ОЦЕНКИ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА - ЛИУВИЛЛЯ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

С.С. Ежак

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики

Получены оценки сверху и снизу первого собственного значения λ_1 задачи Штурма – Лиувилля с краевыми условиями Дирихле и интегральным условием на потенциал при различных значениях α .

Рассматривается следующая задача Штурма – Лиувилля:

$$y''(x) + Q(x)y(x) + \lambda y(x) = 0,$$
$$y(0) = y(1) = 0,$$

где $Q(x)$ – неотрицательная ограниченная на [0,1] функция, удовлетворяющая условию:

$$\int_0^1 Q^\alpha(x)dx = 1, \qquad \alpha \neq 0.$$

Исследуется зависимость оценок снизу и сверху минимального собственного значения λ_1 этой задачи от параметра α в некотором классе потенциалов $Q(x)$.

Пусть

$$R[Q, y] = \frac{\int_0^1 y'^2(x)dx - \int_0^1 Q(x)y^2(x)dx}{\int_0^1 y^2(x)dx},$$

согласно вариационному принципу $\lambda_1 = \inf\limits_{y(x)\in H_0^1(0,1)} R[Q, y]$.

Пусть $m_\alpha = \inf\limits_{Q(x)\in A_\alpha} \lambda_1$, $M_\alpha = \sup\limits_{Q(x)\in A_\alpha} \lambda_1$, где A_α – множество неотрицательных ограниченных на [0,1] функций, удовлетворяющих условию $\int_0^1 Q^\alpha(x)dx = 1$.

Теорема. Если $\alpha > 1$, то $m_\alpha \geq \frac{\pi^2}{2}$, $M_\alpha = \pi^2$, причем существуют такие функции $u(x) \in H_0^1(0,1)$ и $Q(x) \in A_\alpha$, что $\inf\limits_{y(x)\in H_0^1(0,1)} R[Q, y] = R[Q,u] = m_\alpha$.

Если $\alpha = 1$, то $M_1 = \pi^2$, m_1 есть принадлежащее интервалу $(0,\pi^2)$ решение уравнения $2\sqrt{\lambda} = tg\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)$, причем m_1 достигается на дельта-функции $Q(x) = \delta\left(x - \frac{1}{2}\right)$, не принадлежащей множеству A_α .

Если $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, то $m_\alpha = -\infty$, $M_\alpha = \pi^2$.

Если $\frac{1}{3} \leq \alpha < \frac{1}{2}$, то $m_\alpha = -\infty$, $M_\alpha \leq \pi^2$.

Если $0 < \alpha < \frac{1}{3}$, то $m_\alpha = -\infty$, $M_\alpha < \pi^2$.

Если $\alpha < 0$, то $m_\alpha = -\infty$, $M_\alpha < \pi^2$, причем существуют такие функции $u(x) \in H_0^1(0,1)$ и $Q(x) \in A_\alpha$, что $\inf\limits_{y(x)\in H_0^1(0,1)} R[Q,y] = R[Q,u] = M_\alpha$.

Литература

1. Egorov Yu., Kondratiev V. On Spectral theory of elliptic operators // Operator theory. Advances and Applications. V 89. Birkhouser. 1996. 368P.