ОЦЕНКИ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

М.Ю. Тельнова

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики

Приводятся точные оценки сверху и снизу первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием на потенциал.

Рассматривается задача

$$y'' - Q(x)y + \lambda y = 0, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

где функция Q принадлежит множеству $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ действительных неотрицательных локально интегрируемых на интервале $(0,1)$ функций, для которых выполняется интегральное условие

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x)dx = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \in R, \quad \gamma \neq 0. \tag{3}$$

Под решением задачи (1), (2) понимается функция y, абсолютно непрерывная на $[0,1]$, удовлетворяющая условиям (2), имеющая абсолютно непрерывную производную на любом отрезке, содержащемся в интервале $(0,1)$, и удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду на интервале $(0,1)$.

Функция $y \in H_0^1(0,1)$ называется слабым решением (см. [2], с. 32) уравнения (1), если для любой функции $\psi \in C_0^\infty(0,1)$ выполняется равенство

$$\int_0^1 \left(y'\psi' + Q(x)y\psi\right)dx = \lambda \int_0^1 y\psi\, dx.$$

Требуется получить оценки для

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \inf_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) \quad \text{и} \quad M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q).$$

Оценки первого собственного значения $\lambda_1(Q)$ были получены и для других задач (см., например, [1]).

Для произвольной функции Q из $T_{\alpha,\beta,\gamma}$, обозначим через H_Q замыкание множества $C_0^\infty(0,1)$ по норме

$$\|y\|_{H_Q} = \left(\int_0^1 y'^2 dx + \int_0^1 Q(x)y^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказано [3, 4], что первое собственное значение $\lambda_1(Q)$ задачи (1), (2) определяется равенством $\lambda_1(Q) = \inf\limits_{y \in H_Q \setminus \{0\}} R[Q, y]$, где

$$R[Q, y] = \frac{\int_0^1 \left(y'^2 + Q(x)y^2\right)dx}{\int_0^1 y^2\, dx}.$$

Рассматривается функционал

$$G[y]=\frac{\int_0^1 y'^2dx+\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\int_0^1 y^2dx}.$$

Пусть

$$m=\inf_{y\in B_{\alpha,\beta,\gamma}\setminus\{0\}}G[y],$$

где $B_{\alpha,\beta,\gamma}$ – пространство функций из $H_0^1(0,1)$ с конечной нормой

$$\|y\|_{B_{\alpha,\beta,\gamma}}=\left(\int_0^1 y'^2dx+\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Gamma=\left\{y\in B_{\alpha,\beta,\gamma}\;\middle|\;\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx=1\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\gamma<0$*; тогда для любых* α,β *существует такая неотрицательная на интервале* $(0,1)$ *функция* $u\in\Gamma$*, что* $G[u]=m$*, причем при* $\gamma<-1$ *функция* u *является слабым решением уравнения*

$$u''+mu=x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть* $\gamma<0$ *и функция* u *удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда существует такая последовательность положительных на интервале* $(0,1)$ *функций* $u_n\in\Gamma$*, для которой существует такая последовательность функций* $Q_n(x)\in T_{\alpha,\beta,\gamma}$*, что* $R[Q_n,u]\to G[u]=m$ *при* $n\to\infty$ *и* $m_{\alpha,\beta,\gamma}=m$.

Теорема 3. *Пусть* $\gamma>1$*; тогда для любых* α,β *существует такая функция* $Q_*(x)\in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ *и такая положительная на интервале* $(0,1)$ *функций* $u\in\Gamma$*, что* $R[Q_*,u]=G[u]=m$*, и* $M_{\alpha,\beta,\gamma}=m$*, при этом функция* u *удовлетворяет уравнению* (4).

Замечание. Доказано [3 – 5], что при $\gamma>0$ и любых значений α,β имеем $m_{\alpha,\beta,\gamma}=\pi^2$; при $\gamma<0$ и любых значений α,β имеем $\pi^2\le m_{\alpha,\beta,\gamma}<C_{\alpha,\beta}$, где $C_{\alpha,\beta}$– константа, полученная для соответствующих значений α,β. При $-\infty<\gamma<0$ и при $0<\gamma<1$ имеем $M_{\alpha,\beta,\gamma}=\infty$; при $\gamma>1$ имеем $M_{\alpha,\beta,\gamma}>\pi^2$.

Литература

1. Егоров Ю.В., Кондратьев В.А. Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма-Лиувилля // Успехи математических наук. 1996. Т. 51(3). С. 73-144.

2. Осмоловский В.Г. Нелинейная задача Штурма-Лиувилля. Учеб. пособие. СПб: Изд-во С.-Петербургского университета, 2003.

3. Telnova M.Yu. Some estimates for the first eigenvalue of the Sturm-Liouville problem with a weight integral condition // Mathematica Bohemica. 2012. V. 137. № 2. P. 229-238.

4. Тельнова М.Ю. Оценки первого собственного значения задачи Штурма-Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием // В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание под ред. И. В. Асташовой. С. 608-647. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. 647с. ISBN 978-5-238-02368-7.

5. Тельнова М.Ю. Об одной оценке сверху первого собственного значения задачи Штурма−Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием // Материалы Международной миниконференции "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения", М.: МЭСИ, 2014, с. 126−140. (ISBN 978-5-7764-0983-7).