

# ПОЛЗУЧЕСТЬ МАТРИЧНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

В.С. Глущенко, Н.А. Архипова

Самарский государственный университет путей сообщения

В работе получен макроскопический (эффективный) закон ползучести многокомпонентного изотропного композиционного материала типа «матрица – абсолютно жёсткие шаровые включения»

Рассмотрим многокомпонентный композиционный материал, первый компонент которого является матрицей, а другие – отдельными, хаотически распределенными в матрице включениями различных материалов, имеющих шаровую форму.

Индексом  $m$  будем обозначать реологические характеристики материала матрицы, индексом  $s$  – материала включений,  $s = 1, 2, \dots, n$ .

Пусть локальные реологические соотношения материала матрицы композиционного материала имеют вид:

$$2\mu_m^0 e_{ij}(\mathbf{r}, t) = s_{ij}(\mathbf{r}, t) + \int_0^t K_m(t-\tau) s_{ij}(\mathbf{r}, \tau) d\tau \quad (1)$$

или:

$$e_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int_0^t J_m(t-\tau) ds_{ij}(\mathbf{r}, \tau) . \quad (2)$$

Пусть также локальные свойства материалов включений (наполнителей матричного композиционного материала) имеют вид:

$$e_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t)}{2\mu_s} . \quad (3)$$

Здесь и далее  $K_m(t)$ ,  $J_m(t)$  – ядро ползучести и функция ползучести (податливость) при чистом сдвиге материала матрицы;  $\mu_m^0$  – мгновенный модуль упругости сдвига материала матрицы;  $\mu_m$ ,  $\mu_s$  – сдвиговые модули упругости материала матрицы и включений соответственно;

$s_{ij}(\mathbf{r}, t) = \sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}(\mathbf{r}, t)$ ,  $e_{ij}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(\mathbf{r}, t)$  – девиаторные составляющие тензоров напряжений и деформации  $\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t)$ ;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $t$  – время;  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ .

Функция ползучести материала матрицы  $J_m(t)$  определяется по экспериментальным кривым ползучести, полученным из опытов на чистый сдвиг ( $\sigma_{12}(\mathbf{r}, t) = \sigma_{12}(\mathbf{r}, 0) = \sigma_{12}^0 = const$ ):

$$J_m(t) = \frac{\varepsilon_{12}(t)}{\sigma_{12}^0} . \quad (4)$$

Применим к (2), (3) преобразование Лапласа–Карсона. Тогда в пространстве изображений получим определяющие соотношения упругого деформирования компонентов композиционного материала:

$$\bar{s}_{ij}(\mathbf{r}, p) = 2\bar{\mu}_m(p) \bar{e}_{ij}(\mathbf{r}, p), \quad (5)$$

$$\bar{s}_{ij}(\mathbf{r}) = 2\bar{\mu}_s \bar{e}_{ij}(\mathbf{r}), \quad (6)$$

где чертой сверху обозначены трансформанты Лапласа,  $2\bar{\mu}_m(p) = \frac{1}{\bar{J}_m(p)}$ ,  $\bar{\mu}_s = \mu_s$ ,  $p$  — параметр преобразования.

Используя соотношения для определения эффективных модулей упругости матричного композиционного материала [1]:

$$\bar{\mu}^*(p) = \bar{\mu}_m(p) + \frac{\sum_{s=1}^n (\bar{\mu}_s - \bar{\mu}_m(p)) c_s \alpha_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s \alpha_s}, \quad (7)$$

$$\alpha_s = \frac{1}{1 + \frac{6}{5} \frac{\bar{K}_m + 2\bar{\mu}_m(p)}{3\bar{K}_m + 4\bar{\mu}_m(p)} \frac{(\bar{\mu}_s - \bar{\mu}_m(p))}{\bar{\mu}_m(p)}}, \quad (8)$$

получим в пространстве изображений эффективный закон деформирования композиционного материала:

$$\langle \bar{s}_{ij}(\mathbf{r}, p) \rangle = 2\bar{\mu}^*(p) \langle \bar{e}_{ij}(\mathbf{r}, p) \rangle. \quad (9)$$

Здесь  $c_m, c_s$  — объёмные концентрации компонентов композиционного материала, звёздочкой обозначены макроскопические (эффективные) величины, угловыми скобками — средние по объёму композиционного материала значения.

Применяя к этим соотношениям операцию обращения, найдём макроскопический закон ползучести:

$$\langle e_{ij}(t) \rangle = \int_0^t J^*(t-\tau) d(\langle s_{ij}(\tau) \rangle). \quad (10)$$

Здесь функция ползучести  $J^*(t)$  при чистом сдвиге:

$$\bar{J}^*(p) = \frac{1}{2\bar{\mu}^*(p)}. \quad (11)$$

В качестве ядра ползучести рассмотрим ядро Абеля:

$$K(t) = \lambda \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Здесь  $\Gamma(\dots)$  — гамма-функция,  $0 \leq \alpha < 1$ .

Подставляя это выражение в (1), получим

$$e_{12}(t) = \frac{s_{12}^0}{2\mu^0} \left( 1 + \lambda \frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \right).$$

Отсюда и из (4) следует:

$$J_m(t) = \frac{e_{12}(t)}{s_{12}^0} = \frac{1}{2\mu^0} \left( 1 + \lambda \frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \right). \quad (12)$$

Параметры в этом выражении можно определить методом наименьших квадратов при сравнении с экспериментальными данными.

В пространстве изображений функция ползучести (12) имеет вид:

$$\bar{J}_m(p) = \frac{1}{2\mu^0} \left( 1 + \lambda \frac{\Gamma(2-\alpha)}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)p^{1-\alpha}} \right) \quad (13)$$

Отсюда и (11) получим:

$$\bar{\mu}_m(p) = \frac{1}{2\bar{J}_m(p)} = \frac{1}{2 \left( \frac{1}{2\mu^0} \left( 1 + \lambda \frac{\Gamma(2-\alpha)}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)p^{1-\alpha}} \right) \right)}. \quad (14)$$

Для композиционного материала с абсолютно жёсткими включениями из (8), (9) следует:

$$\overline{\mu^*(p)} = \overline{\mu_m(p)} \left( 1 + \frac{5}{2} \frac{c}{1-c} \right), \quad c = \sum_{s=1}^n c_s. \quad (15)$$

Из (14) и (15) получим:

$$\overline{\mu^*(p)} = \frac{1}{2\overline{J_m(p)}} \left( 1 + \frac{5}{2} \frac{c}{1-c} \right), \quad (16)$$

или

$$\overline{J^*(p)} = \frac{1}{2\overline{\mu^*(p)}} = \frac{\overline{J_m(p)}}{\left( 1 + \frac{5}{2} \frac{c}{1-c} \right)}. \quad (17)$$

Тогда с учётом (13) после обращения эффективная функция ползучести имеет вид:

$$J^*(t) = \frac{1}{2\mu^0} \left( 1 + \lambda \frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \right) \left( 1 + \frac{5}{2} \frac{c}{1-c} \right)^{-1}. \quad (18)$$

Интегрируя по частям соотношение

$$\langle e_{12}(t) \rangle = \int_0^t J^*(t-\tau) d\langle s_{12}(t) \rangle, \quad (19)$$

запишем макроскопический закон ползучести рассматриваемого композиционного материала:

$$\langle e_{12}(t) \rangle = \frac{s_{12}^0}{2\mu^0} \left( 1 + \lambda \frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \right) \left( 1 + \frac{5}{2} \frac{c}{1-c} \right)^{-1}. \quad (20)$$

На рисунке 1 приведены кривые ползучести модельных композиционных материалов для различных концентраций абсолютно жёстких шаровых включений, построенных с помощью соотношений (20).

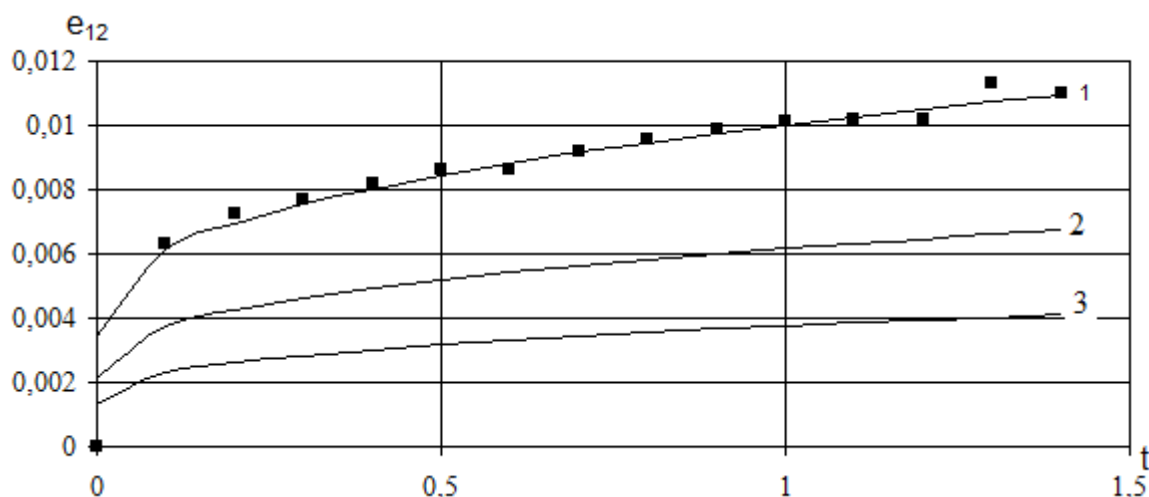


Рисунок 1. ■ – экспериментальные данные; 1 – кривая ползучести материала матрицы; 2 – кривая ползучести материала матрицы; 2 – кривая ползучести модельного композиционного материала с объёмной концентрацией абсолютно жёстких включений  $c = 0,2$ ; 3 – кривая ползучести модельного композиционного материала с объёмной концентрацией абсолютно жёстких включений  $c = 0,4$ .

Время  $t$  измеряется в условных единицах.

### Литература

1. Глушечков В.С. Макроскопические свойства деформирования нелинейных матричных многокомпонентных композиционных материалов, хаотически армированных эллипсоидальными включениями // В кн. Неоднородные материалы и конструкции. Избранные труды Всероссийской конференции по проблемам науки и технологий. М: РАН, 2013. С. 71–94.