

Основы оптимального управления космическими транспортными системами с комбинацией двигателей большой и малой тяги

(научно-образовательный курс, предназначенный для ознакомления студентов с перспективным направлением проектирования космических транспортных систем)

В.В. Салмин, К.В. Петрухина

1 Космические транспортные системы с комбинацией двигателей большой и малой тягой

В общем случае комбинированная схема выведения космического аппарата традиционно включает в себя следующие манёвры. С помощью химического разгонного блока осуществляется старт КА с низкой базовой орбиты и перевод его на некоторую промежуточную орбиту (рисунок 1). При этом возможно несколько включений химического разгонного блока (ХРБ). Наиболее рационально использовать схему одно- или двухимпульсного перехода с круговой орбиты на эллиптическую без изменения наклона.

После отделения ХРБ с помощью электрореактивного транспортного модуля [1] полезный груз переводится на целевую орбиту, в качестве которой может рассматриваться любая, достаточно удалённая от начальной орбита, отличающаяся от нее по величине большой полуоси, наклона и эксцентриситета, в частности, геостационарная орбита (ГСО).

Уровень перегрузки, которую обеспечивает электрореактивный двигатель, весьма мал, поэтому продолжительность активного участка велика, а траектория движения – многовитковая «квазиэллиптическая» спираль с медленно изменяющимися оскулирующими элементами орбиты.

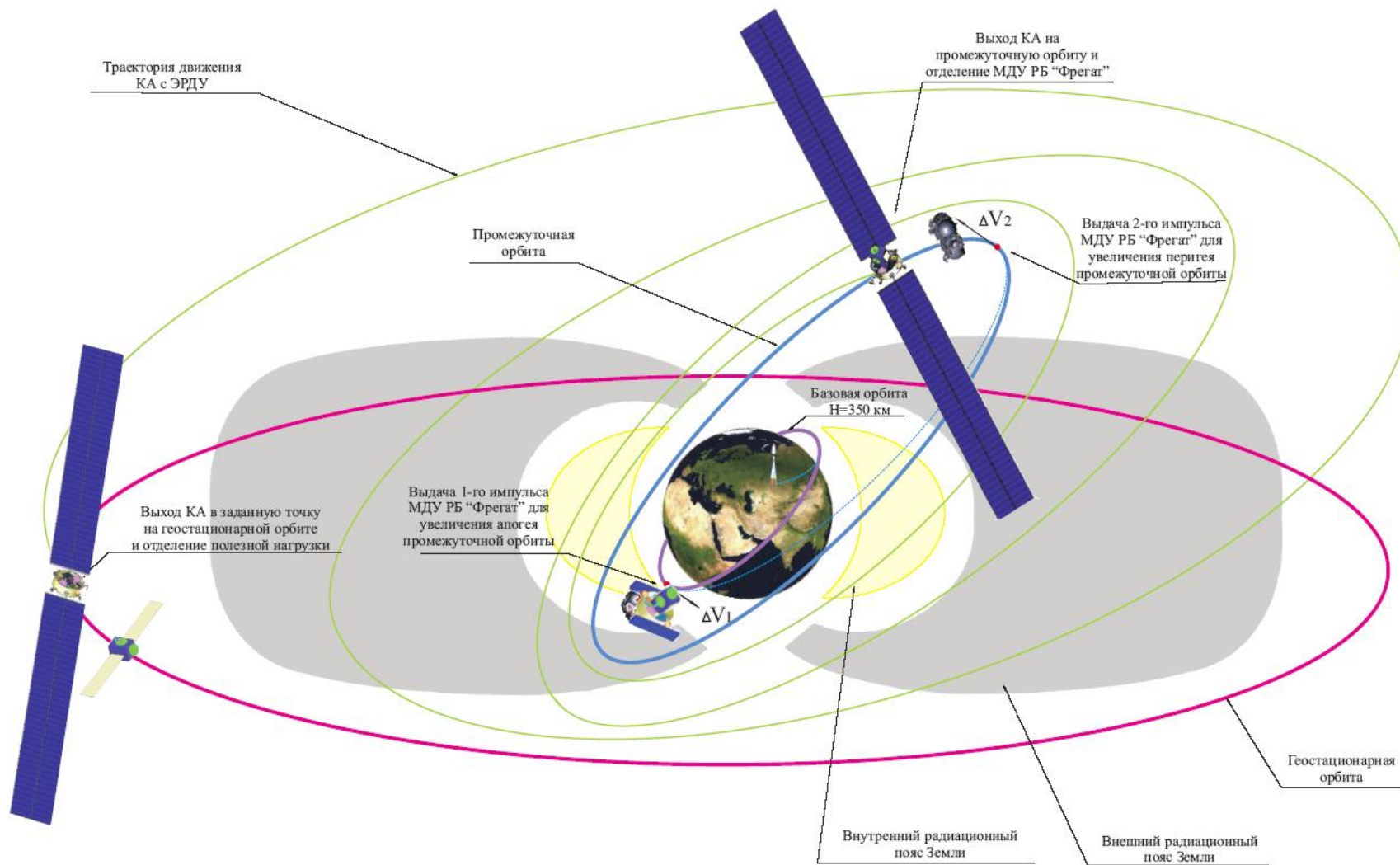


Рисунок 1 – Комбинированная схема выведения КА на ГСО

2 Математическая модель движения космического аппарата с комбинированной двигательной установкой

Как говорилось ранее, на первом этапе баллистической схемы выведения работает ХРБ. Пусть в результате работы ХРБ осуществляется компланарный двухимпульсный перелёт по схеме Гомана между соосными орбитами (рисунок 2).

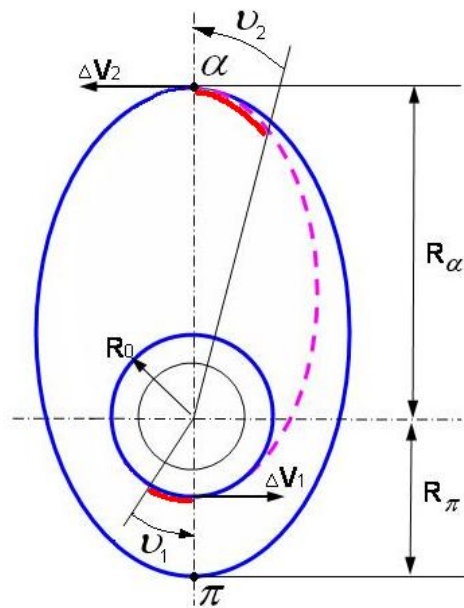


Рисунок 2 – Двухимпульсный маневр перехода

Здесь v - угловая мера, соответствующая времени работы двигателя.

В этом случае первый импульс увеличивает скорость до такой величины, чтобы апоцентр переходной орбиты равнялся R_α :

$$\Delta V_1 = V_{кр}(R_0) \left[\sqrt{\frac{2R_\alpha}{R_\alpha + R_\pi}} - 1 \right], \quad (1)$$

где R_0 - радиус начальной орбиты; R_α - радиус апогея промежуточной орбиты; R_π - радиус перигея промежуточной орбиты; $V_{кр}(R_0)$ - круговая скорость на начальной орбите [2,3].

В апогее переходной орбиты второй импульс скорости увеличивает скорость до такой, чтобы перицентр орбиты был равен R_π :

$$\Delta V_2 = V_{кр}(R_\pi) \left[\sqrt{\frac{2R_\pi}{R_\alpha + R_\pi}} - 1 \right], \quad (2)$$

В случае если радиус перигея промежуточной орбиты совпадает с радиусом начальной орбиты, необходимость во втором импульсе пропадает и появляется возможность осуществления одноимпульсного маневра.

На втором этапе работает электрореактивная двигательная установка малой тяги.

Космические аппараты с электрореактивными двигателями могут иметь весьма большую протяжённость активных участков, измеряемых сутками, месяцами. При этом допущение об импульсной аппроксимации активных участков, безусловно, не проходит. Анализ активного участка полета аппаратов с ЭРД должен проводиться на основе исследования весьма полной математической модели, часто с учетом ускорений, которые для аппаратов с большой тягой рассматриваются как возмущающие. Последнее связано с малостью реактивного ускорения, с тем, что ускорение, например, связанное с нецентральностью гравитационного поля Земли, может иметь тот же порядок малости, что и реактивное ускорение [4].

Указанные обстоятельства приводят к тому, что для космических маневров оказывается целесообразным рассматривать тягу как возмущающую силу. Тогда движение аппарата можно описать уравнениями Ньютона теории возмущенного движения [5]:

$$\begin{cases}
\frac{dA}{dt} = \frac{2p}{(1-e)^2} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot [e \sin \vartheta \cdot S + (1+e \cos \vartheta) \cdot T], \\
\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \left[\sin \vartheta \cdot S + \frac{e \cos^2 \vartheta + 2 \cos \vartheta + e}{1+e \cos \vartheta} \cdot T \right], \\
\frac{di}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \frac{\cos u}{1+e \cos \vartheta} \cdot W, \\
\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \left[-\cos \vartheta \cdot S + \frac{\sin \vartheta (2+e \cos \vartheta)}{1+e \cos \vartheta} \cdot T - \frac{e \sin u \cdot \text{ctgi}}{1+e \cos \vartheta} \cdot W \right], \\
\frac{d\Omega}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \frac{\sin u}{\sin i (1+e \cos \vartheta)} \cdot W, \\
\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{p^2} \cdot \left[(1+e \cos \vartheta)^2 - \frac{p^2}{(1+e \cos \vartheta)\mu} \cdot \text{ctgi} \cdot \sin u \cdot W \right],
\end{cases} \quad (3)$$

где $p = A(1-e^2)$ - фокальный параметр; $\vartheta = u - \omega$ - истинная аномалия; e - эксцентриситет; ω - угловое расстояние перицентра от узла; Ω - долгота восходящего узла; i - наклонение орбиты; τ - время прохождения через перицентр; t - время; ϑ - истинная аномалия; u - аргумент широты; S, T, W - проекции реактивного ускорения на направление радиуса-вектора, на перпендикулярное к нему в плоскости орбиты и на перпендикулярное к плоскости орбиты; $\mu = fM$ - произведение гравитационной константы на массу притягивающего центра.

Введем две правые системы координат (рисунок 2): орбитальную ($Onrb$) и связанную с КА ($OXYZ$). Вектор тяги \bar{P} направлен вдоль оси OX .

Запишем выражения для компонент реактивного ускорения в орбитальной системе координат:

$$\begin{aligned}
T &= \delta a \cos \lambda \cos \psi, \\
S &= \delta a \sin \lambda \cos \psi, \\
W &= \delta a \sin \psi.
\end{aligned} \quad (4)$$

Здесь a - модуль полного реактивного ускорения ($a = \frac{a_0}{1 - a_0 t / c}$), δ - функция включения-выключения двигателей ($\delta = \{0; 1\}$); λ - угол ориентации

вектора тяги в плоскости орбиты ($\lambda \in [0^\circ; 180^\circ]$); ψ - угол ориентации вектора тяги в плоскости местного горизонта ($\psi \in [-90^\circ; 90^\circ]$) (рисунок 3).

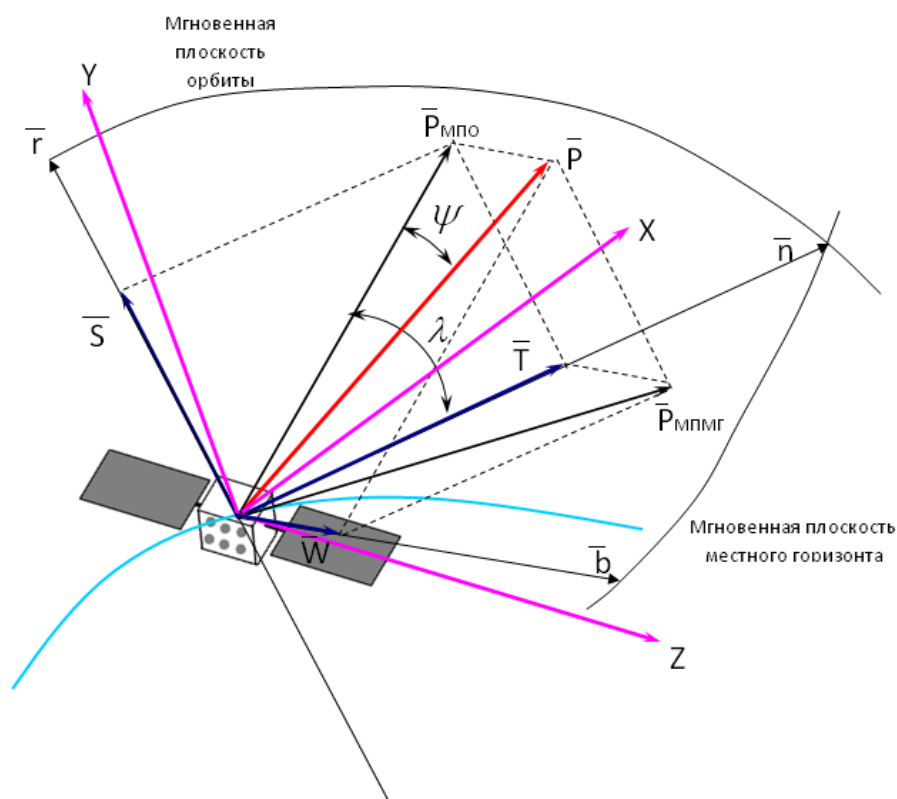


Рисунок 3 – К определению углов ориентации вектора тяги КА с ЭРДУ

2 Постановка и алгоритм решения задачи оптимального управления космическим аппаратом при перелётах с малой тягой между произвольными некомпланарными орбитами

2.1 Принцип расширения множества допустимых траекторий и управлений

Как правило, во многих задачах оптимизации множество допустимых траекторий и управлений D задается посредством некоторых условий, выделяющих его из более широкого множества E . Задачу оптимизации в этом случае можно решать на указанном более широком множестве E при некоторых дополнительных условиях. Идея принципа расширения [6, 7] состоит в том, что функционал доопределяется на более широком множестве

E так, что наименьшее значение он принимает в D . Практически это означает, что путем отбрасывания некоторых связей, ограничений и граничных условий упрощается математическая постановка и вычислительная схема решения задачи оптимизации. Полученное решение «нулевого» приближения проверяется на принадлежность множеству D . Если условие принадлежности выполняется, то задача решена, а отброшенные связи и ограничения носили надуманный характер, необоснованно усложняя постановку задачи. Если условие принадлежности не выполняется, то полученное решение служит предельной оценкой функционала на расширенном множестве допустимых траекторий и управлений. Такая оценка может оказаться полезной и содержательной на ранних стадиях исследования. Получение подобных решений связано с последовательной редукцией математической модели задачи оптимизации, и соответствующий метод носит название метода последовательных расширений [8]. Затем реализуется обратный процесс: полученное решение уточняется в ходе итерационной процедуры, множество допустимых решений сужается до тех пор, пока не будут выполнены все условия и ограничения, описанные в первоначальной постановке задачи. По существу, здесь реализуется схема последовательных приближений, а полученные предварительно оценки позволяют охарактеризовать степень близости решения к абсолютно оптимальному на любой итерации.

3.1.2 Метод решения задачи, основанный на принципе максимума

Л.С. Понтрягина

Математическая модель движения КА с ЭРДУ в центральном гравитационном поле представляет собой систему дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах (3).

Не будем накладывать условия на переменные ω , Ω , u , поэтому уравнения $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{du}{dt}$ могут быть исключены из математической модели

вариационной задачи, но учитываются в ходе дальнейшего моделирования управляемого движения согласно (3). Такой приём, основанный на принципе расширения [7], позволяет получить предельную оценку критерия оптимальности динамической задачи.

Согласно [6], критерием оптимальности в динамической задаче оптимизации перелёта с малой тягой является моторное время T_m , минимум которого обеспечивает минимальный расход рабочего тела. Если двигатель работает без выключения $\delta \equiv 1$.

Граничные условия системы запишем в следующем виде:

$$\begin{array}{l} t = t_0 \\ A(t_0) = A_0 \\ e(t_0) = e_0 \\ i(t_0) = i_0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} t = t_\kappa \\ A(t_\kappa) = A_\kappa \\ e(t_\kappa) = e_\kappa \\ i(t_\kappa) = i_\kappa \end{array} \quad (5)$$

Введем терминальный критерий (обобщённую невязку) в виде квадратичного функционала, представляющий собой сумму квадратов невязок по большой полуоси, эксцентриситету и наклонению орбиты, умноженные на соответствующие им весовые (неопределённые) коэффициенты:

$$I = \Delta x_\kappa^T \alpha \Delta x_\kappa \rightarrow \min, \quad (6)$$

где $\Delta x_\kappa = [\Delta A, \Delta e, \Delta i]^T$.

Здесь

$$\Delta A = A(t) - A_\kappa,$$

$$\Delta e = e(t) - e_\kappa,$$

$$\Delta i = i(t) - i_\kappa.$$

$$\alpha = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix},$$

$$\sum \alpha_{ij} = 1,$$

где $\alpha_A = \alpha_{11}$, $\alpha_e = \alpha_{22}$, $\alpha_i = \alpha_{33}$ - весовые коэффициенты (элементы диагональной матрицы) по большой полуоси, эксцентриситету и наклонению соответственно.

Опишем алгоритм решения сформулированной вариационной задачи в соответствии с принципом максимума Л.С.Понтрягина [9].

Для этого введем сопряжённую вектор-функцию Ψ , составим гамильтониан и найдем его максимум по управляющим функциям λ и ψ :

$$\Psi = (\Psi_A, \Psi_e, \Psi_i)^T.$$

Последнее выражение можно переписать в следующем виде:

$$H = \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{\mu}} [A_s S + A_t T + A_w W],$$

где

$$A_s = \frac{2A(1+e)}{(1-e)} e \sin \vartheta \cdot \Psi_A + \sin \vartheta \cdot \Psi_e,$$

$$A_t = \frac{2A(1+e)}{(1-e)} (1 + e \cos \vartheta) \Psi_A + \frac{e \cos^2 \vartheta + 2 \cos \vartheta + e}{1 + e \cos \vartheta} \Psi_e,$$

$$A_w = \frac{\cos u}{1 + e \cos \vartheta} \Psi_i.$$

С учётом (4) выражение для гамильтониана принимает вид:

$$H = -1 + \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{\mu}} a \delta [A_s \cos \lambda \cos \psi + A_t \sin \lambda \cos \psi + A_w \sin \psi], \quad (7)$$

В соответствии с принципом максимума, необходимое условие оптимальности имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{\mu}} a \delta [-A_s \sin \lambda \cos \psi + A_t \cos \lambda \cos \psi] = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \psi} &= \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{\mu}} a \delta [-A_s \cos \lambda \sin \psi - A_t \sin \lambda \sin \psi + A_w \cos \psi] = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, экстремум гамильтониана достигается при

$$\begin{cases} \sin \lambda = \pm \frac{A_T}{\sqrt{A_T^2 + A_S^2}}, \\ \cos \lambda = \pm \frac{A_S}{\sqrt{A_T^2 + A_S^2}}. \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \sin \psi = \pm \frac{A_W}{\sqrt{A_T^2 + A_S^2 + A_W^2}}, \\ \cos \psi = \pm \frac{\sqrt{A_T^2 + A_S^2}}{\sqrt{A_T^2 + A_S^2 + A_W^2}}. \end{cases} \quad (10)$$

Сформулируем достаточные условия максимума гамильтониана. Для этого получим условие отрицательной определённости матрицы вторых производных:

$$\Delta = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix},$$

где

$$x_{11} = \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2} = \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{\mu}} a [-A_S \cos \lambda \cos \psi - A_T \sin \lambda \cos \psi];$$

$$x_{12} = x_{21} = \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial \psi} = \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{\mu}} a [A_S \sin \lambda \cos \psi - A_T \cos \lambda \sin \psi];$$

$$x_{22} = \frac{\partial^2 H}{\partial \psi^2} = \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{\mu}} a [-A_S \cos \lambda \cos \psi - A_T \sin \lambda \cos \psi - A_W \sin \psi].$$

Проверяя выполнение условий $\Delta = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} > 0$ и $x_{11} < 0$, получаем, что максимум гамильтониана достигается при

$$\begin{cases} \sin \lambda = \frac{A_T}{\sqrt{A_T^2 + A_S^2}}, \\ \cos \lambda = \frac{A_S}{\sqrt{A_T^2 + A_S^2}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \psi = \frac{A_w}{\sqrt{A_T^2 + A_S^2 + A_w^2}}, \\ \cos \psi = \frac{\sqrt{A_T^2 + A_S^2}}{\sqrt{A_T^2 + A_S^2 + A_w^2}}. \end{cases}$$

Запишем уравнения сопряжённой системы в общем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_A &= -\frac{\partial H}{\partial A} = f_A(A, e, \vartheta, u, \lambda, \psi, a, \Psi_A, \Psi_e, \Psi_i), \\ \dot{\Psi}_e &= -\frac{\partial H}{\partial e} = f_e(A, e, \vartheta, u, \lambda, \psi, a, \Psi_A, \Psi_e, \Psi_i), \\ \dot{\Psi}_i &= -\frac{\partial H}{\partial i} = 0, \quad \Psi_i = const. \end{aligned} \quad (11)$$

Условия трансверсальности в задаче Майера принимают вид:

$$\begin{aligned} \Psi_A(T) &= -\frac{\partial I}{\partial A} = -2\Delta A(T)\alpha_A, \\ \Psi_e(T) &= -\frac{\partial I}{\partial e} = -2\Delta e(T)\alpha_e, \\ \Psi_i(T) &= -\frac{\partial I}{\partial i} = -2\Delta i(T)\alpha_i. \end{aligned} \quad (12)$$

Применение принципа максимума позволяет свести оптимизационную задачу к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение задачи оптимального управления элементами орбиты в строгой постановке, вытекающей из формализма Лагранжа – Понтрягина, связано с большими вычислительными трудностями, кроме того, на первый план выходит проблема сходимости и устойчивости алгоритма решения краевой задачи и единственности решения.

2.2 Редукция задачи оптимизации к локально-оптимальной задаче совместного управления элементами орбиты

Расширим исходную задачу до задачи локальной оптимизации. Примеры решения подобных задач приведены в [4].

Локально-оптимальными управлениями в дальнейшем будем называть

такие управления $\tilde{u}(t, x)$, которые минимизируют не функционал динамической задачи I (интегральный), а подынтегральное выражение, то есть производную $\frac{dI}{dt}$ в каждый момент времени [10].

Рассмотрим задачу о минимуме функционала:

$$I = \int_0^T \frac{dI}{dt} dt + I_0 \rightarrow \min.$$

Пусть $I_0 > 0$. Тогда потребуем выполнения условий:

$$1) \operatorname{sign}\left(\frac{dI}{dt}\right) = \operatorname{const};$$

$$2) \left|\frac{dI}{dt}\right| \rightarrow \max.$$

Очевидно, при этом полученное решение является и решением исходной задачи о минимуме функционала I .

Решение при этом получается в виде конечных соотношений, не содержащих неопределённые величины (сопряжённые переменные в принципе максимума Л.С. Понтрягина [9]).

Для решения подобной задачи применяются классические методы (в случае, когда область переменных, на которой определено подынтегральное выражение, – открытое множество).

В общем случае синтез локально-оптимальных управлений не гарантирует абсолютного оптимума в исходной постановке задач. Оценим близость локально-оптимального управления к оптимальному.

Представим систему уравнений в оскулирующих элементах, описывающую динамику движения КА с двигателем малой тяги, в общем виде:

$$\dot{\mathcal{E}} = f(\mathcal{E}, au), \tag{13}$$

где a - малый параметр (реактивное ускорение, развиваемое двигателем малой тяги); u - управление, которым в данном случае являются углы $\lambda(t)$, $\psi(t)$, и функция δ .

В силу дифференцируемости функции f перепишем выражение (13) в виде:

$$\dot{\mathcal{E}} = f(\mathcal{E}, 0) + aBu + 0(a^2), \quad (14)$$

где $B = \left(\frac{\partial f(\mathcal{E}, y)}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}$ - матрица частных производных.

Отбросим в уравнении (14) малые второго порядка $0(a^2)$ и рассмотрим уравнение $\dot{\mathcal{E}} = f(\mathcal{E}, 0)$. Пусть его полный интеграл имеет вид

$$\mathcal{E} = g(t, C) \quad (15)$$

Уравнение (15) может быть рассмотрено в качестве формулы замены переменных. Переходя от переменной \mathcal{E} к C , уравнение (14) можно с точностью до величины $0(a^2)$ заменить

$$\dot{C} = a \left(\frac{\partial g}{\partial C} \right)^{-1} Bu. \quad (16)$$

Рассмотрим функционал:

$$I(\mathcal{E}(T)) = I(g(T, C(T))) = I(C(T)) \quad (17)$$

Задача сводится к поиску минимума выражения (17) при условии (16).

Решение этой задачи можно искать в виде:

$$C = C_0 + aC_1 + 0(a^2),$$

причем C_1 удовлетворяем уравнению

$$C_1 = \left(\frac{\partial g}{\partial C} \right)^{-1} Bu, \quad (18)$$

а функционал имеет вид

$$I^*(C(T)) = I(C_0) + a \left(\frac{dI^*}{dC} \right)_{C=C_0} \cdot C_1 + 0(a^2).$$

Запишем функцию Гамильтона:

$$H = \Psi^T \left(\frac{\partial g}{\partial C} \right)^{-1} Bu = -a \left(\frac{dI^*}{dC}, \left(\frac{\partial g}{\partial C} \right)^{-1} Bu \right).$$

Из принципа максимума следует, что управление должно быть выбрано из условия минимума скалярного произведения

$$\left(\frac{dI^*}{dC}, \left(\frac{\partial g}{\partial C} \right)^{-1} Bu \right). \quad (19)$$

Теперь найдем локально-оптимальное управление для системы (3.12). Управление будем выбирать из условия минимума производной

$$\frac{dI^*(C(T))}{dt} = \left(\frac{dI^*}{dC}, C \right) = a \left(\frac{dI^*}{dC}, \left(\frac{\partial g}{\partial C} \right)^{-1} Bu \right). \quad (20)$$

Видно, что выражения (19) и (20) совпадают с точностью до множителя, т.е. их минимизирует одна и та же функция $u(t)$. Поскольку этот результат был получен для уравнений, в которых были отброшены числа порядка $0(a^2)$, то можно сделать вывод: **локально-оптимальные управления тем ближе к оптимальным, чем меньше величина параметра a [4,10].**

Таким образом, задача оптимального управления большой полуосью, эксцентриситетом и наклоном орбиты в строгой постановке может быть редуцирована к задаче локальной оптимизации.

Будем искать локально-оптимальный закон управления, обеспечивающий совместное изменение большой полуоси, эксцентриситета и наклона орбиты так, чтобы обобщённая невязка монотонно убывала.

Проведем отыскание локально-оптимального закона совместного управления большой полуосью, эксцентриситетом и наклоном орбиты, обеспечивающий минимум функционала I , определяемого выражением (6), при заданных начальных условиях.

Заменим этот функционал локальным критерием, обеспечивающим максимальную скорость изменения I :

$$\frac{dI}{dt} = 2\alpha_1 \frac{\Delta A}{A_0} \frac{dA}{dt} + 2\alpha_2 \Delta e \frac{de}{dt} + 2\alpha_3 \Delta i \frac{di}{dt} \rightarrow \max \quad (21)$$

Введем обозначения:

$$A_s^* = \alpha_1 \frac{\Delta A}{A_0} \cdot \frac{2A(1+e)}{(1-e)} \cdot e \sin \vartheta + \alpha_2 \Delta e \cdot \sin \vartheta;$$

$$A_r^* = \alpha_1 \frac{\Delta A}{A_0} \cdot \frac{2A(1+e)}{(1-e)} (1 + e \cos \vartheta) + \alpha_2 \Delta e \cdot \frac{e \cos^2 \vartheta + 2 \cos \vartheta + e}{1 + e \cos \vartheta}$$

$$A_w^* = \alpha_3 \Delta i \cdot \frac{\cos u}{1 + e \cos \vartheta}.$$

Тогда функционал запишем в виде:

$$\frac{dI}{dt} = 2 \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{\mu}} \cdot \delta \alpha [A_s^* \cdot \sin \lambda \cos \psi + A_r^* \cdot \cos \lambda \cos \psi + A_w^* \cdot \sin \psi] \quad (22)$$

Решая задачу поиска экстремума функции по двум переменным

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dt}(\lambda(t), \psi(t)) \rightarrow \max, \text{ получаем стационарные точки:}$$

$$\begin{cases} \sin \lambda = \pm \frac{A_r^*}{\sqrt{(A_r^*)^2 + (A_s^*)^2}}, \\ \cos \psi = \pm \frac{A_s^*}{\sqrt{(A_r^*)^2 + (A_s^*)^2}}. \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \sin \psi = \pm \frac{A_w^*}{\sqrt{(A_r^*)^2 + (A_s^*)^2 + (A_w^*)^2}}, \\ \cos \psi = \pm \frac{\sqrt{(A_r^*)^2 + (A_s^*)^2}}{\sqrt{(A_r^*)^2 + (A_s^*)^2 + (A_w^*)^2}}. \end{cases} \quad (24)$$

Сформулируем достаточные условия максимума. Для этого получим условие отрицательной определённости матрицы вторых производных:

$$\Delta = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix},$$

где

$$x_{11} = \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2} = \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{\mu}} a [-A_s^* \cos \lambda \cos \psi - A_r^* \sin \lambda \cos \psi];$$

$$x_{12} = x_{21} = \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial \psi} = \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{\mu}} a [A_s^* \sin \lambda \cos \psi - A_r^* \cos \lambda \sin \psi];$$

$$x_{22} = \frac{\partial^2 H}{\partial \psi^2} = \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{\mu}} a [-A_s^* \cos \lambda \cos \psi - A_r^* \sin \lambda \cos \psi - A_w^* \sin \psi].$$

Проверяя выполнение условий $\Delta = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} > 0$ и $x_{11} < 0$, получаем аналитические выражения для углов ориентации вектора тяги λ и ψ :

$$\begin{cases} \sin \lambda = \frac{A_r^*}{\sqrt{(A_r^*)^2 + (A_s^*)^2}}, \\ \cos \lambda = \frac{A_s^*}{\sqrt{(A_r^*)^2 + (A_s^*)^2}}. \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \sin \psi = \frac{A_w^*}{\sqrt{(A_r^*)^2 + (A_s^*)^2 + (A_w^*)^2}}, \\ \cos \psi = \frac{\sqrt{(A_r^*)^2 + (A_s^*)^2}}{\sqrt{(A_r^*)^2 + (A_s^*)^2 + (A_w^*)^2}}. \end{cases} \quad (26)$$

3.2.1 Алгоритм расчёта весовых коэффициентов

Как следует из (25) и (26), от значений весовых коэффициентов α_A , α_e , α_i зависит скорость изменения большой полуоси, эксцентриситета и наклона орбиты.

За счёт подбора значений весовых коэффициентов можно контролировать скорость изменения элементов орбиты и добиться одновременности выполнения конечных условий.

В этом случае необходимо осуществлять подбор весовых коэффициентов во внутреннем итерационном цикле путем оценки средних скоростей изменения элементов орбиты за заданный промежуток времени (виток, сутки) и пересчёта весовых коэффициентов.

В первом приближении можно принять $\alpha_A = \alpha_e = \alpha_i \cong 0,333$. В этом случае элементы орбиты будут меняться по оптимальному закону независимо от весовых коэффициентов.

1. В первом приближении принимается $\alpha_A = \alpha_e = \alpha_i \cong 0,333$.
2. Вычисляются средние скорости изменения элементов орбиты за

ВИТОК:

$$V_A^{cp} = \frac{1}{t_\kappa - t_0} \int_{t_0}^{t_\kappa} \left| \frac{dA}{dt} \right| dt,$$

$$V_e^{cp} = \frac{1}{t_\kappa - t_0} \int_{t_0}^{t_\kappa} \left| \frac{de}{dt} \right| dt,$$

$$V_i^{cp} = \frac{1}{t_\kappa - t_0} \int_{t_0}^{t_\kappa} \left| \frac{di}{dt} \right| dt,$$

где t^* - время одного витка; A^* , e^* , i^* - значения элементов орбиты на момент времени $t = t^*$.

3. Вычисляются требуемые максимальные скорости изменения элементов орбиты за то же время $t = t^*$:

$$V_A = \frac{|A_0 - A_\kappa| / A_0}{t^*},$$

$$V_e = \frac{e_0 - e_\kappa}{t^*},$$

$$V_i = \frac{i_0 - i_\kappa}{t^*}.$$

4. Определяются поправочные коэффициенты:

$$K_A = \alpha_A \frac{V_A}{V_A^{cp}},$$

$$K_e = \alpha_e \frac{V_e}{V_e^{cp}},$$

$$K_i = \alpha_i \frac{V_i}{V_i^{cp}}.$$

5. Вычисляются новые значения весовых коэффициентов:

$$\alpha_A = \frac{K_A}{K_A + K_e + K_i},$$

$$\alpha_e = \frac{K_e}{K_A + K_e + K_i},$$

$$\alpha_i = \frac{K_i}{K_A + K_e + K_i}.$$

Практически здесь может быть реализована схема построения субоптимального регулятора с переменными коэффициентами, обеспечивающая минимум квадратичного функционала.

Помимо указанной выше, могут быть предложены и иные схемы изменения весовых коэффициентов.

2.3 Результаты математического моделирования локально-оптимальных перелётов

Покажем принципиальную возможность управления элементами орбиты с помощью описанного выше подхода. Для этого проведем синтез законов управления с различными алгоритмами выбора весовых коэффициентов с целью получения оптимальных характеристик.

Приведём зависимости изменения элементов орбиты, углов ориентации вектора тяги КА с ЭРДУ и обобщённой невязки от времени перелёта (рисунок 3) для локально-оптимальных схем управления при следующих исходных данных:

параметры начальной орбиты: $A_0 = 350 \text{ км}$, $e_0 = 0$, $i_0 = 51,5 \text{ град.}$;

параметры промежуточной орбиты: $A_{np} = 26000 \text{ км}$, $e_{np} = 0,4$,
 $i_{np} = 51,5 \text{ град.}$;

целевая орбита: $A_k = 42164 \pm \varepsilon_A \text{ км}$, $e_k = 0 + \varepsilon_e$, $i_k = 0^\circ + \varepsilon_i$;

начальное реактивное ускорение: $a_0 = 0.941 \text{ мм/с}^2$;

весовые коэффициенты постоянны: $\alpha_A = \alpha_e = \alpha_i \cong 0,333$.

Из рисунка 3, а, б, в видно, что в случае постоянства весовых коэффициентов элементы орбиты по достижении ими заданных конечных значений остаются постоянными. Таким образом, не выполняется одновременность выполнения конечных условий по большой полуоси, эксцентриситету и наклонению орбиты.

Управление углом ориентации вектора тяги в плоскости орбиты (см. рисунок 3, д) на начальном этапе (от 0 до 5 суток) происходит по закону, близкому к трансверсальному, после чего (от 6 до 55 суток) амплитуда колебаний значительно возрастает. В то же время изменение угла ориентации в местной горизонтальной плоскости (см. рисунок 3, е) на начальном этапе (от 0 до 10 суток) происходит за счёт переключения бинормальной компоненты вектора тяги дважды за виток с постепенным возрастанием амплитуды от 45 до 75 градусов, после чего закон управления медленно приближается к бинормальному.

Численное моделирование показало, что производная функционала не меняет свой знак, а сам функционал монотонно убывает, минимизируя обобщённую невязку (см. рисунок 3, г).

Теперь рассмотрим случай с применением алгоритма выбора весовых коэффициентов (рисунок 4) при тех же исходных данных:

параметры начальной орбиты: $A_0 = 350 \text{ км}$, $e_0 = 0$, $i_0 = 51,5 \text{ град.}$;

параметры промежуточной орбиты: $A_{np} = 26000 \text{ км}$, $e_{np} = 0,4$,
 $i_{np} = 51,5 \text{ град.}$;

целевая орбита: $A_k = 42164 \pm \varepsilon_A \text{ км}$, $e_k = 0 + \varepsilon_e$, $i_k = 0^\circ + \varepsilon_i$;

начальное реактивное ускорение: $a_0 = 0.941 \text{ мм/с}^2$;

Из рисунка 4, а, б, в видно, что конечные условия по большой полуоси, эксцентриситету и наклонению выполняются одновременно. Кроме того, изменение большой полуоси и эксцентриситета, в отличие от рисунка 3, характеризуется меньшими амплитудами колебаний, однако, сами колебания присутствуют в течение всего перелёта.

Изменение угла ориентации в местной горизонтальной плоскости (см. рисунок 4, е) происходит по бинормальному закону на протяжении всего перелёта.

Из рисунка 4, г видно, что основная «нагрузка» приходится на весовой коэффициент по наклонению, поскольку поворот плоскости орбиты на угол $\Delta i = 51,5^\circ$ является длительным и требует больших энергетических затрат.

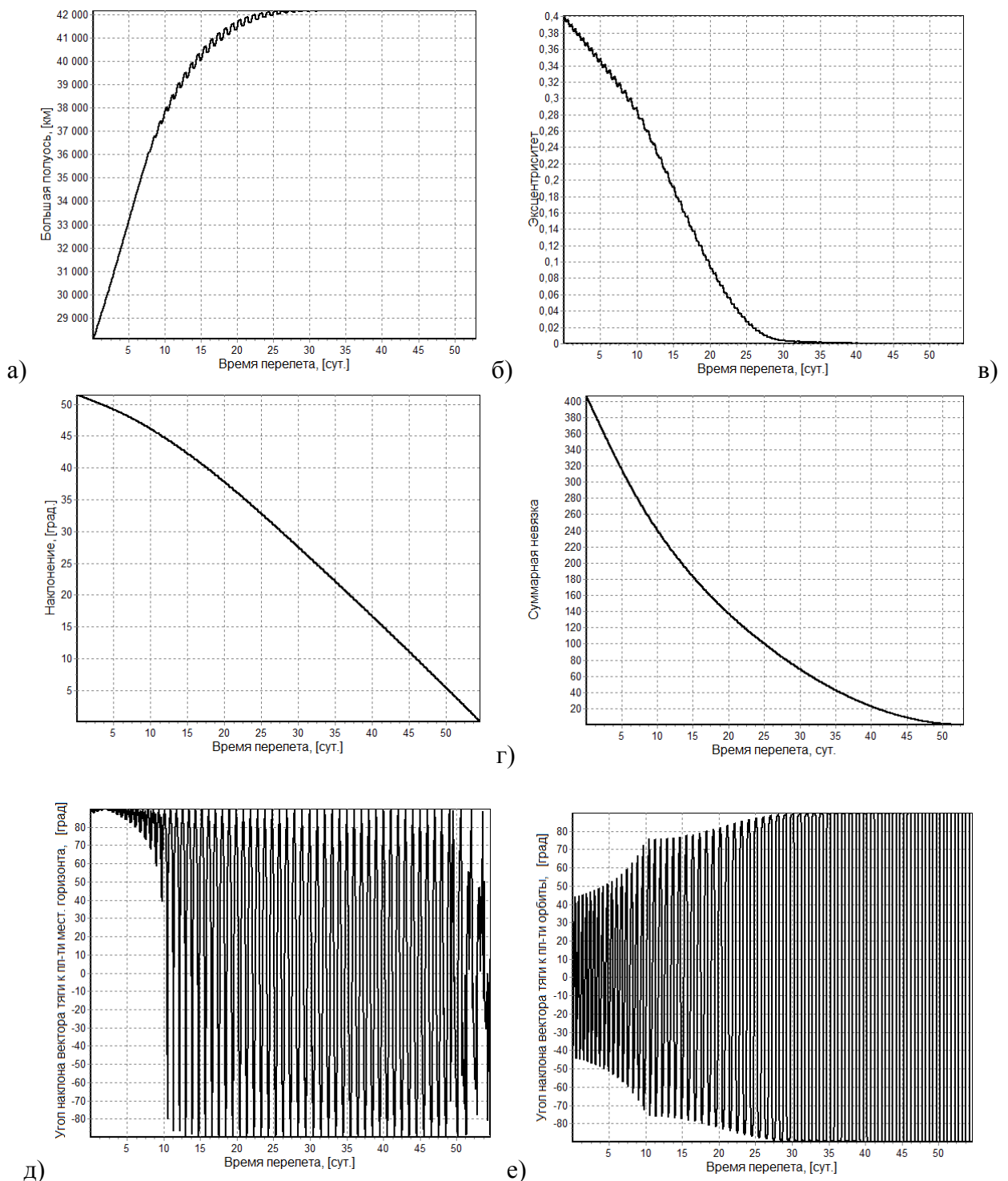


Рисунок 3 – Зависимость большой полуоси (а), эксцентриситета (б), наклонения (в), обобщённой невязки (г), угла наклона вектора тяги к плоскости местного горизонта (д), угла наклона вектора тяги к плоскости орбиты (е) и от времени перелёта

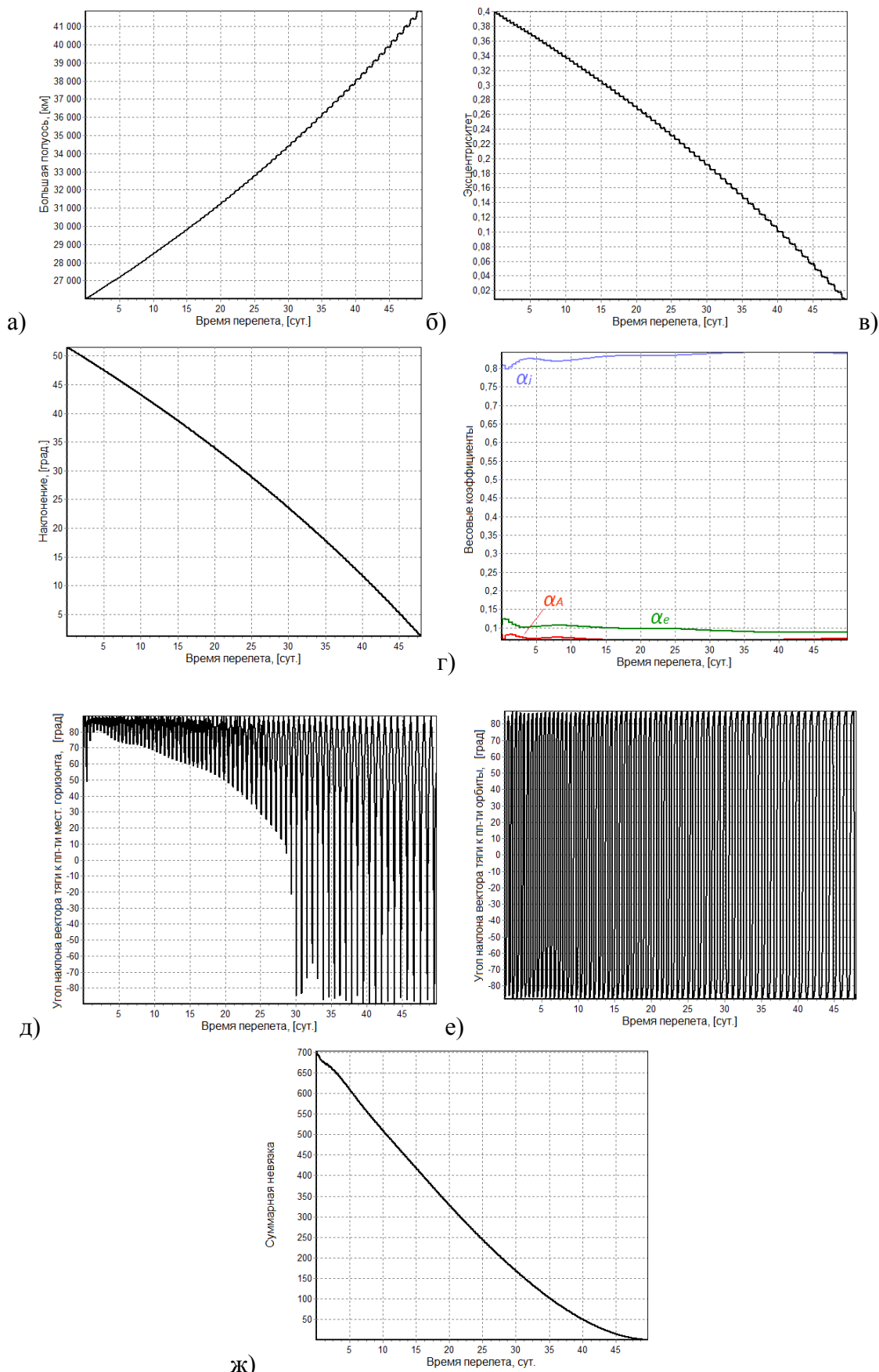


Рисунок 4 – Зависимость большой полуоси (а), эксцентриситета (б), наклона (в), обобщённой невязки (г), угла наклона вектора тяги к плоскости местного горизонта (д), угла наклона вектора тяги к плоскости орбиты (е), весовых коэффициентов (ж) и от времени перелёта

Из рисунков 3 и 4 видно, время перелёта при фиксированных значениях весовых коэффициентов ($\alpha_A = \alpha_e = \alpha_i \cong 0,333$) составило около 55 суток, а в случае применения алгоритма подбора этих коэффициентов на каждом витке траектории – порядка 50 суток.

Таким образом, путем подбора весовых коэффициентов можно оптимизировать схему перелёта по времени.

На рисунке 5 представлена траектория пространственного движения КА для перелёта с промежуточной орбиты на целевую (геостационарную) орбиту.

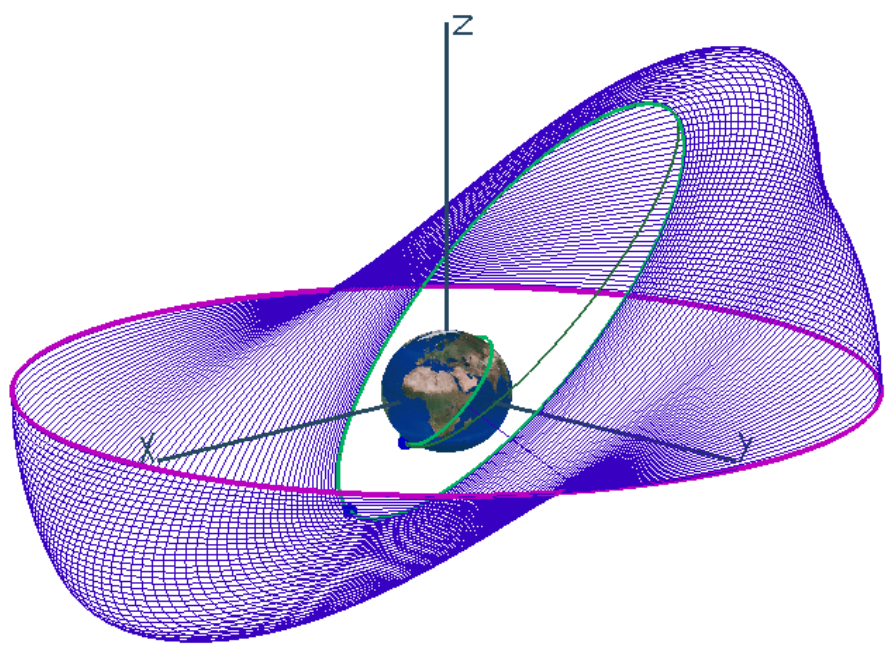


Рисунок 5 – Траектория пространственного движения КА

Также локально-оптимальный закон управления позволяет реализовать комбинированные схемы с пролётом через целевую орбиту, когда химический разгонный блок формирует промежуточную орбиту с апогеем выше апогея целевой орбиты.

Рассмотрим такой вариант перелёта для следующих исходных данных: параметры начальной орбиты: $A_0 = 350 \text{ км}$, $e_0 = 0$, $i_0 = 51,5 \text{ град.}$;

параметры промежуточной орбиты: $A_{np} = 70000 \text{ км}$, $e_{np} = 0,3$,
 $i_{np} = 51,5 \text{ град.}$;

целевая орбита: $A_K = 42164 \pm \varepsilon_A \text{ км}$, $e_K = 0 + \varepsilon_e$, $i_K = 0^\circ + \varepsilon_i$;

начальное реактивное ускорение: $a_0 = 0.932 \text{ мм/с}^2$;

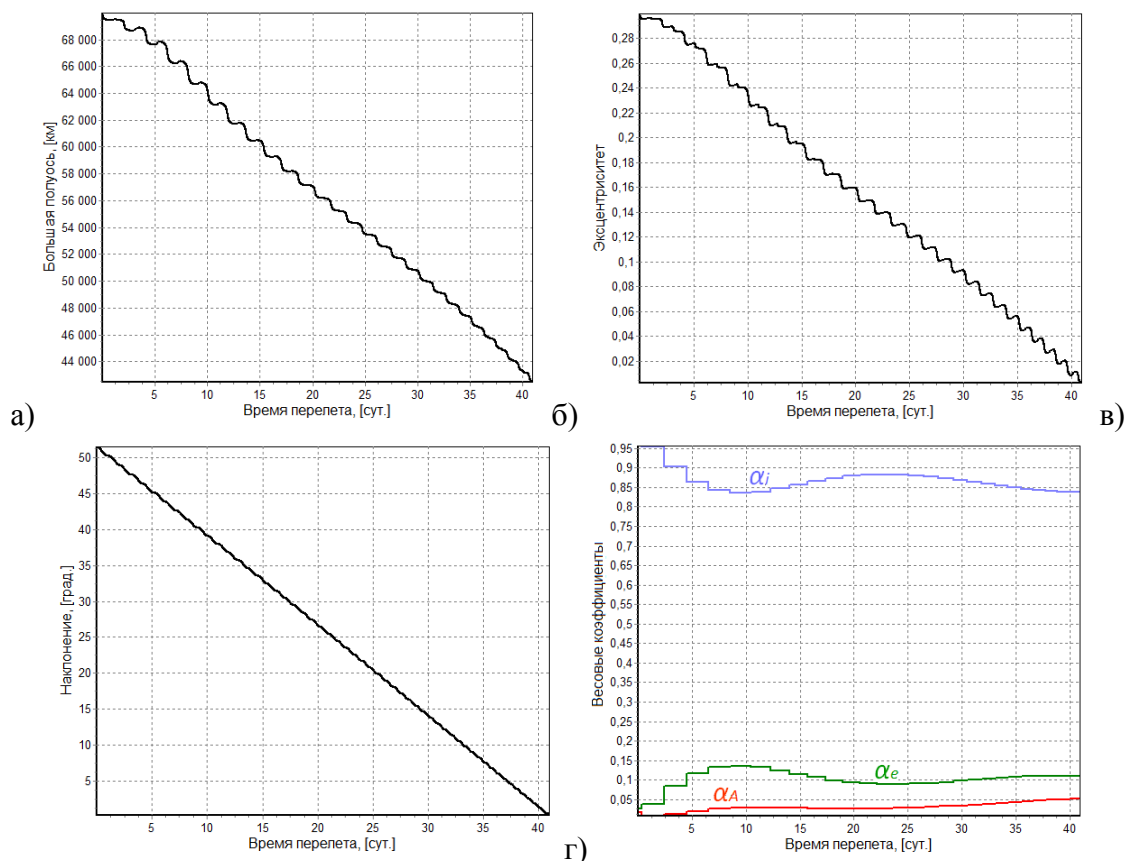
весовые коэффициенты подбираются в соответствии с приведённым выше алгоритмом.

Результаты моделирования приведены на рисунке 6.

Видно, что изменение большой полуоси и эксцентриситета носит колебательный характер. При этом угол ориентации вектора тяги в плоскости орбиты (см. рисунок 6, г) на начальном этапе (от 0 до 20 суток) колеблется в пределах $\pm 90^\circ$, далее (от 20 до 40 суток) амплитуда колебаний уменьшается.

Угол ориентации вектора тяги в плоскости местного горизонта изменяется по закону, близкому к бинормальному (см. рисунок 6, д).

Обобщённая невязка носит убывающий характер (см. рисунок 6, е).



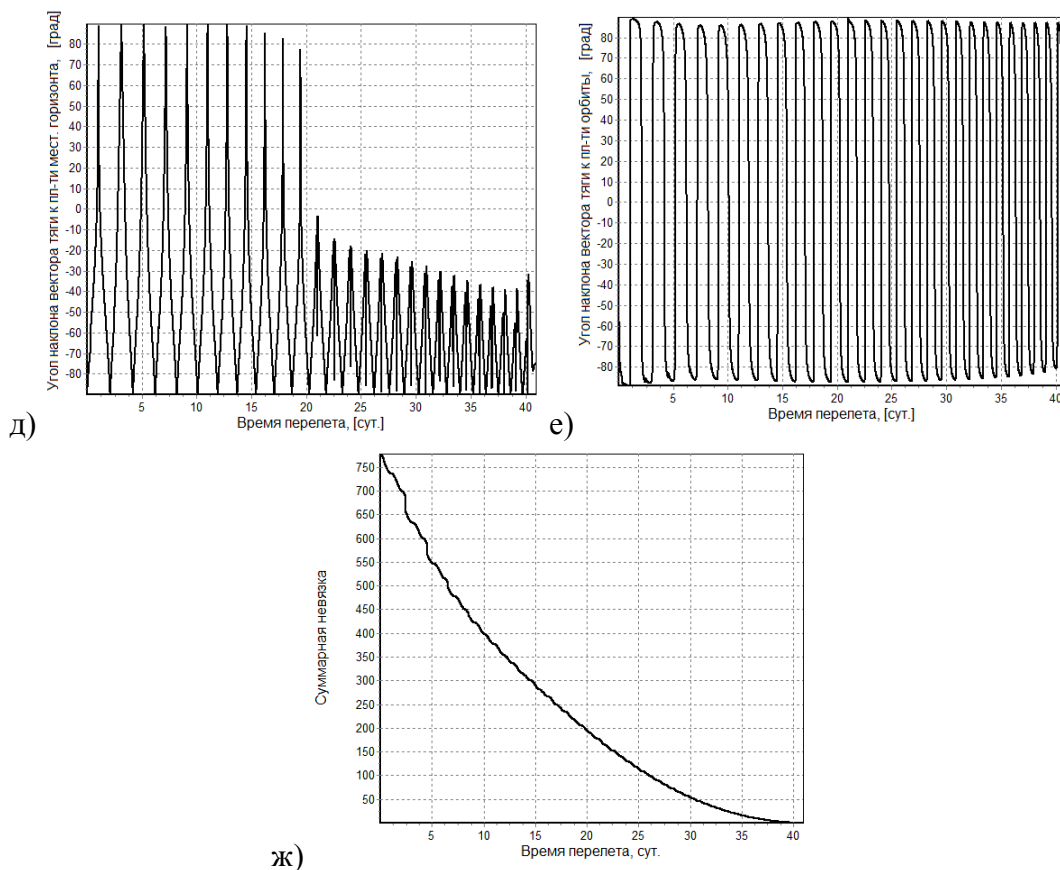


Рисунок 6 – Зависимость большой полуоси (а), эксцентриситета (б), наклона (в), весовых коэффициентов (г), угла наклона вектора тяги к плоскости местного горизонта (д), угла наклона вектора тяги к плоскости орбиты (е), и обобщённой невязки (ж) от времени перелёта

Список использованных источников:

1. Отчет о НИР: Транспортные модули на базе комбинации современных химических двигателей и электроракетных двигательных установок для транспортных перевозок «орбита – орбита». – НИИПМЭ, 1998
2. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука. 1975. 702 с.
3. Пиявский С.А., Брусов В.С., Хвилон Е.А. Оптимизация параметров многоцелевых летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1974. 168 с.
4. Лебедев В.Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой, - М: ВЦ АН СССР, 1968. – 108 с.
5. Механика космического полета: Учебник для втузов/ М.С. Константинов, Е.Ф. Каменков, Б.П. Перелыгин, В.К. Безвербый; Под ред. В.П. Мишина. – М.: Машиностроение, 1989. – 408 с.: ил.

6. Салмин В. В. Оптимизация космических перелётов с малой тягой. Проблемы совместного управления траекторным и угловым движением. – М.: Машиностроение, 1978. – 208 с.
7. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. – М.: Наука, 1985
8. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.-446 с.
9. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С.Понтрягин, А.Г.Болтянский [и др.]; под ред. Л.С. Понтрягина .- М.: Наука, 1976. - 392 с.
10. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем, М.: Наука, 1975, 528с.