальное уравнение с квазипроизводной с неотрицательной степенной нелинейностью. Рассматриваются правильные решения, то есть те, которые определены в окрестности плюс бесконечности. Для правильных решений уравнения с квазипроизводной получены верхние степенные оценки, для правильных решений уравнения с производной получены верхние и нижние оценки.

В работе рассматриваются следующие уравнения:

$$r_n(x)\frac{d}{dx}\left(r_{n-1}(x)\frac{d}{dx}\left(\dots\frac{d}{dx}(r_0(x)y)\dots\right)\right)=(-1)^n p(x)|y|^k, \tag{1}$$

и

$$y^{(n)}=(-1)^n p(x)|y|^k, \tag{2}$$

где $n>1$, $k>1$, функция $p(x)$ непрерывна и удовлетворяет условиям $m_* x^\sigma \le\ p(x)\le m^* x^\sigma$, $\sigma\ge 0$, $0<m_*<m^*<+\infty$, а функции $r_j(x)$ непрерывные и удовлетворяют условиям

$$0<m_j\le r_j(x)\le M_j<+\infty, j=0,\dots,n.$$

Введем следующие обозначения:

$y^{[j]}(x)=r_j(x)\frac{d}{dx}\left(r_{j-1}(x)\frac{d}{dx}\left(\dots\frac{d}{dx}(r_0(x)y)\dots\right)\right)$ – j-ая квазипроизводная функции $y(x)$, $\alpha=\frac{n}{k-1}$, $\beta=\frac{\sigma}{n-1}$.

Тогда уравнение (1) можно переписать в виде:

$$y^{[n]}=(-1)^n p(x)|y|^k.$$

Для уравнений (1) и (2) получены оценки положительных нетривиальных решений, для уравнения (1) – оценки их квазипроизводных, а для уравнения (2) – оценки производных решений.

В работах [2] и [3] рассматривалось уравнение типа Эмдена-Фаулера, то есть уравнение вида:

$$y^{(n)}=p(x)|y|^k \operatorname{sgn} y,$$

а в монографии [1] – уравнение типа Эмдена-Фаулера с младшими производными:

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=p(x)|y|^k \operatorname{sgn} y,$$

при этом в работе [3] изучен случай $\sigma=0$, в работе [2] предполагалось, что $\sigma<-k(n-1)-1$, а в работе [1] описан случай $\sigma\le 0$.

В работе [4] рассматривалось уравнение (2) в предположении, что $p(x)\equiv 1$.

Введем два определения.

Определение 1. Решение $y(x)$ уравнения (1) (или (2)) называется правильным, если оно определено в некоторой окрестности плюс бесконечности.

Определение 2. Решение $y(x)$ уравнения (1) называется кнезеровским, если для любого $j=0,\dots,n-1$ справедливо $(-1)^j y^{[j]}(x)\ge 0$. Решение уравнения (2) называется кнезеровским, если для любого $j=0,\dots,n-1$ справедливо $(-1)^j y^{(j)}(x)\ge 0$.

Приведем основные результаты для решений уравнения (1).

Теорема 1. *Если $y(x)$ – правильное решение уравнения (1), то оно кнезеровское, и это решение вместе со всеми своими квазипроизводными до $(n-1)$ –ого порядка включительно стремится к нулю при $x\to\ +\infty$.*

Из теоремы 1 следует:

Основная лемма. *Если* $y(x)$ *– правильное решение уравнения (1), то оно удовлетворяет интегральному соотношению*

$$y(x) = \frac{1}{r_0(x)} \int_x^{+\infty} \frac{p(\xi)|y(\xi)|^k}{r_n(\xi)} \varphi_1(x,\xi) d\xi,$$

где $\varphi_i(x,\xi) = \int_x^{+\infty} \frac{\varphi_{i+1}(\xi_i,\xi) d\xi_i}{r_i(\xi_i)}$, $i = 1, \dots, n-1$, *а* $\varphi_n(x,\xi) \equiv 1$.

С помощью основной леммы можно доказать следующий результат.

Теорема 2. *Существуют такие положительные константы* $C_0 = C_0(n,k,m_*\sigma, M_0, \dots, M_n)$, $C_j = C_j\big(n,k,m_*\sigma, m_0, \dots, m_j, M_0, \dots, M_n\big)$, $j = 1, \dots n-1$, *и* $C = C(n,k,m_*\sigma, m_0, M_0, \dots, M_n) > 0$, *что для любого положительного нетривиального решения уравнения (1) с максимальным интервалом существования* $(0,+\infty)$ *справедливо:*

$$(-1)^j y^{[j]}(x) \le C_j x^{-\alpha-\beta-j}, j = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$y(x) \le C x^{-\alpha-\beta}.$$

Приведем теперь результаты для решений уравнения (2).

Уравнение (2) получается из уравнения (1) подстановкой $r_j(x) \equiv 1$. Следовательно, из теоремы 1 следует, что если $y(x)$ – правильное решение уравнения (2), то оно кнезеровское, и вместе со всеми своими производными стремится к нулю при $x \to +\infty$. Из основной леммы следует, что правильное решение уравнения (2) удовлетворяет следующему интегральному соотношению

$$y(x) = \int_x^{+\infty} \frac{(\xi - x)^{n-1}}{(n-1)!} p(\xi)|y(\xi)|^k d\xi.$$

Теорема 3. *Существуют такие положительные константы* $C_{1j} = C_{1j}(n,k,m_*,m^*,\sigma)$, $C_{2j} = C_{2j}(n,k,m_*,m^*,\sigma)$, *что для любого положительного нетривиального решения уравнения (2) с максимальным интервалом существования* $(0,+\infty)$ *справедливо:*

$$C_{1j} x^{-\alpha-\beta-j} \le (-1)^j y^{(j)} \le C_{2j} x^{-\alpha-\beta-j}, j = 0, \dots, n-1.$$

Литература

1. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание под ред. И.В. Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22-288.

2. Квиникадзе Г.Г. О сингулярных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В сб.: Доклады семинара ИПМ имени И.Н. Векуа, Тбилиси, ТГУ. 1983, т.17, стр. 36-49.

3. Кондратьев В.А., Самовол В.С. О некоторых асимптотических свойствах решений уравнения типа Эмдена-Фаулера. Дифференциальные уравнения, 1981, т.17, №4, стр. 749-750.

4. Kozlov V.A. On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations. Ark. Mat., 1999, v.37, №2, p. 305-322.