Секция 1:

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ДИФФУЗИОННО-КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ОСАЖДЕНИЯ МАЛОКОНЦЕНТРИРОВАННОЙ ВЗВЕСИ СТОКСОВСКИХ ЧАСТИЦ В ПЕРЕМЕШИВАЕМОМ ПЛОСКОМ СЛОЕ С ДВИЖУЩЕЙСЯ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ*

В.И. Ряжских, А.В. Ряжских

Воронежский государственный технический университет

На основе конвективно-диффузионных представлений о переносе твердой фазы в суспензиях сформулирована и решена задача об осаждении малоконцентрированных стоксовских частиц в перемешиваемом плоском слое с равномерно движущейся по нормали свободной границей дисперсионной среды в направлении “смоченной” поверхности.

Установление закономерностей перераспределения дисперсной фазы в малоконцентрированных взвесях с движущейся свободной границей необходимо для обоснования рациональных технологических режимов, например, при концентрировании суспензий выпариванием дисперсионной среды [1], фильтровании [2], переливе криожидкостей из резервуара с наличием в них взрывоопасных высококипящих отвержденных микропримесей [3] и т.д. Имеющиеся математические формулировки задач с движущимися границами и методы их решения [4,5] ориентированы, в основном, на гомогенные среды с фазовыми переходами на самой движущейся границе в виде задачи Стефана и ее модификаций и не позволяют учесть конвективную составляющую переноса твердой фазы в объеме взвеси. С другой стороны применение в этом случае подходов механики гетерогенных сред [6] вызывает пока ряд непреодолимых трудностей – корректная постановка условий на межфазной границе, существенная нелинейность интегро-дифференциальных уравнений высокого порядка и т.п. Альтернативой для решения такого класса задач является синтез и анализ математических моделей в рамках конвективно-диффузионных представлений о переносе твердой фазы в суспензиях [7], который апробирован при описании различных процессов в дисперсных системах [8-10].

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по гранту № 13-08-00261

В связи с вышесказанным рассматривается сначала постановка задачи для монодисперсной твердой фазы. Пусть в начальный момент времени свободная граница плоского слоя малоконцентрированной однородной суспензии монодисперсных частиц, осаждающихся по закону Стокса в условиях перемешивания, начинает двигаться с постоянной скоростью по нормали в направлении поверхности осаждения, проницаемой только для несущей среды. В предположении, что проскальзывание фаз не существенно, и используя конвективно-диффузионные представления о переносе твердой фазы в слое суспензии [11], сформулирована математическая модель:

$$\frac{\partial N(X,\theta)}{\partial \theta}=\frac{\partial N(X,\theta)}{\partial X}+\frac{1}{Bo}\frac{\partial^2 N(X,\theta)}{\partial X^2}; \tag{1}$$

$$N(X,0)=1; \tag{2}$$

$$(1-K)N(0,\theta)+\frac{1}{Bo}\frac{\partial N(0,\theta)}{\partial X}=0; \tag{3}$$

$$N[H(\theta),\theta]+\frac{1}{Bo}\frac{\partial N[H(\theta),\theta]}{\partial X}=0; \tag{4}$$

$$H(\theta)=1-\alpha\theta, \tag{5}$$

где $\theta=(w+v)t/h_0$; $X=x/h_0$; $Bo=(w+v)h_0/D$; $K=k/(w+v)$; $N(X,\theta)=n(x,t)/n_0$; $\alpha=v/(w+v)$; t - время; x - координата; h_0 - высота слоя при $t=0$; w - Стоксовская скорость осаждения частиц взвеси; v - скорость движения свободной границы; D - коэффициент перемешивания; k - скорость встраивания частиц в структур осадка.

Считая $H(\theta)$ параметром и применяя одностороннее интегральное преобразование Лапласа по θ, получено аналитическое решение системы (1) – (5). Для нивелирования ошибки допущения о том, что $H(\theta)$ параметр в данный момент безразмерного времени θ, потребовано выполнение балансового соотношения частиц в системе

$$K\int_0^{\theta}N(0,\theta)d\theta+\frac{1}{H(\theta)}\int_0^{H(\theta)}N(X,\theta)dX=1,$$

из которого определена нормирующая невязка к решению $\Omega(K,Bo,\theta)$. Окончательное решение записывается в виде

$$\tilde{N}(X,\theta)=\Omega(K,Bo,\theta)N(X,\theta), \tag{6}$$

которое является приближенным в том смысле, что оно удовлетворяет граничным условиям (2) – (4), а уравнению (1) с точностью до

$$N(X,\theta)\frac{d\ln\Omega(K,Bo,\theta)}{d\theta}<<1.$$

Для подтверждения корректности предложенного метода решения было проведено численное интегрирование системы (1) – (5), которая путем замены

$$N(X,\theta)=\Phi(X,\theta)\exp\left[-\frac{Bo}{2}\left(X+\frac{1}{2}\theta\right)\right]$$

и введения функционального преобразования

$$\xi=\frac{X}{1-\alpha\theta},\ \eta=\frac{\theta}{1-\alpha\theta}$$

с якобианом, отличным от нуля, сведена к задаче с неподвижными границами

$$\frac{\partial\Psi(\xi,\eta)}{\partial\eta}=-\frac{\alpha\xi}{1+\alpha\eta}\frac{\partial\Psi(\xi,\eta)}{\partial\xi}+\frac{1}{Bo}\frac{\partial^2\Psi(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}, \qquad (7)$$

$$\Psi(\xi,0)=\exp\left(\frac{Bo}{2}\xi\right), \qquad (8)$$

$$\left(\frac{1}{2}-K\right)\Psi(0,\eta)+\frac{(1+\alpha\eta)}{Bo}\frac{\partial\Psi(0,\eta)}{\partial\xi}=0, \qquad (9)$$

$$\frac{1}{2}\Psi(1,\eta)+\frac{(1+\alpha\eta)}{Bo}\frac{\partial\Psi(1,\eta)}{\partial\xi}=0, \qquad (10)$$

где $\Psi(\xi,\eta)=\Phi\left[X(\xi,\eta),\theta(\xi,\eta)\right]$.

Линейный характер системы (7) – (10) позволил адаптировать в расчетах устойчивую и сходящуюся классическую маршевую конечно-разностную схему первого порядка точности по η и второго по ξ на равномерной сетке с аппроксимацией граничных условий односторонними конечеными разностями третьего порядка точности.

Вычислительный эксперимент подтвердил правомочность приближенного аналитического решения (6). Это позволило обобщить модель (1) – (5) на случай малоконцентрированной полидисперсной взвеси применением принципа суперпозиции концентрированных полей различных размеров частиц в предположении выполнения гипотезы сплошности в виде локальной функции плотности распределения частиц по размерам

$$\tilde{F}\left[X,L,\theta(L,t)\right]=F_0(L)\Omega\left[\left(K(L),Bo(L),\theta(L,t)\right)\right]N\left[X,L,\theta(L,t)\right],$$

где под $N\left[X,L,\theta(L,t)\right]$ понимается $N(X,\theta)$, в котором учтена зависимость Bo, K и θ о относительного размера частиц $L=l/\bar{l}$; l, $\bar{l}$ - текущей и среднечисленный размер дисперсной фазы; $F_0(L)$ - функция плотности распределения частиц по размерам при $t=0$.

Для проведения расчетов Bo и K идентифицированы из следующих соображений. Т.к. перемешивание дисперсной фазы характеризуется конвективным механизмом и броуновской диффузией, то согласно [12,13]

$$D(l)=(1+\varepsilon_c)\frac{k_Б T}{3\pi l\nu\rho},$$

где ε_c - коэффициент конвекции; $k_Б$ - постоянная Больцмана; T - температура; ν, ρ - кинематическая вязкость и плотность несущей среды. Кинетический коэффициент k определен по аналогии с [14]: приблизившись к поверхности осаждения, частицы взвеси утрачивают конвективную составляющую движения, но сохраняют броуновскую и седиментационную, т.е.

$$k(l) = \frac{k_0(l)}{1+\left[k_0(l) - w(l) - v\right]/u_V},$$

где

$$k_0(l) = \left[2\pi/\bar{v}_b^2(l)\right]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[w(l)+v\right]^2 \Big/ \bar{v}_b^2(l)\right\} +$$
$$+\frac{1}{2}\left[w(l)+v\right]\left\langle 1+ erf\left\{\left[w(l)+v\right]\Big/\left[2\bar{v}_b^2(l)\right]^{1/2}\right\}\right\rangle,$$

$$\bar{v}_b^2(l) = \frac{6k_Б T}{\pi l^3 \rho},\; u_V = \left(1+\varepsilon_c\right)\frac{k_Б T}{3\pi l \nu \rho h_0} = \frac{D(l)}{h_0},\; w(l) = \frac{g\left(\rho_T - \rho\right)}{18\rho\nu} l^2;$$

g - ускорение свободного падения; ρ_T - плотность частиц.

Синтезированная модель позволила определить локальную массовую концентрации частиц по высоте слоя и ответить на вопрос о влиянии скорости движения свободной границы на кинетику ее изменения в процесс осаждения.

Литература

1. Таубман Е.И. Выпаривание (Процессы и аппараты химической и нефтехимической технологии). – М.: Химия, 1982. – 328с.
2. Ельшин А.И. Теоретические и технологические аспекты разделения дисперсных систем фильтрованием. – Новополоцк: ПГУ, 1994. – 96с.
3. Flynn M.T. Cryogenic engineering. – New York: Marcel Dekker, 2005. – 873p.
4. Crank J. Free and moving boundary problems. – Oxford: Clarendon Press, 1984. – 425p.
5. Terzia D.A. A bibliography on moving – free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems // NAT, Serie A: - 2000. - №2. – pp. 297-301.
6. Нигматулин Р.Н. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336с.
7. Броунштейн В.Б. Диффузионная модель классификации частиц в разяржeнных суспензиях // Журн. прикл. химии. – 1983. – Т.56. - №8. – с. 1788-1793.
8. Веригин А.Н., Васильев С.В. Диффузия и седиментация мелкодисперсной однородной взвеси в отстойниках // Теор. основы хим. технол. – 1982. – Т16. - №3. – с. 374-380.
9. Пономаренко В.Г. и др. Математическая модель процесс гидроклассификации суспензии в кристаллизаторах // Теор. основы хим. технол. – 1980. – Т.11. - №4. – с. 582-589.
10. Харин В.М., Ряжских В.И., Завадских Р.М. Кинетика осаждения примесей при испарительном охлаждении криогенных жидкостей // Теор. основы хим. технол. – 1996. – Т.30. - №5. – с. 453-457.
11. Харин В.М., Ряжских В.И. К теории осаждения // Теор. основы хим. технол. – 1989. – Т.23. - №5. – с. 651-658.
12. Берд. Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. – М.: Химия, 1974. – 688с.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10т. Т.VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 736с.
14. Седунов Ю.С. Некоторые вопросы броуновской диффузии стоксовских частиц в пространственно-неоднородном внешнем поле // Изв. АНСССР, Сер. геофиз. – 1964. - №4. – с.1093-1102.