# КЛАССИФИКАЦИЯ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА-ФАУЛЕРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

К.М. Дулина, Т.А. Корчемкина

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Рассматривается уравнение типа Эмдена–Фаулера второго порядка

$$y'' - p(x, y, y')|y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad 0 < k < 1, \tag{1}$$

где функция $p(x, y_0, y_1)$ положительна, непрерывна по совокупности переменных, липшицева по последним двум аргументам и удовлетворяет неравенствам

$$0 < m \le p(x, y_0, y_1) \le M < +\infty.$$

Получена асимптотическая классификация всех максимально продолженных единственным образом решений рассматриваемого уравнения.

Асимптотическая классификация решений сингулярного уравнения $(0 < k < 1)$ вида (1) приведена в [1], [2] для третьего и четвертого порядков соответственно. В случае сингулярной нелинейности решения уравнения (1) могут иметь особое поведение не только вблизи границ, но и во внутренней точке области определения. Поэтому мы будем рассматривать так называемые максимально продолженные единственным образом решения, введенные Асташовой И.В. [1].

**Определение 1.** Решение $y: (a, b) \to \mathbb{R}$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, называется *максимально продолженным единственным образом решением* уравнения (1), если:

1) уравнение не имеет других решений, равных $y$ на некотором подынтервале интервала $(a, b)$ и не равных $y$ в некоторой точке из $(a, b)$;

2) уравнение либо не имеет решений, определенных на другом интервале, содержащем $(a, b)$, и равных $y$ на $(a, b)$, либо имеет по крайней мере два таких решения, не равных друг другу в точках, сколь угодно близких к границе интервала $(a, b)$.

Заметим, что в случае $0 < k < 1$ условия классической теоремы существования и единственности решения задачи Коши не выполняются. Тем не менее, справедливо следующее утверждение:

**Теорема 1.** [2, с. 201] *Пусть функция $p(x, y_0, \dots, y_{n-1})$ непрерывна по $x$ и липшицева по $y_0, \dots, y_{n-1}$. Тогда для любого набора чисел $x_0, y_0^0, \dots, y_{n-1}^0$, у которого не все $y_i^0$ равны нулю, соответствующая задача Коши имеет единственное решение.*

**Определение 2.** Пусть $y(x)$— максимально продолженное единственным образом решение уравнения (1), $a$ — граничная точка его области определения. Решение $y(x)$называется *влипающим в нуль* в точке $a$, если:

$$\lim_{x \to a} y(x) = \lim_{x \to a} y'(x) = 0.$$

Введем обозначения:

$$\alpha = \frac{2}{k-1}, \qquad C(\tilde{p}) = \left(\frac{\tilde{p}(1-k)^2}{2(k+1)}\right)^{\frac{1}{1-k}}.$$

**Теорема 2.** *Пусть функция $p(x, y_0, y_1)$ непрерывна по совокупности переменных, липшицева по последним двум аргументам, удовлетворяет неравенствам:*

$$0 < m \le p(x, y_0, y_1) \le M < +\infty,$$

*и существуют следующие пределы функции $p(x, y_0, y_1)$:*

*1) $P_{++}$ при $x \to +\infty$, $y_0 \to +\infty$, $y_1 \to +\infty$;*

*2) $P_{+-}$ при $x \to +\infty$, $y_0 \to -\infty$, $y_1 \to -\infty$;*

*3) $P_{-+}$ при $x \to -\infty$, $y_0 \to +\infty$, $y_1 \to -\infty$;*

*4) $P_{--}$ при $x \to -\infty$, $y_0 \to -\infty$, $y_1 \to +\infty$;*

*а также, при любом $c \in \mathbb{R}$,* *5) $P_c$ при $x \to c,\ y_0 \to 0,\ \ y_1 \to 0.$*

*Тогда все максимально продолженные единственным образом решения уравнения (1) в соответствии со своим асимптотическим поведением делятся на следующие восемь типов.*

*1. Заданные на полупрямой $(b, +\infty)$ положительные влипающие в нуль в точке $b$ решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:*

$$y_1(x) = C(P_b)(x-b)^{-\alpha}\big(1+o(1)\big), \quad x \to b+0,$$
$$y_1(x) = C(P_{++})x^{-\alpha}\big(1+o(1)\big), \quad x \to +\infty,$$

*2. Заданные на полупрямой $(b, +\infty)$ отрицательные влипающие в нуль в точке $b$ решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:*

$$y_2(x) = -C(P_b)(x-b)^{-\alpha}\big(1+o(1)\big), \quad x \to b+0,$$
$$y_2(x) = -C(P_{+-})x^{-\alpha}\big(1+o(1)\big), \quad x \to +\infty.$$

*3. Заданные на полупрямой $(-\infty, a)$ положительные влипающие в нуль в точке $a$ решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:*

$$y_3(x) = C(P_a)(a-x)^{-\alpha}\big(1+o(1)\big), \quad x \to a-0,$$
$$y_3(x) = C(P_{-+})\,|x|^{-\alpha}\big(1+o(1)\big), \quad x \to -\infty,$$

*4. Заданные на полупрямой $(-\infty, a)$ отрицательные влипающие в нуль в точке $a$ при убывании аргумента решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:*

$$y_4(x) = -C(P_a)(a-x)^{-\alpha}\big(1+o(1)\big), \quad x \to a-0,$$
$$y_4(x) = -C(P_{--})\,|x|^{-\alpha}\big(1+o(1)\big), \quad x \to -\infty.$$

*5. Заданные на всей числовой прямой положительные решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:*

$$y_5(x) = C(P_{++})x^{-\alpha}\big(1+o(1)\big), \quad x \to +\infty,$$
$$y_5(x) = C(P_{-+})\,|x|^{-\alpha}\big(1+o(1)\big), \quad x \to -\infty,$$

*6. Заданные на всей числовой прямой отрицательные решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:*

$$y_6(x) = -C(P_{+-})x^{-\alpha}\big(1+o(1)\big), \quad x \to +\infty,$$
$$y_6(x) = -C(P_{--})\,|x|^{-\alpha}\big(1+o(1)\big), \quad x \to -\infty.$$

*7-8. Заданные на всей числовой прямой решения со степенной асимптотикой и разными знаками вблизи обеих границ области определения:*

$$y_7(x) = C(P_{++})x^{-\alpha}\big(1+o(1)\big), \quad x \to +\infty,$$
$$y_7(x) = -C(P_{--})\,|x|^{-\alpha}\big(1+o(1)\big), \quad x \to -\infty,$$

*и*

$$y_8(x) = -C(P_{+-})x^{-\alpha}\big(1+o(1)\big), \quad x \to +\infty,$$
$$y_8(x) = C(P_{-+})\,|x|^{-\alpha}\big(1+o(1)\big), \quad x \to -\infty.$$

**Литература**


1. Асташова И.В. Об асимптотическом поведении решений нелинейных дифференциальных уравнений с сингулярной нелинейностью // Дифференц. Уравнения – 2014. – Т. 50, № 11. – С. 847-848.

2. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Под ред. И.В. Асташовой, с. 22-288, 2012, М.: ЮНИТИ-ДАНА.