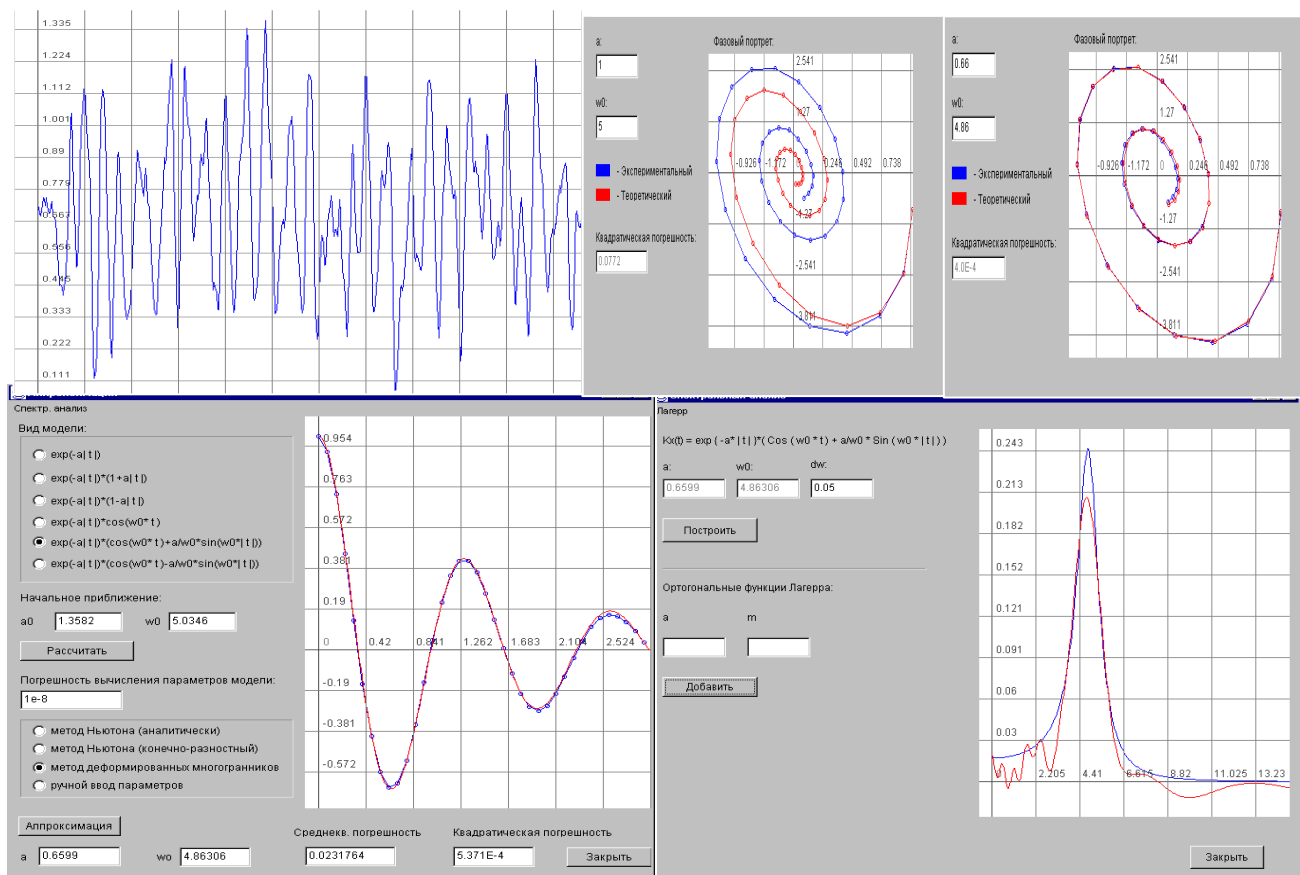


ПРИКЛАДНОЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Под редакцией
С.А. Прохорова



Самара 2007



Прохоров Сергей Антонович – доктор технических наук, профессор, академик Международной академии информатизации, член-корреспондент Российской академии естественных наук, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, лауреат губернской премии в области науки и техники и Ленинского комсомола, награжден медалями Келдыша М.В., Гагарина Ю.А. федерации космонавтики РФ, изобретателя СССР, «За заслуги перед городом Самара», заведующий кафедрой информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета.

В качестве председателя Головного Совета Минвуза России по автоматизации научных исследований в период 1988-1996 г.г. руководил разработкой и выполнением шести научно-исследовательских программ и подпрограмм АН СССР, Минэлектронпрома

СССР, Минвуза России.

Результаты его работы нашли отражение в 275 научных трудах, в том числе 14 монографиях, 12 брошюрах, 40 авторских свидетельствах, 6 работах опубликованных за рубежом, выступлениях более чем на 80 международных, Всесоюзных и республиканских конференциях и симпозиумах.

Графкин Алексей Викторович – кандидат технических наук, ассистент кафедры информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Результаты его работы нашли отражение в 20 научных трудах, в том числе 3 монографиях, выступлениях на 7 международных конференциях.



Графкин Владимир Викторович – аспирант кафедры информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Результаты его работы нашли отражение в 15 научных трудах, в том числе 1 монографии, выступлениях на 5 международных конференциях.





Дегтярева Ольга Александровна – кандидат технических наук, ассистент кафедры программных систем Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Результаты работы нашли отражение в 10 научных трудах, в том числе 1 монографии, в выступлениях на 5 международных и всероссийских симпозиумах и конференциях.

Иващенко Антон Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры "Информационные системы и технологии" Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Результаты его работы нашли отражение в 47 научных трудах, в том числе 5 монографиях, выступлениях на 10 международных конференциях.



Кудрина Мария Александровна – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Результаты ее работы нашли отражение в 15 научных трудах, в том числе 1 монографии, выступлениях на 4 международных конференциях, а также 2 учебно-методических работах.



Куликовских Илона Марковна - студентка факультета информатики кафедры информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Результаты её работы нашли отражение в 9 научных трудах, в том числе 1 монографии, 5 международных и всероссийских конференциях.



Лезин Илья Александрович – аспирант кафедры информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Результаты его работы нашли отражение в 9 научных трудах, в том числе 1 монографии, выступлениях на 4 международных конференциях.

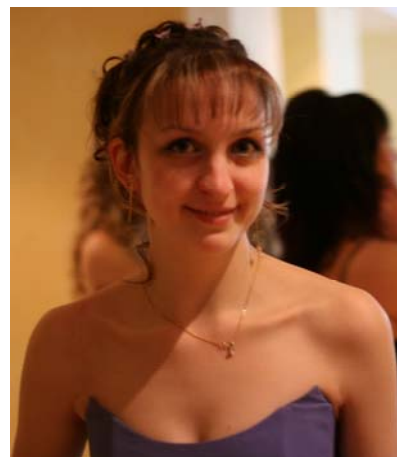


Лезина Ирина Викторовна – аспирантка кафедры информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Результаты её работы нашли отражение в 10 научных трудах, в том числе 1 монографии, выступлениях на 4 международных конференциях.

Москаленко Ирина Сергеевна – аспирантка кафедры информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Результаты её работы нашли отражение в 10 научных трудах, в том числе 1 монографии, выступлениях на 4 международных конференциях.





Сапожникова Елизавета Сергеевна - соискатель кафедры информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Результаты её работы нашли отражение в 4 научных работах, в том числе 1 монографии.

Станкевич Артур Игоревич – аспирант кафедры информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Результаты его работы нашли отражение в 10 научных трудах, в том числе 1 монографии, выступлениях на 4 международных конференциях.



Широков Олег Юрьевич – кандидат технических наук, ассистент кафедры информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Результаты его работы нашли отражение в 10 научных трудах, в том числе 1 монографии, выступлениях на 2 международных конференциях.

УДК 681.518.3, 514:681.323/043.3/

Рецензенты:

Заслуженный деятель науки РФ, член-корреспондент РАН, д.т.н., профессор Сойфер В.А.;

д.ф.-м.н., профессор Жданов А.И.

Прикладной анализ случайных процессов. Под ред. Прохорова С.А./ СМЦ РАН, 2007, 582 с., ил.

ISBN 978-5-93424-283-2

Рассматриваются математическое описание, методы и алгоритмы моделирования случайных процессов, потоков событий, неэквидистантных временных рядов с заданными вероятностными характеристиками, а также методы и алгоритмы их оценки.

Анализируются методы, алгоритмы анализа законов распределения, характеристических функций, корреляционно-спектральных функций, структурных функций, основанные на применении классического подхода, а также с использованием интервальной корреляционной функции.

Рассматриваются задачи вторичной обработки временных рядов, включающие: идентификацию случайных процессов по виду функциональной характеристики, аппроксимацию законов распределения, характеристических, корреляционных, структурных функций, спектральных плотностей мощности параметрическими моделями, представляющими собой как функции заданного вида, так и ортогональные функции экспоненциального типа.

Приводится описание разработанных автоматизированных информационных систем для аппроксимативного анализа функциональных вероятностных характеристик и лабораторного практикума, основанного как на применении автоматизированных систем, так и математического пакета MATHCAD.

Рассматриваются примеры решения прикладных задач с использованием разработанных автоматизированных информационных систем.

Предназначена для преподавателей, научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по прикладному анализу случайных процессов.

Печатается по решению издательского совета Самарского научного центра Российской академии наук.

ISBN 978-5-93424-283-2

© С.А. Прохоров 2007

ПРЕДИСЛОВИЕ	7
ВВЕДЕНИЕ	9
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ	13
1.1. Основные понятия и определения	13
1.2. Математическое описание случайных величин	19
1.3. Функции случайных аргументов	21
1.4. Системы случайных величин	22
1.5. Математическое описание случайных сигналов	26
1.6. Корреляционные характеристики	33
1.7. Структурные функции	38
1.8. Спектральные характеристики	41
1.9. Математическое описание случайных потоков событий	47
1.10. Математическое описание неэквидистантных временных рядов	54
1.11. Типовые модели неэквидистантных временных рядов	61
2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	73
2.1. Моделирование временных рядов типа «белого» шума	73
2.2. Моделирование ПСП с заданным законом распределения	76
2.2.1. Метод обратной функции	76
2.2.2. Приближенный метод моделирования	78
2.3. Моделирование потоков событий с заданными свойствами	85
2.4. Проверка качества генерирования псевдослучайных последовательностей	90
2.5. Моделирование временных рядов с заданным видом корреляционной функции	94
2.6. Анализ методических погрешностей генерирования ПСП с заданным видом корреляционных функций	97
2.7. Экспериментальные исследования точностных характеристик программных генераторов ПСП с заданным видом корреляционных	101
2.8. Проверка качества генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций	106
2.9. Моделирование N ПСП с заданным видом корреляционных функций, некоррелированных между собой	114
2.10. Генерирование 2-х ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функций	115
2.11. Генерирование ПСП с заданным видом корреляционной функции и законом распределения отличным от нормального	119
2.12. Генерирование неэквидистантных временных рядов	124
2.13. Генерирование нестационарных временных рядов	127
3. АППРОКСИМАТИВНЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	130
3.1. Основные понятия и определения	130
3.2. Метод аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида	134
3.3. Аппроксимация корреляционных функций параметрическими моделями с помощью ЭВМ	139
3.3.1. Аппроксимация корреляционных функций функциями заданного вида методом Ньютона (с аналитическими производными)	141
3.3.2. Аппроксимация корреляционных функций функциями заданного вида методом Ньютона (с конечно-разностными производными)	144
3.3.3. Аппроксимация корреляционных функций функциями заданного вида методом деформированного многогранника	149
3.4. Аппроксимация законов распределения	154
3.4.1. Основные понятия и определения	154

3.4.2.	Метод моментов	159
3.4.3.	Аппроксимация плотностей распределения вероятностей параметрическими моделями	162
3.4.4.	Аппроксимация функций распределения вероятностей	166
4.	ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	169
4.1.	Ортогональные полиномы и функции	169
4.2.	Частотные свойства ортогональных функций	173
4.3.	Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями	175
4.4.	Оценка параметра масштаба ортогональных функций	183
4.5.	Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями при ограничениях на ее модель	189
4.6.	Аппроксимация взаимных корреляционных функций	193
4.7.	Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями с помощью ЭВМ	196
4.8.	Аппроксимативный корреляционный анализ неэквидистантных временных рядов	200
4.9.	Ортогональные модели структурного анализа	212
4.10.	Ортогональные модели спектральных плотностей мощности	223
4.10.1.	Взаимный спектральный анализ	224
4.10.2.	Аппроксимация спектральной плотности мощности	227
4.10.3.	Аппроксимация составляющих взаимного спектра	231
4.10.4.	Оценка спектральной плотности мощности по параметрам ортогональной модели структурной функции	233
4.11.	Оценка корреляционной функции по параметрам модели спектральной плотности мощности	235
4.12.	Спектральная функция	239
4.13.	Анализ обобщенных корреляционно-спектральных характеристик	242
4.13.1.	Интервалы корреляции	242
4.13.2.	Оценка моментов корреляционных функций	244
4.13.3.	Оценка эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса	244
4.14.	Аппроксимация законов распределения ортогональными полиномами	248
4.15.	Аппроксимация плотности распределения вероятностей ортогональными функциями	256
4.16.	Аппроксимация плотностей распределения вероятностей ортогональными функциями на бесконечном интервале	261
4.17.	Ортогональные модели характеристических функций	264
4.18.	Ортогональные модели нестационарных случайных процессов по математическому ожиданию и дисперсии	265
5.	АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ АППРОКСИМАТИВНОГО АНАЛИЗА ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	268
5.1.	Принципы проектирования автоматизированных систем аппроксимативного анализа вероятностных характеристик случайных процессов	268
5.2.	Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа случайных процессов	277
5.3.	Автоматизированная система взаимного корреляционно-спектрального анализа случайных процессов	283
5.4.	Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах Лагерра, Лежандра, Дирихле	294
5.5.	Автоматизированная учебно-исследовательская система аппроксима-	

	тивного анализа корреляционно-спектральных характеристик	313
5.6.	Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах Якоби	347
5.7.	Автоматизированная система структурного анализа случайных процессов	360
5.8.	Подсистема генерирования псевдослучайных последовательностей автоматизированной системы аппроксимативного анализа законов распределения	369
5.9.	Автоматизированная система для аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов	377
5.10.	Автоматизированная система аппроксимативного анализа законов распределения ортогональными полиномами и нейросетевыми функциями	391
5.11.	Автоматизированная система аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов	406
5.12.	Автоматизированная система аппроксимативного анализа нестационарных процессов	416
5.13.	Система имитационного моделирования преобразования Фурье	425
6.	ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ НА БАЗЕ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ	439
6.1.	Основные понятия и определения	439
6.2.	Моделирование некоррелированных временных рядов	442
6.3.	Моделирование некоррелированных временных рядов приближенным методом	443
6.4.	Моделирование коррелированных временных рядов	445
6.5.	Моделирование неэквидистантных временных рядов с заданным видом корреляционных функций	446
6.6.	Моделирование коррелированных временных рядов с заданными корреляционно-спектральными свойствами	447
6.7.	Аппроксимация законов распределения параметрическими моделями	449
6.8.	Аппроксимация законов распределения ортогональными полиномами	450
6.9.	Аппроксимация корреляционных функций и спектральных плотностей мощности параметрическими моделями	451
6.10.	Аппроксимация взаимных корреляционных функций и спектральных плотностей мощности параметрическими моделями	452
6.11.	Аппроксимация корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями	454
6.12.	Аппроксимация взаимной корреляционной функции ортогональными функциями	455
6.13.	Аппроксимативный корреляционно-спектральный анализ экспериментальных данных	456
6.14.	Аппроксимация корреляционных функций и спектральных плотностей мощности неэквидистантных временных рядов параметрическими моделями	458
6.15.	Аппроксимация корреляционных функций и спектральных плотностей мощности неэквидистантных временных рядов ортогональными функциями Лагерра	459
7.	ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ В СИСТЕМЕ MATHCAD	461
7.1.	Исследование свойств ортогональных полиномов	461
7.2.	Исследование свойств ортогональных функций	463
7.3.	Определение максимальной длительности и интервала дискретизации ортогональных функций	466

7.4.	Частотные характеристики ортогональных функций	468
7.5.	Ортогональные модели корреляционных функций	469
7.6.	Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями при ограничении на её модель	471
7.7.	Аппроксимация спектральных плотностей мощности	472
8.	ПРИМЕНЕНИЕ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ	474
8.1.	Анализ гидрологических параметров в открытой части Балтийского моря	474
8.2.	Анализ звукопоглощающих характеристик самолетных конструкций	483
8.3.	Диагностика амортизаторов передней подвески автомобилей	487
8.4.	Анализ электрических сигналов нейронов, нервов и мышц	495
8.5.	Методика и результаты обработки вариабельности сердечного ритма	498
8.6.	Аппроксимация импульсных и частотных характеристик ортогональными функциями Лагерра	510
8.7.	Корреляционно-спектральный анализ котировок акций топливно-энергетических компаний	517
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	522
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	523
	ПРИЛОЖЕНИЯ	532
П.1.	Типовые законы распределения	532
П.2.	Характеристические функции	537
П.3.	Обратные функции законов распределения	539
П.4.	Характеристики типовых законов распределения ($P_d=0,999$)	540
П.5.	Таблица χ^2 распределения	543
П.6.	Таблица значений коэффициента λ к критерию Колмогорова	543
П.7.	Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом нерекурсивной фильтрации	544
П.8.	Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом рекурсивной фильтрации	545
П.9.	Импульсные характеристики формирующих фильтров	547
П.10.	Графики взаимной корреляционной функции	556
П.11.	Импульсные характеристики для типовых аппроксимирующих выражений КФ	568 570
П.12.	Передаточные функции фильтров с регулируемыми параметрами	572
П.13.	Обобщенные спектральные характеристики	573
П.14.	Форма представления и характеристики ортогональных полиномов	
П.15.	Форма представления и характеристики ортогональных функций	574
П.16.	Формат вводимых и выводимых файлов	575
П.17.	Диаграммы вариантов использования подсистем аппроксимативного анализа	578
	СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	580

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая Вашему вниманию монография подготовлена для преподавателей, научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по прикладному анализу случайных процессов и дополняет следующие монографии и методические пособия [108, 111, 112, 114 - 118].

Материалы, представленные в монографии, получены в результате выполнения научно-исследовательских работ на кафедрах «Информационно-измерительная техника», «Информационная техника» Самарского государственного технического университета (СГТУ), «Информационные системы и технологии» Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ), Самарском филиале Российского НИИ информационных систем, естественно-математическом факультете Загребского университета и «Центре исследования моря» института «Руджер Бошковиц» (г. Загреб, Хорватия), выполненных под руководством и при непосредственном участии Прохорова С.А.

Отдельные разделы монографии использовались при чтении лекций по ряду дисциплин при подготовке студентов по специальностям «Информационно-измерительная техника», «Автоматизированные системы обработки информации и управления» в СГАУ, СГУ, СГТУ, ВолГУ, ОГУ, СарГТУ, УГАТУ также для научных сотрудников и аспирантов в «Центре исследования моря» института «Руджер Бошковиц» (г. Загреб, Хорватия), на естественно-математическом факультете Загребского университета, международном университете подготовки аспирантов (г. Дубровник, Хорватия), Пекинском техническом университете (Китай).

Монография состоит из восьми разделов и приложений.

В первом разделе, посвященном математическому описанию сигналов, приводятся основные модели случайных процессов, потоков событий, временных рядов, в том числе неэквидистантных, и их основные характеристики, используемые как при моделировании, так и оценивании вероятностных характеристик исследуемых сигналов.

Во втором разделе рассматриваются особенности моделирования временных рядов, случайных потоков событий, неэквидистантных временных рядов.

Третий раздел посвящен аппроксимативному анализу функциональных вероятностных характеристик функциями заданного вида.

В четвертом разделе рассматриваются ортогональные модели вероятностных характеристик случайных процессов, проводится исследование разработанных алгоритмов аппроксимативного анализа.

Пятый раздел посвящен описанию автоматизированных систем, предназначенных для аппроксимативного анализа вероятностных характеристик случайных процессов.

В шестом разделе описывается лабораторный практикум, целиком поставленный на разработанных автоматизированных системах. В нём учтены замечания преподавателей, аспирантов и студентов, отмеченные в ходе выполнения лабораторных работ предыдущего лабораторного практикума [5-8] на кафедре информационных систем и технологий СГАУ.

В седьмом разделе описывается лабораторный практикум, поставленный с использованием математического пакета MATHCAD, в котором изучаются основные

свойства ортогональных моделей. Лабораторный практикум применялся при подготовке специалистов на кафедре информационных систем и технологий СГАУ и СГУ.

В восьмом разделе, в качестве примера, описано решение ряда прикладных задач с использованием разработанных автоматизированных систем.

Книга представляет коллективный труд.

Общий замысел книги и разработка её плана принадлежит С.А. Прохорову, написавшему большую часть книги (1-4, 6-7 разделы, подразделы 8.1, введение, заключение) на основе читанных на протяжении ряда лет курсов лекций.

Пятый и восьмой разделы написаны С.А. Прохоровым совместно с:

Графкиным А.В. – 5.4, 8.3, 8.4

Графкиным В.В. -5.7;

Дегтяревой О.А. – 5.8, 5.11;

Иващенко А.В. – 5.1, 5.3, 8.2, 8.6;

Кудриной М.А. – 5.2;

Куликовских И.М. – 5.6;

Лезиным И.А., Лезиной И.В. – 5.10;

Москаленко И.С. – 5.5;

Сапожниковой Е.С. – 8.5, 8.7;

Станкевичем А.И. – 5.12;

Широковым О.Ю. – 5.13.

В моделировании алгоритмов, тестировании программного комплекса на разных этапах работы принимали участие студенты кафедры информационных систем и технологий, которым авторы выражают свою благодарность.

Особую благодарность авторы выражают своим учителям, всем сотрудникам, аспирантам и студентам кафедры информационных систем и технологий СГАУ за обсуждение материалов монографии, лабораторного практикума, критические замечания которых по мере возможности были учтены.

Авторы глубоко благодарны к.ф.-м.н., доценту Усольцеву Л.П. за внимание к работе и постоянное обсуждение её на всех этапах.

Авторы считают своим долгом выразить глубокую признательность ректору СГАУ член-корреспонденту РАН, д.т.н., профессору Сойферу В.А. за постоянную поддержку, рецензию и неоценимую помощь при издании монографии, а также рецензенту заведующему кафедрой прикладной математики д.ф.-м.н., профессору Жданову А.И. за ценные замечания.

Большую благодарность авторы выражают директору Западно-Казахстанского филиала ОАО «Национальный центр экспертизы и сертификации» (г. Уральск) Графкину В.Н. за дружескую поддержку и издание монографии в Казахстане.

Замечания и пожелания по книге просьба направлять по адресу:

Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва, факультет информатики, кафедра «Информационные системы и технологии», заведующему кафедрой Прохорову С.А.

E-mail: INTERNET: sp@smr.ru

ВВЕДЕНИЕ

На пути создания образцов новой техники, технологических процессов научные исследования являются первым шагом, в процессе которого исследователь открывает новые законы, закономерности, совершает научные открытия.

Научные исследования представляют собой сложный, итерационный процесс, представляющий сочетание теоретических, включая методы моделирования, и экспериментальных методов.

Не умаляя достоинств теоретических методов исследования, значение экспериментальных методов трудно переоценить. Только с помощью эксперимента возможно получение достоверной информации об исследуемом объекте в реальном масштабе времени, после обработки которой возможно построение её модели. Открыв новый эффект, новое явление экспериментальным путем, которые невозможно объяснить на базе существующих теорий, экспериментатор стимулирует развитие фундаментальной науки. В то же время, получив новый теоретический научный результат, исследователь, с целью подтверждения основных положений новой теории, нуждается в его экспериментальной проверке.

При проведении экспериментальных научных исследований исследователь:

1. ставит задачу исследований в терминах предметной области;
2. строит модель исследуемого объекта и определяет вектор информативных параметров $\vec{\Omega}$, адекватно описывающий ее в рамках поставленной задачи;
3. с помощью технических средств осуществляет измерение, регистрацию и обработку мгновенных значений наблюдаемых процессов $\vec{X}(\vec{\Theta}, t)$, с целью определения вектора информативных параметров $\vec{\Theta}$, описывающих модель процесса;
4. по результатам обработки информации устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами $\vec{\Omega}$ и $\vec{\Theta}$:

$$\vec{\Omega} = \Phi(\vec{\Theta}),$$

используемое для построения искомой модели объекта;

5. анализирует полученные результаты;
6. если результаты его устраивают - эксперимент окончен, в противном случае необходимо повторить пункты 3, 4 (точность полученных результатов неудовлетворительна), или пункты 2 - 4 (вектор параметров $\vec{\Omega}$ не полно описывает поведение объекта), а иногда и пункты 1 - 4 (ставится другая задача).

Следует отметить, что задачи 1, 2 и 4, 5, как правило, решает специалист данной предметной области, формулируя и интерпретируя ее в терминах предметной области, а 3 задачу - специалисты в области измерения и обработки измерительной информации.

Такое разделение функций между исследователем и специалистом в области измерения и обработки измерительной информации позволяет последнему абстрагироваться от конкретных физических объектов и вектора физических параметров $\vec{\Omega}$ и непосредственно перейти:

1. к математическому описанию исследуемых процессов и определению вектора параметров $\vec{\Theta}$, достаточных для решения поставленной задачи;
2. сбору информации с помощью первичных преобразователей;
3. оценке вектора параметров $\vec{\Theta}$ с помощью технических средств;

4. анализу точности полученных результатов;
5. аппроксимации полученных функциональных зависимостей с помощью параметрических моделей.

Каждая из перечисленных задач имеет свои специфические особенности, а эффективность решения четвертой и пятой - зависит от применяемых технических средств, построенных, как правило, на базе современных средств информационно-измерительной и вычислительной техники.

Решая разнообразные задачи научных исследований, исследователь на основании физических представлений и задачи исследований определяет составляющие вектора параметров случайного процесса $\bar{\Theta}$, дающие его исчерпывающее описание.

Основной подсистемой любого технического средства, предназначенного для получения и обработки измерительной информации является измерительно-вычислительный канал.

Под **измерительно-вычислительным каналом** понимается совокупность аппаратно-программных средств, предназначенных для измерения мгновенных значений соответствующей физической величины, обработки результатов измерения и представления конечных результатов в форме, удобной для дальнейшего использования.

Рассмотрим структуру отдельного измерительно-вычислительного канала.

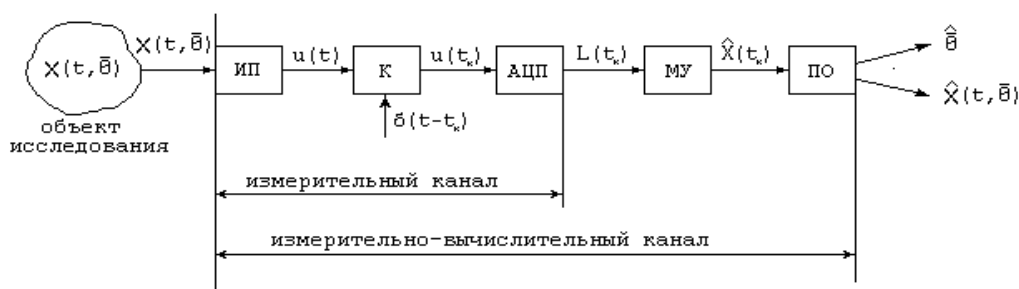


Рисунок В.1 - Измерительно-вычислительный канал

На рис. В.1 приняты следующие обозначения.

- **ИП** - измерительный преобразователь (датчик);
- **К** - коммутатор;
- **АЦП** – аналого-цифровой преобразователь;
- **МУ** - масштабирующее устройство;
- **ПО** - процессор обработки.

Рассмотрим преобразования, происходящие с сигналами в измерительно-вычислительном канале.

Независимо от природы измеряемой физической величины на выходе **ИП** получаем электрический сигнал. При этом, каждому значению физической величины ставится в соответствие вполне определенное значение электрической величины: $x(t, \bar{\Theta}) \rightarrow u(t)$.

Основным требованием, предъявляемым к **ИП**, является линейность:

$$u(t) = k x(t, \bar{\Theta}), \quad (\text{В.1})$$

где $k = \text{const}$ - коэффициент преобразования.

Следует отметить, что если связь между $u(t)$ и $x(t, \bar{\Theta})$ нелинейная, то производят линеаризацию функции преобразования, воспользовавшись, например, методом наименьших квадратов [44].

После **ИП** исследуемый сигнал поступает на вход коммутатора.

В коммутаторе непрерывный сигнал $u(t)$ преобразуется в последовательность отсчетов, отстоящих друг от друга на интервале $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Т.е. выполняется операция **дискретизации**:

$$u(t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \delta(t - t_i) dt, \quad (B.2)$$

где $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{если } t = t_i \\ 0, & \text{если } t \neq t_i \end{cases}$ - δ -функция Дирака. (B.3)

Отметим, что при коммутации возможны два варианта:

- $\Delta t_i = \text{const}$ - регулярная дискретизация;
- $\Delta t_i = \text{random}$ - нерегулярная дискретизация.

После коммутации сигнал поступает на аналого-цифровое преобразование, где последовательно подвергается процедурам **квантования** и **кодирования**.

Квантование - процедура отнесения непрерывного значения процесса $u(t_i)$ к ближайшему разрешенному целому уровню.

$$L(t_i) = \text{ent} = \left[\frac{|u(t_i)|}{\Delta u} + \lambda \right] = \text{Sing } u(t_i), \quad (B.4)$$

где $\text{ent}[]$ - операция взятия целой части числа;

Δu - шаг квантования по уровню;

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{при усечении} \\ 0,5, & \text{при округлении} \end{cases}.$$

$$\text{Sing } u = \begin{cases} 1, & \text{если } u > 0; \\ 0, & \text{если } u = 0; \\ -1, & \text{если } u < 0; \end{cases} \quad \text{- знаковая функция.} \quad (B.5)$$

В результате квантования сигнала получим целое число квантов, которое может кодироваться различными способами. При использовании двоичной системы счисления с весами 8-4-2-1 число двоичных разрядов, необходимых для представления $L(t_i)$ определяется выражением:

$$n = \log_2 \max |L(t_i)|. \quad (B.6)$$

Следует подчеркнуть, что в случае одноканальной системы операции коммутации и аналого-цифрового преобразования совпадают. В многоканальных же системах, как правило, применяется один коммутатор на несколько каналов.

После аналого-цифрового преобразователя сигнал поступает на вход масштабирующего устройства, выходной сигнал которого равен:

$$\mathcal{E}(t_k) = \frac{L(t_k) \Delta u}{k}. \quad (B.7)$$

Т.е. при этом происходит обратное преобразование: приведение электрического сигнала к измеряемой физической величине.

Далее сигнал поступает в процессор обработки - устройство, реализующее тот или иной алгоритм получения оценки параметров физического процесса $x(t, \vec{\Theta})$. При этом возможны два подхода к решению задачи оценки $\vec{\Theta}$:

1. в режиме экспресс-анализа с помощью алгоритма A_{Θ} оценивают вектор неизвестных параметров $\vec{\Theta} = A_{\Theta} \{ \mathcal{E}(t_k) \}$;

2. в режиме контроля и регистрации с помощью алгоритма A_s получают оценку сигнала $\mathcal{E}(t, \vec{\Theta}) = A_s\{\mathcal{E}(t_k)\}$, записывают его на какой-либо промежуточный носитель, а затем обрабатывают. При этом происходит задержка в обработке информации и, следовательно, в получении результата.

Таким образом, измерительно-вычислительный канал даёт возможность обрабатывать **временные последовательности случайных процессов - временные ряды**.

Выделяют первичную и вторичную статистическую обработку. Под **первичной** статистической обработкой будем понимать оценку вероятностных характеристик по ограниченному набору данных, под **вторичной** - построение аналитических моделей исследуемых процессов и их характеристик.

Следует отметить, что статистическая обработка позволяет:

- осуществить оценку одного параметра с помощью различных алгоритмов обработки информации;
- выбрать оптимальный алгоритм оценивания, соответствующий выбранному критерию;
- с целью построения новой или уточнённой модели осуществить оценку других параметров, описывающих эту модель.

При проведении исследований кроме аналитических методов часто применяется метод имитационного моделирования.

В предлагаемой Вашему вниманию монографии рассматриваются следующие задачи прикладного анализа случайных процессов:

1. математического описания;
2. моделирования;
3. идентификации;
4. оценивания вероятностных характеристик;
5. аппроксимации базовых вероятностных характеристик параметрическими моделями;
6. аппроксимативного анализа функционально-связанных вероятностных характеристик.

Все перечисленные задачи решаются с помощью автоматизированных систем, позволяющих получить аналитические модели типовых функциональных вероятностных характеристик случайных процессов:

- корреляционных функций;
 - структурных функций;
 - спектральных плотностей мощности;
 - спектральных функций
 - функций распределения;
 - плотностей распределения вероятностей;
 - характеристических функций;
 - обобщенных корреляционно-спектральных характеристик, -
- полученных как методом имитационного моделирования, так и в ходе экспериментальных исследований и комплексных испытаний.

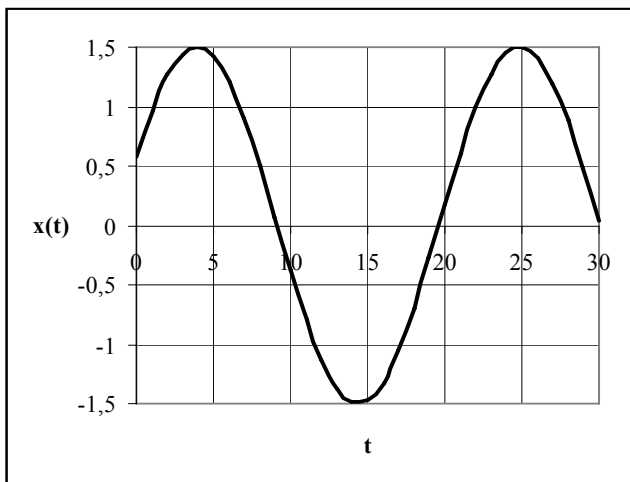
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ

1.1. Основные понятия и определения

Источником информации об измеряемой физической величине является электрический сигнал $x(t, \bar{\Theta})$, где $\bar{\Theta}$ - вектор неизвестных параметров, подлежащий определению с помощью специальных технических средств. Состав этого вектора зависит от класса решаемой задачи и определяется в каждом конкретном случае. Сигналом или процессом считается любая функция времени. При фиксированном моменте времени $t = t_i$ получим мгновенное значение измеряемой величины $x(t_i, \bar{\Theta})$. В зависимости от характера этой величины: **детерминированной** или **случайной**, - исследуемые процессы можно разделить на два класса: **детерминированные, случайные процессы** (сигналы).

Детерминированным является такой сигнал, который представляет собой известную функцию времени.

Для детерминированного сигнала, задав модель и числовые значения её параметров, можно определить его мгновенное значение для любого произвольного момента времени, например (см. рис. 1.1):



$$x(t, \bar{\Theta}) = A_m \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (1.1)$$

где $\bar{\Theta} = [A_m, \omega_0, \varphi]$ - вектор параметров модели.

В свою очередь, детерминированные сигналы делятся на непрерывные и импульсные. Непрерывные сигналы характеризуются тем, что в заданном диапазоне изменения они могут иметь бесконечное число значений. Для непрерывных сигналов справедливо следующее утверждение:

$$\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} x(t) = x(t_0). \quad (1.2)$$

Импульсные сигналы существуют на ограниченном интервале времени

$$x(t) = h(t) l(t_1 < t < t_2), \quad (1.3)$$

где $h(t)$ - функция, описывающая форму импульса;

$T_u = t_2 - t_1$ - длительность импульса.

$$l(0 < t < T_u) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < t < T_u; \\ 0, & \text{если } t > T_u. \end{cases} \quad \text{- единичная функция} \quad (1.4)$$

На рис. 1.2 приведен пример импульсного сигнала, представляющего собой выходной сигнал фильтра с импульсной характеристикой

$$h(t) = \frac{k}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \left(\cos \omega_0 t + \frac{\sqrt{1 + T^2 \omega_0^2} - 1}{T \omega_0} \sin \omega_0 t \right) \quad (1.5)$$

при подаче на его вход сигнала в виде δ -функции:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{если } t = 0; \\ 0, & \text{если } t \neq 0; \end{cases} \quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1. \quad (1.6)$$

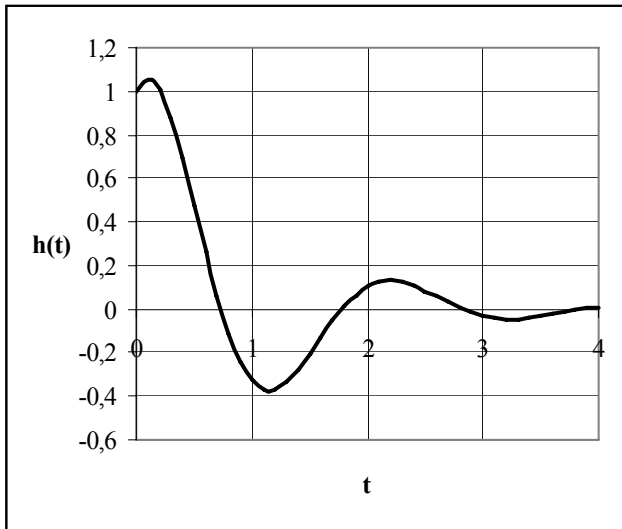


Рисунок 1.2 – Импульсный сигнал

Кроме того, детерминированные сигналы делятся на периодические и непериодические (единичные).

Периодическим называется процесс, для которого справедливо следующее свойство (см. рис. 1.1):

$$x(t + nT) = x(t) \mathbb{I}(t < T), \quad (1.7)$$

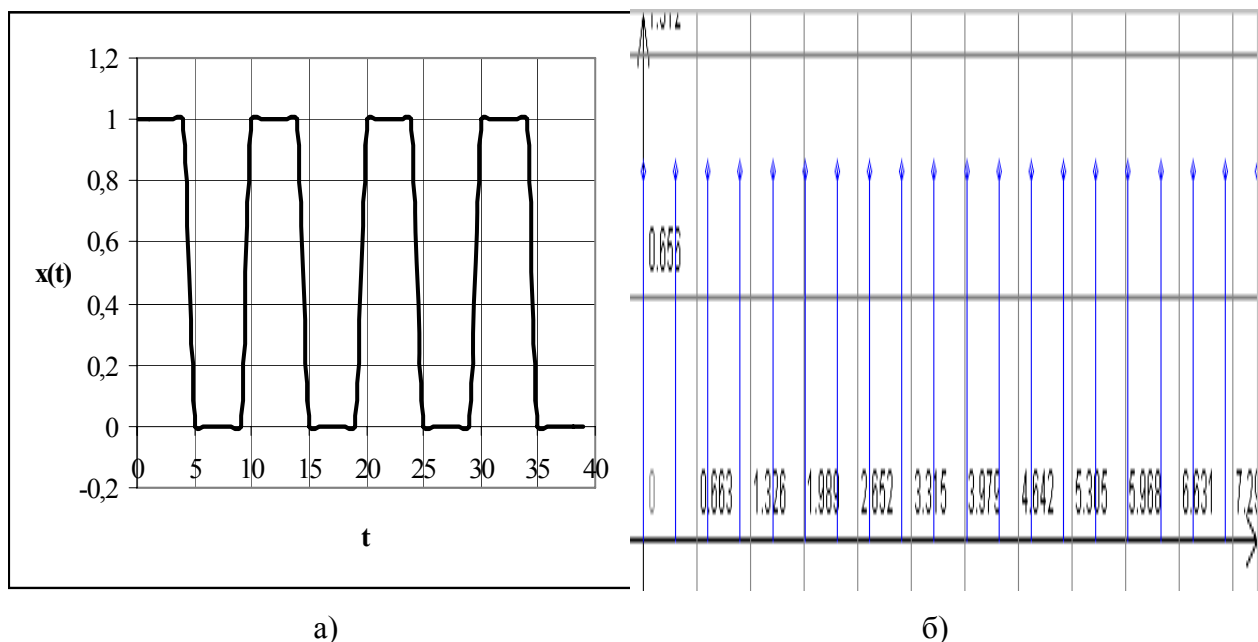
где T - период процесса, $n = 1, 2, \dots$

Для периодических импульсных сигналов характерно, что:

$$x(t + nT) = x(t) \mathbb{I}(0 < t < T) = h(t) \mathbb{I}(0 < t < T_u), \quad (1.8)$$

где T - период следования импульсов;
 T_u - длительность импульса.

На рис. 1.3 приведены примеры импульсных периодических сигналов, представляющие собой выходной сигнал генератора импульсов (рис. 1.3 а)), поток регулярных событий (точечный поток), поступающих, например, на вход информационно-измерительной системы (рис. 1.3 б)).



а) б)
Рисунок 1.3 – Импульсные периодические сигналы

Как правило, в процессе исследования определяются не все параметры, входящие в модель, а только те из них, которые необходимы для решения задачи.

Основные параметры детерминированных сигналов приведены в таблице 1.1.

Параметры детерминированных сигналов

Таблица 1.1

№	Название параметра	Определение
1	среднее значение	$X_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$
2	действующее значение	$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) dt}$
3	амплитудное значение	X_m -наибольшее значение измеряемого сигнала
4	коэффициент амплитуды	$k_a = \frac{X_m}{X}$
5	коэффициент формы	$k_\phi = \frac{X}{X_{cp}}$
6	период сигнала	T -минимальный интервал времени, через который повторяется сигнал
7	частота сигнала	$f = \frac{1}{T}$
8	длительность импульса	T_u - интервал времени от момента появления импульса до его окончания
9	скважность	$Q = \frac{T}{T_u}$

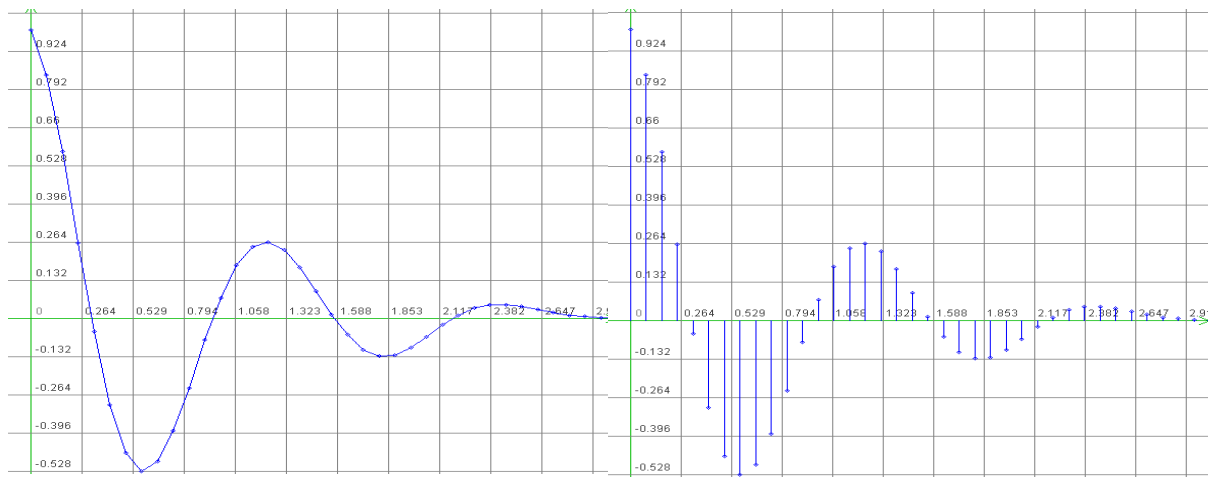
Как следует из таблицы 1.1, между амплитудным (пиковым), действующим и средним значениями существуют определенные соотношения, характеризующие формой сигнала, что даёт возможность решать задачи идентификации сигналов по измеренным значениям k_a и k_ϕ , а также измерять действующее, среднее и амплитудные значения сигналов разной формы с помощью приборов, проградуированных, например для синусоидальных сигналов.

Детерминированный сигнал, подвергнутый аналого-цифровому преобразованию, представляет собой временную последовательность (временной ряд), члены которой отстоят друг от друга на величину интервала дискретизации Δt_0 .

На рис. 1.4 б), в качестве примера, приведена реализация временного ряда импульсного сигнала, а на рис. 1.4 а) - непрерывная реализация того же сигнала.

Случайными называются процессы, численные значения которых невозможно определить (вычислить) для любого заданного момента времени. Отдельное наблюдение случайного процесса называется его **реализацией**. На рис. 1.5 приведен пример реализации случайного процесса.

При фиксации момента времени t_i $i = 0, 1, 2 \dots$ получаем случайную величину.



а) б)
Рисунок 1.4 - Реализация импульсного сигнала

Введем следующие обозначения: $X(t)$ - случайный процесс; $x_j(t)$ - j -я реализация процесса $X(t)$; $x_j(t_i)$ - мгновенное значение процесса $X(t)$, соответствующее значению j -й реализации в i -й момент времени.

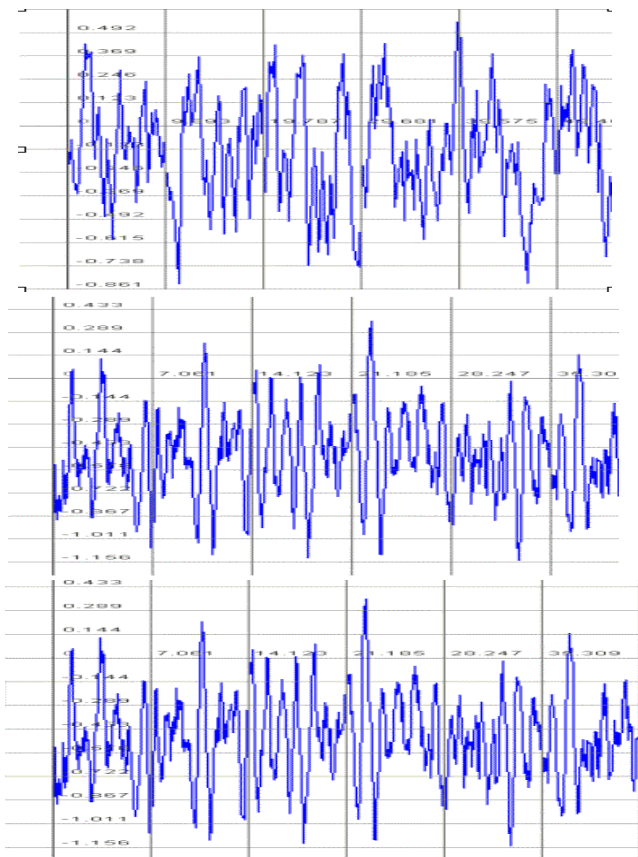


Рисунок 1.5 - Реализация случайного процесса

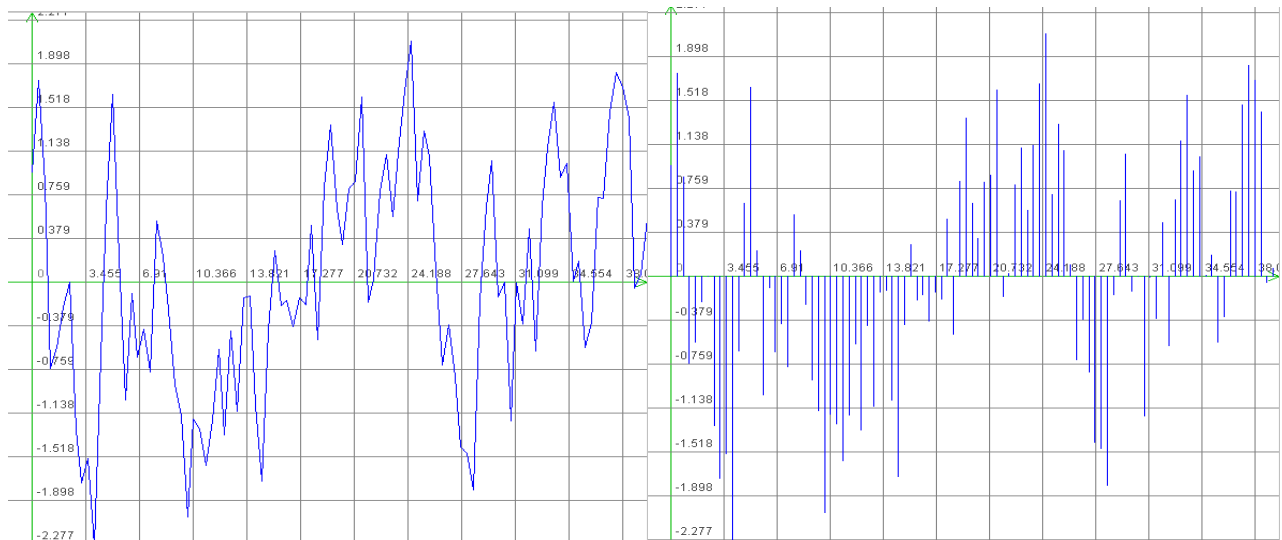
Совокупность мгновенных значений, соответствующих значениям различных реализаций в один и тот же момент времени t_i , назовем i -й последовательностью процесса $X(t)$ и обозначим $x(t_i)$.

Отсюда следует, что в качестве аргументов случайного процесса выступают **время и номер реализации** [174]. Хотя между этими координатами имеется принципиальное различие, заключающееся в том, что время может быть как непрерывным, так и дискретным, а номер реализации принимает только целочисленные значения, в теоретико-вероятностном плане они равноправны.

Следовательно, возможны два подхода к изучению свойств случайных процессов: первый, основанный на анализе множества реализаций, и второй, оперирующий множеством последовательностей.

Для каждого случайного процесса могут быть установлены область определения TN и область существования $X: t \in T, j \in N$ и $x \in X$. При этом T и X могут быть непрерывными, дискретными или смешанными, N - только дискретной [174].

Пример реализации дискретного случайного процесса (временной последовательности, временного ряда), имеющего в заданном диапазоне изменения ограниченное число значений, уровней, представлены на рис. 1.6 б). На рис 1.6 а) представлена соответствующая ему реализация случайного процесса.



а)

б)

Рисунок 1.6 - Реализации случайного процесса и временного ряда

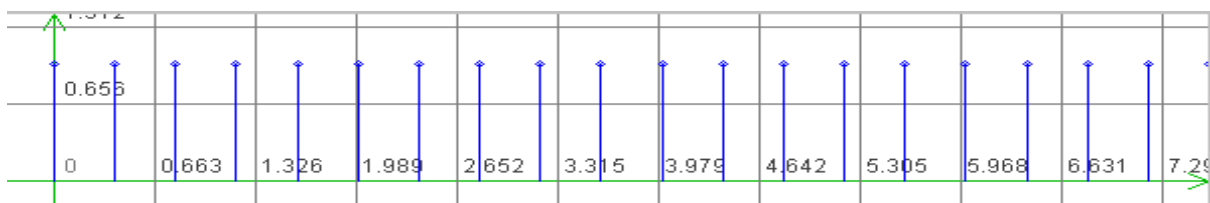
В процессе измерения интерес могут представлять как мгновенные значения $x_j(t_i)$, так и сами моменты измерения t_{ji} - потоки событий.

Под **потоком событий** будем понимать временную последовательность, характеризующую моментами наступления отдельных событий, независимо от природы этих событий.

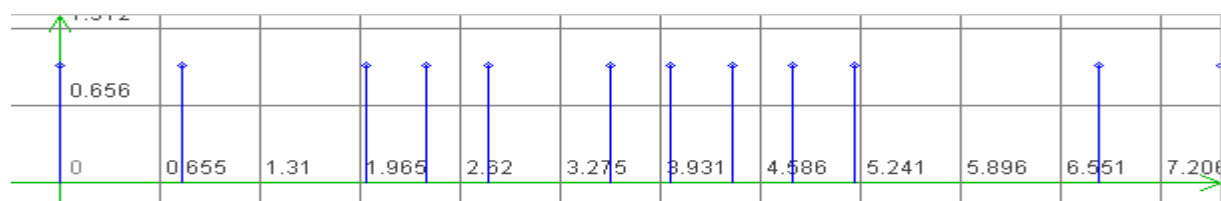
При этом можно выделить два случая:

- $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = const$ – регулярный (периодический) поток (см. рис. 1.7 а));
- $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = random$ нерегулярный (апериодический) поток (см. рис. 1.7

б)).



а) Регулярный поток



б) Нерегулярный поток

Рисунок 1.7 - Реализации потоков событий

При решении самых разнообразных научно-технических задач исследователю приходится сталкиваться с ситуациями, когда исследуемый процесс $X(t)$ представлен **неэквидистантным временным рядом**

$$\left[x_{ji}(t_{ji} / \Delta t_{ji}) \right]_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, Mj}, \text{ где } \Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \text{random}.$$

Заметим, что индекс i в этом случае характеризует лишь место отсчёта или метки времени в массивах, где хранятся входные данные, а не характеризует время наступления события. Примеры реализаций неэквидистантных временных рядов приведены на рис. 1.8.



Рисунок 1.8 - Примеры реализаций

$$\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \text{random} - \varphi_j(t_i);$$

6. случайные последовательности со случайными интервалами времени между отсчетами $\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \text{random} - X_j(t_i)$;

$$7. \text{ регулярный поток событий} - \delta(t - T_i) = \begin{cases} 1, \text{ если } t = T_i \\ 0, \text{ если } t \neq T_i \end{cases};$$

$$8. \text{ случайный поток событий} - \delta(t - t_i) = \begin{cases} 1, \text{ если } t = t_i \\ 0, \text{ если } t \neq t_i \end{cases}, \text{ где } t_i = \text{random}.$$

Каждый из перечисленных классов имеет своё характерное описание - **математическую модель**, параметры которой подлежат определению как с помощью теоретических, так и экспериментальных методов исследования. Различные комбинации этих процессов дает возможность построить более сложные модели процессов, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при моделировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки с целью определения их метрологических характеристик.

Выделим восемь классов важнейших процессов, которые встречаются на практике при решении самых разнообразных задач:

1. детерминированные процессы - $\varphi(t)$;

2. случайные процессы - $X(t)$;

3. детерминированные последовательности с регулярными интервалами времени между отсчетами $T = \text{const}$ - $\varphi(iT)$;

4. случайные последовательности с регулярными интервалами времени между отсчетами $\Delta t = \text{const}$ - $X_j(i\Delta t_0)$, где j - номер реализации;

5. детерминированные последовательности со случайными интервалами времени между отсчетами

1.2. Математическое описание случайных величин

Основой для математического описания случайных процессов и потоков событий является математическое описание случайных величин.

Для описания случайных величин в практических приложениях наиболее часто применяются [51]:

- законы распределения случайных величин;
- числовые характеристики законов определения.
- характеристические функции.

Законом распределения называется функциональная зависимость, устанавливающая связь между возможным значением случайной величины и вероятностью появления этого значения.

Законы распределения записываются в виде:

- функции распределения вероятностей - $F_x(x) = P(X < x)$;
- плотности распределения вероятностей - $f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}$.

Приведем основные свойства законов распределения (см. табл. 1. 2).

Свойства законов распределения

Таблица 1. 2

	$f_x(x)$	$F_x(x)$
1	$f_x(x) \geq 0$	$F_x(x_2) \geq F_x(x_1)$ при $x_2 \geq x_1$
2	$P(x < X, x + dx) = f_x(x)dx$	$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F_x(x_2) - F_x(x_1)$
3	$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x)$	$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(x)dx$
4	$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1$	$F_x(\infty) = 1$
5	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_x(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f_x(x) = 0$	$F_x(-\infty) = 0$

Аналитические выражения наиболее часто встречающихся законов распределения вероятности приведены в приложении П. 1.

Законы распределения дают исчерпывающее описание случайной величины. Однако для их экспериментального определения требуется большой объём данных и, следовательно, большие материальные затраты. В большинстве же практических случаев для описания случайных величин применяют приближенные методы, основанные на знании числовых характеристик.

К числовым характеристикам относятся: начальные и центральные моменты k -го порядка, мода, медиана, коэффициенты вариации и формы, пикфактор и т.д. [51].

• Начальным моментом k -го порядка называется величина, определяемая выражением:

$$\alpha_k = M[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_x(x) dx, \quad (1.9)$$

где $M[]$ - операция нахождения математического ожидания.

Из начальных моментов наиболее часто применяются:

1. $\alpha_1 = M[X] = m_x$ - математическое ожидание, характеризующее среднее значение оцениваемой случайной величины;

2. $\alpha_2 = M[X^2]$ - мощность случайной величины.

• Центральные моменты k -го определяются в виде:

$$\mu_k = M\left[\overset{\circ}{X}^k\right],$$

где $\overset{\circ}{X} = X - m_x$ - центрированная случайная величина.

Из них наиболее часто применяются:

1. $\mu_2 = \sigma_x^2$ - дисперсия процесса, характеризующая разброс значений случайной величины относительно математического ожидания;

2. $\mu_3 = M\left[\overset{\circ}{X}^3\right]$ - характеризует симметричность закона распределения. Для устранения зависимости μ_3 от дисперсии вводят коэффициент асимметрии $K_a = \mu_3 / \sigma_x^3$;

3. $\mu_4 = M\left[\overset{\circ}{X}^4\right]$ - характеризует островершинность закона распределения.

В качестве базового закона (закона сравнения) был выбран нормальный закон, для которого $\mu_4 = 3\sigma_x^4$. Для удобства сравнения ввели понятие коэффициента эксцесса $K_\varepsilon = \mu_4 / \sigma_x^4 - 3$.

Моменты, коэффициенты асимметрии и эксцесса применяются при решении самых разнообразных прикладных задач, например для:

1. упрощенного описания случайной величины;

2. идентификации закона распределения случайной величины с использованием кривых Пирсона [51];

3. построения аналитического выражения закона распределения в виде ряда Грамма-Шарлье по той или иной системе ортогональных функций, например: Эрмита, Лежандра и т. д. [79];

4. определения динамического диапазона случайной величины.

• Мода - Mo - наиболее вероятное значение случайной величины X , определяемое в результате решения уравнения:

$$f'_x(x) = 0. \quad (1.10)$$

• Медиана - Me - определяется из уравнения

$$P\{x < Me\} = 0,5 \quad (1.11)$$

и делит площадь под кривой распределения пополам.

• Коэффициент вариации $\chi = \sigma_x / m_x$, применяемый при метрологическом анализе результатов измерения.

• Коэффициент формы $K_\phi = M\left[\overset{\circ}{x}\right] / \sigma_x$ характеризует форму кривой распределения и применяется, например, при оценке релейной корреляционной функции [97].

• Пикфактор - $\eta = |x_{max}| / \sigma_x$ - применяется при оценке динамического диапазона случайной величины.

Значения числовых характеристик для типовых законов распределения приведены в приложении П.1.

При решении разнообразных задач полезной характеристикой случайной величины является её характеристическая функция - математическое ожидание комплексной случайной величины e^{iux} , рассматриваемое как функция параметра u [79]:

$$\varphi_x(u) = M[e^{iux}]. \quad (1.12)$$

Так как $|e^{iux}| = 1$ при любых действительных u и x , то вследствие основного свойства плотности вероятности характеристическая функция при любом действительном значении u не превосходит по модулю единицы и равна единице при $u = 0$.

Характеристическая функция и плотность распределения вероятности случайной величины связаны парой взаимно обратных преобразований Фурье [79]:

$$\varphi_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) f_x(x) dx; \quad (1.13)$$

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iux) \varphi_x(u) du. \quad (1.14)$$

Таким образом, характеристическая функция случайной величины также является её полной вероятностной характеристикой.

Примеры характеристических функций для типовых законов распределения приведены в приложении П.2.

Зная характеристическую функцию, можно просто определить начальные и центральные моменты случайной величины [79]:

$$\alpha_k = \frac{1}{i^k} \varphi_x^{(k)}(0), \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (1.15)$$

$$\mu_k = \frac{1}{i^k} [\exp(-iut_x) \varphi_x(u)]_{u=0}, \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (1.16)$$

1.3. Функции случайных аргументов

При решении разнообразных практических задач часто возникает необходимость в определении закона распределения случайных величин, представляющие собой функции некоторых других случайных величин, имеющих известные законы распределения [79].

Пусть случайная величина Y представляет собой однозначную функцию случайной величины X :

$$y = g(x). \quad (1.17)$$

Задача состоит в определении плотности распределения вероятности $f_y(y)$ по известной плотности распределения вероятности $f_x(x)$.

Вероятность того, что значение ξ заключено в промежутке $[x, x + dx]$, должна быть равна (вследствие однозначной связи между X и Y вероятности того, что значение η заключено в соответствующем промежутке $[y, y + dy]$ [79]

$$P(x < \xi < x + dx) = P(y < \eta < y + dy). \quad (1.18)$$

Выражение (1.18) представим в виде (см. табл. 1. 2)

$$f_x(x)dx = f_y(y)dy. \quad (1.19)$$

Отсюда следует, что

$$f_y(y) = f_x(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|. \quad (1.20)$$

Производную необходимо брать по абсолютному значению, так как плотность распределения всегда неотрицательна. Подставив вместо x в выражение (1.20) обратную функцию $x = \varphi(y)$, окончательно получим

$$f_y(y) = f_x[\varphi(y)] \left| \frac{d}{dx} \varphi(y) \right|. \quad (1.21)$$

Если функция $x = \varphi(y)$ является двузначной, нужно формулу (1.21) применять дважды, т.е. к каждой ветви кривой $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$.

Если требуется определить только моментные характеристики, то задачу можно решить, не определяя плотности распределения вероятности:

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^k f_x(x) dx; \quad (1.22)$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (g(x) - m_y)^k f_x(x) dx. \quad (1.23)$$

Функция случайного аргумента применяется при моделировании псевдослучайных последовательностей с заданным законом распределения методом инверсного преобразования [114, 116, 166, 185].

1.4. Системы случайных величин

В некоторых случаях приходится рассматривать совместно несколько случайных величин. Совокупность n случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_m$ удобно рассматривать как одну m -мерную векторную случайную величину, составляющие которой являются величины $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Часть вероятностных характеристик, описывающих n -мерную случайную величину, по смыслу совпадают и являются обобщением соответствующих характеристик одномерной случайной величины. Другая часть характерна только для векторных случайных величин, например, условные функции и плотности распределения вероятности [158].

К ним относятся:

- функции и плотности распределения вероятности;
- условные функции и плотности распределения вероятности;
- характеристическая функция;
- начальные моменты $r + s$ порядка случайного вектора -

$$\alpha_{rs} = M[x^r y^s];$$

- центральные моменты $r + s$ порядка случайного вектора -

$$\mu_{rs} = M \left[\overset{\circ}{x}^r \overset{\circ}{y}^s \right].$$

Рассмотрим все характеристики на примере системы, состоящей из двух случайных величин.

Функцией распределения двумерного случайного вектора с составляющими X и Y или совместной функцией распределения двух случайных величин называется

вероятность совместного выполнения неравенств $X < x$, $Y < y$, рассматриваемая как функция двух переменных [158]:

$$F(x, y) = P\left(\begin{matrix} X < x \\ Y < y \end{matrix}\right). \quad (1.24)$$

Плотностью вероятности случайного вектора (X, Y) или совместной плотностью вероятности двух случайных величин X и Y называется предел отношения вероятности попадания его конца в бесконечно малую область к площади этой области при стягивании этой области в точку:

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P\left(\begin{matrix} x \leq X < x + \Delta x \\ y \leq Y < y + \Delta y \end{matrix}\right)}{\Delta x \Delta y}. \quad (1.25)$$

Зная плотность распределения вероятностей, можно определить функцию распределения случайного вектора:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv. \quad (1.26)$$

Из формулы (1.25) можно получить выражение плотности распределения вероятностей случайного вектора (X, Y) через его функцию распределения:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (1.27)$$

На практике часто приходится находить закон распределения одной случайной величины X при условии, что случайная величина Y примет определенное значение y . Этот закон называют **условным законом распределения**. На основании теоремы умножения плотностей вероятностей [51] совместная плотность вероятности двух случайных величин равна плотности вероятности одной из них, умноженной на условную плотность вероятности другой относительно первой:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y/x) = f_2(y)f_1(x/y). \quad (1.28)$$

Отсюда

$$f_1(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}. \quad (1.29)$$

Аналогично можно получить

$$f_2(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}. \quad (1.30)$$

Случайные величины X и Y называются **зависимыми**, если события, заключающиеся в выполнении неравенств $X < x$ и $Y < y$, зависимы хотя бы для одной пары значений x и y . В противном случае случайные величины называются **независимыми**.

Для независимых случайных величин совместная плотность распределения вероятностей равна произведению одномерных плотностей:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y). \quad (1.31)$$

Следовательно, с учетом выражения (1.31), условные плотности равны:

$$f_1(x/y) = f_1(x), \text{ а } f_2(y/x) = f_2(y).$$

Аналогичным образом можно определить законы распределения векторов, когда $n > 2$.

Характеристическая функция случайного вектора X определяется выражением:

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = M[\exp\{i(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n)\}]. \quad (1.32)$$

Формула показывает, что характеристическая функция является преобразованием Фурье плотности распределения вероятности. Следовательно, плотность распределения вероятности определяется через характеристическую функцию обратным преобразованием Фурье [158]:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)\} \varphi(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n. \quad (1.33)$$

Для практики большое значение имеет раздел теории вероятностей, который ограничивается исследованием моментов первого и второго порядков случайных величин [47, 98]. Так моменты α_{10} и α_{01} равны математическим ожиданиям случайных величин X и Y соответственно. Для двумерного случайного вектора кроме моментов μ_{20} и μ_{02} , представляющих собой дисперсии случайных величин X и Y , существует момент μ_{11} , который называют корреляционным моментом:

$$k_{xy} = \mu_{11} = M \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ x & y \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

Этот момент характеризует степень линейной связи случайных величин X и Y .

Случайные величины X и Y называются **коррелированными**, если их корреляционный момент отличен от нуля. Случайные величины называются **некоррелированными**, если их корреляционный момент равен нулю.

Независимые случайные величины всегда не коррелированы. Зависимые же случайные величины могут быть как коррелированными, так и некоррелированными. Следует подчеркнуть, что требование независимости величин является более жестким, чем требование некоррелированности.

На практике часто определяют нормированный корреляционный момент, который называют коэффициентом корреляции:

$$\rho_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (1.35)$$

Часто при исследовании погрешностей оценки результатов оценивания той или иной вероятностной характеристики возникает необходимость в оценке моментов высших порядков. Для системы случайных величин, распределенной по нормальному закону, моменты высших порядков определяются через моменты второго порядка [164]. Задача легко решается, если воспользоваться характеристическими функциями (см. таблицу 1. 3) [185].

Следует подчеркнуть, что нечётные моменты высших порядков в этом случае равны нулю.

Моменты высших порядков

Таблица 1.3

$M[\overset{\circ}{x}_1^2]$	σ_1^2
$M[\overset{\circ}{x}_1\overset{\circ}{x}_2]$	$\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$
$M[\overset{\circ}{x}_1^4]$	$3\sigma_1^4$
$M[\overset{\circ}{x}_1^2\overset{\circ}{x}_2^2]$	$\sigma_1^2\sigma_2^2(1+2\rho_{12}^2)$
$M[\overset{\circ}{x}_1^3\overset{\circ}{x}_2]$	$3\sigma_1^3\sigma_2\rho_{12}$
$M[\overset{\circ}{x}_1^2\overset{\circ}{x}_2\overset{\circ}{x}_3]$	$\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3(2\rho_{12}\rho_{13}+\rho_{23})$
$M[\overset{\circ}{x}_1\overset{\circ}{x}_2\overset{\circ}{x}_3\overset{\circ}{x}_4]$	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4(\rho_{12}\rho_{34}+\rho_{13}\rho_{24}+\rho_{14}\rho_{23})$
$M[\overset{\circ}{x}_1\overset{\circ}{x}_2^2\overset{\circ}{x}_3^3]$	$\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3^3(3\rho_{13}+\rho_{12}\rho_{13}+\rho_{13}\rho_{23}+5\rho_{12}\rho_{23}+5\rho_{13}\rho_{23}^2)$
$M[\overset{\circ}{x}_1\overset{\circ}{x}_2\overset{\circ}{x}_3^4]$	$3\sigma_1\sigma_2\sigma_3^4(\rho_{12}+4\rho_{13}\rho_{23})$
$M[\overset{\circ}{x}_1^3\overset{\circ}{x}_2^3]$	$\sigma_1^3\sigma_2^3(9\rho_{12}+\rho_{12}^2+5\rho_{12}^3)$
$M[\overset{\circ}{x}_1^2\overset{\circ}{x}_2^4]$	$3\sigma_1^2\sigma_2^4(1+4\rho_{12}^2)$
$M[\overset{\circ}{x}_1\overset{\circ}{x}_2^5]$	$15\sigma_1\sigma_2^5\rho_{12}$
$M[\overset{\circ}{x}_1^2\overset{\circ}{x}_2^2\overset{\circ}{x}_3\overset{\circ}{x}_4]$	$\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3\sigma_4(\rho_{34}+2\rho_{23}\rho_{24}+4\rho_{12}\rho_{14}\rho_{23}+4\rho_{12}\rho_{13}\rho_{24}+2\rho_{13}\rho_{14}+2\rho_{14}^2\rho_{34})$
$M[\overset{\circ}{x}_1^2\overset{\circ}{x}_2^2\overset{\circ}{x}_3^2]$	$\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2(1+2\rho_{23}^2+8\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}+2\rho_{13}^2+2\rho_{12})$
$M[\overset{\circ}{x}_1^2\overset{\circ}{x}_2\overset{\circ}{x}_3\overset{\circ}{x}_4\overset{\circ}{x}_5]$	$\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5(\rho_{23}\rho_{45}+\rho_{24}\rho_{35}+\rho_{25}\rho_{34}+2\rho_{14}\rho_{15}\rho_{23}+2\rho_{13}\rho_{15}\rho_{24}+2\rho_{13}\rho_{14}\rho_{25}+2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{14}+2\rho_{12}\rho_{14}\rho_{35}+2\rho_{12}\rho_{15}\rho_{34})$
$M[\overset{\circ}{x}_1\overset{\circ}{x}_2\overset{\circ}{x}_3\overset{\circ}{x}_4\overset{\circ}{x}_5\overset{\circ}{x}_6]$	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6(\rho_{14}\rho_{23}\rho_{56}+\rho_{13}\rho_{24}\rho_{56}+\rho_{23}\rho_{15}\rho_{46}+\rho_{13}\rho_{25}\rho_{46}+\rho_{23}\rho_{16}\rho_{45}+\rho_{13}\rho_{26}\rho_{45}+\rho_{14}\rho_{25}\rho_{36}+\rho_{24}\rho_{15}\rho_{36}+\rho_{14}\rho_{26}\rho_{35}+\rho_{16}\rho_{24}\rho_{35}+\rho_{15}\rho_{26}\rho_{34}+\rho_{35}\rho_{46}\rho_{12}+\rho_{16}\rho_{25}\rho_{34}+\rho_{36}\rho_{45}\rho_{12}+\rho_{12}\rho_{34}\rho_{56})$

1.5. Математическое описание случайных сигналов

Если рассматривается j -я последовательность случайного процесса, то мгновенное значение произвольной реализации в момент t_i , будет случайной величиной с плотностью распределения вероятности $f_x(x/t_i)$. При фиксации номера реализации случайной будет мгновенное значение в произвольный момент времени. Плотность распределения вероятности - $f_x(x/j)$.

Плотности распределения вероятности $f_x(x/j)$ и $f_x(x/t_i)$ позволяют определить любую числовую или функциональную вероятностную характеристику соответствующей случайной величины [158].

Случайные процессы исчерпывающе описываются многомерной функцией распределения вероятности соответствующей мерности.

Так, например, если $t_i \in T = \{t_i\}_{i=1,2,\dots,m}$, то используется m -мерная плотность распределения вероятностей $f_m(x_1, x_2, \dots, x_m / t_1, t_2, \dots, t_m)$. По известной m -мерной плотности распределения вероятности можно определить любую числовую или функциональную вероятностную характеристику $\Theta[x(t_i)]_{i=1,2,\dots,m}$ случайной последовательности, если эта характеристика может быть представлена как результат некоторого преобразования функции $f_m(x_1, x_2, \dots, x_m / t_1, t_2, \dots, t_m)$.

На основании общей теории статистических измерений [174] измеряемая вероятностная характеристика определяется как предел выборочного среднего функционально преобразованного случайного процесса:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{d \rightarrow \infty} S_d g[x_j(t)], \quad (1.36)$$

где Θ - измеряемая вероятностная характеристика;

S_d - оператор идеального усреднения;

d - параметр усреднения (время T , совокупность реализаций N или время и совокупность реализаций TN);

g - оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики Θ ;

$x_j(t)$ - j -ая реализация случайного процесса.

В зависимости от вида усреднения получаем следующие вероятностные характеристики:

1. При усреднении по совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]. \quad (1.37)$$

2. При усреднении по времени:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (1.38)$$

3. При усреднении по времени и совокупности

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (1.39)$$

На практике исследователь имеет дело с ограниченной совокупностью выборочных данных (результатов измерения). Результат определения значения вероятно-

стной характеристики по ограниченной совокупности выборочных данных носит название **оценки**:

$$\hat{\Theta}[X(t)] = S_d g[x_j(t)],_{j=1,2,\dots,N} \quad (1.40)$$

К основным свойствам оценок относятся **несмещенность**, **состоятельность** и **эффективность**.

Оценка называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемой характеристики:

$$M[\hat{\Theta}[X(t)]] = \Theta[X(t)]. \quad (1.41)$$

При невыполнении равенства оценка будет смещенной.

Оценка называется **состоятельной**, если при бесконечном увеличении объема выборочных данных она сходится по вероятности к истинному значению оцениваемой характеристики:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} P\left\{\left|\hat{\Theta}[X(t)] - \Theta[X(t)]\right| < \varepsilon\right\} = 1 \quad (1.42)$$

при любом ε .

При невыполнении этого условия оценка будет несостоятельной.

Эффективными называются оценки, дисперсия которых минимальна.

Следует подчеркнуть, что свойства оценок, которые описываются несмещенностью, состоятельностью и эффективностью, тесно связаны с характером ошибок, которые определяются методами математической статистики [51].

Таким образом, при ограниченном наборе выборочных данных выражения (1.37)-(1.39) при анализе случайных процессов примут вид:

- при усреднении по совокупности

$$\hat{\Theta}_t[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]; \quad (1.43)$$

- при усреднении по времени

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt; \quad (1.44)$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\hat{\Theta}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt; \quad (1.45)$$

Следует отметить, что этими соотношениями определяются разные вероятностные характеристики. При усреднении только по совокупности реализаций (при фиксированном моменте времени) вероятностная характеристика $\Theta[X(t)]$ будет зависеть от текущего времени и называется t -текущей характеристикой $\hat{\Theta}_t$ [174]. При усреднении только по времени, когда выборочные значения относятся к одной реализации j , вероятностная характеристика $\Theta[X(t)]$ будет зависеть от номера реализации и называется j -текущей характеристикой $\hat{\Theta}_j$. При усреднении и по времени и совокупности значение $\Theta[X(t)]$ не зависит ни от текущего времени, ни от номера реализации и называется средней характеристикой - $\hat{\Theta}_{cp}$.

Наличие или отсутствие зависимости значений вероятностных характеристик от времени или номера реализации определяет такие фундаментальные свойства процесса, как **стационарность** и **эргодичность**.

Стационарным называются процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. **Эргодическим** называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от номера реализации.

В теории случайных процессов различают стационарность в узком и широком смыслах. Данное выше определение относится к случайным процессам, стационарным в узком смысле. Для этих процессов равенство $\Theta_i = const$ выполняется для любой вероятностной характеристики. Когда от времени не зависят только одно- и двумерные вероятностные характеристики, случайный процесс считается стационарным в широком смысле. Если условие стационарности не выполняется хотя бы для одной вероятностной характеристики, процесс называется **нестационарным** по этой характеристике.

По аналогии, процесс считается эргодическим в узком смысле, если $\Theta_j = const$, где j - номер реализации, для любой вероятностной характеристики, и в широком смысле, если независимость значений вероятностных характеристик от номера реализации имеет место лишь для характеристик первых двух порядков. Если условие эргодичности не выполняется, процесс называется **неэргодическим**.

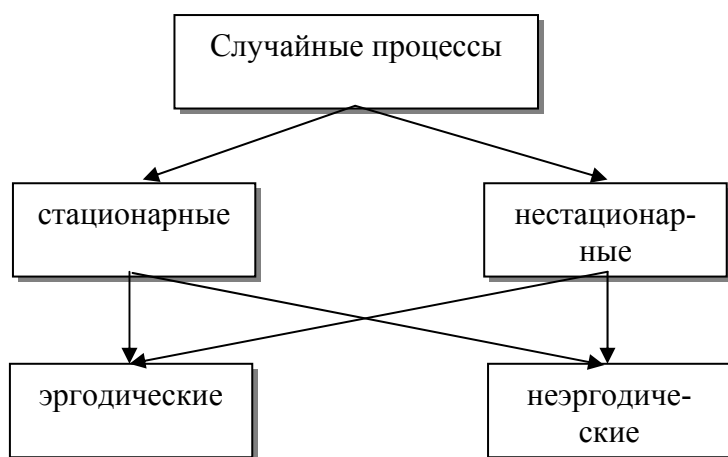


Рисунок 1.9 - Классификация случайных процессов

Таким образом, случайные процессы на основе свойств стационарности и эргодичности можно представить в виде четырех классов (см. рис. 1.9):

- стационарные эргодические;
- стационарные неэргодические;
- нестационарные эргодические;
- нестационарные неэргодические.

Ответ на вопрос, какие характеристики определять: Θ_t , Θ_j , Θ_{cp} - во многом определяется свойствами исследуемого процесса и способом формирования выборочных данных.

Таким образом, прежде чем выбрать тип вероятностной характеристики (вид оператора усреднения), необходимо решить вопрос о стационарности и эргодичности случайного процесса.

В [174] показано, что для стационарного эргодического случайного процесса $\Theta_t = \Theta_j = \Theta_{cp}$, для стационарного неэргодического процесса $\Theta_t = \Theta_{cp}$, для нестационарного эргодического - $\Theta_j = \Theta_{cp}$, а для нестационарного неэргодического процесса все виды вероятностных характеристик различны.

При фиксированном типе S_d вопросы организации эксперимента и принципы организации массивов выборочных данных о мгновенных значениях исследуемого

случайного процесса подробно рассмотрены в [174]. Результаты измерений могут формироваться с использованием:

- различных временных интервалов одной и той же совокупности реализаций;
- одних и тех же временных интервалов различных совокупностей реализаций;
- различных временных интервалов различных совокупностей реализаций.

Причем, от эксперимента к эксперименту возможно изменение N , M и T , т.е. объема выборочных данных.

Различные комбинации этих процессов совместно с детерминированными дают возможность построить более сложные модели, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при моделировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки с целью определения их метрологических характеристик.

Если, например, модель исследуемого процесса задать в виде:

$$x(t) = \varphi(t) + \eta(t)\dot{x}(t), \quad (1.46)$$

где $\varphi(t)$, $\eta(t)$ - детерминированные функции времени, $\dot{x}(t)$ - центрированный стационарный эргодический процесс,

- то в зависимости от сочетания составляющих этой модели и значения ее параметров получим следующие частные модели (см. таблицу 1.4).

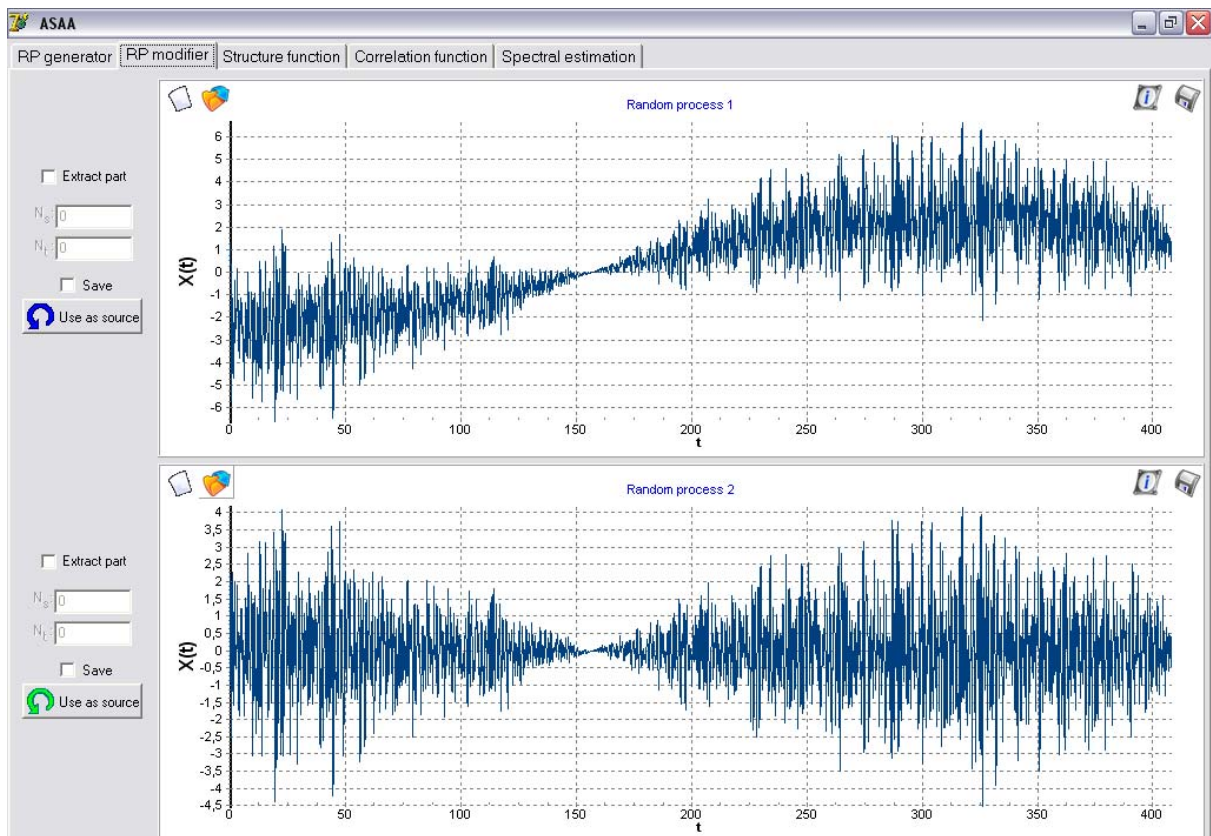
Некоторые модели исследуемых процессов

Таблица 1.4

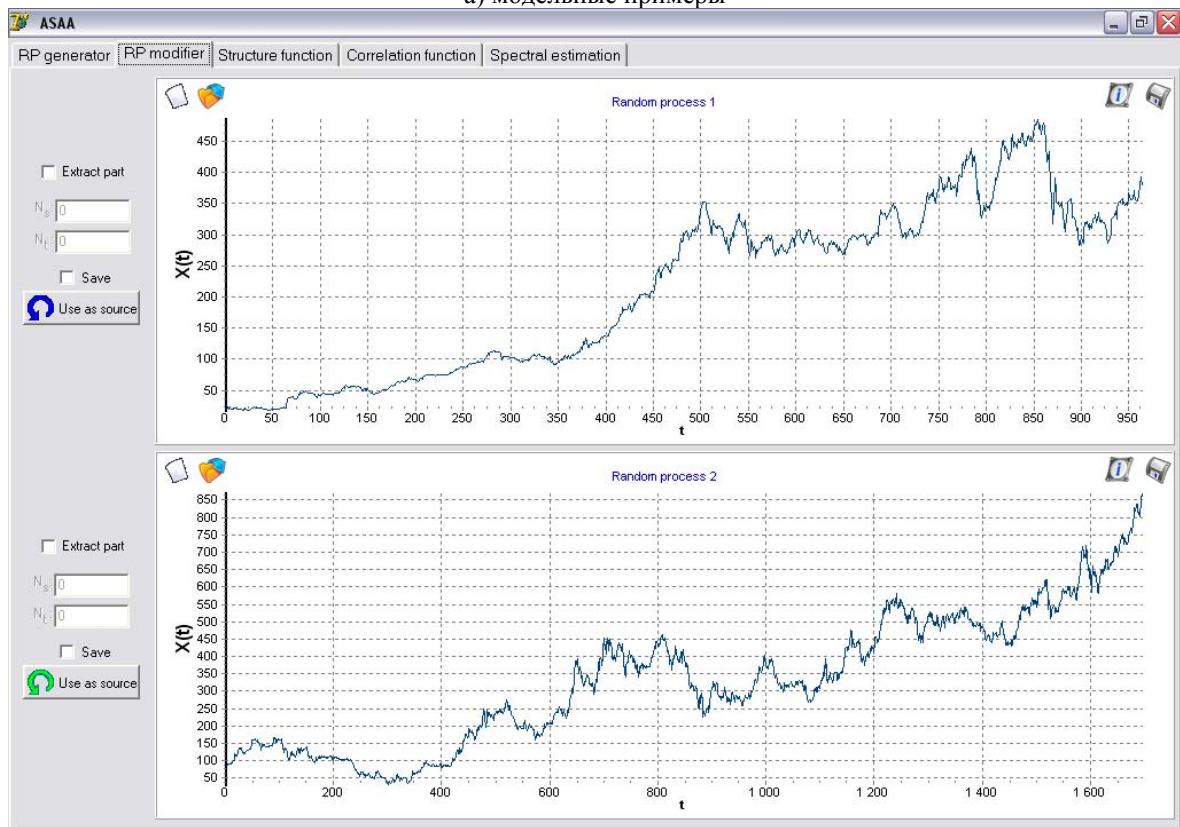
$\varphi(t)$	$\eta(t)$	$x(t) = \varphi(t) + \eta(t)\dot{x}(t)$	Название процесса
$\varphi(t)$	0	$x(t) = \varphi(t)$	детерминированный
m_x	1	$x(t) = m_x + \dot{x}(t)$	стационарный
$\varphi(t)$	1	$x(t) = \varphi(t) + \dot{x}(t)$	нестационарный по математическому ожиданию
0	$\eta(t)$	$x(t) = \eta(t)\dot{x}(t)$	нестационарный по дисперсии
$\varphi(t)$	$\eta(t)$	$x(t) = \varphi(t) + \eta(t)\dot{x}(t)$	нестационарный по математическому ожиданию и дисперсии

Приведенные модели случайных процессов не являются исчерпывающими, но часто являются достаточными при решении разнообразных прикладных задач в различных предметных областях (см. рис. 1.10).

Наиболее часто в качестве модели первого приближения исследователи выбирают самую простейшую модель случайного процесса - стационарный эргодический случайный процесс, - и для него определяют необходимые по смыслу задачи вероятностные характеристики. Если по какой-либо причине полученные результаты не устраивают, переходят к более сложной модели.



а) модельные примеры



б) котировки акций компаний Юкос и Лукойл
Рисунок 1.10 - Примеры нестационарных случайных процессов по математическому ожиданию и дисперсии

Для описания случайных процессов при решении разнообразных практических задач применяются:

- законы распределения, в том числе, многомерные;
- характеристические функции;
- числовые характеристики;
- характеристики взаимосвязи;
- частотные характеристики.

Классификация вероятностных характеристик, описывающих случайный процесс во временной области, представлена на рис. 1.11.



Рисунок 1.11- Классификация вероятностных характеристик случайных процессов

Первые три вида характеристик подробно рассмотрены в подразделе 1.2.-1.3. и особой специфики при описании случайных процессов не имеют.

На рис. 1.12 приведены реализации случайных процессов, распределенных по различным законам.

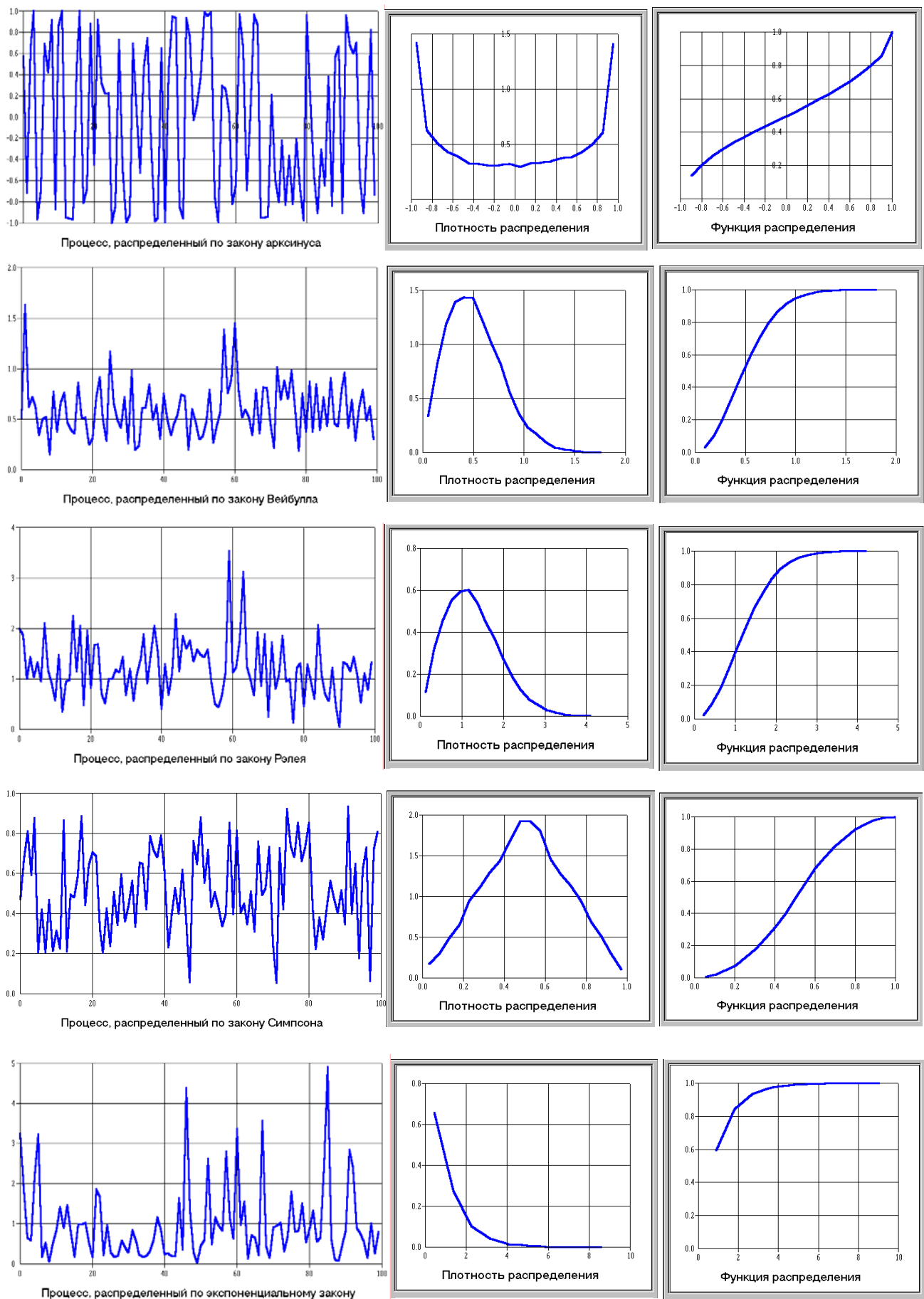


Рисунок 1.12 - Реализации случайных процессов

Следует подчеркнуть аналогию вероятностных характеристик, предназначенных для описания случайных процессов, с характеристиками, описывающими детерминированные процессы (см. таблицу 1.1):

- математического ожидания m_x со средним значением x_{cp} ;
- среднеквадратического отклонения σ_x с действующим значением x ;
- пикфактора η с коэффициентом амплитуды k_a ;
- коэффициента формы случайного процесса k_ϕ с коэффициентом формы детерминированного процесса k_ϕ и т. д.

Остановимся более подробно на характеристиках взаимосвязи и частотных характеристиках.

1.6. Корреляционные характеристики

Основой характеристик взаимосвязи являются корреляционные функции [98].

Корреляционная функция представляет собой корреляционный момент её значений при двух значениях аргумента t, t' , рассматриваемый как функция t, t' [12]:

$$K_x(t, t') = M \left[\overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}(t') \right], \quad (1.47)$$

где $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x(t)$, а $m_x(t)$ - математическое ожидание случайного процесса в сечении t .

Корреляционная функция характеризует степень **линейной связи** между сечениями процесса.

Часто вместо корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t)} \sqrt{D_x(t')}}. \quad (1.48)$$

Для стационарных случайных процессов корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов и является четной функцией $\tau = t - t'$ [158]:

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau). \quad (1.49)$$

Это свойство позволяет определять корреляционную функцию только во временном интервале $[0, \infty)$.

Нормированная корреляционная функция, в соответствии с выражением (1.48), равна:

$$\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)}. \quad (1.50)$$

Отсюда видно, что

$$|\rho_x(\tau)| \leq 1. \quad (1.51)$$

Типовые модели корреляционных функций приведены в таблице 1.5.

№	$\rho_x(\tau)$
1	$e^{-\alpha \tau }$
2	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$
3	$e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau)$
4	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau + \alpha^2 \tau^2 / 3)$
5	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$
6	$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau \pm \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$
7	
8	$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + c \sin \omega_0 \tau)$

Классификация корреляционных функций приведена на рис. 1.13.

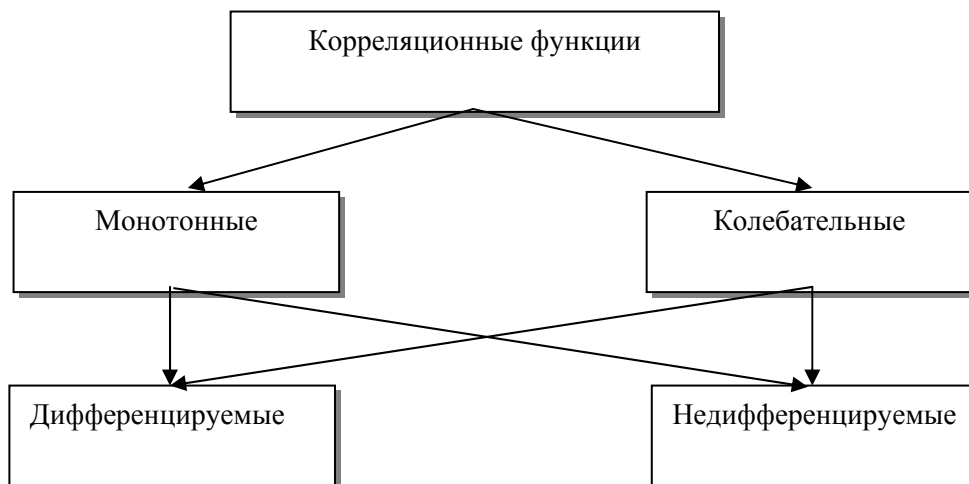


Рисунок 1.13 - Классификация корреляционных функций

Таким образом, корреляционные функции стационарных случайных процессов можно разделить на четыре класса:

1. монотонные недифференцируемые (модели 1);
2. монотонные дифференцируемые (модели 2, 4);
3. колебательные недифференцируемые (модели 3, 5, 7, 8);
4. колебательные дифференцируемые (модели 6, 8).

Такое разделение стационарных случайных процессов по виду корреляционной функции оказывается полезным при аппроксимации корреляционных функций, полученных экспериментально, параметрическими моделями [111, 112].

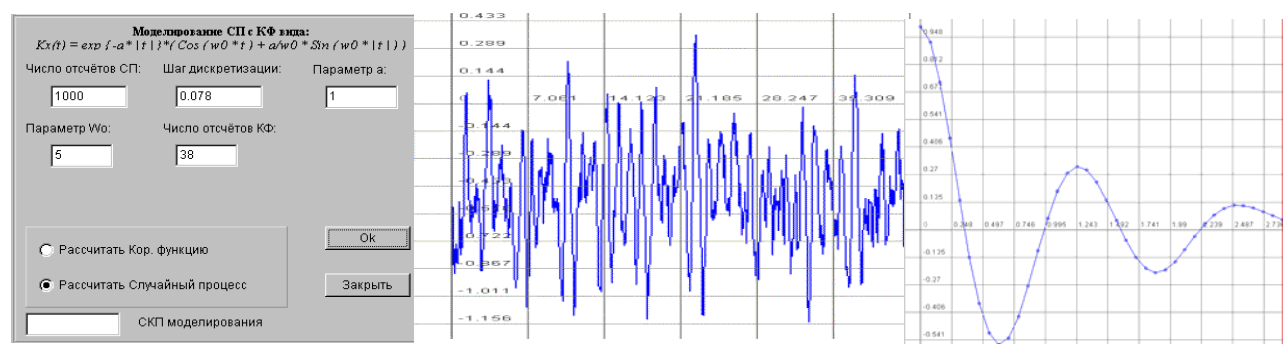
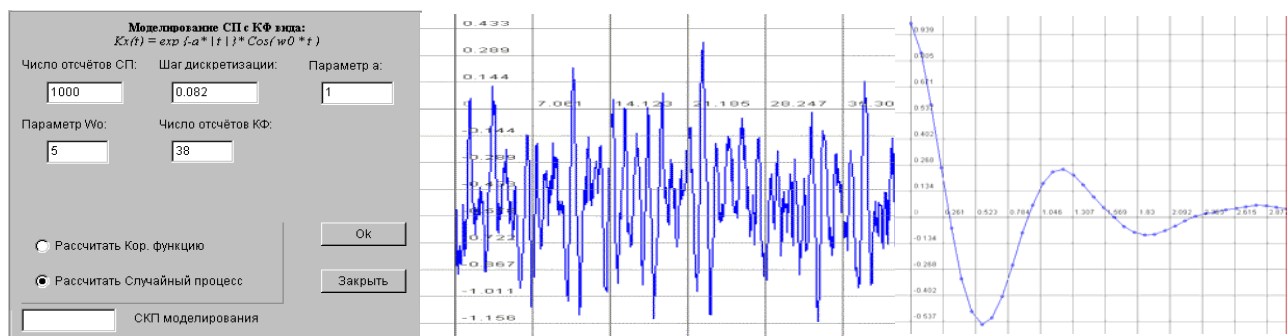
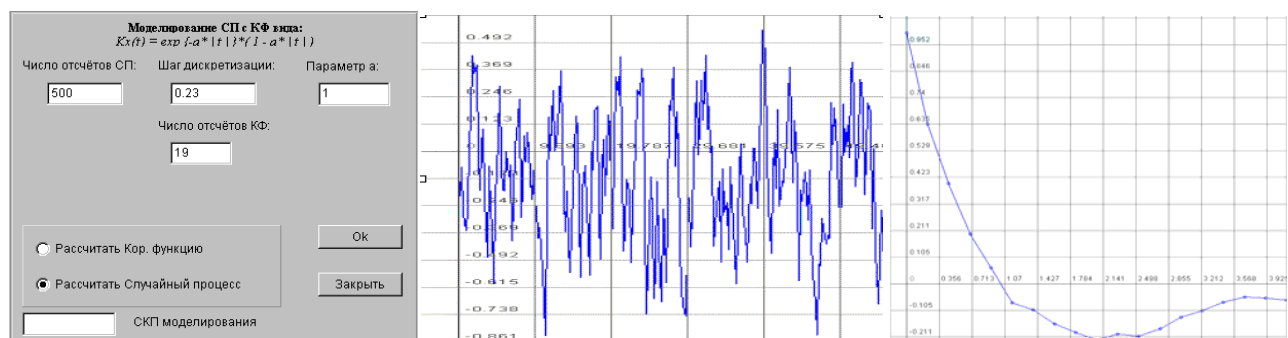
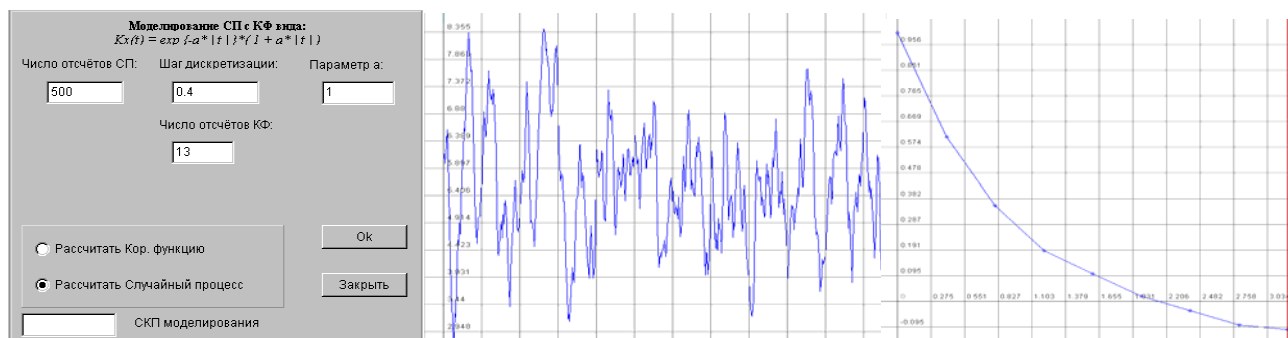
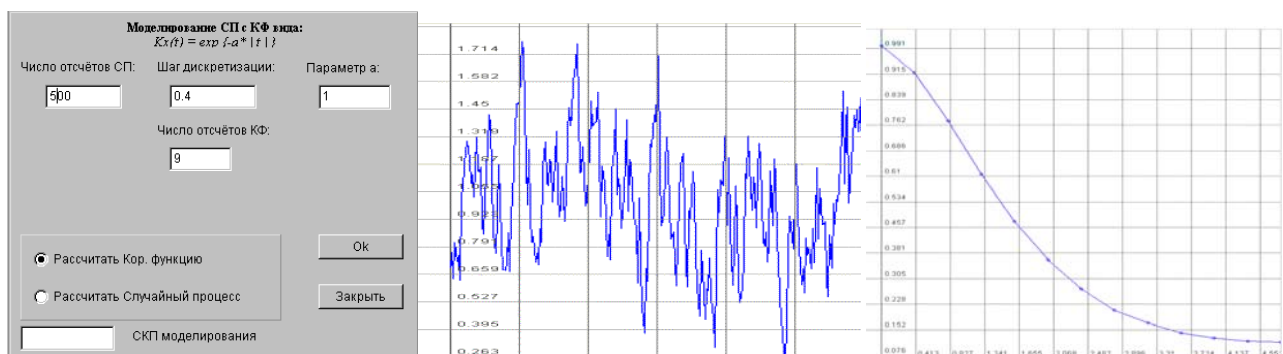


Рисунок 1.14 - Случайные сигналы и их корреляционные функции

Обобщенные корреляционные характеристики:

- показатель колебательности $\mu = \omega_0 / \alpha$ (см. рис.1.15);
- интервалы корреляции, определяющие длительность существования корреляционной функции τ_{kmax} , $\tau_k^{(2)} = \int_0^\infty \rho_x(\tau) d\tau$, $\tau_k^{(3)} = \int_0^\infty |\rho_x(\tau)| d\tau$, $\tau_k^{(4)} = \int_0^\infty \rho_x^2(\tau) d\tau$;
- корреляционные моменты $\mu_k = \sigma_x^2 \int_0^\infty \rho_x^k(\tau) d\tau$.

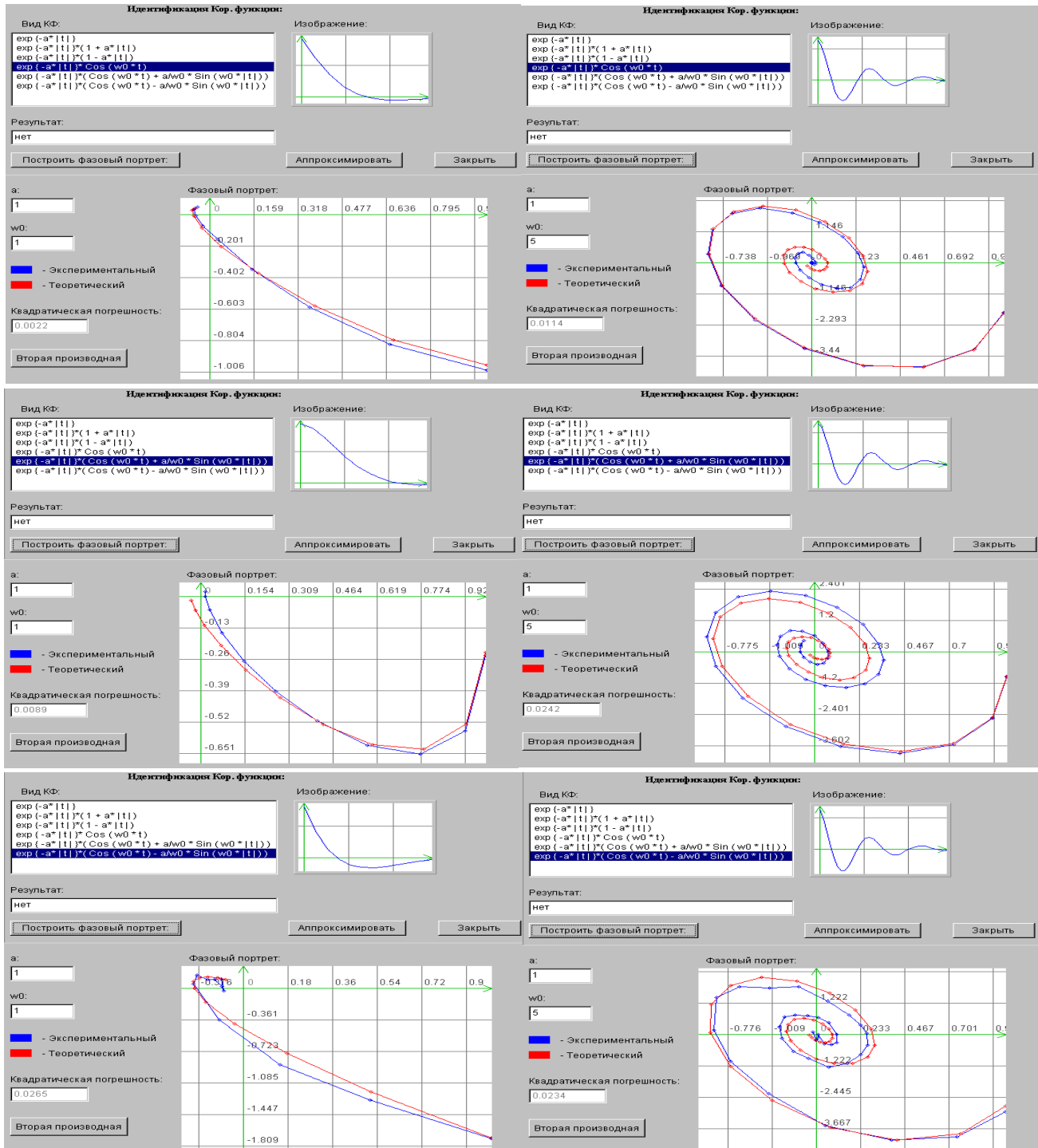


Рисунок 1.15 - К определению показателя колебательности

Взаимной корреляционной функцией двух случайных функций $x(t)$ и $y(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов t и t' , которая при каждой паре значений t и t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции $x(t)$ и случайной функции $y(t)$:

$$K_{xy}(t, t') = M[\overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{y}(t')]. \quad (1.63)$$

Если взаимная корреляционная функция не тождественно равна нулю, случайные процессы называются коррелированными, в противном случае они называются некоррелированными.

При одновременной перестановке аргументов и индексов взаимная корреляционная функция не изменяется:

$$K_{xy}(t, t') = K_{yx}(t', t). \quad (1.64)$$

Как и в случае корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_{xy}(t, t') = \frac{K_{xy}(t, t')}{\sqrt{D_x(t)}\sqrt{D_y(t')}}. \quad (1.65)$$

Для стационарно связанных (стационарных) случайных процессов [51] корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов $\tau = t - t'$. В этом случае нормированная корреляционная функция равна:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}. \quad (1.66)$$

Отсюда видно, что

$$|\rho_{xy}(\tau)| \leq 1. \quad (1.67)$$

Из свойства (1.64) взаимной корреляционной функции следует, что две взаимные корреляционные функции двух стационарно связанных случайных функций $x(t)$ и $y(t)$, взятых в различных порядках, связаны соотношением (см. рис. 1.16)

$$\rho_{xy}(\tau) = \rho_{yx}(-\tau). \quad (1.68)$$

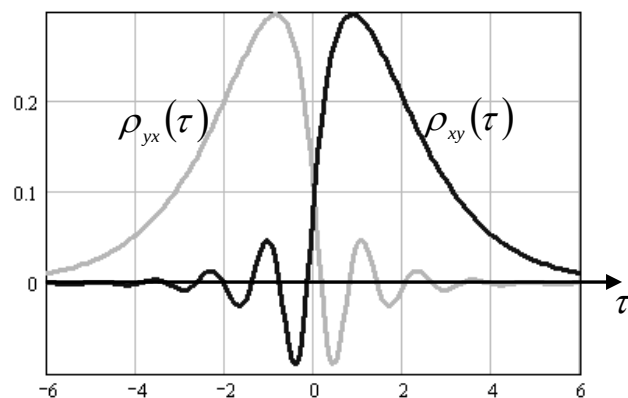


Рисунок 1.16 - Взаимные корреляционные функции

По аналогии с обобщенными характеристиками для автокорреляционных функций введем обобщенные характеристики для взаимных корреляционных характеристик, широко применяемых в практических приложениях:

- максимального интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(1)} = \tau_{k \max xy}$; (1.69)

- интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}(\tau) d\tau$; (1.70)

- интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(3)} = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho_{xy}(\tau)| d\tau$; (1.71)

- интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(4)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}^2(\tau) d\tau$; (1.72)

- моменты корреляционных функций $\mu_{kxy} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^k \rho_{xy}(\tau) d\tau$, - (1.73)

используемые при решении различных прикладных задач, например, идентификации, метрологическом анализе результатов оценивания взаимных корреляционных характеристик, при определении времени задержки одного сигнала по отношению к другому и т.д. [43. 44, 97].

1.7. Структурные функции

Стационарные случайные процессы являются частным случаем нестационарных случайных процессов.

В том случае, когда $x(t)$ представляет собой нестационарный случайный процесс по математическому ожиданию (1.46), то есть когда $m_x(t)$ меняется с течением времени, можно вместо $x(t)$ рассматривать разность $X_\tau(t) = x(t + \tau) - x(t)$. При небольших значениях τ медленные изменения процесса $x(t)$ будут мало сказываться на значениях $X_\tau(t)$, и тем меньше, чем они медленнее. В результате подавления компонент с очень большими периодами можно считать, что приращение $X_\tau(t)$ стационарно. В этом случае процесс $x(t)$ называют случайным процессом со стационарными первыми приращениями или просто случайным процессом со стационарными приращениями (СПСП) [163].

Основной характеристикой СПСП является структурная функция [631]

$$S_x(t, \tau) = M \{ [x(t) - x(t - \tau)]^2 \}. \quad (1.74)$$

В общем случае для нестационарных случайных процессов по математическому ожиданию и дисперсии структурная функция будет равна

$$S_x(t, \tau) = m_x^2(t) + m_x^2(t - \tau) - 2m_x(t)m_x(t - \tau) + \sigma_x^2(t) + \sigma_x^2(t - \tau) - 2\sigma_x(t)\sigma_x(t - \tau)\rho_x(\tau). \quad (1.75)$$

Для процесса с нестационарным математическим ожиданием, но стационарным по дисперсии $\sigma_x(t) = \sigma_x$, и выражение (1.75) примет вид

$$S_x(t, \tau) = m_x^2(t) + m_x^2(t - \tau) - 2m_x(t)m_x(t - \tau) + 2\sigma_x^2[1 - \rho_x(\tau)]. \quad (1.76)$$

Так как $\rho_x(\tau)$ существует на $\tau_{k \max}$, $S_x(\tau)$ характеризует интенсивность тех флуктуаций $x(t)$, периоды которых меньше или сравнимы с $\tau_{k \max}$.

Представим модель математического ожидания в виде ряда

$$m_x(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k, \quad (1.77)$$

ограничившись линейными членами. В этом случае аргументом структурной функции будет параметр сдвига τ

$$S_x(t, \tau) = a_1 \tau + 2\sigma_x^2 [1 - \rho_x(\tau)]. \quad (1.78)$$

Структурный анализ СПСП приводит к более устойчивым характеристикам по сравнению с корреляционным [163]. К тому же, структурная функция включает в качестве составных параметров корреляционные характеристики, то есть может рассматриваться как результат более общего метода корреляционной обработки случайных процессов.

Структурная функция СПСП служит такой же основной характеристикой, как функция корреляции $K_x(\tau)$ для стационарных процессов. Разумеется, структурную функцию можно определить и в случае стационарности процесса $x(t)$

$$S_x(\tau) = 2[K_x(0) - K_x(\tau)]. \quad (1.79)$$

Если для $x(t)$ выполнено достаточное условие эргодичности ($K_x(\infty) = 0$), то корреляционную функцию можно переписать в виде

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2}[S_x(\infty) - S_x(\tau)]. \quad (1.80)$$

Таким образом, для стационарного эргодического случайного процесса можно пользоваться как функцией корреляции, так и структурной функцией. Кроме того, на погрешность оценки $S_x(\tau)$ не влияют погрешности в определении $m_x(t)$.

На рис. 1.17 представлены результаты определения структурной и корреляционной функции для модельного примера

$$x(t) = (0,1t + 2) \cos 0,1t + 10 \overset{\circ}{x}(t), \quad (1.81)$$

где $\overset{\circ}{x}(t)$ - стационарный случайный процесс с $\rho_x(x) = e^{-|x|} \cos 5\tau$.

Из рис. 1.17 б) видно, что по структурной функции возможно определение корреляционной функции флуктуирующей составляющей.

Полученные результаты можно обобщить на структурный анализ двух СПСП. В этом случае выражение для оценки взаимной структурной функции примет вид

$$S_{xy}(\tau) = M \{ [x(t) - y(t - \tau)]^2 \}. \quad (1.82)$$

На рис. 1.18 представлены результаты определения взаимных структурных функций $S_{xy}(\tau)$ и $S_{yx}(\tau)$ для стационарных процессов, корреляционные функции которых имеют вид: $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$ и $\rho_y(\tau) = e^{-|\tau|} (\cos 3\tau \pm 0,33 \sin 3|\tau|)$.

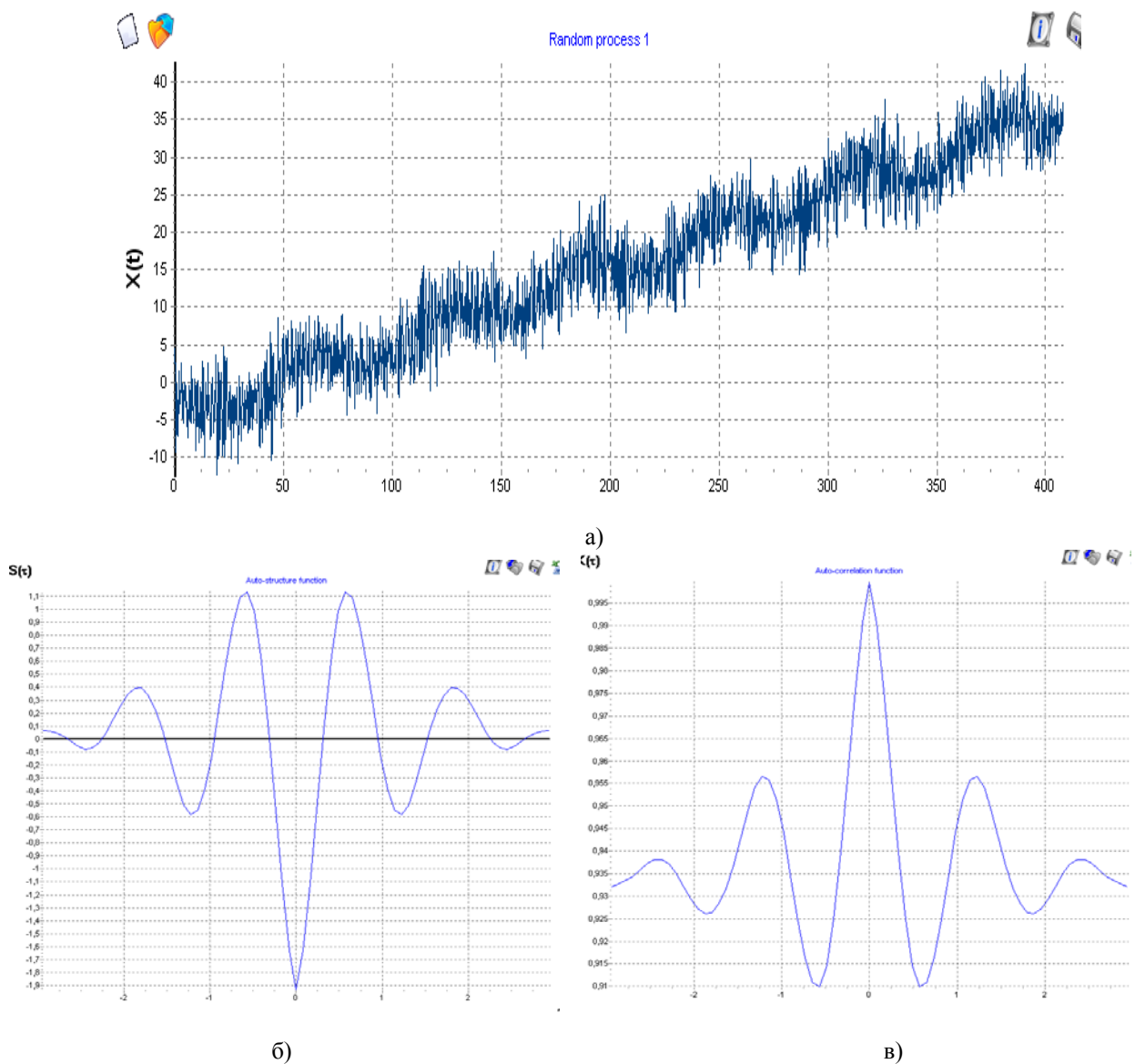


Рисунок 1.17 - Случайный процесс со стационарными приращениями (а) и его структурная функция (б), корреляционная функция (в)

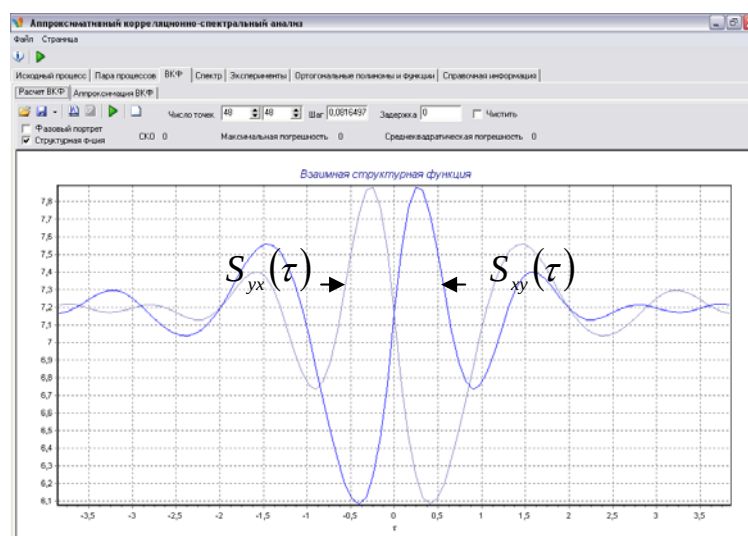


Рисунок 1.18 - Взаимные структурные функции

1.8. Спектральные характеристики

Спектральные функции представляют собой частотное распределение энергетических характеристик случайного процесса. Существуют различные способы их определения, например: преобразование Фурье процесса, преобразование Фурье корреляционной функции. Определим спектральную плотность мощности в виде [84]:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.83)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Винера-Хинчина, можно установить связь между корреляционной функцией и спектральной плотностью мощности:

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.84)$$

С учетом четности функций $K_x(\tau)$ и $S_x(\omega)$, воспользовавшись формулой Эйлера, выражения (1.83), (1.84) приведем к виду:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau; \quad (1.85)$$

$$K_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (1.86)$$

Типовые модели спектральных плотностей мощности приведены в таблице 1.9. Подставив в выражение (1.84) $\tau = 0$, получим:

$$K_x(0) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega, - \quad (1.87)$$

условие нормировки для спектральной плотности мощности.

Подставив в выражение (1.85) $\omega = 0$, получим

$$S_x(0) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \tau_k^{(2)}. \quad (1.88)$$

Отсюда видно, что если значение спектральной плотности мощности «в нуле» равно нулю, то $\tau_k^{(2)} = 0$. Это свойство случайных процессов ограничивает область применения интервала корреляции $\tau_k^{(2)}$.

Спектральная плотность мощности с успехом применяется при анализе линейных динамических систем при случайном входном воздействии.

Пусть на вход линейной динамической системы с частотной характеристикой $|W(j\omega)|$ поступает случайный процесс $x(t)$ со спектральной плотностью мощности $S_x(\omega)$. Спектральная плотность мощности выходного процесса $y(t)$ в этом случае равна [41]:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega), \quad (1.89)$$

где $|W(j\omega)|^2$ – квадрат модуля частотной характеристики.

Это фундаментальное выражение позволяет определить:

- дисперсию выходного сигнала;
- найти аналитическое выражение квадрата модуля частотной характеристики и соответствующее ему выражение импульсной переходной характеристики, необходимое для моделирования стационарных случайных процессов с заданным ви-

дом спектральной плотности мощности (корреляционной функции) методом фильтрации [114 - 116, 185].

Аналитические выражения для спектральных плотностей мощности типовых моделей корреляционных функций, необходимые для теоретических исследований, приведены в таблице 1.6.

Спектральные плотности мощности типовых моделей

Таблица 1.6

$K_x(\tau)$	$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sigma_x^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$\frac{2\sigma_x^2 \alpha^3}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau)$	$\frac{2\sigma_x^2 \alpha \omega^2}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$\frac{8\sigma_x^2 \alpha^5}{3\pi(\alpha^2 + \omega^2)^3}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{\sigma_x^2 \alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\frac{2\sigma_x^2 \alpha (\alpha^2 + \omega_0^2)}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\frac{2\sigma_x^2 \alpha \omega^2}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + c \sin \omega_0 \tau)$	$\frac{\sigma_x^2 [\alpha(\alpha^2 + \omega^2 + \omega_0^2) + c\omega_0(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2)]}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$

Аналогичным образом, воспользовавшись преобразованием Винера-Хинчина, можно определить взаимную спектральную плотность мощности исследуемых процессов:

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.90)$$

Отсюда

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.91)$$

Поскольку взаимная корреляционная функция не является четной, взаимная спектральная плотность мощности в общем случае является комплексной:

$$S_{xy}(\omega) = \text{Re}S_{xy}(\omega) - j\text{Im}S_{xy}(\omega). \quad (1.92)$$

Отсюда очевидно, что

$$S_{yx}(\omega) = \text{Re}S_{xy}(\omega) + j\text{Im}S_{xy}(\omega). \quad (1.93)$$

Воспользовавшись соотношениями (1.92) - (1.93), получим:

$$C_{xy}(\omega) = 2\text{Re}S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau)] \cos \omega\tau d\tau, \quad (1.94)$$

а

$$Q_{xy}(\omega) = 2\text{Im}S_{xy}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_{xy}(\tau) - K_{yx}(\tau)] \sin \omega\tau d\tau. \quad (1.95)$$

Функция $C_{xy}(\omega)$ является четной, а $Q_{xy}(\omega)$ - нечетной. Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, получим:

$$K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} C_{xy}(\omega) \cos \omega\tau d\omega; \quad (1.96)$$

$$K_{xy}(\tau) - K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} Q_{xy}(\omega) \sin \omega\tau d\omega. \quad (1.97)$$

Для стационарно связанных процессов часто вводят нормированную меру взаимной когерентности, являющуюся функцией частоты [76, 77]:

$$\text{Coh}_{xy}(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)}. \quad (1.98)$$

Эта функция равна 0 для независимых процессов, 1 для линейно связанных процессов и находится в пределах от 0 до 1 во всех прочих случаях.

Знание спектральной плотности мощности позволяет решать самые разные прикладные задачи в различных предметных областях:

- выделение полезного сигнала на фоне шумов;
- идентификации объектов и т.д.

Знание спектральной плотности мощности позволяет найти обобщенные спектральные характеристики, широко применяемые в приложениях.

К ним относятся: эквивалентная ширина спектра мощности, частота, соответствующая максимуму спектральной плотности мощности, значение максимума и т.д.

Знание спектральной плотности мощности позволяет определить полосу частот, где сосредоточена основная мощность процесса. Эта характеристика называется **эквивалентной шириной спектра мощности случайного процесса** - $\Delta\omega$. Существуют различные способы определения $\Delta\omega$, приведенные, например, в [163].

Наиболее часто для процессов, у которых спектральная плотность мощности сосредоточена вблизи нулевой частоты (рис. 1.19), $\Delta\omega_0$ определяют в виде:

$$\Delta\omega_0 = \frac{\sigma_x^2}{2S_x(\omega)_{\max}}. \quad (1.99)$$

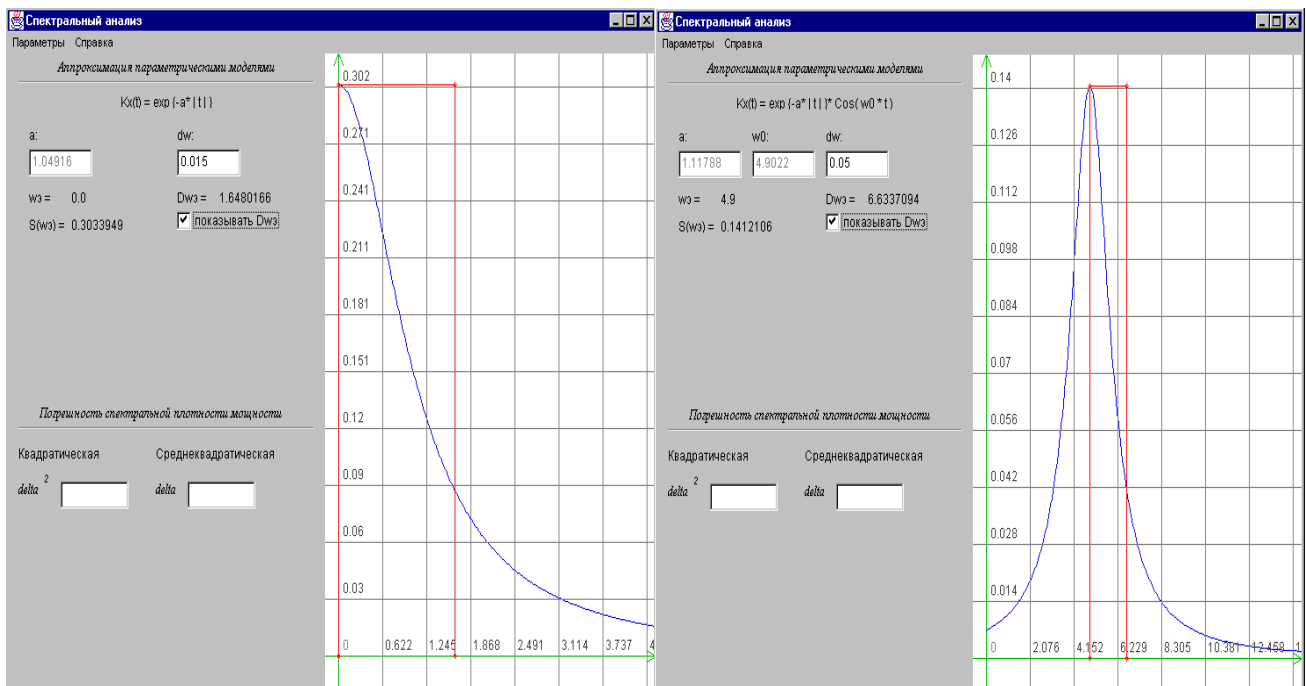
Если основная мощность процесса сосредоточена вблизи экстремальной частоты спектральной плотности мощности ω_0 (см. рис. 1.19 б), а не в нуле, выражение для оценки эквивалентной ширины примет вид:

$$\Delta\omega'_0 = \omega_0 + \Delta\omega_0 / 2. \quad (1.100)$$

Воспользовавшись понятием $\Delta\omega_0$, можно получить аналитическое выражение оценки сверху дисперсии выходного процесса линейной динамической системы, без знания конкретного аналитического выражения спектральной плотности мощности. Дисперсия выходного сигнала линейной динамической системы равна:

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \leq 2S_x(\omega)_{\max} \int_0^{\Delta\omega_c} |W(j\omega)|^2 d\omega \leq \frac{\sigma_x^2 \Delta\omega_c}{\Delta\omega_0} |W(j\omega)|_{\max}^2, \quad (1.101)$$

где $\Delta\omega_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega}{|W(j\omega)|_{\max}^2}$ - полоса пропускания линейной динамической системы.



а) Эквивалентная ширина спектра широкополосного процесса

б) Эквивалентная ширина спектра узкополосного процесса

Рисунок 1.19 – Эквивалентная ширина спектра мощности случайного процесса

Из выражения (1.101) видно, что дисперсия выходного сигнала, независимо от вида спектральной плотности мощности случайного процесса, пропорциональна отношению эквивалентной полосы пропускания линейной динамической системы к эквивалентной ширине спектра мощности случайного процесса.

Исследования показали, что случайного процесса с экспоненциальной корреляционной функцией и апериодического звена первого порядка выполняются соотношения:

$$\begin{cases} \Delta\omega_s \tau_k^{(2)} = \pi / 2; \\ \Delta\omega_c \tau_u^{(2)} = \pi / 2, \end{cases} \quad (1.102)$$

где $\tau_u^{(2)} = \frac{\int_0^\infty h(\tau) d\tau}{h(\tau)_{max}}$ - длительность импульсной характеристики линейной динамической системы. Эти выражения называются **соотношениями неопределённости** для сигнала и для системы.

Воспользовавшись соотношениями неопределённости, выражение (1.101) преобразуем к виду:

$$D_y \leq \sigma_x^2 |W(j\omega)|_{max}^2 \frac{\tau_k^{(2)}}{\tau_u^{(2)}}. \quad (1.103)$$

Отсюда видно, что дисперсия выходного процесса линейной динамической системы, независимо от вида спектральной плотности мощности, не превышает величины, пропорциональной отношению интервала корреляции к длительности импульсной характеристики.

Таким образом, возможна оценка сверху дисперсии выходного процесса линейной динамической системы с использованием обобщенных характеристик, определенных как во временной, так и в частотных областях. Это обстоятельство значительно упрощает теоретические исследования и позволяет определить требования к системе, гарантирующие обеспечение допустимых погрешностей.

Понятие эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса позволяет разбить случайные процессы на два класса: узкополосные и широкополосные.

Узкополосным случайным процессом называется процесс, основная мощность которого сосредоточена вблизи какой-либо частоты ω_0 . Условие узкополосности записывается в виде: $\Delta\omega_s / 2 \ll \omega_0$.

Процессы, не удовлетворяющие этому условию, называются **широкополосными**.

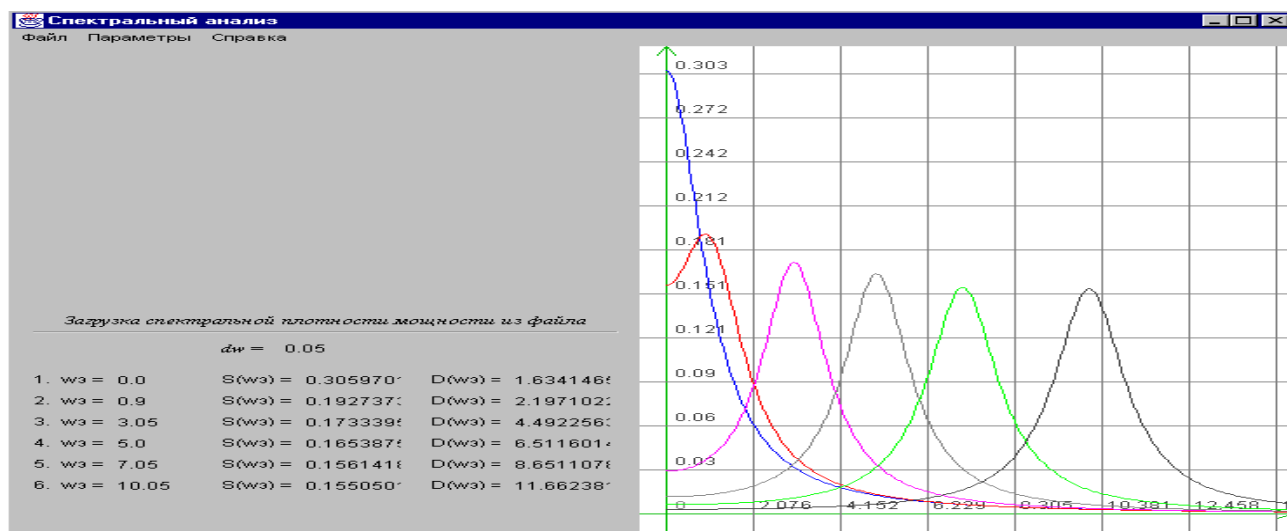
К узкополосным процессам относятся процессы, имеющие колебательную корреляционную функцию с показателем колебательности $\mu > 5$ (см. таблицу 6.8, модели 4 - 7).

К широкополосным процессам относятся все модели, представленные в таблице 6.8, причем, для моделей 4 - 7 $\mu < 5$.

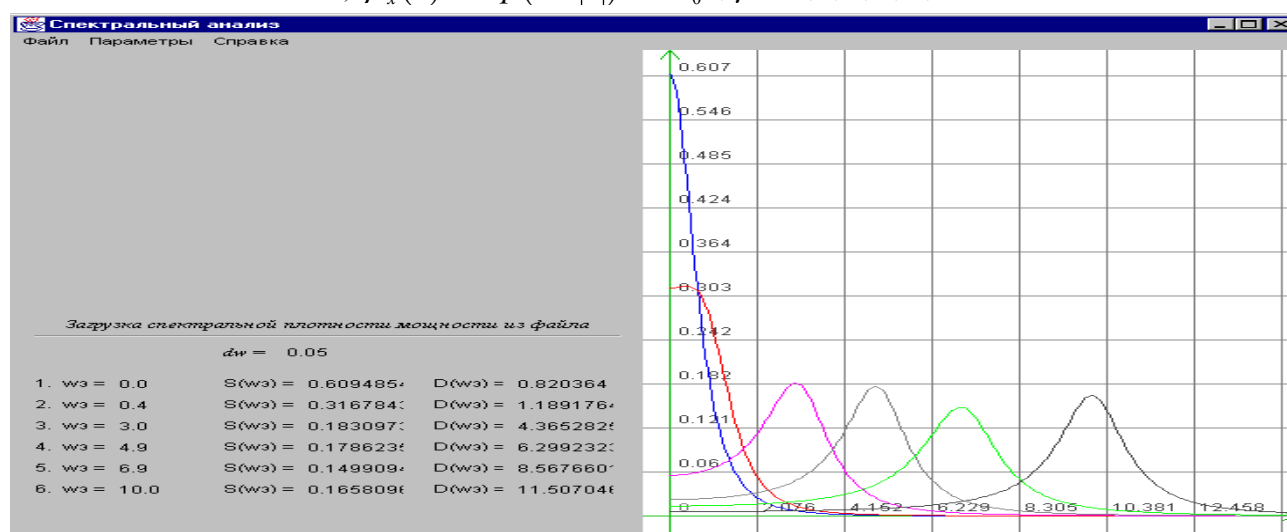
Спектральные плотности мощности колебательных моделей представлены на рис. 1.20.

При решении ряда прикладных задач возникает необходимость оценки частоты, соответствующей максимуму спектральной плотности мощности ω_s . Её можно определить в результате решения уравнения:

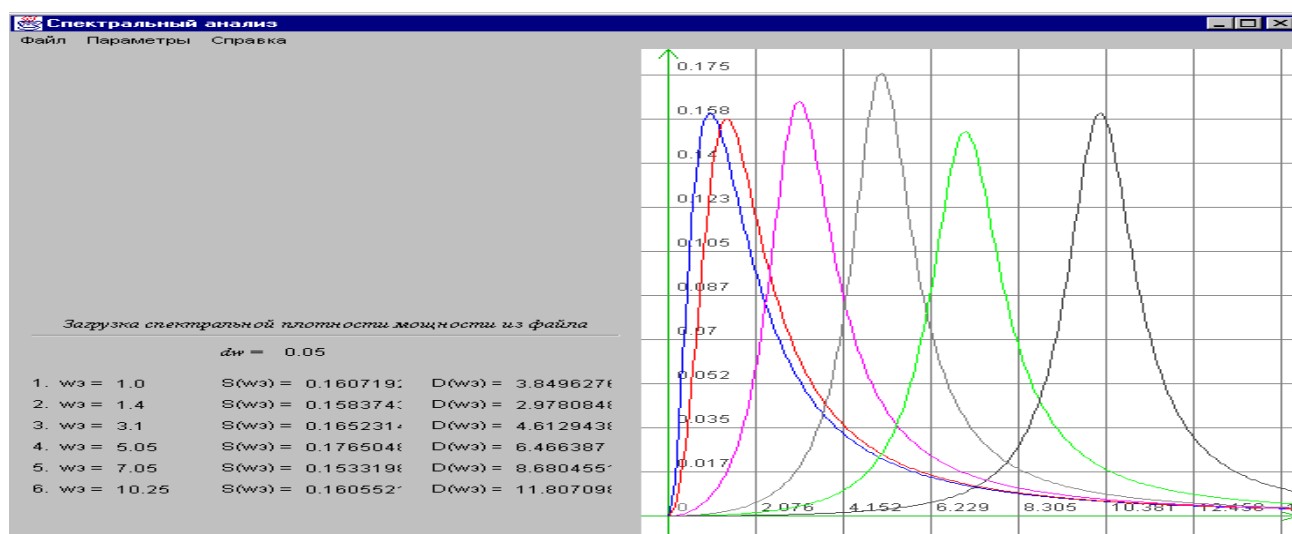
$$S'_x(\omega) = 0. \quad (1.104)$$



$$a) \rho_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) \cos \omega_0 \tau, \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$$



$$a) \rho_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$$



$$a) \rho_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$$

Рисунок 1.20 - Спектральные плотности мощности колебательных моделей

1.9. Математическое описание случайных потоков событий

В системах реального времени обработки и передачи информации, управления наблюдаются различные потоки событий. Поток событий представляет собой точечный процесс с событиями, появляющимися случайным или периодическим образом во времени.

Различают потоки **однородных** и **неоднородных** событий. Например, в системах связи, реализующих приоритет определенной группы абонентов, поток вызовов будет с этой точки зрения неоднородным, система по-разному будет реагировать на разные события (вызовы) в потоке. На рассматриваемые же события (отсчеты первичного процесса) реакция устройств АСНИ, дискретных ИИС, как правило, не меняется при изменении порядкового номера события и поэтому поток выборок можно считать однородным [67].

Основными характеристиками, классифицирующими случайный поток, являются свойства стационарности, ординарности и последствий [67].

Стационарным называется поток событий, для которого вероятность $P_k(l-t, l)$ появления какого-либо числа k событий на определенном интервале времени $(l-t, l)$ зависит лишь от значения этого интервала t и не зависит от его расположения на оси времени.

Ординарным называется поток, для которого вероятность появления на малом участке δt , примыкающем к произвольно выбранному моменту времени, более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления хотя бы одного события.

Последействие потока заключается в зависимости вероятности $P_k(l-t, l)$ от распределения событий на оси времени вне интервала $(l-t, l)$. Либо, другими словами, поток не обладает последействием, если вероятность появления на любом интервале времени какого-либо числа событий не зависит от того, сколько событий произошло на других, не перекрывающихся с данным интервалом. Из литературы известно [67], что не обладает последействием только простейший случайный или иначе стационарный пуассоновский поток, имеющий экспоненциальное распределение интервалов времени между событиями в потоке.

Варьируя этими свойствами, можно образовывать различные классы потоков [15, 117]:

- простейший поток - поток Пуассона, обладающий всеми тремя свойствами, наиболее широко применяемый на практике;
- рекуррентные потоки, относящиеся к классу стационарных потоков Пальма, у которых одномерные законы распределения интервалов дискретизации одинаковы, а сами интервалы независимы между собой;
- поток смены состояний марковского процесса Вольда, предполагающий зависимость соседних интервалов между событиями в потоке;
- альтернирующие потоки, у которых плотность распределения интервалов чередуется от интервала к интервалу (выбирается из двух возможных видов);
- модель рекуррентного потока, получаемого разряжением посредством преобразования исходного потока (каждое событие с вероятностью p остается в потоке, а с вероятностью $q=1-p$ выбрасывается).

Выбор модели потока зависит от характера решаемой задачи, метода исследований (аналитический или имитационное моделирование) и т.д. При аналитических

исследованиях предпочтение следует отдавать простейшим моделям, позволяющим получить сравнительно простые выражения, удобные для инженерного расчета основных параметров алгоритмов.

При решении перечисленных задач необходимо определить характеристики потока, которые можно задать различными способами [67]:

- вероятностью числа событий на заданном временном интервале;
- законом распределения интервалов между отсчётами потока;
- временами возвращения.

Эти способы дополняют друг друга, и в зависимости от решаемой задачи применяется один из них или их совокупность.

Плотность распределения вероятностей интервалов $f_{\Delta t}(\Delta t)$ и функция распределения вероятностей интервалов $F_{\Delta t}(\Delta t)$ являются основными характеристиками, позволяющими определить большинство вероятностных характеристик, и при математическом описании потока специфики не имеют. Определение моментных характеристик интервалов дискретизации при известном законе их распределения затруднений не вызывает [51].

Плотности распределения прямого V и обратного U времен возвращения, необходимые для метрологического анализа оценки взаимных корреляционно-структурных функций, определяется в виде [67]:

$$\varphi(t) = \varphi_v(t) = \varphi_u(t) = \lambda F(t), \quad (1.105)$$

где $F(t)$ - функция распределения интервала дискретизации;

λ - интенсивность потока.

При решении ряда прикладных задач представляет интерес время появления события и его отношение к предшествующим событиям, не обращая внимание ни на амплитуду события, ни на информацию, которую они несут. В системах реального времени к событиям могут быть отнесены: электрический импульс, сигнал переключения, прерывания, момент окончания алгоритма и т.д.

В настоящее время в литературе описаны различные статистические методы и аппаратура для анализа случайных событий [17, 20, 117, 188, 189]. Важной частью этого анализа является корреляционный анализ потоков событий. Корреляция событий основана на измерении распределения интервалов времени между случайными событиями. События могут представлять поток данных в вычислительных системах реального времени или временные ряды экспериментальных импульсов.

Автокорреляция $C_x(t)$ определяет вероятность появления события в потоке X как функцию времени после данного события без учета числа прошедших событий:

$$C_x(t)dt = P[\text{событие в } X(t, t + dt) / \text{событие } X \text{ в } 0]. \quad (1.106)$$

В дальнейшем для отличия автокорреляционной функции случайных процессов (последовательностей) автокорреляционную функцию потоков будем называть **интервальной корреляционной функцией (ИКФ)**.

Взаимокорреляция $C_{xy}(t)$ применяется в случае двух потоков событий X и Y и определяет вероятность наблюдения события в потоке Y как функцию времени после данного события в потоке X , без учета числа прошедших событий:

$$C_{xy}(t)dt = P[\text{событие в } Y(t, t + dt) / \text{событие } X \text{ в } 0]. \quad (1.107)$$

Функцию $C_{xy}(t)$ по аналогии назовем **взаимной интервальной функцией (ВИКФ)**.

Определенные таким образом, автокорреляция и взаимокорреляция применяются для объяснения поведения систем реального времени, предназначенных для измерения и управления, нейронных сетей и моделей поведения, определения зависимости в случайных потоках, обнаружения скрытых моделей в случайной последовательности и предложения соответствующей вероятностной модели исследуемой системы.

Определим ИКФ событий для конкретных практических случаев. При этом начнем со случайной последовательности, описываемой распределением Пуассона - простейшего потока. Корреляция событий в этом случае будет использована для распознавания системы и определения ее основных свойств.

Практическими интересными случаями являются [188]:

- системы с встроенными генераторами повторяющихся событий;
- системы с задержкой;
- системы с «мертвым» временем;
- периодические события, смещенные случайной девиацией;
- системы с буфером для одного и более событий;
- двойные стохастические пуассоновские процессы;
- разветвляющиеся стохастические процессы.

а) Пуассоновский процесс.

Пуассоновский процесс описывает вероятность появления числа событий r в произвольном интервале длиной t :

$$P(r, t) = \left[(\lambda t)^r / r! \right] \exp(-\lambda t), \quad (r = 0, 1, \dots) \quad (1.108)$$

Пуассоновский процесс также дает распределение вероятностей интервалов t между событиями:

$$f(t) = P(r = 0, t) = \exp(-\lambda t).$$

ИКФ событий, основанная на определении (1.106) для пуассоновского процесса, равна среднему числу событий в dt

$$\begin{cases} C_x(0) = 1; \\ C_x(0) = \lambda, \end{cases} \quad (1.109)$$

представлена на рис. 1.21 а).

б) Периодические события.

Для периодических событий выражение (1.106) приводит к

$$\begin{cases} C_x(t) = 1, \text{ для } t = kT; \\ C_x(t) = 0, \text{ для } t \neq kT. \end{cases} \quad (1.110)$$

Результат представлен на рис. 1.21 б).

в) Периодические события, смещенные случайной девиацией («дрожание»).

В этой модели события должны появляться через регулярные интервалы, т.е. периодически, но они смещены относительно требуемого момента появления случайным образом.

Из выражения (1.91) следует, что

$$C_x(t + kT) = g(t) * g(t), \quad (1.111)$$

где $g(t)$ - плотность распределения вероятностей t («дрожание»);

* - операция нахождения композиции законов распределения.

Результат представлен на рис. 1.21 в).

г) Системы с «мертвым» временем.

Модель имеет соответствующее «мертвое» время [166]. После прихода входного события система пропускает это событие на выход и затем закрывается на фиксированное «мертвое» время T , например, на время обработки информации на ЭВМ. ИКФ выходного процесса может быть определена следующим образом [188].

Для $d < t < 2d$, используя выражения (1.106), (1.108), получим:

$$C_x(t)dt = P(1, dt)P(0, t-d) = f(t)P(0, t-d). \quad (1.112)$$

Для $2d < t < 3d$ интервал t может быть сформирован двумя способами.

Первый способ:

$t = d + t_1$ с плотностью распределения вероятностей

$$\varphi_1(t-d) = f(t). \quad (1.113)$$

Вероятность такого способа формирования t равна $P(0, t-d)$.

Второй способ:

$t = 2d + t_1 + t_2$ с плотностью

$$\varphi_2(t-2d) = f(t) * f(t). \quad (1.114)$$

Вероятность такого способа формирования t равна $P(1, t-2d)$.

Таким образом:

$$C_x(t)dt = P(0, t-d)f(t) + P(1, t-2d)f(t) * f(t). \quad (1.115)$$

Обобщая выражение (1.100) для k способов формирования интервалов, получим:

$$C_x(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} P[k, t-(k+1)d][f(t)***... * f(t)]. \quad (1.116)$$

Следует отметить, что многократная композиция законов распределения Пуассона приводит к распределению Эрланга [67]. Интервальная корреляционная функция для рассматриваемого случая представлена на рис. 1.21 г).

Аналогичным образом можно привести дополнительные примеры взаимодействия случайных последовательностей и систем.

Взаимная корреляция.

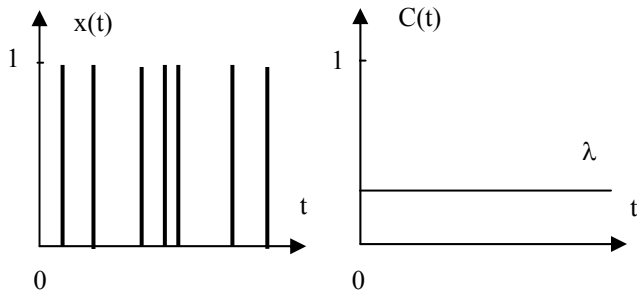
Более общим применением корреляционного анализа потоков событий являются случаи с несколькими потоками событий в системе. Случайные потоки могут наблюдаться в различных точках системы и не взаимодействовать друг с другом. В других случаях потоки «перемешиваются». Это явление получило название суперпозиции потоков [64].

В первом случае ВИКФ позволяет определить степень взаимозависимости потоков. На рис. 1.21 д) приведен пример системы с постоянной задержкой d в обработке информации при подаче на вход простейшего потока. Выражение (1.107) для рассматриваемого примера позволяет определить ВИКФ входного и выходного потоков в виде:

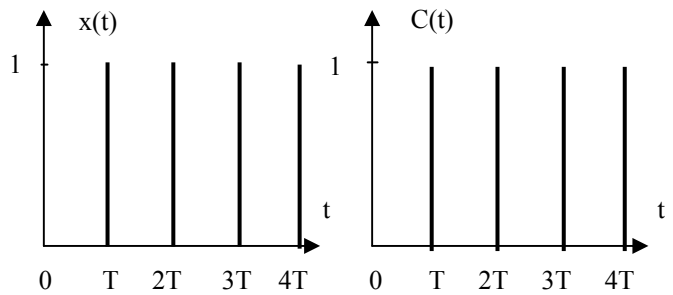
$$\begin{cases} C_{xy}(t) = 1, \text{ для } t = d; \\ C_{xy}(t) = \lambda, \text{ для } t \neq d, \end{cases} \quad (1.117)$$

что позволяет в случае необходимости величину задержки d .

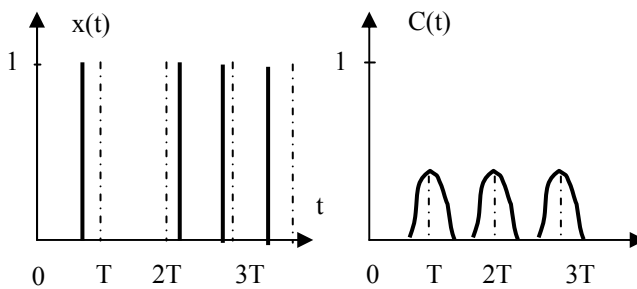
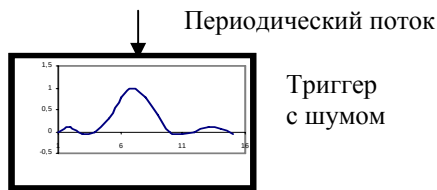
а) Пуассоновский поток



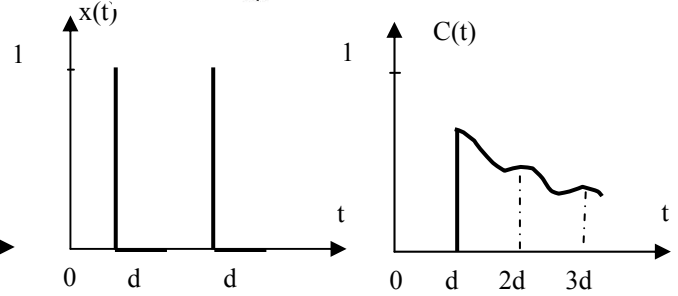
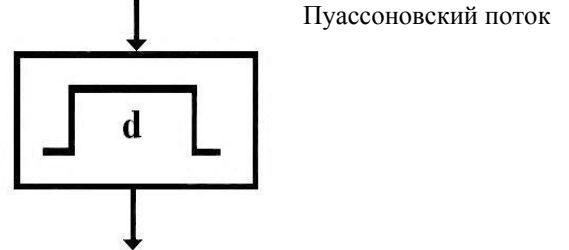
б) Периодический поток



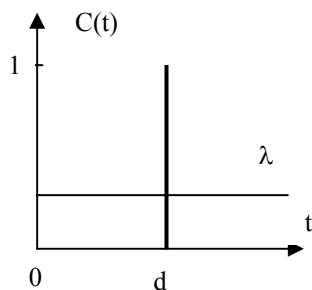
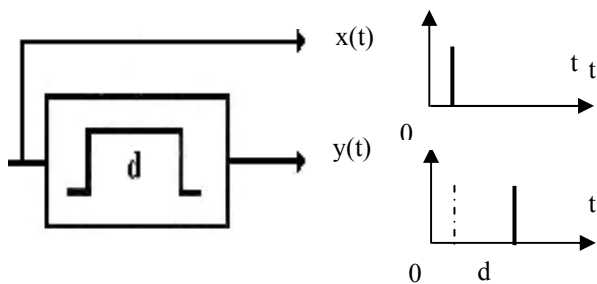
в) Периодический поток с «дрожанием»



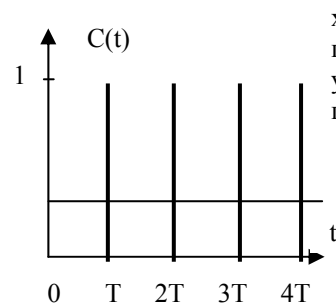
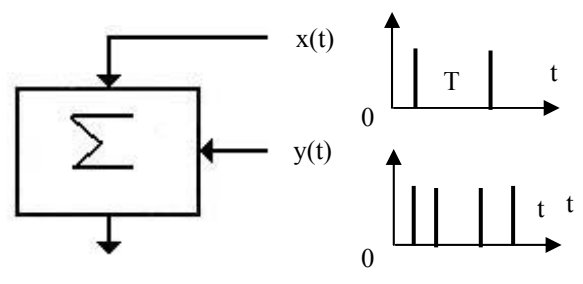
г) Система с «мертвым» временем



д) Взаимная корреляция



е) Суперпозиция



$x(t)$ – Пуассоновский поток;
 $y(t)$ – периодический поток.

Рисунок 1.21 - Интервальные корреляционные функции

Суперпозиция случайных потоков.

Во многих физических и инженерных случаях потоки событий представляют собой суперпозицию некоторых других потоков событий. Например, поток случайных прерываний, приходящий в процессор от нескольких источников. Если поток событий представляет собой смесь двух или нескольких потоков событий, его ИКФ будет равна сумме ИКФ индивидуальных потоков. Так на рис. 1.21 е) показана суперпозиция Пуассоновского и периодического потоков вместе с результирующей ИКФ. Если в ходе проведения эксперимента будет получена похожая ИКФ, то сравнив её с результатами рис. 1.21 е), можно сделать вывод о том, что периодический поток «погружен» в случайный поток.

Для потоков, рассмотренных в примерах 1.21 а) – 1.21 г), можно представить различные суперпозиции. ИКФ в этих случаях поможет различить составляющие потоки, их интенсивность и скорость. Кроме того, ИКФ может быть использована при моделировании и измерении характеристик случайных потоков и процессов с нерегулярным интервалом дискретизации.

Приведем несколько примеров, связанных с функционированием вычислительных систем реального времени.

Сканирование

В вычислительных системах реального времени, основанных на сканировании, программа вычислений определяет время и порядок выполнения операций. Из-за того, что для обработки могут применяться различные алгоритмы, сканирование может представлять процесс, в котором появление событий планируется через регулярные интервалы времени, но благодаря различному времени обработки они будут смещены от времени расписаний. Следовательно, ИКФ процесса сканирования будет похожа на функцию, представленную на рис. 1.21 в). ИКФ в рассматриваемом примере отражает степень нерегулярности процесса сканирования.

Мультиплексирование.

При подключения множества источников информации к мультиплексору его выходной поток будет определяться суперпозицией входных потоков. В этом случае его ИКФ будет являться суммой составляющих ИКФ, как показано на рис. 1.21 е). Даже если составляющие потоки событий являются достаточно периодическими, результирующий поток может быть случайным. Был отмечен интересный факт для нервных клеток, когда нервные импульсы приходят по множеству волокон [188]. Последовательность нервных импульсов, формируемая в результате суперпозиции значительного числа довольно регулярных последовательностей, представляет собой случайную последовательность. ИКФ в этом случае определяет степень регулярности потока.

«Мертвое время».

Если время обработки события T имеет тот же порядок, что и средний интервал между событиями $1/n$, значительное число выходных событий будет потеряно. Потери за счет «мертвого» времени для многих практических случаев найдены Соучеком Б. [166]. Так, например, если «мертвое» время постоянно и равно T , то потери определяются выражением

$$g(T) = nT. \quad (1.118)$$

Выходная последовательность и его ИКФ представлены на рис. 1.21 г).

В измерительных системах реального времени, предназначенных для построения гистограммы исследуемого сигнала, потери «мертвого» времени не внесут искажения в гистограмму. Это объясняется тем, что при кодировании информации применяется импульсная модуляция и импульсы приходят случайным образом, а временные зависимости не учитываются. Ситуация значительно ухудшается при построении гистограмм временных интервалов. В таких системах «мертвое» время должно быть значительно меньше, чем среднее время между событиями потока.

Буферизация.

Если интервал между событиями короче, чем время обработки T , буфер запомнит второе событие, что, в свою очередь, уменьшит потерю событий [166]:

$$g_1(T) = nT - [1 - \exp(-nT)]. \quad (1.119)$$

Событие, запомненное в буфере, обрабатывается сразу после «мертвого» времени. Таким образом, буфер «сдвигает» события вдоль временной оси, формируя более регулярные интервалы. ИКФ в этом случае позволяет измерить степень регулярности временных интервалов.

Нейронные импульсы.

Поток нейронных импульсов записывается с помощью микроэлектродов [188]. Результатом анализа потока является ИКФ (корреляционная гистограмма), которая сравнивается с ранее полученными результатами, например, представленными на рис. 1.21, с целью построения наиболее адекватной модели потока. Как показали исследования, наиболее адекватной моделью потока нейронных импульсов является суперпозиция (см. рис. 1.21 е) пуассоновского потока (см. рис. 1.21 а) и смещенного регулярного потока (см. рис. 1.21 в) [188, 189]. ИКФ в этом случае помогла определить свойства модели рассматриваемой системы.

Коммуникация насекомых.

В работе [188] приведен интересный пример из жизни насекомых-сверчков. В спокойном состоянии периодичность посылок сообщений сверчка случайна. Но стоит их потревожить, как картина резко меняется- появляется некоторая закономерность в посылки их сообщений. Была проанализирована импульсная последовательность сигналов насекомых, используемая ими для коммуникации, и определена ИКФ интервалов между посылками сообщений этих насекомых. Экспериментальные результаты были сравнены затем с результатами, представленными на рис. 1.21. Адекватной моделью для этого случая является суперпозиция (см. рис. 1.21 е) пуассоновского потока (см. рис. 1.21 а) и потока на выходе системы с фиксированным временем обработки, т. е. системы с «мертвым» временем (см. рис. 1.21 г). ИКФ, как и в предыдущем случае использовалась для построения модели системы.

Таким образом, в рассмотренных примерах для вычислительных систем реального времени и их основных функциональных блоков: сканеров, мультиплексоров, элементов задержки, процессоров обработки («мертвое» время), буферов и т. д.,- по результатам оценки ИКФ определялась модель неизвестного потока событий и строилась соответствующая вероятностная модель системы, через которую эти события прошли. Кроме того, ИКФ применялась для анализа и сравнения потоков событий в нейронных сетях и система поведения.

Было показано, что суперпозиция почти периодических потоков событий (мультиплексирование) приводит к появлению на выходе случайного потока. С дру-

гой стороны, процесс обработки, буферизация «сглаживают» случайный поток, преобразуя его в почти периодическую последовательность. Следует отметить, что интервальная корреляционная функция позволяет определить и скрытые модели в экспериментальных данных, а взаимная интервальная корреляционная функция - степень зависимости двух потоков событий.

Это важное обстоятельство: возможность определения степени зависимости событий одного потока (разных потоков) через интервальные корреляционные функции, - позволяет применять их и для анализа неэквидистантных временных рядов.

1.10. Математическое описание неэквидистантных временных рядов

При описании неэквидистантного временного ряда необходимо учитывать специфику его представления в виде двух массивов выборочных данных: $[x_{ji}(t_{ji} / \Delta t_{ji})]_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, Mj}$ - массива мгновенных значений x_{ji} и соответствующих им меток или интервалов времени $t_{ji} / \Delta t_{ji}$, фиксирующих факт проведения измерений.

Такое представление позволяет для математического описания массива значений x_{ji} использовать математический аппарат теории случайных процессов, а для описания временной последовательности t_{ji} - математический аппарат теории потоков событий [117].

Независимо от особенностей математического описания x_{ji} и t_{ji} неэквидистантные временные ряды можно разбить на два класса:

- характеристики потока событий t_{ji} не зависят от характеристик исследуемого случайного процесса (см. рис. 1.22);
- характеристики потока событий t_{ji} полностью определяются характеристиками исследуемого случайного процесса (см. рис. 1.23).

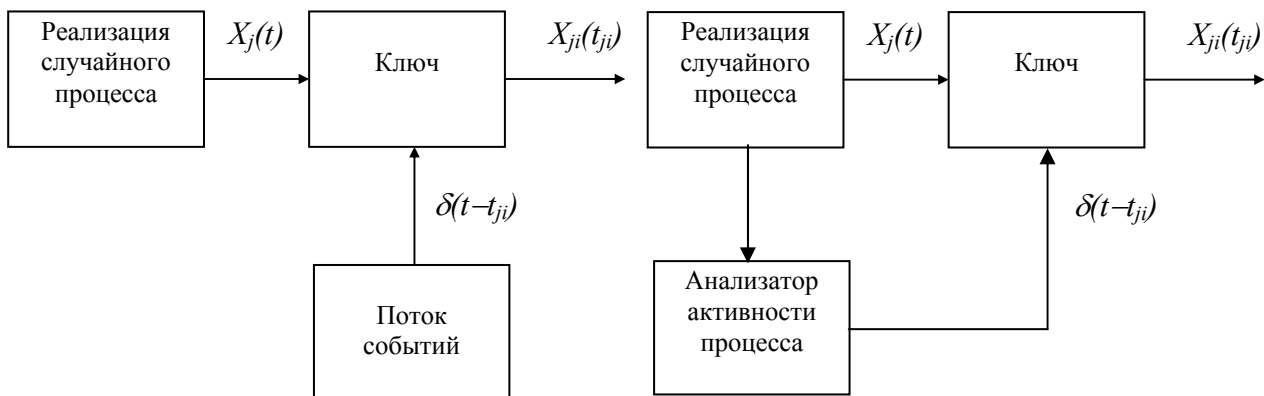


Рисунок 1.22 - Характеристики потока не зависят от характеристик процесса

Рисунок 1.23 - Характеристики потока зависят от характеристик процесса

К первому классу неэквидистантных временных рядов приводит **непреднамеренная случайная дискретизация**, не зависящая от желания исследователя, в том числе, и «некачественная» регулярная дискретизация [67, 117]:

- регулярная дискретизация с пропусками наблюдений;
- регулярная дискретизация с «дрожанием»;
- регулярная дискретизация с «дрожанием» и пропускам наблюдений.

Ко второму классу относится **преднамеренная нерегулярная дискретизация**, например: адаптивно-временная, спорадическая, - вводимая по желанию исследователя [38, 40, 67, 117]. Следует подчеркнуть, что чем большей априорной информацией о характере нерегулярной дискретизации располагает исследователь, тем более точную модель потока событий он построит.

Так, например, если $\Delta x_{ji} = const$; $\Delta t_{ji} = random$, то такая дискретизация называется спорадической [117]. Для неё известна связь между интервалом дискретизации и характеристиками случайного процесса. Учёт этого важного обстоятельства позволяет упростить процедуру оценивания вероятностных характеристик и её метрологический анализ.

Математическое описание потоков событий и его характеристики зависят от способа дискретизации случайного процесса (см. рис. 1.24).

Выбор модели потока при описании неэквидистантного временного ряда зависит от способа неравномерной дискретизации, характера решаемой задачи, метода исследований (аналитический или имитационное моделирование) и т.д.

Основными требованиями, предъявляемыми к модели потока событий, являются следующие:

- модель должна адекватно описывать поток - совпадение основных характеристик потока и модели;
- быть по возможности простой, позволяющей аналитическое определение основных характеристик потока;
- для потоков, зависящих от характеристик случайного процесса, позволять определение характеристик потока в зависимости от характеристик процесса.

При статистических измерениях при неравномерной дискретизации случайных процессов возможны следующие случаи:

- случайная дискретизация непреднамеренная и для нее необходимо оценить увеличение методической погрешности, вызванное этой неравномерностью;
- случайная дискретизация преднамеренная с известными характеристиками потока и необходимо: разработать алгоритмы статистических измерений, определить увеличение методической погрешности, вызванной неравномерностью дискретизации;
- случайная дискретизация преднамеренная, и для нее необходимо определить требования к потоку при известных характеристиках процесса с целью обеспечения допустимых методических погрешностей измерения значений вероятностных характеристик.

Как правило, для анализа алгоритмов статистических измерений и расчета их основных параметров необходимо знание:

- закона распределения интервалов и их моментных характеристик, используемых при оценке составляющей методической погрешности, обусловленной неравномерностью дискретизации (см. подраздел 1.9);
- закона распределения сумм интервалов, требуемые для определения числа каналов аппаратно-программных средств при измерении функциональных вероятностных характеристик, например, корреляционно-структурных;
- плотности распределения времен возвращения, используемой при статистическом анализе взаимных корреляционно-структурных характеристик (см. подраздел 1.6);
- интервальной корреляционной функции, необходимой для усреднения результата и оценки составляющих методической погрешности (см. подраздел 1.9);

- минимального интервала дискретизации - параметра аппаратно-программных средств, обеспечивающего допустимые значения составляющей методической погрешности, обусловленной дискретизацией;
- интенсивности потока - величины, обратной математическому ожиданию интервала дискретизации, используемой для оценки коэффициента сжатия, определения допустимого значения погрешности восстановления случайного процесса;
- коэффициента сжатия $k_{сж}$, характеризующего число существенных отсчетов на выходе аналого-цифрового преобразователя.

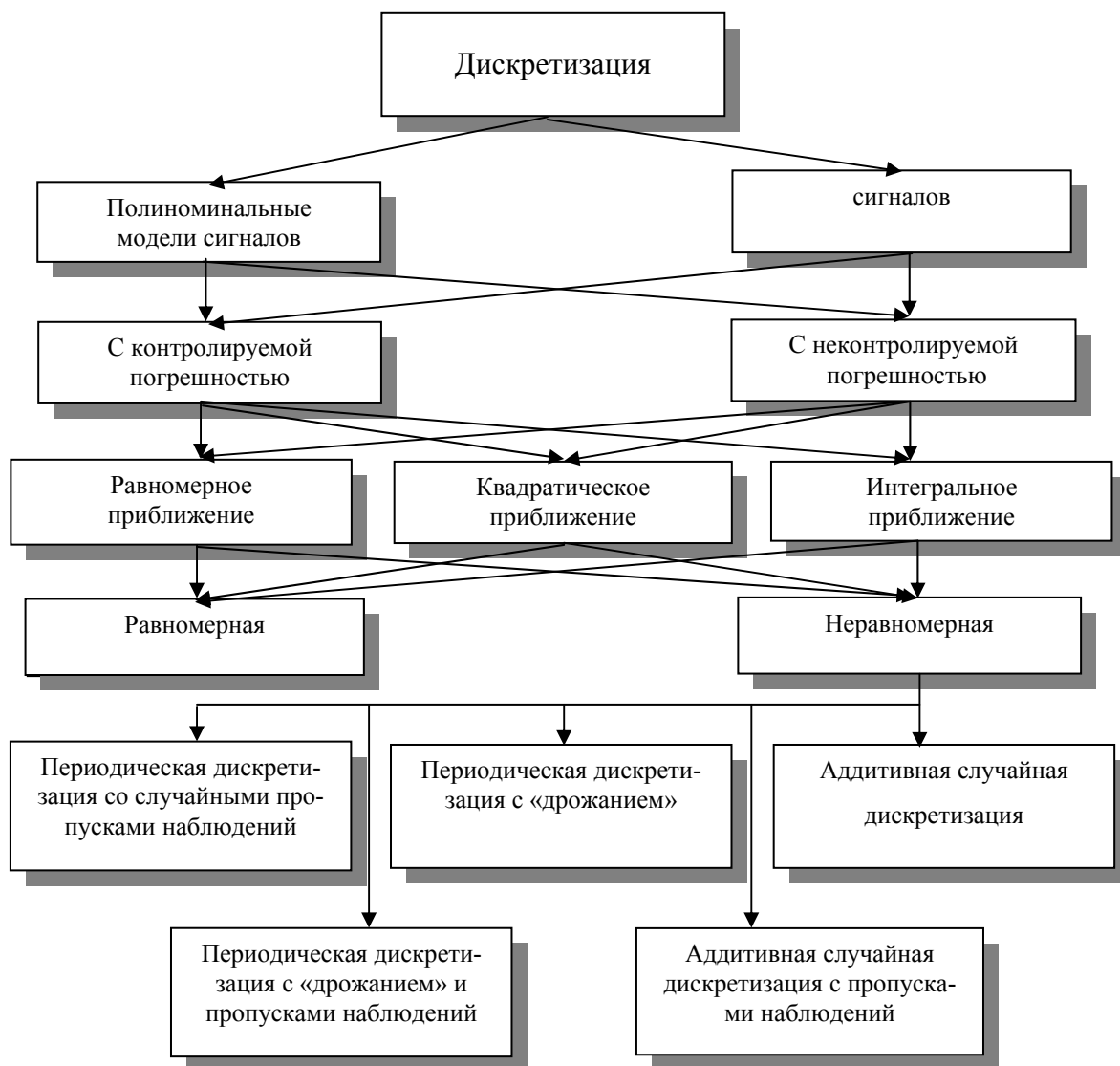


Рисунок 1.24 - Классификация методов дискретизации

Рассмотрим в общем виде определение указанных характеристик без учета конкретных особенностей моделей потоков.

Задаче определения статистических характеристик интервалов между существенными отсчетами, являющейся задачей о первом достижении границ, посвящено большое число работ (см. например, [117]). Как известно, строгое решение этой задачи, связанное с n -мерным интегрированием n -мерной плотности вероятности процессов при $n \rightarrow \infty$, может быть получено в аналитическом виде только для марковского процесса первого порядка [117]. В остальных же случаях авторы для конкретных спо-

собов неравномерной дискретизации при определенных допущениях приводят аналитические выражения $f_{\Delta t}(\Delta t)$, $F_{\Delta t}(\Delta t)$.

Так, в [38] для адаптивно-временной дискретизации, полиномами нулевого и первого порядка при условии постоянства производной на интервале дискретизации, что справедливо лишь при малых погрешностях восстановления (уставки) и известном законе распределения модуля $n+1$ производной, приводятся и анализируются законы распределения интервалов.

Однако, на практике применение такого подхода оказывается проблематичным, так как только для нормального $n+1$ раз дифференцируемого входного процесса возможно аналитическое определение закона распределения модуля $n+1$ производной. В остальных же случаях задача не имеет решения.

В [38, 67] в результате обработки большого экспериментального материала авторы делают вывод о том, что математическая модель интервалов дискретизации для адаптивно-временных дискретизаторов с предсказателем нулевого порядка представляет собой рекуррентный поток с гамма-распределением интервалов:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \frac{(\alpha\lambda)^\alpha \Delta t^{\alpha-1} \exp(-\alpha\lambda\Delta t)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (1.120)$$

где λ - интенсивность потока.

Причем, чем меньше корреляционные связи между отсчетами входного процесса источника, тем меньше коэффициент λ , а для безызбыточных выборок он практически равен 1.

Отметим, что при $\alpha = 1$ распределение интервалов становится экспоненциальным:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \lambda \exp(-\lambda\Delta t), \quad (1.121)$$

а поток отсчетов - пуассоновским [67].

На пуассоновский характер потока при различных способах неравномерной дискретизации указывают и другие авторы [38, 82, 117].

В некоторых частных случаях неравномерной дискретизации возможно аналитическое определение закона распределения интервалов, в остальных же случаях полученные результаты для повышения достоверности должны проверяться методом имитационного моделирования и экспериментальными исследованиями [114 - 117].

Определение моментных характеристик интервалов дискретизации при известном законе их распределения затруднений не вызывает [51].

Законы распределения сумм интервалов для рекуррентных потоков наиболее целесообразно определить через характеристическую функцию интервалов $\varphi_{\Delta t}(u)$ [159].

В этом случае характеристическая функция $\Theta_s = \sum_{i=1}^s \Delta t_i$ равна:

$$\varphi_{\Theta_s}(u) = [\varphi_{\Delta t}(u)]^s \quad (1.122)$$

Отсюда, воспользовавшись обратным преобразованием Фурье для $\varphi_{\Theta_s}(u)$, определим $f_{\Theta_s}(\Theta_s)$ и $F_{\Theta_s}(\Theta_s)$ [32].

При определении числа каналов аппаратно-программных средств возникает необходимость в определении распределения сумм L интервалов дискретизации на заданном интервале наблюдения оцениваемой вероятностной характеристики, например, на максимальном интервале корреляции τ_{kmax} [117].

$$P(L, \tau_{k \max}) = P(\tau_{k \max} \leq \Theta_L \cap \Theta_{L-1} < \tau_{k \max}) = F_{L-1}(\tau_{k \max}) - F_L(\tau_{k \max}) \quad (1.123)$$

Значение $L_{\max}$, обеспечивающего выполнение условия (1.123) с вероятностью P_o , находится из уравнения:

$$F_{L_{\max}}(\tau_{k \max}) = 1 - P_o. \quad (1.124)$$

Определим вероятность того, что один отсчёт потока отстоит от другого на расстоянии $J\Delta\tau \pm \Delta\tau/2$ без учёта числа прошедших отсчётов.

Введем случайную величину, равную сумме k интервалов дискретизации:

$$\Theta_{jk} = \sum_{i=1}^k \Delta t_{ji}. \quad (1.125)$$

Найдем вероятность того, что случайная величина Θ_{jk} находится в диапазоне $J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2} < \Theta_{jk} < J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}$:

$$P\left\{J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2} < \Theta_{jk} < J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right\} = F_{\Theta_{jk}}\left(J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right) - F_{\Theta_{jk}}\left(J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2}\right). \quad (1.126)$$

Вероятность того, что в этот интервал попадет любой из k отсчетов, равна:

$$C_{xj}(J) = C_{xj}(J\Delta\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left[J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2} \leq \Theta_{jk} < J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[F_{jk}\left(J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right) - F_{jk}\left(J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2}\right)\right], \quad (1.127)$$

В соответствии с определением (1.106) это и есть интервальная корреляционная функция.

При **преднамеренной неравномерной дискретизации** с целью упрощения аппаратной реализации сжатия данных используются полиномиальные модели восстановления нулевого и первого порядка (см. таблицу 1.7), требующие для реализации сравнительно простые технические средства и обладающие достаточной эффективностью, хотя в некоторых случаях рассматривается применение и других моделей, в том числе и сплайн - аппроксимации.

Модели входных сигналов при адаптивной дискретизации

Таблица 1.7

№	Название модели	Аналитическое выражение	Критерий	Δt_0	
				n=0	n=1
1	Интерполяционный полином Лагранжа	$\sum_{m=0}^n a_m t^m$	Равномерное приближение	$\frac{\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{8\varepsilon}{\mu_2}}$
2	Ряд Маклорена	$\sum_{m=0}^n \frac{x^{(m)}(0)t^m}{m!}$	Равномерное приближение	$\frac{\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{8\varepsilon}{\mu_2}}$
3	Полиномиальная	$\sum_{m=0}^n b_m t^m$	Квадратическое приближение	$\frac{2\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{12\varepsilon}{\mu_2}}$
4	Полиномиальная	$\sum_{m=0}^n c_m t^m$	Интегральное приближение	$\frac{4\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{48\varepsilon}{\mu_2}}$

В рассматриваемых полиномиальных моделях при $n = 0$ и $n = 1$ модели j -ой реализации случайного процесса на i -ом интервале дискретизации записываются в виде

$$x_{ji}^{(m)}(t) = a_{ji}^{(0)} \delta_{ji}^* ; \quad (1.128)$$

$$x_{ju}^{(m)}(t) = (a_{ji}^{(0)} + a_{ji}^{(1)} t) \delta_{ji}^* , \quad (1.129)$$

$$\text{где } \delta_{ji}^* = \begin{cases} 1, \text{ если } t_{ji} \leq t < t_{j,i+1} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \quad (1.130)$$

индикатор состояния, определяющий интервал дискретизации.

Так, при адаптивно-временной дискретизации и критерии равномерного приближения параметры моделей определяются в следующем виде:

1. для предсказателя нулевого порядка с фиксированной апертурой:

$$a_{ji}^{(0)} = x_{ji} ; \quad (1.131)$$

2. для предсказателя первого порядка, определяющего производную сигнала по соседним отсчетам равномерной дискретизации, т.е. непосредственно в существенном отсчете:

$$\begin{cases} a_{ji}^{(0)} = x_{ji} - \Delta_{ji} t_{ji} ; \\ a_{ji}^{(1)} = \Delta_{ji} , \end{cases} \quad (1.132)$$

где $\Delta_{ji} = \frac{x_{jl} - x_{ji}}{t_{jl} - t_{ji}}$, а $t_{jl} = t_{ji} + \Delta t_0$, $x_{jl} = x_{jl}(t_{jl})$, Δt_0 - интервал дискретизации процесса;

3. для предсказателя первого порядка, определяющего производную сигнала по предыдущему и текущему существенным отсчетам сигнала:

$$\begin{cases} a_{ji}^{(0)} = \frac{x_{j,i-1} t_{ji} - x_{ji} t_{j,i-1}}{t_{ji} - t_{j,i-1}} ; \\ a_{ji}^{(1)} = \frac{x_{ji} - x_{j,i-1}}{t_{ji} - t_{j,i-1}} ; \end{cases} \quad (1.133)$$

4. для «всерного» интерполятора первого порядка:

$$\begin{cases} a_{ji}^{(0)} = \frac{x_{ji} t_{j,i+1} - x_{j,i+1} t_{ji}}{t_{j,i+1} - t_{ji}} ; \\ a_{ji}^{(1)} = \frac{x_{j,i+1} - x_{ji}}{t_{j,i+1} - t_{ji}} . \end{cases} \quad (1.134)$$

Следующей важной характеристикой является минимальный интервал дискретизации, позволяющий восстановить случайный процесс по существенным отсчётам.

Эту характеристику необходимо определять в случаях, когда характеристики потока зависят от характеристик процесса: при адаптивно-временной, спорадической дискретизации, адаптивной коммутации и т.д.

Если значение интервала принудительной дискретизации превышает минимальный, то возможны пропуски отсчетов, что, в свою очередь, приводит к увеличению методической погрешности оценки значений вероятностных характеристик.

Существуют различные приближенные методы определения минимального интервала дискретизации, требующие ту или иную априорную информацию о свойствах процесса, модели процесса на интервале дискретизации и ее параметрах, способе неравномерной дискретизации и т.д.

Так для АВД, использующих полиномиальные модели, как правило, низких порядков ($n=0, n=1$), необходимо знание максимального значения модуля $n+1$ производной μ_{n+1} на интервале дискретизации. Аналитически эта задача может быть решена только для дифференцируемых процессов с $2(n+1)$ раз дифференцируемой корреляционной функцией, т.е. в ограниченных случаях [38]. В остальных же - возможно применение неравенства Бернштейна, которое справедливо для функций, ограниченных по модулю и имеющих финитную спектральную плотность мощности [117]:

$$\mu_{n+1} = \max |x^{(n+1)}(t)| \leq \omega_c^{n+1} \max |x(t)|, \quad (1.135)$$

где ω_c - верхняя граничная частота спектра входного процесса.

Из выражения (1.135) видно, что для оценки μ_{n+1} необходима информация о законе распределения модуля и спектральной плотности мощности входного процесса.

Воспользовавшись этим выражением, определим минимальный интервал дискретизации [38]:

$$\Delta t_{min} = \sqrt[n+1]{\frac{\varepsilon k}{\mu_{n+1}}}, \quad (1.136)$$

где ε - погрешность аппроксимации; k - коэффициент, зависящий от вида, степени аппроксимирующего полинома и критерия приближения (см. табл. 1.7).

Следует отметить, что неравенство Бернштейна дает сильно завышенное значение μ_{n+1} . Скорректировать это завышение возможно подбором множителя R в уравнении определения ω_c

$$\int_0^{\omega_c} S_x(\omega) d\omega = R \sigma_x^2. \quad (1.137)$$

Так для нормального входного процесса с КФ $K_x(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-\alpha|\tau|)$

$$\omega_c = \alpha \operatorname{tg} R \pi. \quad (1.138)$$

В таблице 1.8 приведены результаты определения Δt_{min} в соответствии с выражением (1.136) для предсказателей нулевого порядка с плавающей апертурой для различных R и результаты имитационного моделирования [117]. Отсюда видно, что хорошее совпадение наблюдается при $R=0,4$.

Минимальный интервал дискретизации

Таблица 1.8

$\gamma = \varepsilon/\sigma_x$	0,25	0,5	0,75	1,0
$R = 0,320$	0,0529	0,1058	0,1587	0,2115
$R = 0,400$	0,0271	0,0542	0,0812	0,1083
$R = 0,475$	0,0066	0,0131	0,0197	0,0262
Результаты имитационного моделирования	0,0288	0,0579	0,0977	0,1465

Аналогичным образом возможно определение Δt_{min} и для других моделей КФ входного процесса.

Интенсивность потока λ - величина, обратная математическому ожиданию интервала дискретизации, как параметр закона распределения используется при метрологическом анализе алгоритмов статистических измерений, определении коэффициента сжатия.

Существуют различные способы определения коэффициента сжатия [38]. Учитывая, что эта характеристика в дальнейшем будет использоваться при метрологическом анализе алгоритмов статистических измерений, определим ее в виде:

$$k_{сж} = \frac{N}{M}, \quad (1.139)$$

где N - число отсчетов при равномерной дискретизации;

M - число отсчетов при неравномерной дискретизации при той же длительности реализации и погрешности восстановления.

При известных характеристиках потока выражение (1.139) удобно представить в виде:

$$k_{сж} = \frac{m_{\Delta t}}{\Delta t_{min}} = \frac{1}{\lambda \Delta t_{min}}. \quad (1.140)$$

1.11. Типовые модели неэквидистантных временных рядов

Рассмотрим типовые модели неэквидистантных временных рядов, широко применяемых на практике как при описании, так и при метрологическом анализе алгоритмов оценивания вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов. На практике, при описании различных видов неравномерной дискретизации, приводящей к нерегулярным временным рядам, как правило, применяют модели рекуррентных потоков Пальма [38, 67, 117]:

- периодической дискретизации со случайными пропусками наблюдений;
- периодической дискретизации с «дрожанием»;
- аддитивной случайной дискретизации;
- периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений;
- аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений.

Так для периодической дискретизации со случайными пропусками наблюдений интервал дискретизации $\Delta t_{ji} = t_{j,i+} - t_{ji}$ определяется в соответствии с выражением

$$\Delta t_{ji} = Y_{ji} \Delta t_0, \quad (1.141)$$

где Δt_0 - интервал принудительной дискретизации;

Y -случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром p [67]:

$$P(Y = m) = pq^{m-1}, \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (1.142)$$

В соответствии с выражением (1.141) мгновенное значение выборки случайного процесса и соответствующая ему метка времени равны:

$$\begin{cases} x_{ji} = x_{ji} \left(\Delta t_0 \sum_{k=1}^i Y_{jk} \right); \\ t_{ji} = \Delta t_0 \sum_{j=1}^i Y_j. \end{cases} \quad (1.143)$$

Плотность и функция распределения вероятностей интервала дискретизации соответственно имеют вид [67]:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = p \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} \delta[\Delta t - i\Delta t_0]; \quad (1.144)$$

$$F_{\Delta t}(\Delta t) = p \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} 1[\Delta t - i\Delta t_0], \quad (1.145)$$

где $1[\Delta t] = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta t \geq 0 \\ 0, & \text{если } \Delta t < 0 \end{cases}$ - единичная функция.

Для определения моментных характеристик, законов распределения сумм интервалов удобнее воспользоваться характеристической функцией [159]:

$$\varphi_{\Theta}(u) = \frac{p \exp(iu\Delta t_0)}{1 - q \exp(iu\Delta t_0)}. \quad (1.146)$$

Тогда математическое ожидание и дисперсия равны:

$$\begin{cases} m_{\Delta t} = \frac{\Delta t_0}{p}; \\ \sigma_{\Delta t}^2 = \frac{\Delta t_0^2 q}{p^2}, \end{cases} \quad (1.147)$$

а плотность распределения времени возвращения имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{p^2}{\Delta t_0} \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} 1[\Delta t - i\Delta t_0]. \quad (1.148)$$

С учетом выражения (1.146) характеристическая функция $Z_{nj} = \sum_{i=1}^n \Delta t_{ji}$ равна

$$\varphi_{Z_{nj}}(u) = \left[\frac{p \exp(iu\Delta t_0)}{1 - q \exp(iu\Delta t_0)} \right]^n. \quad (1.149)$$

Откуда плотность и функция распределения Z_{nj} определяется в виде:

$$f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = P(Z_{nj} = k\Delta t_0) = C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \delta[Z_{nj} - k\Delta t_0] \quad (1.150)$$

$$F_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = P(Z_{nj} \leq k\Delta t_0) = \sum_{r=n}^k C_{r-1}^{n-1} p^r q^{r-n} 1[Z_{nj} - r\Delta t_0] \quad (1.151)$$

С учетом выражения (1.151) L_{max} , обеспечивающее выполнение условия (1.123), находится из уравнения

$$p^{L_{max}} \sum_{r=L_{max}}^m C_{r-1}^{L_{max}-1} q^{r-L_{max}} 1[\tau_{kmax} - r\Delta t_0] = 1 - P_0, \quad (1.152)$$

где $m = \text{ent} \left[\frac{\tau_{kmax}}{\Delta t_0} \right] + 1$.

На рис. 1.25 приведены результаты расчета плотностей и функций распределения вероятностей в соответствии с выражениями (1.135), (1.136) для $p = 0,8$, $\Delta t_0 = 0,4$, $\tau_{kmax} = 3$ и результаты имитационного моделирования, подтверждающие правильность расчетов. Из рис. 1.25 видно, что для $p = 0,8$ $L_{max} = m$.

Интервальная корреляционная функция для рассматриваемого потока равна

$$C_x(J) = p, \quad (1.153)$$

а минимальный интервал дискретизации и коэффициент сжатия соответственно равны:

$$\begin{cases} \Delta t_{\min} = \Delta t_0; \\ k_{\text{сж}} = \frac{1}{p}. \end{cases} \quad (1.154)$$

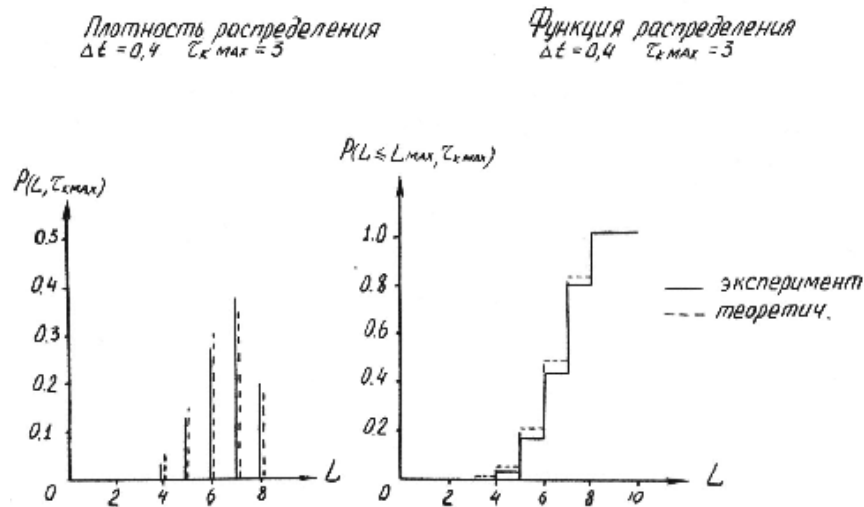


Рисунок 1.25 - Плотность и функция распределения суммы интервалов на $\tau_{k \max}$

Для периодической дискретизации с «дрожанием»

$$\begin{cases} t_{ji} = i\Delta t_0 + \xi_{ji}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (1.155)$$

где ξ_{ji} - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей $f_{\xi}(\xi)$, каждая из которых расположена в диапазоне $\left(-\frac{\Delta t_0}{2}, \frac{\Delta t_0}{2}\right)$, а интервал дискретизации равен

$$\Delta t_{ji} = \Delta t_0 + \xi_i - \xi_{i-1}. \quad (1.156)$$

Характеристики потока будут зависеть от $f_{\xi}(\xi)$. Рассмотрим пример, когда ξ распределена по нормальному закону с $m_{\xi} = 0$ и $D_{\xi} = \sigma_{\xi}^2$.

Тогда плотность, функция распределения вероятностей и характеристическая функция соответственно равны:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_{\xi}} \exp\left(-\frac{(\Delta t - \Delta t_0)^2}{4\sigma_{\xi}^2}\right); \quad (1.157)$$

$$F_{\Delta t}(\Delta t) = \Phi\left(\frac{\Delta t - \Delta t_0}{\sqrt{2}\sigma_{\xi}}\right), \quad (1.158)$$

где $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ [12];

$$\varphi_{\Delta t}(u) = \exp\left(-u^2 \sigma_x^2 + iu\Delta t_0\right). \quad (1.159)$$

Откуда $m_{\Delta t} = \Delta t_0$, а $D_{\Delta t} = 2\sigma_{\xi}^2$.

Плотность распределения времени возвращения имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Delta t_0} \Phi * \left(\frac{t - \Delta t_0}{\sqrt{2} \sigma_\xi} \right). \quad (1.160)$$

Характеристическая функция суммы n независимых интервалов $Z_{nj} = \sum_{i=1}^n \Delta t_{ji}$ с учетом выражения (1.159) запишется в виде:

$$\varphi_{Z_{nj}}(u) = \exp(-n(u^2 \sigma_\xi^2 - iu \Delta t_0)), \quad (1.161)$$

а соответствующие ей плотность и функция распределения вероятностей равны:

$$f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}\sigma_\xi} \exp\left(-\frac{(Z_{nj} - n\Delta t_0)^2}{4n\sigma_\xi^2}\right), \quad (1.162)$$

$$F_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \Phi * \left(\frac{Z_{nj} - n\Delta t_0}{\sqrt{2n}\sigma_\xi} \right). \quad (1.163)$$

Для нормального закона распределения ξ L_{max} определяется из уравнения

$$\Phi * \left(\frac{\tau_{kmax} - L_{max}\Delta t_0}{\sqrt{2L_{max}}\sigma_\xi} \right) = 1 - P_D, \quad (1.164)$$

которое с учетом свойств $\Phi^*(x)$ приведем к виду:

$$\Phi * \left(\frac{L_{max}\Delta t_0 - \tau_{kmax}}{\sqrt{2L_{max}}\sigma_\xi} \right) = P_D. \quad (1.165)$$

Отсюда, после преобразований получим следующее уравнение:

$$L_{max}^2 - \frac{2L_{max}(\Delta t_0 \tau_{kmax} + A^2 \sigma_\xi^2)}{\Delta t_0} - \frac{\tau_{kmax}^2}{\Delta t_0^2} = 0, \quad (1.166)$$

где $A = \arg \Phi^*(P_D)$.

Решение этого уравнения, например, для случайного процесса с нормированной корреляционной функцией $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, $\Delta t_0 = 0,4/\alpha$, $\tau_{kmax} = 3/\alpha$, $P_D = 0,99$, $A = 2,3$ дает $L_{max} = 9$.

Заметим, что при равномерной дискретизации $L_{max} = \text{ent} \left[\frac{\tau_{kmax}}{\Delta t_0} + 0,5 \right] + 1 = 9$.

Интервальная корреляционная функция равна

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Phi * \left[\frac{\Delta t_0(J-k) + \frac{\Delta}{2}}{\sqrt{2}\sigma_\xi} \right] - \Phi * \left[\frac{\Delta t_0(J-k) - \frac{\Delta}{2}}{\sqrt{2}\sigma_\xi} \right] \right\}. \quad (1.167)$$

Если $\sigma_\xi = \frac{\Delta t_0}{6}$ и $\Delta = \Delta t_0$, то после промежуточных преобразований получим

$$C_x(J) = \Phi * \left[\frac{3(2J-1)}{\sqrt{2}} \right] \rightarrow 1. \quad (1.168)$$

Заметим, что для рассматриваемой модели при заданном значении Δt_0 минимальный интервал дискретизации может быть близок к нулю, но коэффициент сжатия $k_{сж} = 1$.

Для аддитивной случайной дискретизации

$$\begin{cases} t_{ji} = t_{ji+1} + \xi_{ji}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (1.169)$$

где ξ_{ji} - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей $f_{\xi}(\xi)$, каждая из которых расположена в диапазоне $(0, \infty)$.

Интервал дискретизации для этой модели равен

$$\Delta t_{ji} = \xi_{ji}. \quad (1.170)$$

Наиболее полно вероятностные характеристики этой модели исследованы в [4, 15]. Учитывая, что в практике широко применяется модель простейшего потока и потока с распределением интервалов, подчиненного гамма-распределению, частным случаем которого являются законы Эрланга, экспоненциальное, вырожденное причинное, показательное степенное, Пирсона и т.д. [67], определим их характеристики.

Для гамма-распределения длительности интервалов

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \frac{(\alpha\lambda)^{\alpha} \Delta t^{\alpha-1} \exp(-\alpha\lambda\Delta t)}{\Gamma(\alpha)} \quad (1.171)$$

характеристическая функция равна:

$$\varphi_{\Delta t}(u) = \frac{(\alpha\lambda)^{\alpha}}{(\alpha\lambda - iu)^{\alpha}}. \quad (1.172)$$

Отсюда характеристическая функция $Z_{nj} = \sum_{i=1}^n \Delta t_{ji}$ определяется в виде:

$$\varphi_{Z_{nj}}(u) = \frac{(\alpha\lambda)^{\alpha n}}{(\alpha\lambda - iu)^{\alpha n}}, \quad (1.173)$$

а плотность и функция распределения вероятностей соответственно равны:

$$f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \frac{(\alpha\lambda)^{\alpha n} Z_{nj}^{\alpha n-1} \exp(-\alpha\lambda Z_{nj})}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (1.174)$$

$$F_{Z_n}(Z_n) = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \nu[\alpha n, \alpha\lambda Z_n] \quad (1.175)$$

где $\nu[\alpha, x] = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ - неполная гамма-функция [68].

Моментные характеристики интервалов равны: $m_{\Delta t} = \frac{1}{\lambda}$, $D_{\Delta t} = \frac{1}{\alpha\lambda^2}$, а коэффициент формы

$$k_{\phi} = \frac{2\alpha^{\alpha-1} e^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (1.176)$$

Вероятностные характеристики для простейшего потока можно получить из выражений (1.171) - (1.174), положив $\alpha = 1$.

Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{\Delta t}(\Delta t) = \lambda \exp(-\lambda \Delta t); \\ F_{\Delta t}(\Delta t) = 1 - \exp(-\lambda \Delta t); \\ \varphi_{\Delta t}(u) = \frac{\lambda}{\lambda - iu}; \\ \varphi_{Z_{nj}}(u) = \frac{\lambda^n}{(\lambda - iu)^n}; \\ f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \frac{\lambda^n Z_{nj}^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda Z_{nj}); \\ F_{Z_{nj}} = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k Z_{nj}^k}{k!} \exp(-\lambda Z_{nj}). \end{array} \right. \quad (1.177)$$

При целочисленных значениях $\alpha = k + 1 = 1, 2, 3 \dots$ гамма-распределение вырождается в распределение Эрланга [67].

Для простейшего потока, как следует из выражения (1.177), плотность распределения сумм интервалов на $\tau_{k \max}$ имеет вид

$$f(L, \tau_{k \max}) = P(L, \tau_{k \max}) = \frac{(\lambda \tau_{k \max})^{L-1}}{(L-1)!} \exp(-\lambda \tau_{k \max}), \quad (1.178)$$

а $L_{k \max}$ находится из уравнения

$$\sum_{L=1}^{L_{k \max}} \frac{(\lambda \tau_{k \max})^{L-1}}{(L-1)!} \exp(-\lambda \tau_{k \max}) = P_D. \quad (1.179)$$

Решение уравнения для $\lambda \tau_{k \max} = 6,7766$ и $P_D = 0,99$ дает $L_{k \max} = 14$.

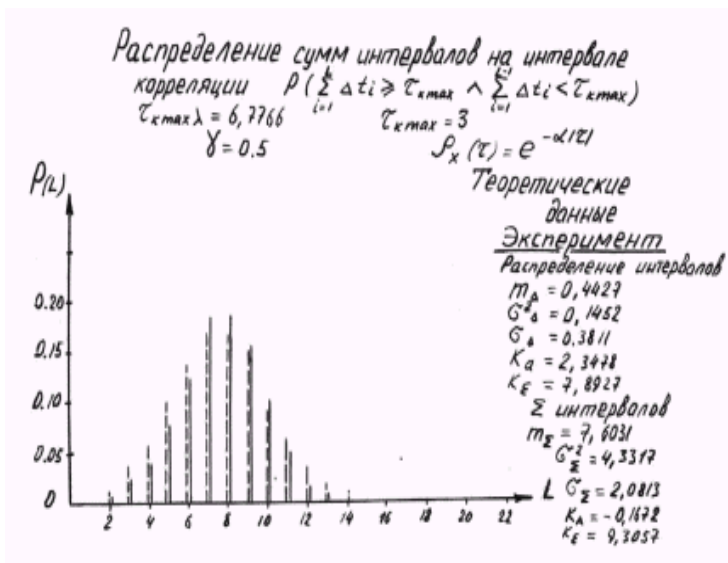


Рисунок 1.26 - Распределение сумм интервалов на максимальном интервале корреляции

На рис. 1.26 приведены для примера законы распределения сумм интервалов на $\tau_{k \max}$ для АВД с предсказателем нулевого порядка с плавающей апертурой (ПНП ПА), полученные методом имитационного моделирования, и результаты определения $L_{k \max}$ из уравнения (1.179). Результаты анализа еще раз подтверждают, что для АВД ПНП ПА возможно применение модели простейшего потока.

Для гамма-распределения интервалов $L_{k \max}$ определяется из

$$\frac{\nu[L_{k \max} \alpha, \alpha \lambda \tau_{k \max}]}{\partial(\alpha L_{k \max})} = 1 - P_D, \quad (1.180)$$

решение которого возможно только численными методами [42, 175].

Интервальная корреляционная функция для простейшего потока примет вид

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ \frac{\lambda^r \exp(-J\lambda\Delta t_0)}{r!} \left[\exp\left(-\frac{\lambda\Delta}{2}\right) \left(J\Delta t_0 - \frac{\Delta}{2}\right)^r - \exp\left(-\frac{\lambda\Delta}{2}\right) \left(J\Delta t_0 + \frac{\Delta}{2}\right)^r \right] \right\}, \quad (1.181)$$

а для гамма-распределения интервалов -

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\partial(\alpha k)} \left\{ v \left[\alpha k, \alpha \lambda \left(J\Delta t_0 + \frac{\Delta}{2} \right) \right] - v \left[\alpha k, \alpha \lambda \left(J\Delta t_0 - \frac{\Delta}{2} \right) \right] \right\}. \quad (1.182)$$

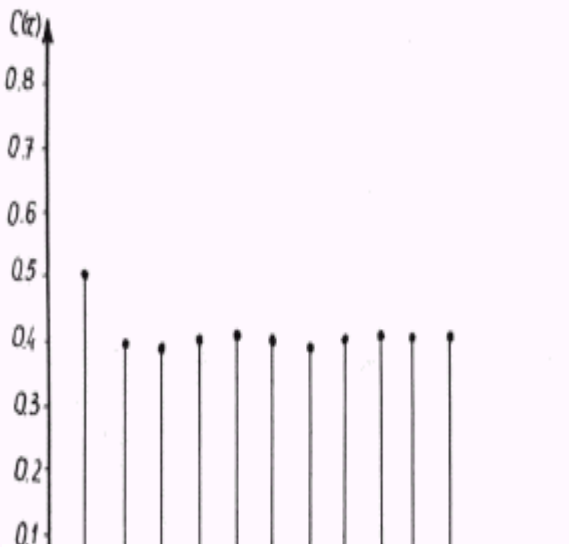


Рисунок 1.27 - Интервальная корреляционная функция

Результаты определения $C_x(J)$ для АВД ПНП ПА для модели КФ входного процесса $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$ представлены на рис. 1.27.

Плотность распределения времени возвращения для простейшего потока

$$\varphi(t) = \lambda \exp(-\lambda t), \quad (1.183)$$

а для гамма-распределения интервалов -

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\partial(\alpha)} v[\alpha, \alpha \lambda t] \quad (1.184)$$

Минимальный интервал дискретизации для полиномиальной модели процесса на интервале дискретизации определяется в соответствии с выражением (1.136) с учетом (1.135).

Следует отметить, что если массивы $\{x_i, \Delta t_i\}_{i=1}^M$ записаны в память ЭВМ, то задачи определения Δt_{min} и λ тривиальны.

Аналитическое же определение интенсивности потока для произвольного вида неравномерной дискретизации, особенно для не дифференцируемых процессов с законами распределения, отличными от нормального, встречается определенные трудности. Следовательно, интенсивность потока необходимо определять для конкретного вида неравномерной дискретизации.

Так, например, для спорадической дискретизации при числе уровней квантования $6 \leq r \leq 300$, как показано в [117] на обработке большого экспериментального материала, удовлетворительная аппроксимация достигается с интенсивностью λ , определяемой выражением

$$\lambda = \frac{\sqrt{-\rho_x''(0)}}{\pi} \sum_{i=1}^r \exp \left[-0,5 \left(\frac{iq - m_x}{\sigma_x} \right)^2 \right], \quad (1.185)$$

где q - шаг квантования.

Для АВД ПНП с фиксированной апертурой (ФА) поток является простейшим [67] с интенсивностью

$$\lambda = \frac{M \left[\overset{\circ}{x'} \right]}{\varepsilon} = \frac{k_{\phi} \sigma_{x'}}{\varepsilon}, \quad (1.186)$$

где k_{ϕ} - коэффициент формы производной процесса;

$\sigma_{x'}$ - СКО производной процесса.

Из анализа выражения (1.182) видно, что интенсивность при заданном значении уставки ε определяется, в основном, значением $\sigma_{x'}$, т.к. значения k_{ϕ} для произвольных законов изменяются в небольших пределах (см. таблицу 1.9) [117].

Таблица коэффициентов формы и пикфактора
для типовых законов распределения

Таблица 1.9

№	Наименование закона	$k_{\phi} = M \left[\overset{\circ}{x'} \right] / \sigma_x$	$\eta = x_{max} / \sigma_x$	P_d
1	Нормальный	0,7979	3	0,9973
2	Равномерный	0,8660	1,7320	1
3	Треугольный	0,8165	2,4495	1
4	Антимодальный I	0,9428	1,4142	1
5	Антимодальный II	0,9802	1,2603	1
6	Трапецевидный	0,8391	2,3238	1
7	Рэлея	1	2,9735	0,995
8	Экспоненциальный	0,7358	5,2983	0,995
9	Лапласа	0,7071	3,7465	0,995

Выражения $\sigma_{x'}$ для типовых дифференцируемых моделей КФ приведены в таблице 1.10.

СКО дифференцируемых процессов

Таблица 1.10

N	$K_x(\tau)$	$\sigma_{x'}$
1	$\sigma_x e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$\alpha \sigma_x$
2	$\sigma_x e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$\alpha \sigma_x \sqrt{3} / 3$
3	$\sigma_x \exp(-\alpha^2 \tau^2)$	$\alpha \sigma_x \sqrt{2}$
4	$\sigma_x e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\sigma_x \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}$

Для недифференцируемых случайных процессов в явном виде значение $\sigma_{x'}$ определить нельзя.

Однако воспользовавшись аппроксимативным подходом, возможно определение параметров аппроксимирующего выражения $K_a(\tau)$, удовлетворяющего, например, минимуму квадратической погрешности аппроксимации [111, 112, 117], а затем по параметрам модели определение $\sigma_{x'}$.

Так, например, при аппроксимации $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$ моделью вида $K_a(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-\beta^2 \tau^2)$ связь параметров имеет вид $\beta = 0,935 \alpha$. (1.187)

Результаты теоретического определения интенсивности для адаптивно-временной дискретизации предсказателем пулевого порядка с плавающей апертурой (АВД ПНП ПА) λ_T , экспериментального, полученного методом имитационного моделирования λ_m , а также погрешности оценки λ приведены в таблице 1.11.

Интенсивность потока АВД ПНП ПА для случайного процесса

$$с K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \text{ для } \gamma = \varepsilon / \sigma_x = 0,5$$

Таблица 1.11

№	k_ϕ	λ_T	λ_m	$\delta = (\lambda_m - \lambda_m) / \lambda_m$
1	0,7979	2,1101	2,1778	0,0705
2	0,8148	2,1547	2,1589	0,0019
3	0,8283	2,1747	2,2124	0,0173
4	0,8225	2,1752	2,2247	0,0228
5	0,7954	2,1035	2,1673	0,0303
6	0,7489	1,9805	1,9324	0,0243

Из анализа результатов видно, что независимо от вида закона распределения входного процесса, задаваемого k_ϕ , погрешность оценки λ находится в допустимых пределах.

Аналогичным образом, воспользовавшись подпрограммами аппроксимации КФ параметрическими моделями [111, 112], возможно определение и других моделей КФ.

Модель периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений является обобщением модели периодической дискретизации с «дрожанием», интервалы которой $\Delta t_{ji} = \Delta t_0 + \xi_{j,i+1} - \xi_{j,i}$ с плотностью распределения вероятностей $f_{\Delta t}(\Delta t)$, разряжены p -преобразованием [117].

Для нее:

$$\begin{cases} t_{ji} = \Delta t_0 \sum_{k=1}^i Y_{kj} + \xi_{j,i} - \xi_{j,0}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (1.188)$$

где Y_i - случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром p в соответствии с выражением (1.142), а интервал дискретизации

$$\Delta t_{ji} = Y_i \Delta t_0 + \xi_{j,i} - \xi_{j,i-1} \quad (1.189)$$

Плотность распределения вероятностей величины Z находится по формуле полной вероятности с гипотезами $H_n(Y = n)$ в виде [117]

$$f_z(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_z^{(n)}(z) p q^{n-1}, \quad (1.190)$$

где $f_z^{(n)}(z)$ - плотность распределения суммы n независимых величин Δt_{ji} .

Пусть ξ распределена по нормальному закону $m_\xi = 0$ и $D_\xi = \sigma_\xi^2$. Тогда выражение (1.175) примет вид:

$$f_z(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi n \sigma_\xi}} \exp\left(-\frac{(z - n\Delta t_0)^2}{4n\sigma_\xi^2}\right) p q^{n-1}, \quad (1.191)$$

соответствующая функция распределения -

$$F_z(z) = p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \Phi\left(\frac{z - n\Delta t_0}{\sqrt{2n\sigma_\xi}}\right), \quad (1.192)$$

а математическое ожидание и дисперсия соответственно равны

$$\begin{cases} m_z = \frac{\Delta t_0}{p}; \\ \sigma_z^2 = \frac{2\sigma_\xi^2}{p} + \frac{\Delta t_0^2}{p^2}. \end{cases} \quad (1.193)$$

Плотность распределения времени возвращения определяется в виде:

$$\varphi(t) = \frac{p^2}{\Delta t_0} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \Phi\left(\frac{z - n\Delta t_0}{\sqrt{2n\sigma_\xi}}\right). \quad (1.194)$$

Найдем законы распределения $\zeta_n = \sum_{i=1}^n z_i$, воспользовавшись ее характеристической функцией

$$\varphi_{\zeta_n}(u) = \left[\frac{p \exp(-u^2 \sigma_\xi^2 + iu \Delta t_0)}{1 - q \exp(-u^2 \sigma_\xi^2 + iu \Delta t_0)} \right]^n \quad (1.195)$$

Отсюда плотность распределения вероятностей

$$f_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi k \sigma_\xi}} \exp\left(-\frac{(\zeta_n - k\Delta t_0)^2}{4k\sigma_\xi^2}\right) C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n}, \quad (1.196)$$

а функция распределения примет вид:

$$F_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \Phi\left(\frac{\zeta_n - k\Delta t_0}{\sqrt{2k\sigma_\xi}}\right). \quad (1.197)$$

В соответствии с выражением (1.124) $L_{\max}$ определяется из уравнения

$$\sum_{k=L_{\max}}^{\infty} C_{k-1}^{L_{\max}-1} p^{L_{\max}} q^{k-L_{\max}} \Phi\left(\frac{\tau_{k\max} - k\Delta t_0}{\sqrt{2k\sigma_\xi}}\right) = 1 - P_{\text{д}}. \quad (1.198)$$

Интервальная корреляционная функция с учетом выражения (1.123) примет вид:

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=k}^{\infty} C_{r-1}^{k-1} p^k q^{r-k} \left\{ \Phi\left[\frac{\Delta t_0(J-k) + \Delta/2}{\sqrt{2r\sigma_\xi}}\right] - \Phi\left[\frac{\Delta t_0(J-k) - \Delta/2}{\sqrt{2r\sigma_\xi}}\right] \right\}. \quad (1.199)$$

Если $\Delta = \Delta t_0$, то $C_x(J) = p$.

Минимальный интервал дискретизации может быть близок к нулю, а коэффициент сжатия равен

$$k_{\text{сж}} = \frac{1}{p}. \quad (1.200)$$

Модель аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений является обобщением модели аддитивной случайной дискретизации, интервалы которой $\Theta_i = \xi_i$ с плотностью распределения вероятностей $f_{\Theta}(\Theta)$ разряжены p -преобразованием.

Для этой модели:

$$\begin{cases} t_i = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^{Y_j} \xi_{k+\sum_{l=1}^{j-1} Y_l}; \\ x_i = x(t_i), \end{cases} \quad (1.201)$$

а интервал дискретизации равен

$$z_i = \sum_{l=1}^Y \Theta_i = \sum_{k=1}^{Y_i} \xi_{k+\sum_{l=1}^{i-1} Y_l}. \quad (1.202)$$

Плотность распределения вероятностей Z определяется в соответствии с выражением (1.190).

Пусть ξ распределена по экспоненциальному закону. Тогда $f_z(z)$ с учетом (1.177) примет вид

$$f_z(z) = p\lambda \exp(-\lambda pz). \quad (1.203)$$

Из этого выражения видно, что все вероятностные характеристики аналогичны характеристикам простейшего потока с параметром λp для аддитивной случайной дискретизации (см. выражения (1.162), (1.164), (1.166), (1.168)).

Для гамма-распределения длительности интервалов Θ (см. (1.101)) плотность распределения

$$f_z(z) = p\alpha \lambda \exp(-\alpha \lambda z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha \lambda q z)^{\alpha n - 1}}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (1.204)$$

функция распределения

$$F_z(z) = p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \frac{\Gamma[n\alpha, \alpha \lambda z]}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (1.205)$$

математическое ожидание и дисперсия

$$\begin{cases} m_z = \frac{1}{p\lambda}; \\ \sigma_z^2 = \frac{\sigma_{\xi}^2}{p} + \frac{q}{\lambda^2 p^2}, \end{cases} \quad (1.206)$$

плотность распределения времени возвращения

$$\varphi(t) = \lambda p^2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \frac{\Gamma[\alpha n, \alpha \lambda z]}{\Gamma(\alpha n)}. \quad (1.207)$$

Плотность и функция распределения вероятностей суммы n интервалов $\zeta_n = \sum_{i=1}^n z_i$ соответственно равны:

$$f_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \frac{(\alpha \lambda)^{\alpha n} \zeta_n^{\alpha n - 1}}{\Gamma(\alpha n)} \exp(-\alpha \lambda \zeta_n); \quad (1.208)$$

$$F_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \frac{\nu[\alpha n, \alpha \lambda \zeta_n]}{\Gamma(\alpha n)}. \quad (1.209)$$

С учетом выражений (1.124) и (1.209) L_{max} находится из уравнения

$$\sum_{k=L_{max}}^{\infty} C_{k-1}^{L_{max}-1} p^{L_{max}} q^{k-L_{max}} \frac{\nu[\alpha L_{max}, \alpha \lambda \tau_{k max}]}{\Gamma(\alpha L_{max})} = 1 - P_{\mathcal{D}} \quad (1.210)$$

с использованием одного из численных методов [42, 175].

Интервальная корреляционная функция определяется в виде:

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=k}^{\infty} C_{r-1}^{k-1} p^k q^{r-k} \left\{ \frac{\nu\left[\alpha r, \alpha \lambda \left(J \Delta t_0 + \frac{\Delta}{2}\right)\right]}{\Gamma(\alpha r)} - \frac{\nu\left[\alpha r, \alpha \lambda \left(J \Delta t_0 - \frac{\Delta}{2}\right)\right]}{\Gamma(\alpha r)} \right\}. \quad (1.211)$$

Интенсивность и минимальный интервал дискретизации определяются аналогично как и для модели аддитивной случайной дискретизации, а коэффициент сжатия для рассматриваемых законов равен:

$$k_{сж} = \frac{1}{p \lambda \Delta t_0}. \quad (1.212)$$

Рассмотренные модели, естественно, не являются исчерпывающими, но они покрывают широкий класс практических задач.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

2.1. Моделирование временных рядов типа «белого» шума

Как правило, в качестве первичного случайного процесса, с помощью которого осуществляется моделирование образцовых сигналов, является процесс типа «белого» шума, распределенный по равномерному или нормальному законам. В дальнейшем для получения случайного сигнала с заданными статистическими характеристиками его подвергают различным линейным и нелинейным преобразованиям. Существуют различные способы получения первичного процесса:

- с использованием физических датчиков случайных процессов, построенных на различных физических эффектах;
- с помощью специальных программ формируется достаточно большая последовательность псевдослучайных чисел, удовлетворяющая принятым тестам случайности - программный;
- с использованием таблиц случайных чисел - табличный;
- с использованием специального процессора для генерирования псевдослучайной последовательности - программно-аппаратный.

В таблице 2.1 указаны достоинства и недостатки методов генерирования.

Сравнительная оценка методов генерирования случайных процессов
(последовательностей)

Таблица 2.1

Метод	Достоинства	Недостатки
Датчиков	Запас чисел неограничен. Сверхбыстрое получение	Нестабильность физических генераторов. Невозможность повторения последовательности. Необходимость специальной аппаратуры.
Программный	Проверка однократная. Возможность воспроизведения чисел. Простота реализации. Отсутствие специальной аппаратуры	Запас чисел ограничен (периодичность процесса). Сравнительно малое быстродействие.
Табличный	Высокое быстродействие. Хорошая случайность. Возможность воспроизведения чисел.	Запас чисел ограничен. Большой объем занимаемой памяти.
Программно-аппаратный	Высокое быстродействие. Возможность воспроизведения чисел.	Запас чисел ограничен. Требуется специальный процессор.

Из анализа таблицы 2.1 видно, что программный метод генерирования псевдослучайных последовательностей (ПСП) самый удобный с практической точки зрения.

Обычно современные ЭВМ в математическом обеспечении имеют встроенную функцию генерирования ПСП с равномерным законом распределения в диапазоне $[0,1]$, используя которую можно решать большинство задач моделирования образцовых сигналов. Но иногда возникает необходимость генерирования независимых случайных процессов. Наилучшие из известных сегодня датчиков случайных чисел представляют частные случаи схемы, предложенной Д.Ч. Леммером [85]:

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \bmod m, \quad (2.1)$$

где $x_0 > 0$ - начальное значение;

$a > 0$ - множитель;
 $c \geq 0$ - приращение;
 m - модуль ($m > x_0, m > a, m > c$).

Обычно m задается на единицу больше максимального числа, которое можно записать в машинном слове.

Такая последовательность называется линейной конгруэнтной последовательностью. Для получения равномерно распределенной в интервале $[0,1]$ последовательности необходимо выполнить преобразование:

$$u_n = \frac{x_n}{m}. \quad (2.2)$$

Конгруэнтные последовательности всегда «зацикливаются». Это свойство присуще всем последовательностям вида $x_{n+1} = f(x_n)$. Повторяющийся цикл называется периодом.

Если $c = 0$, то процесс генерации случайных чисел происходит несколько быстрее, но в то же время ограничение $c = 0$ уменьшает длину периода. Методы генерирования с $c = 0$ и $c \neq 0$ называют соответственно: мультипликативным конгруэнтным и смешанным конгруэнтным методами.

Рекомендации по выбору числа m сводятся к следующему - m необходимо выбрать достаточно большим, так как длина периода не может быть больше m . Другой фактор, влияющий на выбор m , - это скорость выработки чисел. Так как деление - сравнительно медленная операция, то ее можно избежать. Для этого необходимо выбрать m равным размеру слова. При выборе m , равному максимальному целому числу, размещающемуся в машинном слове, младшие разряды числа x намного менее случайны случайных старших. Если m равно максимальному целому числу в машинном слове ± 1 , то такой ситуации не возникает. Но для большинства приложений младшие разряды не существенны, и выбор m равным максимальному целому числу в машинном слове является вполне удовлетворительным, т.е. можно принять $m = 2^l$, где l - длина машинного слова.

Выбор множителя a : для любой последовательности, предназначенной для использования в качестве источника случайных чисел, важен большой период.

Теорема 1. Длина периода линейной конгруэнтной последовательности равна m тогда и только тогда, когда

1. c и m - взаимно простые числа;
2. $b = a - 1$ - кратно p для любого простого p , являющегося делителем m ;
3. b кратно 4, если m кратно 4.

Замечание: когда период имеет длину m , каждое число от 0 до $m - 1$ встречается за период ровно один раз, следовательно, выбор x_0 не влияет в этом случае на длину периода.

Мультипликативный метод:

$$x_{n+1} = a x_n \pmod{m}; \quad (2.3)$$

при $m = 2^{l-2}$ получается последовательность с m периодом, алгоритм построения которой приведен ниже [85]:

1. выбрать в качестве x_0 произвольное нечетное число;
2. $a = 8t \pm 3$, где t - любое целое положительное число;

3. вычислить ax_0 ; полученное число содержит не более $2l$ значащих разрядов; взять l младших значений разрядов в качестве x_1 , остальные отбросить;
4. $u_1 = x_1 / m$;
5. $x_{i+1} = l$ младших разрядов ax_i ; вернуться к пункту 4.

Смешанный метод:

Преимущество данной процедуры в том, что можно так подобрать a и c , что эта формула определит последовательность, пробегающую все целые значения от 0 до $m-1$. Т.е. если выполняются условия теоремы 1, то можно получить ПСП с периодом, равным 2^l .

С вычислительной точки зрения смешанный метод сложнее на одну операцию сложения мультипликативного метода. Однако свобода выбора параметра c открывает дополнительные возможности уменьшения сериальной автокорреляции.

Общие рекомендации по выбору параметров сводятся к следующему:

1. множитель a не должен быть близок к простому рациональному кратному модуля m , в противном случае возникает сериальная корреляция пар чисел;
2. множитель a не должен быть близок к простому рациональному кратному квадратного корня модуля m ; эта близость приведет к сериальной корреляции троек чисел;
3. не следует выбирать множитель a так, чтобы он содержал мало единиц в двоичном представлении;
4. множитель a должен быть достаточно велик;
5. особенно внимательно надо относиться к выбору множителя a при реализации генератора на ЭВМ с малой длиной слова, чтобы обеспечить хорошие статистические характеристики генератора, в этом случае может понадобиться представление чисел с двойной точностью.

Период линейной конгруэнтной последовательности чрезвычайно велик. Обычно, если m приближается к длине машинного слова, то период $\approx 10^9$ и больше.

Так как генератор «белого шума» является базовым генератором при решении разнообразных задач, связанных с генерированием случайных величин, процессов и последовательностей с заданными статистическими характеристиками проведем его исследование.

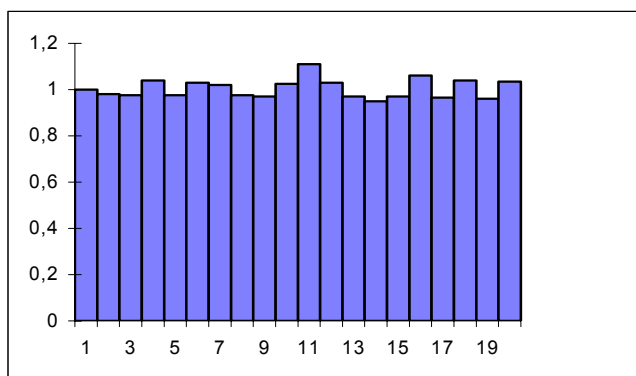
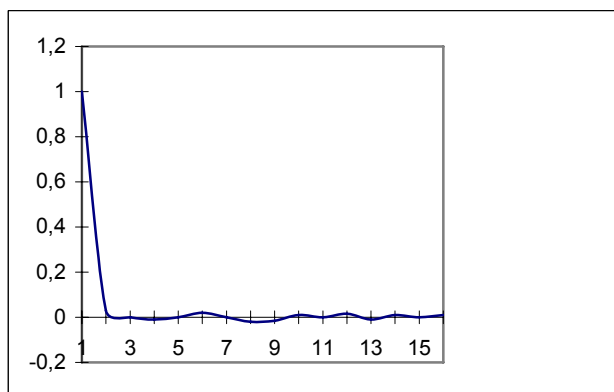


Рисунок 2.1 - Гистограмма «белого» шума

На рис 2.1. представлена гистограмма генератора «белого» шума с равномерным законом распределения в диапазоне $[0,1]$, построенная для $N=10000$.

Результаты обработки данных и параметры закона распределения представлены в таблице 2.2. Вычисленное значение χ^2 соответствует достоверности $P=0,6$.

Δ	x_{min}	x_{max}	m_x	D_x	a	b	χ^2
0,05	0,00002	0,9999	0,4999	0,0834	-0,0003	1,003	15,66



Нормированная корреляционная функция генератора «белого» шума представлена на рис. 2.2.

Результаты исследования показывают неидеальность генератора «белого шума». Однако, как показывает практика, точностные характеристики генератора являются достаточными при решении разнообразных задач моделирования входных воздействий [114].

Рисунок 2.2 - Корреляционная функция «белого» шума

2.2. Моделирование ПСП с заданным законом распределения

Для генерирования ПСП с заданным законом распределения (основные виды моделей приведены в приложении П.1) применяются различные методы [48, 85, 166, 185]:

- метод нелинейного преобразования (обратной функции);
- приближенный метод (метод кусочно-линейной аппроксимации закона распределения);
- метод исключения (метод Неймана) и т.д.

Рассмотрим более подробно первые два.

2.2.1. Метод обратной функции

Для решения задачи моделирования ПСП с заданным законом распределения случайный процесс подвергается нелинейному преобразованию. Теоретической базой для определения вида и характеристик нелинейной функции является теория функций случайного аргумента [159].

Допустим, случайная величина X имеет плотность распределения вероятности $f_x(x)$, а необходимо получить выходную величину Y с плотностью распределения вероятностей $f_y(y)$. Таким образом, мы должны определить вид нелинейной функции преобразования $y = g(x)$.

Известно, что

$$f_x(x)dx = f_y(y)dy. \quad (2.4)$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f_y(y)}{f_x(x)}. \quad (2.5)$$

Допустим, что обратная функция преобразования

$$x = t(y). \quad (2.6)$$

Тогда

$$t'(y) = \frac{f_y(y)}{f_x(x)}. \quad (2.7)$$

Если в качестве входной ПСП выбрать «белый шум» с $f_x(x) = 1$, то

$$x = t(y) = F_y(y). \quad (2.8)$$

Отсюда можно определить вид нелинейной функции преобразования

$$y = g(x) = F_y^{-1}(x). \quad (2.9)$$

Графическая интерпретация метода инверсного преобразования представлена на рис. 2.3.

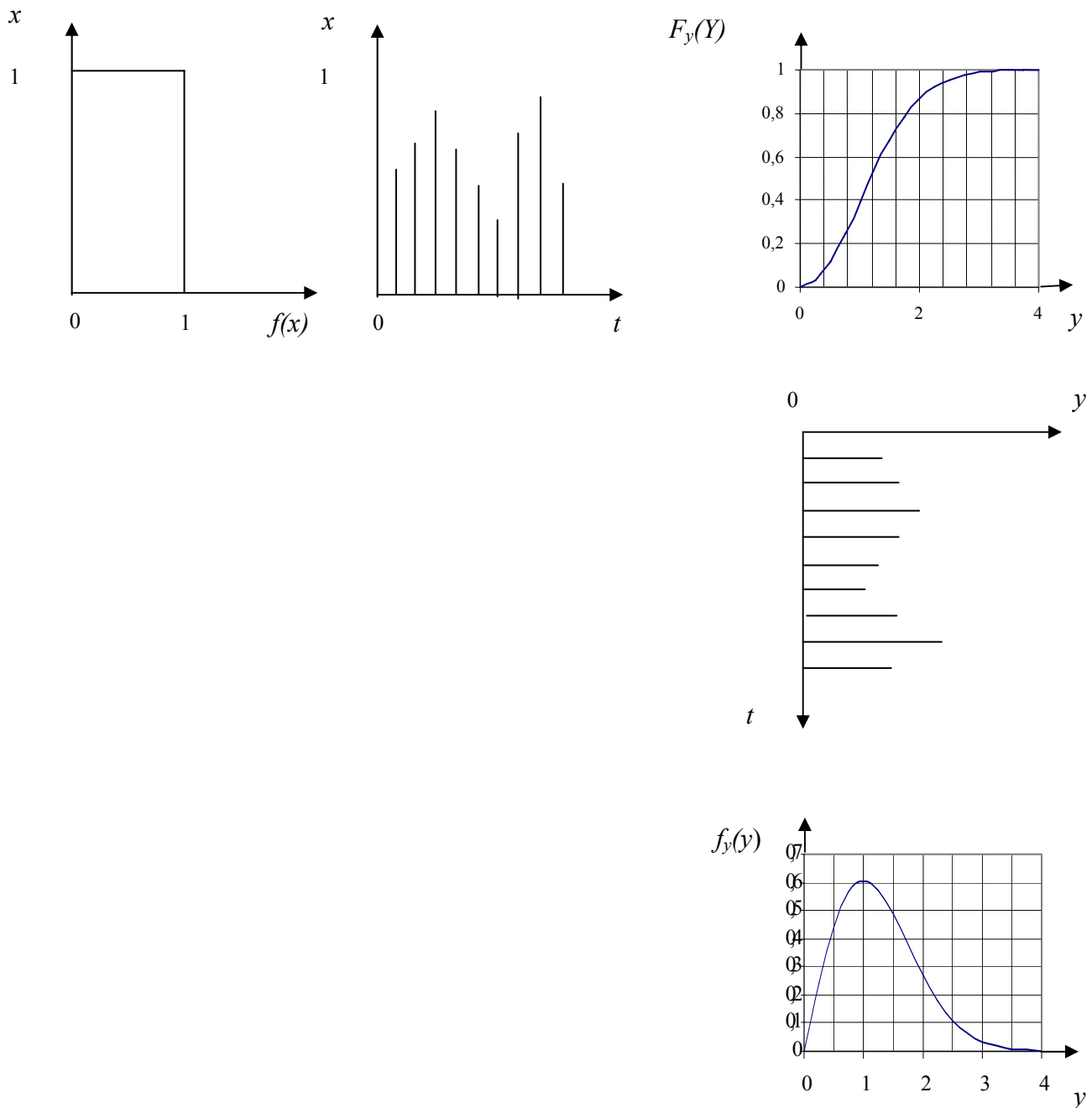


Рисунок 2.3 - Моделирование ПСП с заданным видом закона распределения вероятностей

Обычно можно найти аналитическое решение $F_y^{-1}(x)$ только для ограниченного числа случаев. Примеры интегральных функций распределения и обратных им функций приведены в приложении П.3.

2.2.2. Приближенный метод моделирования

Для большинства случаев интегральную функцию нельзя найти аналитически, и тогда применяют приближенный метод моделирования, который основан на использовании ПСП с равномерным законом распределения, кусочно-линейной интерполяции функции распределения и решении задачи обратной интерполяции.

При кусочно-линейной интерполяции функцию распределения представим в виде:

$$F_y(y_i) = \sum_{l=1}^L \left\{ F_y(y_{l-1}) + \frac{y_i - y_{l-1}}{y_l - y_{l-1}} [F_y(y_l) - F_y(y_{l-1})] \right\} 1(y_{l-1} \leq y_i < y_l), \quad (2.10)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$.

Отсюда найдем обратную функцию:

$$y_i = \sum_{l=1}^L \left[y_{l-1} + \frac{F_y(y_i) - F_y(y_{l-1})}{F_y(y_l) - F_y(y_{l-1})} (y_l - y_{l-1}) \right] 1[F_y(y_{l-1}) \leq F_y(y_i) < F_y(y_l)]. \quad (2.11)$$

С учётом того, что при генерировании ПСП $x_l = F_y(y_l)$ получим,

$$y_i = \sum_{l=1}^L \left[y_{l-1} + \frac{x_i - x_{l-1}}{x_l - x_{l-1}} (y_l - y_{l-1}) \right] 1(x_{l-1} \leq x_i < x_l). \quad (2.12)$$

Так как координаты узловых точек $F(y_l)$ рассчитываются заранее, окончательно получим:

$$y_i = \sum_{l=1}^L [y_{l-1} + (x_i - x_{l-1}) A_l] 1(x_{l-1} \leq x_i < x_l), \quad (2.13)$$

$$\text{где } A_l = \frac{y_l - y_{l-1}}{x_l - x_{l-1}}.$$

Отсюда следует, что необходимо, задавшись допустимой погрешностью восстановления $F_y(y)$ δ , видом интерполяции, определить узловые точки $\{y_l, F_y(y_l)\}$ и A_l . Затем, воспользовавшись формулой (2.11), сгенерировать ПСП с требуемым законом распределения.

Для удобства дальнейших расчётов в приложении П.4 приведены $F_y(y)$ для типовых законов распределения, представленные в виде таблицы. Такое представление позволяет определить значения $F_y(y)$ с заданной погрешностью и уменьшить время решения задачи.

Выбор допустимой погрешности аппроксимации функции распределения $F_y(y)$ определяется в зависимости от N - числа генерируемых чисел ПСП, допустимого уровня значимости P , выбранного критерия и его значения.

Наиболее целесообразно в этом случае применить критерий Колмогорова [51], связанный с погрешностью восстановления:

$$\delta = \max |F_y^{(N)}(y) - F_y(y)|, \quad (2.14)$$

где $F_y^{(N)}(y)$ - функция распределения, определяемая экспериментально на выборке размером N ;

$F_y(y)$ - теоретическая функция распределения.

Для определенной погрешности восстановления δ и объема выборки N определяется

$$\lambda = \delta \sqrt{N}. \quad (2.15)$$

Гипотеза принимается, если для заданного уровня значимости P

$$\lambda < \lambda_{1-P}. \quad (2.16)$$

В приложении П.5 приведены результаты расчёта λ для различных δ и N .

Задавшись допустимым уровнем значимости, например $P = 0,3$, определим $\lambda = 0,97$. Гипотеза принимается, если $\lambda < 0,97$. Так, если необходимо сгенерировать $N = 5000$ чисел, допустимая погрешность восстановления $\delta = 0,01$.

Для расчёта узловых точек функции распределения $F_y(y_l)$ необходимо выбрать вид интерполяции, определить диапазон изменения $y \in [y_{\min}, y_{\max}]$ при заданной доверительной вероятности, интервал дискретизации аргумента Δy и число узловых точек M :

$$M = \text{ent} \left[\frac{y_{\max} - y_{\min}}{\Delta y} \right] + 1. \quad (2.17)$$

В случае применения линейной интерполяции

$$\Delta y = \sqrt{\frac{8\delta}{[F_y''(y)]_{\max}}}. \quad (2.18)$$

В приложении П.6 приведены результаты определения $[F_y''(y)]_{\max}$ и $[y_{\min}, y_{\max}]$.

При генерировании ПСП, т.е. решении задачи обратной интерполяции, возможны три варианта:

1. $\Delta y_l = \text{const}, \Delta x_l = \text{var}$ (см. рис.2.4. а));
2. $\Delta y_l = \text{var}, \Delta x_l = \text{const}$ (см. рис.2.4. б));
3. $\Delta y_l = \text{var}, \Delta x_l = \text{var}$ (см. рис.2.4 в)).

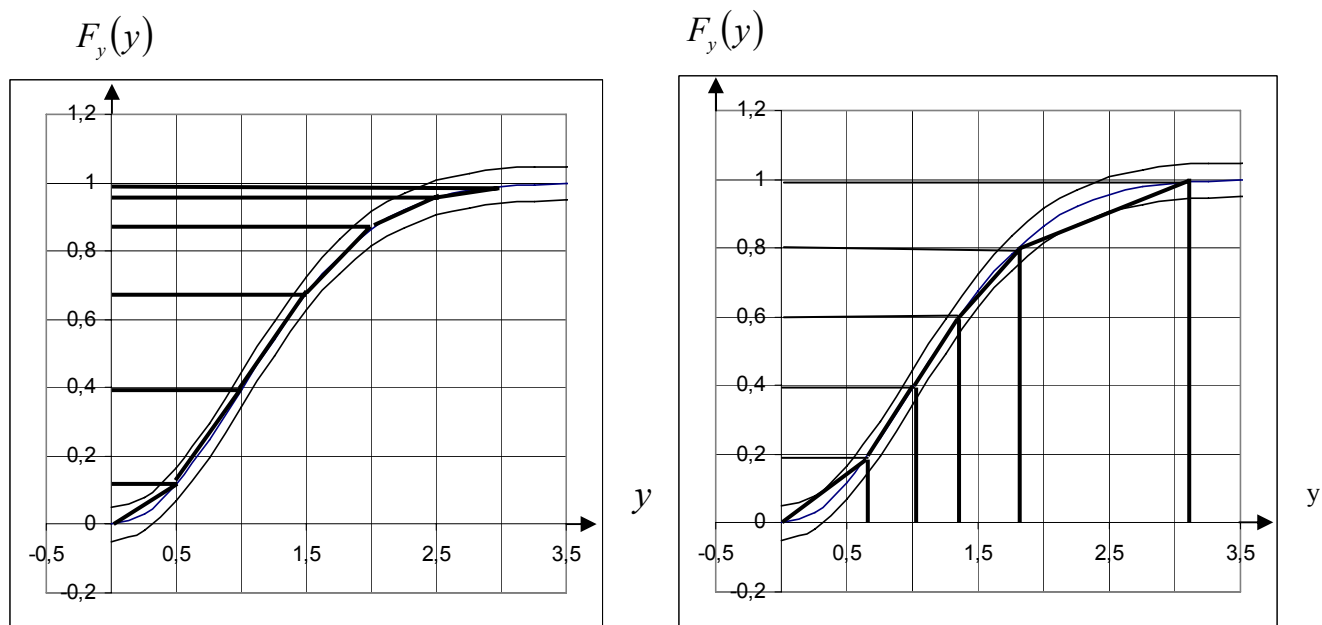
В первом варианте упрощается процедура нахождения узловых точек (интервал дискретизации определяется в соответствии с выражением (2.18)), но больше время генерирования, т.к. необходимо определять участок интерполяции. Во втором - сложнее процедура определения узловых точек, но меньше время генерирования, т.к. упрощается процедура нахождения участка интерполяции. Заметим, что решение третьей задачи аналогично решению задачи адаптивно-временной дискретизации сигнала при выбранной модели восстановления [38]. В этом случае интервал Δy_l определяется в соответствии с выражением:

$$\Delta y_l = \sqrt{\frac{8\delta}{F_y''(y)}}. \quad (2.19)$$

Достоинствами данного метода являются:

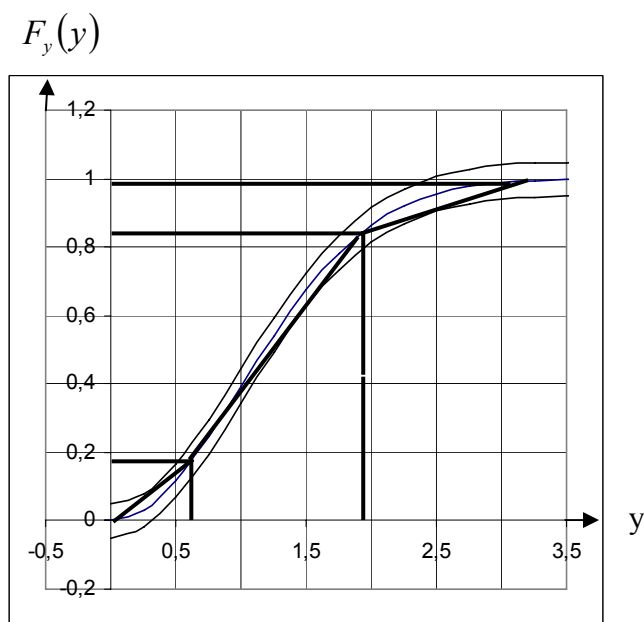
- возможность применения его для моделирования случайных величин со сколь угодно сложным законом распределения;
- значительно меньшее время генерирования ПСП по сравнению с методом инверсного преобразования за счёт уменьшения количества интервалов.

Недостаток - необходимость проведения некоторой подготовительной работы перед непосредственным применением процедуры генерирования ПСП (разбиение области распределения y на интервалы).



а) $\Delta y = const$

б) $\Delta x = const$



в) $\Delta y_l = var, \Delta x_l = var$

Рисунок 2.4 - Формирование параметров кусочно-линейной модели

В качестве примера рассмотрим генерирование ПСП, имеющей распределение модуля многомерного вектора:

$$F_y(y) = \begin{cases} 0, y < 0; \\ \frac{\partial \left(\frac{n}{2}, \frac{y^2}{2\sigma^2} \right)}{\partial \left(\frac{n}{2} \right)}, y > 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

где

$$\frac{\partial \left(\frac{n}{2}, \frac{y^2}{2\sigma^2} \right)}{\partial \left(\frac{n}{2} \right)} = \int_0^{\frac{y^2}{2\sigma^2}} e^{-t} t^{\left(\frac{n}{2} - 1 \right)} dt. \quad (2.21)$$

Для генерирования ПСП необходимо задать параметры распределения. Пусть $\sigma = 1$, $n = 4$. Тогда выражение (2.20) примет вид:

$$F_y(y) = \int_0^{y^2/2} e^{-t} t dt. \quad (2.22)$$

Результаты расчёта координат узловых точек для приведенной погрешности интерполяции 1% приведены в таблице 2.3.

Координаты узловых точек

Таблица 2.3

y	0	0,7	1,3	2,5	3,1	3,9	4,2	4,3
$F_y(y)$	0	0,026	0,207	0,819	0,952	0,996	0,998	0,999

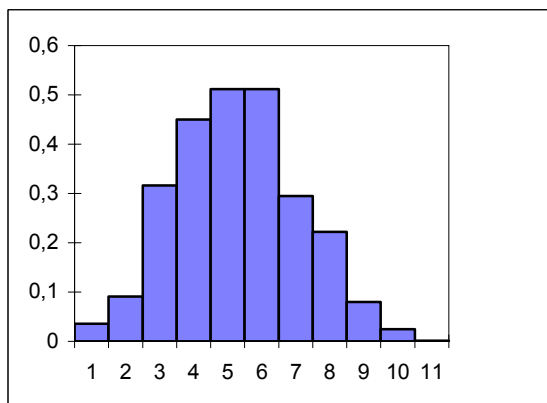


Рисунок 2.5 - Гистограмма ПСП

Из таблицы 2.3 видно, что кривая распределения имеет восемь узлов и семь линейных участков.

Гистограмма сгенерированной ПСП приведена на рис. 2.5.

Для проверки достоверности результатов генерирования использовался критерий Пирсона [47, 51], а сами результаты представлены в таблице 2.4.

Результаты расчётов

Таблица 2.4

J	p_i	p_i^*	p_i^* / h	$(p_i^* - p_i) / p_i$
(0 - 0,4)	0,00316	0,015	0,036	0,0114335
(0,4 - 0,8)	0,039	0,036	0,091	0,0001030
(0,8 - 1,2)	0,121	0,126	0,316	0,0002900
(1,2 - 1,6)	0,215	0,181	0,450	0,0056300
(1,6 - 2,0)	0,217	0,205	0,512	0,0007500
(2,0 - 2,4)	0,192	0,205	0,512	0,0008920

(2,4 - 2,8)	0,115	0,118	0,295	0,0000900
(2,8 - 3,2)	0,061	0,088	0,222	0,0012608
(3,2 - 3,6)	0,026	0,032	0,080	0,0010600
(3,6 - 4,0)	0,008	0,010	0,025	0,0003000
(4,0 - 4,4)	0,001	0,0009	0,0013	0,0020000

Рассчитанное значение $\chi^2 = 1,54$, число степеней свободы $k = 11 - 3 = 8$. В приложении П.7 при выбранном уровне значимости $\alpha = 0,05$ находим $\chi^2_{k,\alpha} = 15,51$. Так как $\chi^2 < \chi^2_{k,\alpha}$, сгенерированная ПСП согласуется с требуемым законом распределения.

Для сокращения времени генерирования увеличим погрешность интерполяции до тех пор, пока критерий согласия χ^2 перестанет выполняться.

Численные значения узлов интерполяции для приведенной погрешности 2% представлены в таблице 2.5.

Узлы интерполяции

Таблица 2.5

y	0	0,98	2,55	3,75	4,3
$F_y(y)$	0	0,080	0,850	0,985	0,999

Проведя аналогичные расчёты, получим, что, и условие $\chi^2 < \chi^2_{k,\alpha}$ выполняется.

Результаты расчёта $\chi^2 = 12,9$ для приведенной погрешности 3% (узлы функции распределения представлены в таблице 2.6), показывают, что условие $\chi^2 < \chi^2_{k,\alpha}$ выполняется.

Узлы интерполяции

Таблица 2.6

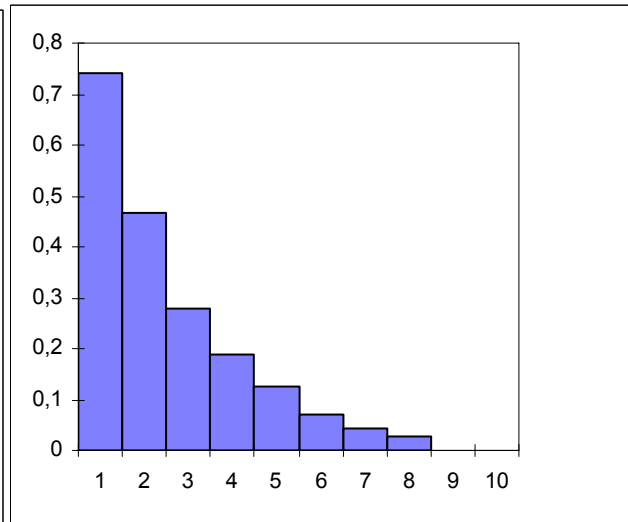
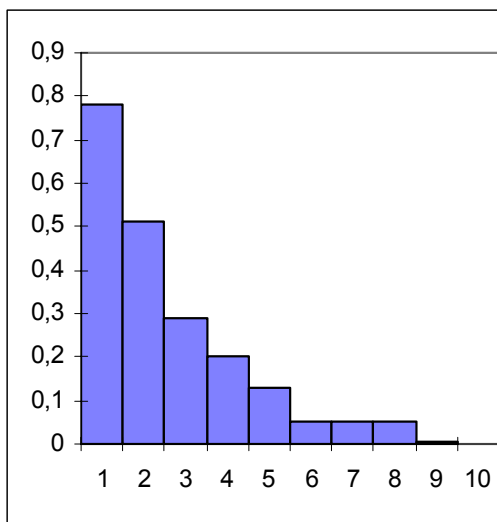
y	0	1,1	3,0	4,3
$F_y(y)$	0	0,12	0,94	0,999

При дальнейшем увеличении приведенной погрешности интерполяции критерий согласия нарушается.

Проведем исследование генераторов ПСП, распределенных по экспоненциальному закону. В отличие от предыдущего примера, в этом случае возможно применения метода инверсного преобразования (см. приложение П.3). Результаты сравним с приближенными методами генерирования.

На рис. 2.6 а) приведены результаты моделирования ПСП, распределенной по экспоненциальному закону с использованием инверсной функции. В этом случае $\chi^2 = 7,579$, $r = 7$, $P = 0,4$.

На рис. 2.6 б) приведены результаты моделирования ПСП, распределенной по экспоненциальному закону с использованием приближенного метода генерирования ПСП $\Delta x = const$. Для рассматриваемого примера $\chi^2 = 7,054$, $r = 7$, $P = 0,4$.



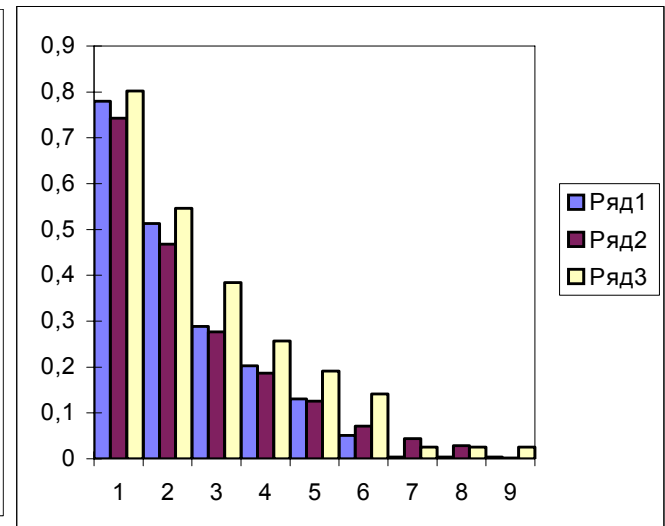
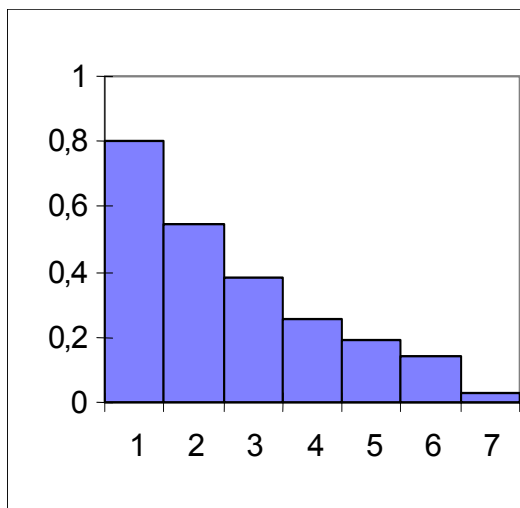
а) с использованием инверсной функции

б) $\Delta x = \text{const}$

Рисунок 2.6 - Гистограммы экспоненциального распределения

На рис. 2.7 а) приведены результаты моделирования ПСП, распределенной по экспоненциальному закону с использованием приближенного метода генерирования $\Delta y = \text{const}$. Для рассматриваемого примера $\chi^2 = 7,33$, $r = 5$, $P = 0,2$.

На рис. 2.7 б) приведены все три гистограммы, полученные в ходе генерирования с использованием различных методов ПСП, распределенных по экспоненциальному закону. Ряд 1 - инверсный метод преобразования, ряд 2 - $\Delta x = \text{const}$, ряд 3 - $\Delta y = \text{const}$.



а) $\Delta y = \text{const}$

б) сравнение гистограмм

Рисунок 2.7 - Гистограммы экспоненциального распределения

Таким образом, результаты экспериментальных исследований различных генераторов экспоненциального распределения подтверждают возможность применения приближенного метода генерирования ПСП.

Проведенные исследования для других законов распределения показали, что для обеспечения требуемого качества генерирования ПСП (в смысле критерия Пирсона) достаточно осуществить интерполяцию функции распределения с приведенной

погрешностью 1%. В этом случае количество узлов интерполяции для большинства законов меньше 10, что значительно уменьшает общее время моделирования.

Следует отметить, что в ряде случаев при генерировании ПСП более целесообразно применять более простые методы. Так, например, при генерировании ПСП, распределенной по нормальному закону, можно воспользоваться теоремой Ляпунова [51].

Практика показала, что ПСП можно определить в виде

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - n/2}{(n/2)^{1/2}}, \quad (2.23)$$

где x_i - случайная величина, распределенная по равномерному закону, а n находится в диапазоне $6 \leq n \leq 12$.

Для получения временного ряда из сгенерированной ПСП необходимо задать интервал дискретизации Δt_0 . Так как отсчёты ПСП некоррелированы (см. рис. 2.2), интервал дискретизации может быть любым. Его величина устанавливается исследователем самостоятельно в зависимости от характера решаемой задачи.

На рис. 2.8 приведены примеры реализаций ПСП с заданными законами распределения, полученные с помощью автоматизированной системы [111, 112] и соответствующие им гистограммы. Забегая вперед, отметим, что с помощью этой системы возможно определение аналитических выражений законов распределения сгенерированной ПСП и проверка качества генерирования с помощью критериев согласия.

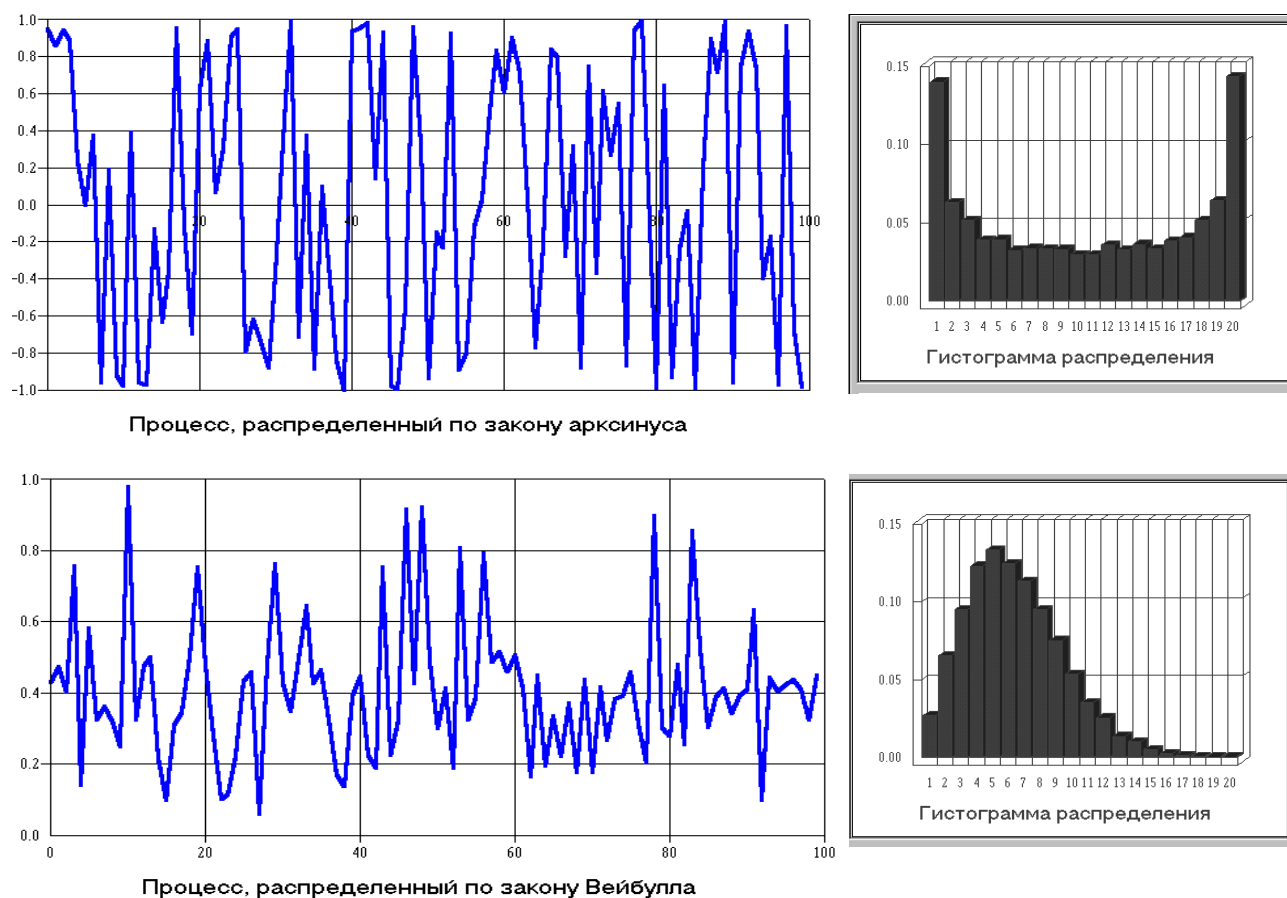


Рисунок 2.8 - ПСП с заданным видом закона распределения

2.3. Моделирование потоков событий с заданными свойствами

Приведенные основные соображения, рассмотренные в подразделе 2.2, позволяют легко генерировать на ЭВМ реализации различных однородных потоков событий. Формально моделирование подобных потоков мало, чем отличается от моделирования случайных величин.

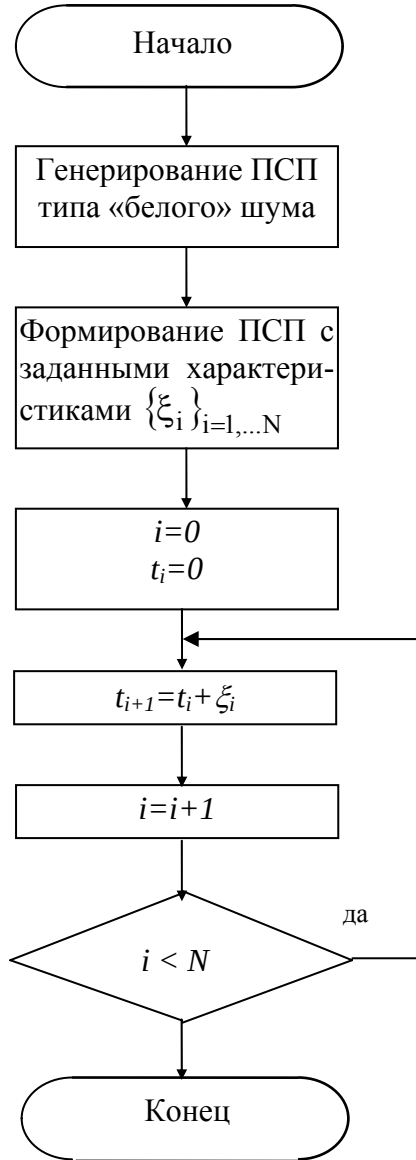


Рисунок 2.9 - Блок-схема моделирования

Для этого необходимо сгенерировать случайные величины $\{\xi_i\}_{i=1,...,N}$ с законом распределения $f_\xi(\xi)$. Суммирование получаемых реализаций позволит определить и моменты наступления событий в системе (см. рис. 2.9):

$$t_{i+1} = t_i + \xi_i \quad (2.24)$$

Отметим, что подобные потоки относятся к классу потоков с аддитивной дискретизацией. В качестве законов распределения $f_\xi(\xi)$ в зависимости от решаемой задачи могут использоваться самые различные законы:

- экспоненциальный;
- распределение Эрланга;
- равномерное распределение;
- треугольное распределение 1-го и 2-го типов и т.п.

Для простейшего потока событий или потока Пуассона, широко применяемого на практике, число событий k , наступивших на интервале времени $[0, t]$ - дискретная случайная величина, определяемая законом распределения Пуассона:

$$P[k] = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.25)$$

с параметром $a = \lambda t$, λ - интенсивность или параметр потока.

Следует, однако, помнить, что при таком способе моделирования потока разыгрывается лишь общее число событий на интервале $[0, t]$, а не каждое отдельное событие.

Формула (2.25) может быть распространена и на случай интервала времени $[t_1, t_2]$

$$P[k] = \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}. \quad (2.26)$$

При этом k - число событий, наступивших на интервале времени $[t_1, t_2]$.

Известно, что закон распределения интервалов простейшего потока экспоненциальный [15]:

$$f_\xi(\xi) = \lambda e^{-\lambda \xi}, \lambda > 0, \xi > 0, \quad (2.27)$$

что дает более простой способ генерирования простейшего потока - формирование на ЭВМ дискретной случайной величины с законом распределения (2.27).

Следует заметить, что нередко моделирование случайных величин, определяющих поток событий в системе, проводится с использованием специальных методов. Так, например, моделирование случайных величин, распределенных по нормальному закону, законам Симпсона, более целесообразно проводить путем суммирования случайных величин, распределенных по равномерному закону, а для закона Эрланга - суммированием случайных величин, распределенных по экспоненциальному закону.

Рассмотрим особенности генерирования типовых рекуррентных потоков, модели которых представлены в подразделе 1.8.

- Значение $j+1$ -ого отсчёта регулярного потока с p -преобразованием (периодическая дискретизация со случайными пропусками наблюдений) определяется выражением:

$$t_j = \Delta t_0 \sum_{i=1}^j Y_i, \quad (2.28)$$

где Δt_0 - интервал принудительной дискретизации;

Y - случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром p [13]:

$$P(Y = m) = pq^{m-1}, \quad m = 1, 2 \quad (2.29)$$

Выражение для генерирования удобнее представить в следующем виде

$$t_{j+1} = t_j + k\Delta t_0,$$

где k - случайная величина (см. рис. 2.10).

- Значение $i+1$ -ого отсчёта регулярного потока с «дрожанием» равно:

$$t_{i+1} = i\Delta t_0 + \xi_i. \quad (2.30)$$

где ξ_i - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей $f_\xi(\xi)$, каждая из которых расположена

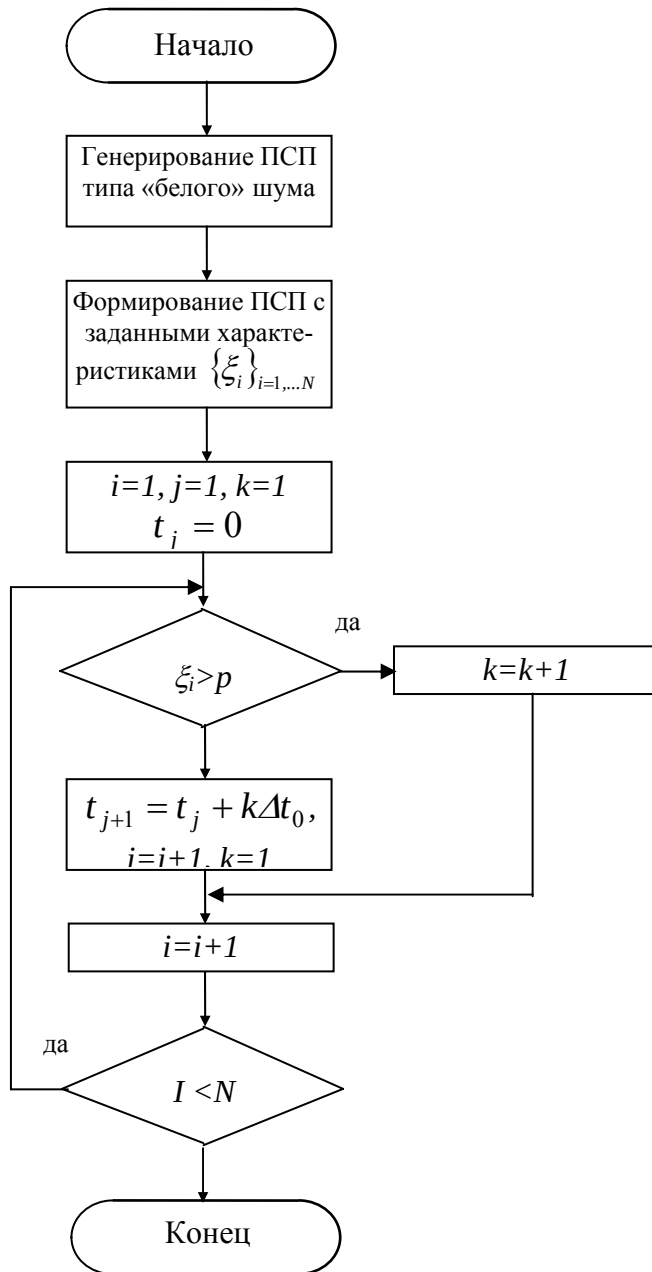


Рисунок 2.10 - Блок-схема моделирования потока событий с p -преобразованием

на в диапазоне $\left(-\frac{\Delta t_0}{2}, \frac{\Delta t_0}{2}\right)$ (см. рис. 2.11).

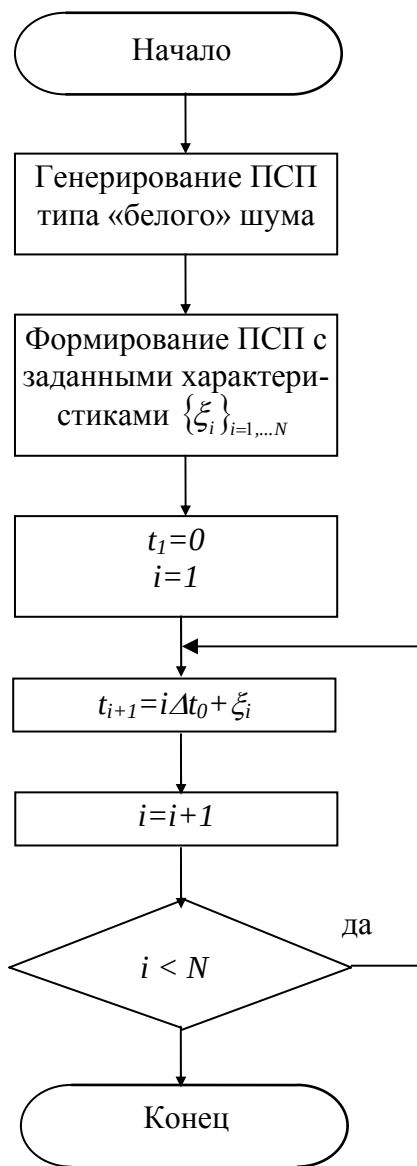


Рисунок 2.11 - Блок-схема моделирования регулярного потока с «дрожанием»

Базовые модели рекуррентных потоков событий позволяют путём их сочетания получить более сложные модели потоков:

- аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений, являющейся обобщением модели аддитивной случайной дискретизации, интервалы которой ξ_i с плотностью распределения вероятностей $f_\xi(\xi)$ разряжены p -преобразованием;

- аддитивной случайной дискретизации с «дрожанием», являющейся обобщением модели аддитивной случайной дискретизации, интервалы которой ξ_i с плотностью распределения вероятностей $f_\xi(\xi)$ подвержены «дрожанию»;

- аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений и «дрожанием», являющейся обобщением модели аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений, интервалы которой ξ_i с плотностью распределения вероятностей $f_\xi(\xi)$ разряжены p -преобразованием и подвержены «дрожанию»;

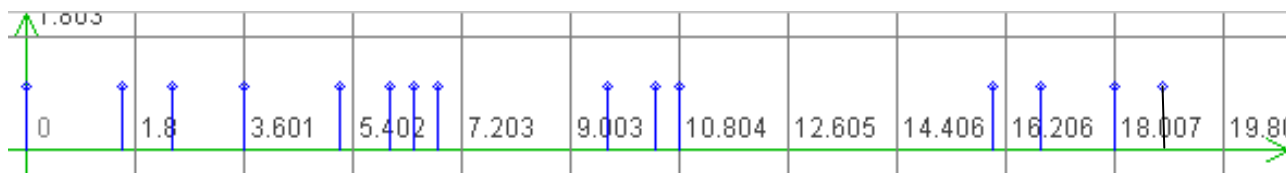
- периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений, являющейся обобщением модели периодической дискретизации с «дрожанием», интервалы которой $\Delta t_i = \Delta t_0 + \xi_i - \xi_{i-1}$ с плотностью распределения вероятностей $f_{\Delta t}(\Delta t)$ разряжены p -преобразованием и т.д.

Следует подчеркнуть, что при моделировании потоков с аддитивной дискретизацией на ЭВМ всегда будет наблюдаться процесс «дрожания», обусловленный принудительной дискретизацией интервалов между событиями потока (конечная разрядная сетка). Это обстоятельство, когда им нельзя пренебречь, необходимо учитывать.

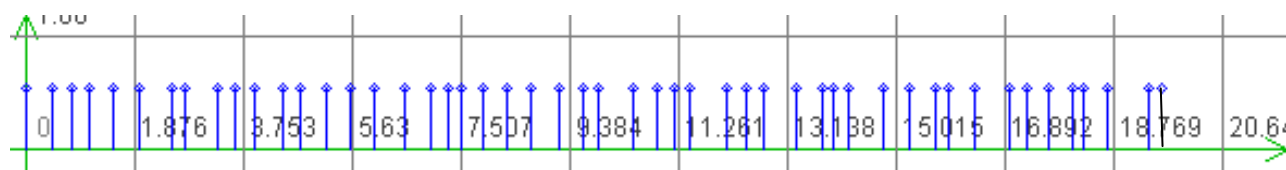
Таким образом, применяя в различных сочетаниях разработанные алгоритмы моделирования базовых потоков, можно генерировать более сложные случайные потоки (см. рис. 2.12).

Рассмотренные модели случайных потоков, естественно, не являются исчерпывающими. Часто при решении прикладных задач возникает необходимость в применении альтернирующих потоков, блок-схема программы генерирования которых приведена на рис. 2.13. В этом случае выражения для определения времени отсчёта в потоке определяются следующими выражениями:

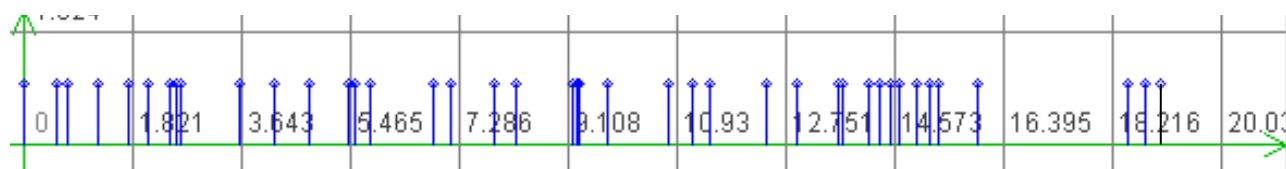
$$\begin{cases} t_1 = 0; \\ t_2 = t_1 + \xi_1^{(1)}; \\ t_3 = t_2 + \xi_1^{(2)}; \\ t_4 = t_3 + \xi_2^{(1)}; \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (2.31)$$



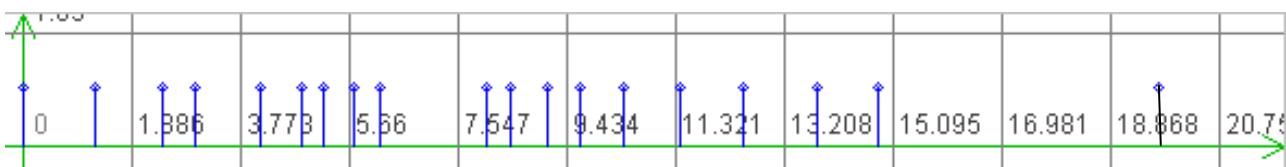
а) периодический (регулярный) поток с p -преобразованием – $p=0,4$



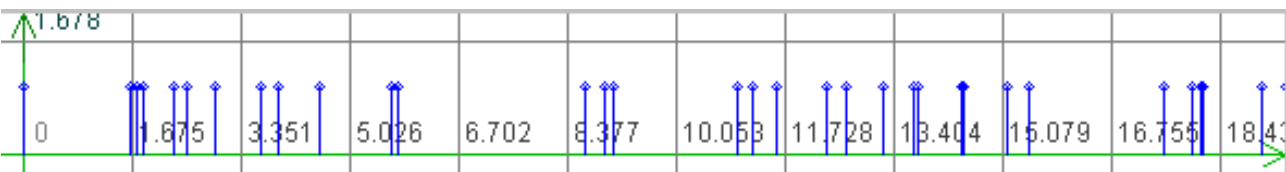
б) периодический поток с «дрожанием»



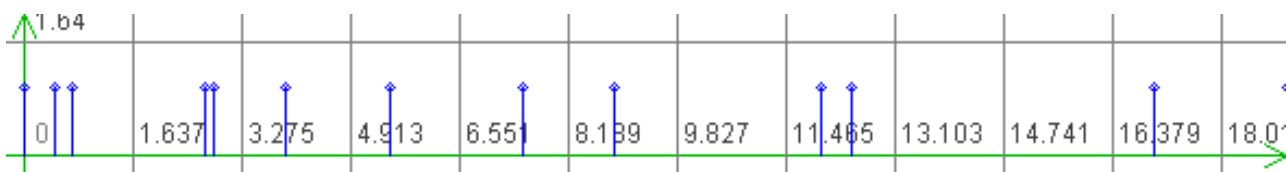
в) поток с аддитивной случайной дискретизацией - $\lambda=2$



г) периодический поток с «дрожанием» и p -преобразованием – $p=0,4$



д) поток с аддитивной случайной дискретизацией и p -преобразованием - $\lambda=2, p=0,8$



е) поток с аддитивной случайной дискретизацией с «дрожанием» и p -преобразованием - $\lambda=2, p=0,4$

Рисунок 2.12 - Реализации случайных потоков событий

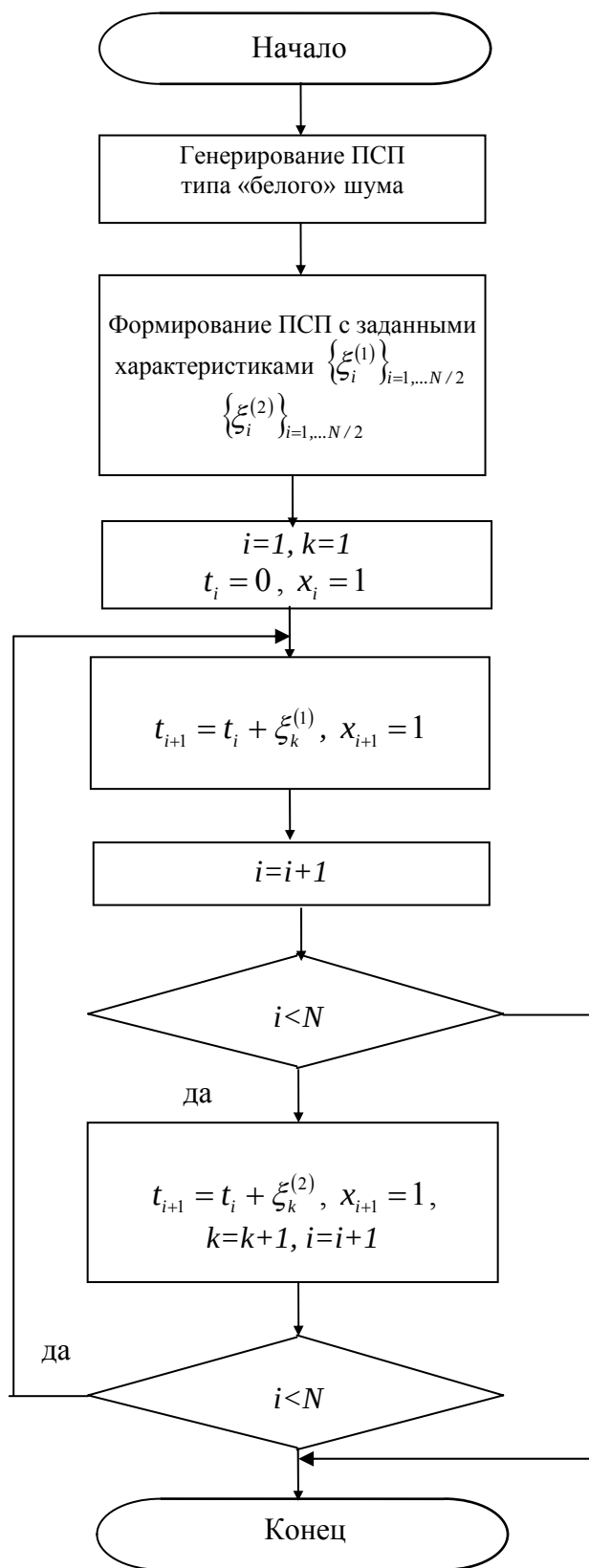


Рисунок 2.13 - Блок-схема моделирования
альтернирующего потока событий

Воспользовавшись базовыми моделями рекуррентных потоков событий, можно получить более сложные модели альтернирующих потоков:

- альтернирующий поток с пропусками наблюдений;
- альтернирующий поток с «дрожанием»;
- альтернирующий поток с пропусками наблюдений и «дрожанием».

Отметим, что случайные потоки применяются при генерировании неэквидистантных временных рядов (см. рис. 1.8). Все рассмотренные модели позволяют описать неэквидистантные временные ряды с непреднамеренной дискретизацией. В случае преднамеренной нерегулярной дискретизации: адаптивно-временной, спорадической, адаптивной коммутации, - характеристики модели случайного потока будут зависеть от характеристик процесса, критерия восстановления, вида модели и т.д. Эти вопросы будут рассмотрены в подразделе 2.12.

2.4. Проверка качества генерирования псевдослучайных последовательностей

Как правило, при решении важных задач методом имитационного моделирования исследователь проверяет качество генерирования псевдослучайной последовательности. Эта задача решается с использованием критериев согласия. Отличие применения этих критериев при оценке качества генерирования от классической задачи сглаживания статистических рядов заключается в том, что исследователь априори задаёт закон распределения и требуемые значения параметров псевдослучайной (сгенерированной) последовательности, а при решении задачи сглаживания необходимо решить задачу идентификации закона распределения.

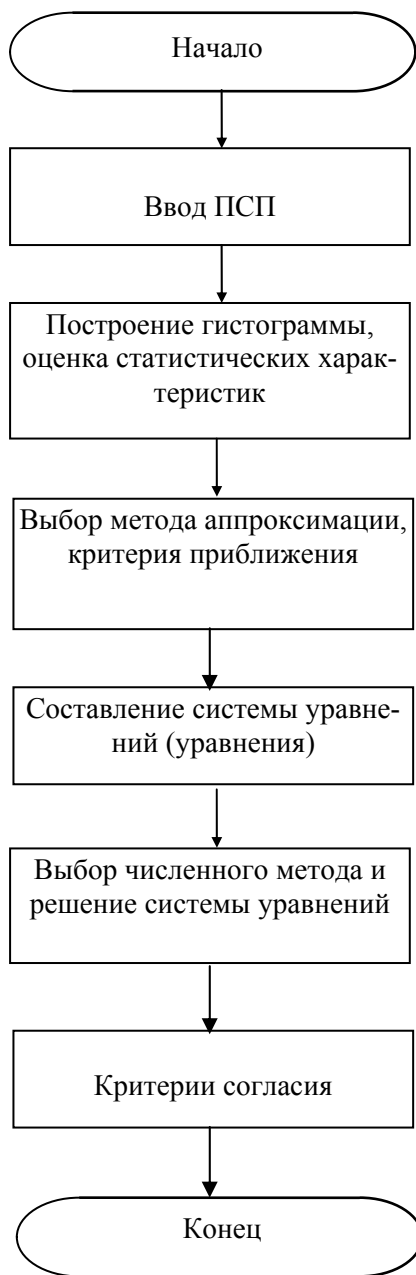


Рисунок 2.14 - Блок-схема проверки качества генерирования ПСП

При оценке качества генерирования псевдослучайной последовательности в качестве теоретического закона распределения возможно использование:

1. заданного закона распределения с заданными параметрами;
2. заданного закона распределения с уточненными параметрами путём решения задачи аппроксимации закона распределения тем или иным способом.

Рассмотрим последовательность этапов решения задачи оценки качества генерирования применительно ко второму случаю, как более общему (см. рис. 2.14).

После ввода исходных данных первым шагом в решении этой задачи является построение гистограммы наблюдаемого статистического ряда $\{x_i\}_{i=1}^N$. Для этого необходимо выполнить следующие этапы:

1. определить диапазон изменения статистического ряда $x_{min} - x_{max}$.
2. определить ширину дифференциального коридора:

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{M}, \quad (2.32)$$

где M - количество дифференциальных коридоров [51].

3. Определить частоту попадания анализируемой случайной величины в j -ый дифференциальный коридор:

$$\phi_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{ij}, \quad (2.33)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{ent}\left[\frac{x_i - x_{\min}}{\Delta x}\right] + 1 = j \wedge x_i = x_{\max}; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x_i = j \Delta x; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.34)$$

- индикатор состояния.

Следует отметить, что $\delta_{i,j+1} = 1/2$, если $x_i = j\Delta x \cap x \neq x_{\min}$, т.е. в этом случае в j и $j+1$ коридоры добавляется по $1/2$.

4. Если частота попадания в какой-либо k -ый дифференциальный коридор мала ($p_i < 0,01 \div 0,02$), для уменьшения влияния случайности его объединяют с $k+1$ коридором. Эта операция может быть применена неоднократно.

Исходным материалом для построения гистограммы является сгруппированный по дифференциальным коридорам статистический ряд, представленный, как правило, в виде таблицы (см. таблицу 2.7), где $\bar{h}_j = \bar{p}_j / \Delta x_j$.

Статистический ряд

Таблица 2.7

$\bar{p}_j$	0,099	0,1006	0,1003	0,0989	0,099	0,1067	0,0954	0,1008	0,0997	0,0996
$j\Delta x_j$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\bar{h}_j$	0,99	1,006	1,003	0,989	0,99	1,067	0,954	1,008	0,997	0,996

После построения гистограммы и оценки статистических характеристик решают задачу уточнения параметров распределения, используя тот или иной метод аппроксимации закона распределения [111].

Заключительным этапом решения задачи является проверка качества генерирования с использованием критериев согласия. Идея применения критериев согласия заключается в следующем. На основании данного статистического материала необходимо проверить гипотезу H , состоящую в том, что случайная величина X подчиняется заданному закону распределения. Введем случайную величину U , являющуюся мерой расхождения теоретического и статистического распределений. Закон распределения этой случайной величины $f_u(u)$ зависит как от закона распределения случайной величины X , так и от числа опытов N . Если гипотеза H верна, то $f_u(u)$ определяется законом распределения $f_a(x)$ и числом опытов N .

Вычислим вероятность события $P(u \leq U) = P_d$. Если эта вероятность мала, то гипотезу следует отвергнуть как маловероятную, если значительна - экспериментальные данные не противоречат гипотезе H .

Выберем в качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим распределениями случайную величину

$$U = \sum_{j=1}^M c_j (\bar{p}_j - p_j)^2, \quad (2.35)$$

где c_j - веса;

$p_j = F_a(x_{j+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_m) - F_a(x_j, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ – теоретические вероятности, соответствующие p_j .

Коэффициенты c_j вводятся для учёта веса отклонений, относящихся к разным разрядам. Так отклонения могут быть малозначительными, если вероятность p_j велика, и наоборот.

К. Пирсон показал, что если положить $c_j = N / p_j$, то при большом N $f_u(u)$ не зависит от $f_x(x)$ и N , а зависит только от числа дифференциальных коридоров M . Этот закон при увеличении N приближается к закону χ^2 с r степенями свободы, плотность распределения вероятностей которого определяется выражением [51]:

$$f_r(u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} u^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}, & \text{если } u > 0; \\ 0, & \text{если } u < 0, \end{cases} \quad (2.36)$$

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ - гамма-функция [68]. (2.37)

В этом случае мера расхождения обозначается χ^2 и определяется выражением:

$$\chi^2 = N \sum_{j=1}^M \frac{(p_j - p_j)^2}{p_j}. \quad (2.38)$$

Иногда для удобства вычислений, чтобы избежать вычислений с промежуточными малыми числами, выражение (2.38) представляют в виде

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^M \frac{(n_j - N p_j)^2}{N p_j}, \quad (2.39)$$

где n_j - число попаданий x в j -ый дифференциальный коридор.

Число степеней свободы равно $r = M - k$, где k – число независимых наложенных условий (связей), например, условие нормировки, совпадение теоретических и статистических моментов и т.д.

Для распределения χ^2 составлены специальные таблицы (см. приложение П.5) [51]. Пользуясь ими, можно для каждого значения χ^2 и числа степеней свободы r найти вероятность того, что величина, распределенная по закону χ^2 , превзойдет это значение. Если эта вероятность мала, то результат опыта следует признать противоречащим гипотезе о том, что случайная величина распределена по предполагаемому закону. Если на практике она оказывается меньше, чем 0,1, рекомендуется проверить результаты эксперимента и, если это возможно, повторить его.

Схема применения критерия сводится к следующему:

1. строится гистограмма входной последовательности
2. определяется мера расхождения χ^2 по формуле (2.38) или (2.39);
3. определяется число степеней свободы $r = M - k$;
4. по r и χ^2 по таблице приложения П.5 определяется вероятность того, что величина, имеющая распределение χ^2 с r степенями свободы, превзойдет данное значение χ^2 ;

5. если вероятность P_d велика, то гипотеза H принимается.

Следует отметить, что с помощью критериев согласия можно только в некоторых случаях опровергнуть гипотезу H . Если вероятность P_d велика, то это указывает лишь на то, что гипотеза H не противоречит опытным данным [51].

Кроме критерия Пирсона на практике применяется критерий А.Н. Колмогорова [51].

В качестве меры расхождения между статистическим и теоретическим распределениями рассматривается величина, равная

$$\delta = \max \left| F(x) - F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \right|. \quad (2.40)$$

Обоснованием выбора этой меры расхождения являются следующие обстоятельства:

- простота определения δ ;
- при неограниченном числе испытаний N вероятность неравенства $\delta \sqrt{N} \geq \lambda$ стремится к пределу

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2 \lambda^2}. \quad (2.41)$$

Значения $P(\lambda)$, подсчитанные по формуле (2.41), приведены в приложении П.6.

Схема применения этого критерия сводится к следующему:

1. строятся статистическая и теоретическая функции распределения;
2. по графикам определяется δ ;
3. вычисляется $\lambda = \delta \sqrt{N}$;
4. по таблице приложения П.6 определяется $P(\lambda)$;
5. гипотеза принимается, если для заданного уровня значимости P_d

$$\lambda < \lambda_{1-P_d};$$

6. Если вероятность P_d мала, гипотезу H следует отвергнуть.

При сравнительно больших $P(\lambda)$ её можно считать совместимой с опытными данными.

Следует отметить, что критерий Колмогорова можно применять, когда известно теоретическое распределение и численные значения его параметров, например, при проверке качества сгенерированной псевдослучайной последовательности с заданным законом распределения [111], расчете параметров функций распределения [185]. Если применять этот критерий в случаях, когда параметры теоретического распределения определяются по статистическим данным, критерий даёт завышенное значение $P(\lambda)$. В этом случае мы рискуем принять неправильную гипотезу.

Если уточнение параметров распределения сгенерированной последовательности не производится, т.е. не решается задача аппроксимации законов распределения, качество генерирования ПСП производится с использованием в качестве теоретического распределения заданного закона с заданными параметрами.

2.5. Моделирование временных рядов с заданным видом корреляционной функции

Часто при решении задач имитационного моделирования средств измерений возникает необходимость в формировании процессов с заданным видом корреляционной функции. При этом не обращают внимание на закон распределения процесса. Теоретически эта задача решается методом фильтрации и сводится к определению характеристик формирующего фильтра при известных характеристиках входного и выходного сигналов [48] (см. рис. 2.15).

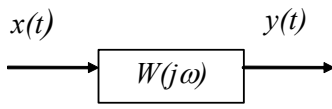


Рисунок 2.15

Известно, что спектральная плотность мощности выходного сигнала фильтра определяется в соответствии с выражением:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega), \quad (2.42)$$

где $S_x(\omega)$ - спектральная плотность мощности входного сигнала;

$|W(j\omega)|^2$ - квадрат модуля частотной характеристики формирующего фильтра.

Учитывая, что $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ и $|W(j\omega)|^2$ - чётные функции, их можно представить в виде:

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \varphi(j\omega)\varphi(-j\omega); \\ S_y(\omega) = \psi(j\omega)\psi(-j\omega); \\ |W(j\omega)|^2 = W(j\omega)W(-j\omega). \end{cases} \quad (2.43)$$

Отсюда

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\varphi(j\omega)}. \quad (2.44)$$

Сложность частотной характеристики формирующего фильтра $W(j\omega)$ во многом будет определяться видом $S_x(\omega)$. При использовании в качестве входного сигнала «белого» шума с $S_x(\omega) = S_0$, получим:

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\sqrt{S_0}}. \quad (2.45)$$

Для моделирования случайного процесса с помощью ЭВМ необходимо найти импульсную характеристику формирующего фильтра (см. приложение П.7):

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{S_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2.46)$$

Выходной сигнал формирующего фильтра может быть определен различными способами в зависимости от принятого способа преобразования аналогового фильтра в цифровой. Один из самых простых, но не эффективных способов в смысле временных затрат заключается в следующем:

$$y(j) = \Delta\tau \sum_{i=0}^{N1} x(j-i)h(i), \quad (2.47)$$

где $N1$ - число отсчётов импульсной характеристики, зависящее от вида корреляционной функции;

$\Delta\tau$ - интервал дискретизации исследуемого процесса;

$h_i = h(i\Delta\tau)$ - значение импульсной переходной характеристики формирующего фильтра.

Значение интервала дискретизации зависит от вида корреляционной функции, значения её параметров, требуемой точности вычисления корреляционной функции δ и способа интерполяции корреляционной функции между узлами. Минимальное количество требуемых ординат импульсной переходной характеристики при линейной интерполяции и различных погрешностях восстановления корреляционной функции представлено в таблице 2.8.

Минимальное количество ординат корреляционной функции

Таблица 2.8.

$\rho_x(\tau) \setminus \delta$	0,02	0,05	0,1	0,2
$e^{-\alpha \tau }$	9	6	4	3
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau)$	13	9	7	5
$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau)$	19	13	10	7
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau + \alpha^2\tau^2/3)$	10	7	5	4
$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0\tau$	$47 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$30 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$21 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$15 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$
$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0\tau \right)$	$47 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$30 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$21 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$15 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$
$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0\tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0\tau \right)$	$47 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$30 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$21 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$15 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$

Используя эту таблицу, можно определить интервал дискретизации в виде:

$$\Delta\tau = \frac{\tau_{k \max}}{N1}, \quad (2.48)$$

где $\tau_{k \max}$ - максимальный интервал корреляции (см. таблицу 2.13).

Другой подход также сводится к нерекурсивной фильтрации входного ряда [48]:

$$y_n = \sum_{k=0}^N c_k x_{n-k}, \quad (2.49)$$

причём $M[y_n] = 0$, а

$$M[y_n y_k] = \begin{cases} K_{n-k}, & |n-k| \leq N; \\ 0, & |n-k| > N, \end{cases} \quad (2.50)$$

где K_{n-k} - значение корреляционной функции в точке $(n-k)\Delta$.

Коэффициенты c_k , $k = 0, 1, \dots, N$ удовлетворяют следующей нелинейной системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} c_0 c_0 + c_1 c_1 + c_2 c_2 + \dots + c_N c_N = K_0 \\ c_0 c_1 + c_1 c_2 + \dots + c_{N-1} c_N = K_1 \\ \dots\dots\dots \\ c_0 c_N = K_N \end{cases}; \quad (2.51)$$

Решение этой системы дает искомый алгоритм моделирования выходной последовательности. Тем не менее, применение этого метода затруднено из-за трудности решения указанной системы уравнений. Рекуррентный алгоритм оценивания коэффициентов c_k заключается в следующем [168]:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0^{(0)} = \sqrt{K_0}; \\ c_k^{(l)} = \begin{cases} 0, & \text{если } k > l; \\ K_k - \sum_{i=1}^{m-k} c_i^{(l-k)} c_{i+k}^{(l)}, & \text{если } k \leq l; \end{cases} \\ c_0^{(l)} = \sqrt{K_0 - \sum_{i=1}^m (c_i^{(l)})^2}, \end{array} \right. \quad (2.52)$$

где $l = 0, 1, 2, \dots$ - номер итерации.

Однако при оценочном характере K_k возникают дополнительные сложности в корректировке c_k , что усложняет его и ставит под сомнение его целесообразность.

В работе [168] исследована эффективность алгоритмов нерекурсивной фильтрации: прямой свертки, скользящего спектра и обратного преобразования Фурье. Показано, что частота дискретизации отсчётов на выходе фильтра в соответствии с положениями теории дискретизации континуальных образов однозначно связывается с шириной его полосы:

$$f = mF_{\text{вых}}, \quad (2.53)$$

где m - коэффициент запаса.

Нарушение этого положения при традиционной реализации цифровой фильтрации, когда частота f принимается равной частоте дискретизации входной последовательности, приводит к информационной избыточности дискретного представления реакции фильтра и сопровождается непроизводительными вычислительными затратами, снижающими эффективность вычислительных средств.

В связи с этим в работе предложено увеличить шаг скольжения входной информации в N/Q раз, т.е.:

$$y_n = \sum_{k=0}^N h_k x_{\frac{N}{Q}n-k}, \quad (2.54)$$

где N - размер (сложность) импульсной характеристики;

Q - определяет множество учитываемых отсчётов переходной характеристики фильтра и их количество (т.е. сложность фильтра).

Поиски более быстродействующих алгоритмов моделирования ПСП с заданным видом корреляционной функции привели исследователей к использованию рекурсивной фильтрации [161]:

$$y_n = \sum_{i=0}^N a_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^N b_i y_{n-i}. \quad (2.55)$$

Для нахождения коэффициентов a_i и b_i (т.е. параметров фильтра) применяются, в основном, три класса методов: методы преобразования аналоговых фильтров в цифровые, прямые методы расчёта цифровых фильтров в Z -плоскости и методы, использующие алгоритмы оптимизации. В общем случае невозможно отдать предпочтение какому-либо одному из них. С учётом применимости этих методов в кон-

кретных условиях и многих других факторов, каждый из них может оказаться наиболее подходящим. Однако большинство цифровых фильтров рассчитываются методом билинейного преобразования стандартных аналоговых фильтров. Это обстоятельство связано с тем, что в задачах статистического моделирования необходимо проектировать фильтры, для которых билинейные преобразования аналоговых фильтров уже известны.

В [114] предлагается методика расчёта рекурсивного фильтра для моделирования ПСП с заданным видом корреляционной функции в Z - плоскости. Параметры и вид цифрового рекурсивного фильтра для основных моделей корреляционных функций представлены в приложении П.8.

Актуальным и малоисследованным вопросом цифровой фильтрации является точностной анализ методов генерирования ПСП с заданным видом корреляционной функции с помощью формирующих фильтров. Среди работ в этой области следует выделить [170], где дается аналитический расчёт погрешностей цифровой фильтрации со скользящим средним (для нерекурсивной фильтрации).

В работе [114] предложена методика расчёта рекурсивного фильтра с учётом заданных точностных параметров моделируемых сигналов. Этим моделям, как правило, уделяется очень большое внимание [84, 114], так как при предварительно рассчитанных параметрах они обеспечивают большее быстродействие.

На рис. 2.16 приведены примеры реализаций ПСП с заданным видом корреляционных функций.

2.6. Анализ методических погрешностей генерирования ПСП с заданным видом корреляционных функций

Генерирование ПСП осуществляется методом фильтрации. Выходной сигнал фильтра, импульсная характеристика которого определяется требуемым видом корреляционной функцией, равен:

$$\dot{y}(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \dot{x}(t - \tau) d\tau, \quad (2.56)$$

где $h(\tau)$ - импульсная характеристика фильтра.

Корреляционная функция выходного сигнала фильтра равна:

$$K_y(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) K_x(\tau + \tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2. \quad (2.57)$$

Если $\dot{x}(t)$ - «белый» шум с корреляционной функцией

$$K_x(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau),$$

где S_0 - интенсивность «белого» шума, то

$$K_y(\tau) = 2\pi S_0 \int_0^{\infty} h(\tau + \tau_2) h(\tau_2) d\tau_2. \quad (2.58)$$

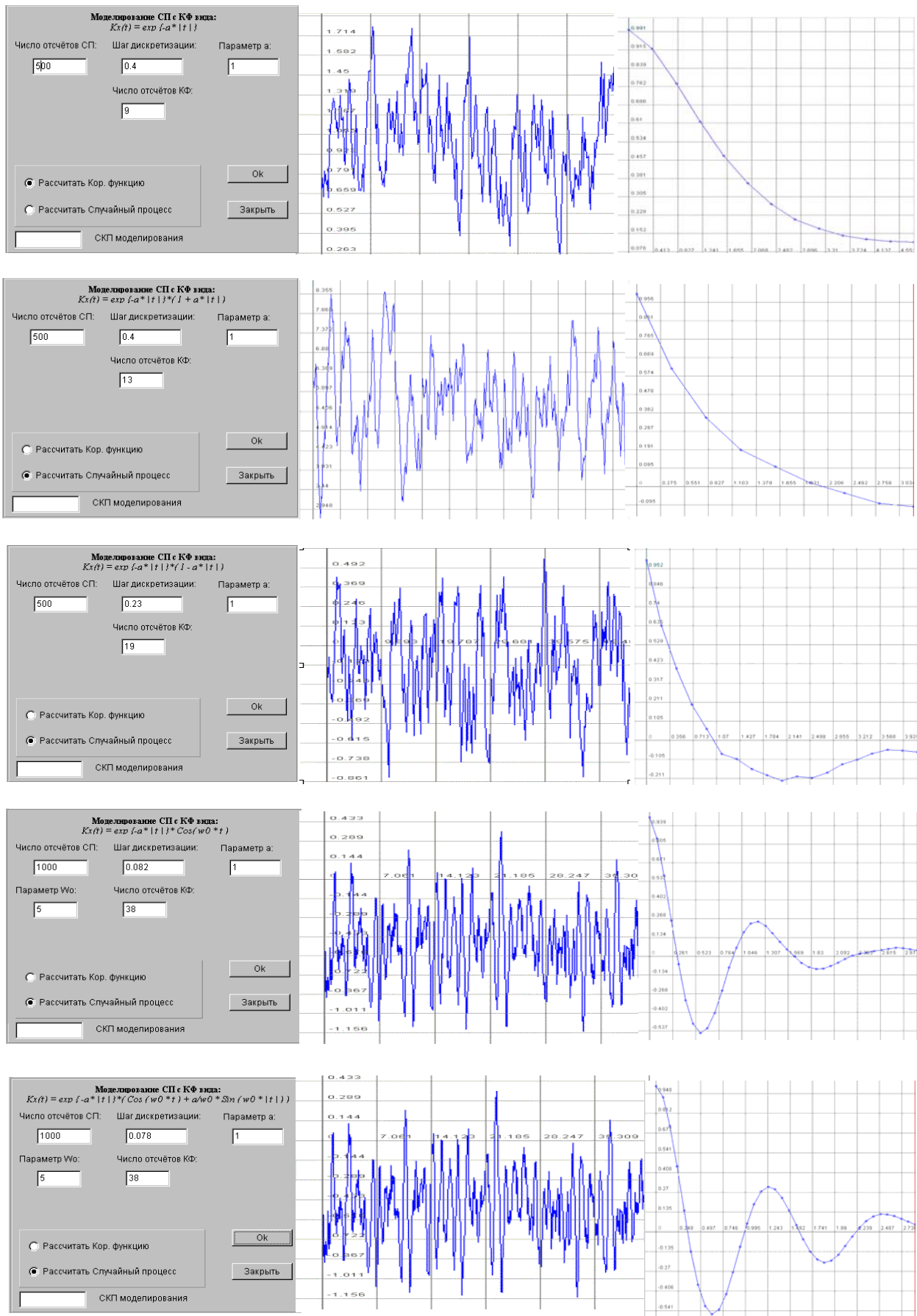


Рисунок 2.16 - Случайные сигналы с заданным видом корреляционных функций

Определим приведенную погрешность, обусловленную конечным верхним пределом интеграла в (2.58):

$$\hat{K}_y(\tau) = 2\pi S_0 \int_0^T h(\tau + \tau_2) h(\tau_2) d\tau_2 \quad (2.59)$$

в виде

$$\gamma_T(\tau) = \frac{K_y(\tau) - \hat{K}_y(\tau)}{K_y(0)} = \frac{\int_0^T h(\tau + \tau_2) h(\tau_2) d\tau_2}{\int_0^T h^2(\tau_2) d\tau_2}. \quad (2.60)$$

Выражения приведенной погрешности, обусловленной конечным верхним пределом для различных моделей корреляционных функций приведены в таблице 2.9.

Численные значения погрешности зависят от вида нормированной корреляционной функции. Для расчёта конкретных значений погрешности выберем $T = \tau_{kmax}$.

Оценим погрешность определения корреляционной функции, вызванную дискретизацией. Так как

$$\overset{\circ}{y}_k = \sum_{m=0}^{N1} \overset{\circ}{h}_m \overset{\circ}{x}_{k-m}, \quad (2.61)$$

где $\overset{\circ}{h}_m = h(m\Delta\tau)$ - значение импульсной переходной характеристики формирующего фильтра;

$\overset{\circ}{x}_k = \overset{\circ}{x}(k\Delta)$ значение ПСП с $K_x(\nu) = 2\pi S_0 \delta_\nu$;

$$\delta_\nu = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu = 0; \\ 0, & \text{если } \nu \neq 0; \end{cases}$$

$$N1 = \text{ent} \left[\frac{T}{\Delta} \right],$$

то

$$\hat{K}_y(\nu) = \sum_{n=0}^{N1-\nu} \overset{\circ}{h}_n \overset{\circ}{h}_{n+\nu}. \quad (2.62)$$

Нормированная корреляционная функция в соответствии с выражением (1.50) примет вид:

$$\hat{\rho}(\nu) = \frac{\sum_{n=0}^{N1-\nu} \overset{\circ}{h}_n \overset{\circ}{h}_{n+\nu}}{\sum_{n=0}^{N1} \overset{\circ}{h}_n^2}. \quad (2.63)$$

Приведенная погрешность оценки нормированной корреляционной функции, вызванная дискретизацией будет равна:

$$\gamma_\Delta(\nu) = \rho_y(\nu) - \frac{\sum_{n=0}^{N1-\nu} \overset{\circ}{h}_n \overset{\circ}{h}_{n+\nu}}{\sum_{n=0}^{N1} \overset{\circ}{h}_n^2}. \quad (2.64)$$

Выражения для оценки погрешности $\gamma_\Delta(\nu)$ для типовых моделей корреляционных функций представлены в таблице 2.10.

Из анализа этих выражений видно, что погрешность растет с увеличением величины ν .

Приведенные погрешности генерирования ПСП, вызванные конечным пределом интегрирования

Таблица 2.9.

№	$\rho_y(\tau)$	$\hat{\rho}_y(\tau)$	γ_T
1	$e^{-\alpha \tau }$	$e^{-\alpha\tau} (1 - e^{-2\alpha T})$	$e^{-\alpha\tau} e^{-2\alpha T}$
2	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$e^{-\alpha\tau} \{ \alpha\tau [1 - e^{-2\alpha T} (1 + 2\alpha T)] + 1 - e^{-2\alpha T} (1 + 2\alpha T + 2\alpha^2 T^2) \}$	$e^{-\alpha\tau} e^{-2\alpha T} [\alpha\tau (1 + 2\alpha T) + (1 + 2\alpha T + 2\alpha^2 T^2)]$
3	$e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau)$	$e^{-\alpha\tau} \{ 1 - \alpha\tau - e^{-2\alpha T} (1 - 2\alpha T + 2\alpha^2 T^2) - \alpha\tau e^{-2\alpha T} (2\alpha T - 1) \}$	$e^{-\alpha\tau} e^{-2\alpha T} [1 - 2\alpha T + 2\alpha^2 T^2 + \alpha\tau (2\alpha T - 1)]$
4	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$e^{-\alpha\tau} \{ 1 - e^{-2\alpha T} / 3 (3 + 6\alpha T + 6\alpha^2 T^2 + 4\alpha^3 T^3 + \alpha^4 T^4) + \alpha\tau [1 - e^{-2\alpha T} / 3 (3 + 6\alpha T + 6\alpha^2 T^2 + 4\alpha^3 T^3)] + \alpha^2 T^2 [1 - e^{-2\alpha T} (1 + 2\alpha T + 2\alpha^2 T^2)]^3 \}$	$e^{-\alpha\tau} e^{-\alpha T} [(1 + 2\alpha T + 2\alpha^2 T^2 + 4/3 \alpha^3 T^3 + \alpha^4 T^4) + \alpha\tau (1 + 2\alpha T + 2\alpha^2 T^2 + 4/3 \alpha^3 T^3) + \alpha^2 T^2 / 3 (1 + 2\alpha T + 2\alpha^2 T^2)]$
5	$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$e^{-\alpha\tau} \{ \cos \omega_0 \tau [1 - e^{-2\alpha T} (1 + \alpha / \omega_0 \sin 2\omega_0 T + 2\alpha^2 / \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 T)] + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau [1 - e^{-2\alpha T} (\cos 2\omega_0 T + \alpha / \omega_0 \sin 2\omega_0 T)] \}$	$e^{-\alpha\tau} e^{-\alpha T} [\cos \omega_0 \tau (1 + \alpha / \omega_0 \sin 2\omega_0 T + 2\alpha^2 T^2 / \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 T) + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau (\cos 2\omega_0 T + \alpha / \omega_0 \sin 2\omega_0 T)]$

Полная погрешность, обусловленная конечным пределом интегрирования и дискретизацией, равна:

$$\gamma_{T,\Delta}(\nu) = \gamma_T(\nu) + \gamma_{\Delta}(\nu). \quad (2.65)$$

Для расчёта полной погрешности необходимо определить интервалы дискретизации для различных моделей нормированных корреляционных функций и число точек на интервале дискретизации $N1$. Задавшись допустимой погрешностью восстановления корреляционной функцией δ при её линейной интерполяции и результатами таблицы 2.8, определим максимальные погрешности методических погрешностей генерирования ПСП с заданным видом корреляционной функции (см. таблицу 2.11)

Анализ результатов таблицы показывает, что выбором T и Δ возможно обеспечение допустимой погрешности вычисления оценок корреляционной функции. Так, например, определив $T = \tau_{kmax}$ на уровне 0,02 $\gamma_{T,\Delta} \leq 0,02$.

Следующая составляющая погрешности генерирования вызвана неидеальностью генератора «белого» шума (см. подраздел 2.1). Кроме того, при ограниченной разрядности ЭВМ необходимо учитывать погрешность округления. Однако аналитическое определение указанных составляющих погрешностей вызывает значительные трудности. В связи с этим более целесообразно для оценки погрешностей применять метод имитационного моделирования.

2.7. Экспериментальные исследования точностных характеристик программных генераторов ПСП с заданным видом корреляционных функций

Экспериментальные исследования точностных характеристик генераторов проведем в соответствии с рекомендациями РТМ [22]. При исследовании генерировались ПСП с заданным видом корреляционной функции объёмом 140000 отсчётов, которые разбивались на 29 реализаций объёмом 5000 отсчётов каждая. Далее оценивались максимальные погрешности равномерного приближения.

Результаты исследования алгоритмов генерирования ПСП нерекурсивной фильтрации представлены в таблице 2.12 (для моделей 5-6 $\mu = 5$). Параметры алгоритма выбраны в соответствии с рекомендациями таблиц 2.8.

Результаты экспериментальных исследований точностных характеристик генерирования ПСП для нерекурсивной фильтрации ($N=5000$)

Таблица 2.12

№	$\rho_x(\tau)$	τ_{kmax}	Δt	$N1$	γ
1	$e^{-\alpha \tau }$	3	0,333	9	0,0774
2	$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau)$	4,75	0,475	10	0,1152
3	$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau)$	4,389	0,231	19	0,0779
4	$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau + \alpha^2\tau^2/3)$	5,92	0,493	12	0,1361
5	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0\tau$	3	0,075	40	0,1290
6	$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0\tau \right)$	3	0,075	40	0,1361

Приведенные погрешности генерирования ПСП, вызванные дискретизацией

Таблица 2.10

№	$\rho_y(\nu)$	$\gamma_\Delta(\nu)$
1	$e^{-\alpha\Delta \nu }$	$\rho_y(\nu) - \frac{e^{-\alpha\Delta\nu} \sum_{n=0}^{N1-\nu} e^{-2\alpha\Delta n}}{\sum_{n=0}^{N1} e^{-2\alpha\Delta n}}$
2	$e^{-\alpha\Delta \nu }(1 + \alpha\Delta \nu)$	$\rho_y(\nu) - \frac{e^{-\alpha\Delta\nu} \sum_{n=0}^{N1-\nu} (n + \nu) n e^{-2\alpha\Delta n}}{\sum_{n=0}^{N1} e^{-2\alpha\Delta n} n^2}$
3	$e^{-\alpha\Delta \nu }(1 - \alpha\Delta \nu)$	$\rho_y(\nu) - \frac{e^{-\alpha\Delta\nu} \sum_{n=0}^{N1-\nu} (1 - \alpha\Delta n)(1 - \alpha\Delta(n + \nu)) e^{-2\alpha\Delta n}}{\sum_{n=0}^{N1} e^{-2\alpha\Delta n} (1 - \alpha\Delta n)^2}$
4	$e^{-\alpha\Delta \nu }(1 + \alpha\Delta \nu + (\alpha\Delta\nu)^2 / 3)$	$\rho_y(\nu) - \frac{e^{-\alpha\Delta\nu} \sum_{n=0}^{N1-\nu} (n + \nu)^2 n^2 e^{-2\alpha\Delta n}}{\sum_{n=0}^{N1} n^4 e^{-2\alpha\Delta n}}$
5	$e^{-\alpha\Delta \nu } \left(\cos \mu\alpha\Delta\nu + \frac{1}{\mu} \sin \mu\alpha\Delta \nu \right)$	$\rho_y(\nu) - \frac{e^{-\alpha\Delta\nu} \sum_{n=0}^{N1-\nu} e^{-2\alpha\Delta n} \sin \mu\alpha\Delta(n + \nu) \sin \mu\alpha\Delta n}{\sum_{n=0}^{N1} e^{-2\alpha\Delta n} \sin^2 \mu\alpha\Delta n}$

Максимальные значения методических погрешностей генерирования ПСП с заданным видом корреляционной функции
Таблица 2.11

$\rho_x(\nu)$	Δ	$\tau_{k\ 0,05}$			$\tau_{k\ 0,02}$			$\tau_{k\ 0,01}$		
		αT	ν	$\gamma_{T,\Delta}$	αT	ν	$\gamma_{T,\Delta}$	αT	ν	$\gamma_{T,\Delta}$
$e^{-\alpha\Delta \nu }$	$0,4/\alpha$	3,00	8	0,0184	3,92	10	0,0082	4,61	12	0,0037
$e^{-\alpha\Delta \nu }(1+\alpha\Delta \nu)$	$0,4/\alpha$	4,75	11	0,0494	5,84	3	0,0191	6,64	2	0,0184
$e^{-\alpha\Delta \nu }(1-\alpha\Delta \nu)$	$0,231/\alpha$	4,14	18	0,0218	5,40	4	0,0054	6,27	4	0,0045
$e^{-\alpha\Delta \nu }(1+\alpha\Delta \nu +(\alpha\Delta\nu)^2/3)$	$0,693/\alpha$	5,92	8	0,0489	7,14	10	0,0171	8,03	11	0,0099
$e^{-\alpha\Delta \nu }\left(\cos\mu\alpha\Delta\nu+\frac{1}{\mu}\sin\mu\alpha\Delta \nu \right)$	$0,0785/\alpha$	2,71	39	0,0393	3,88	49	0,0200	4,53	57	0,0090

Результаты исследования алгоритмов генерирования ПСП рекурсивной фильтрации представлены в таблице 2.13. В моделях 5-7 ($\mu=5$). Параметры алгоритма выбраны в соответствии с рекомендациями таблиц 2.8.

Результаты экспериментальных исследований точностных характеристик генерирования ПСП для рекурсивной фильтрации ($N=5000$)

Таблица 2.13

№	$\rho_x(\tau)$	$\tau_{k\max}$	Δt	N1	γ
1	$e^{-\alpha \tau }$	3,92	0,4	9	0,079
2	$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau)$	5,84	0,4	13	0,0796
3	$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau)$	5,4	0,231	19	0,0763
4	$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau + \alpha^2\tau^2/3)$	6,93	0,693	10	0,0881
5	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0\tau$	3	0,075	40	0,1053
6	$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0\tau \right)$	3	0,075	40	0,115
7	$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0\tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0\tau \right)$	3	0,075	40	0,1031

Приведенные погрешности оценки нормированных корреляционных функций ПСП, полученные методом нерекурсивной фильтрации для $N=5000$, представлены на рис. 2.17.

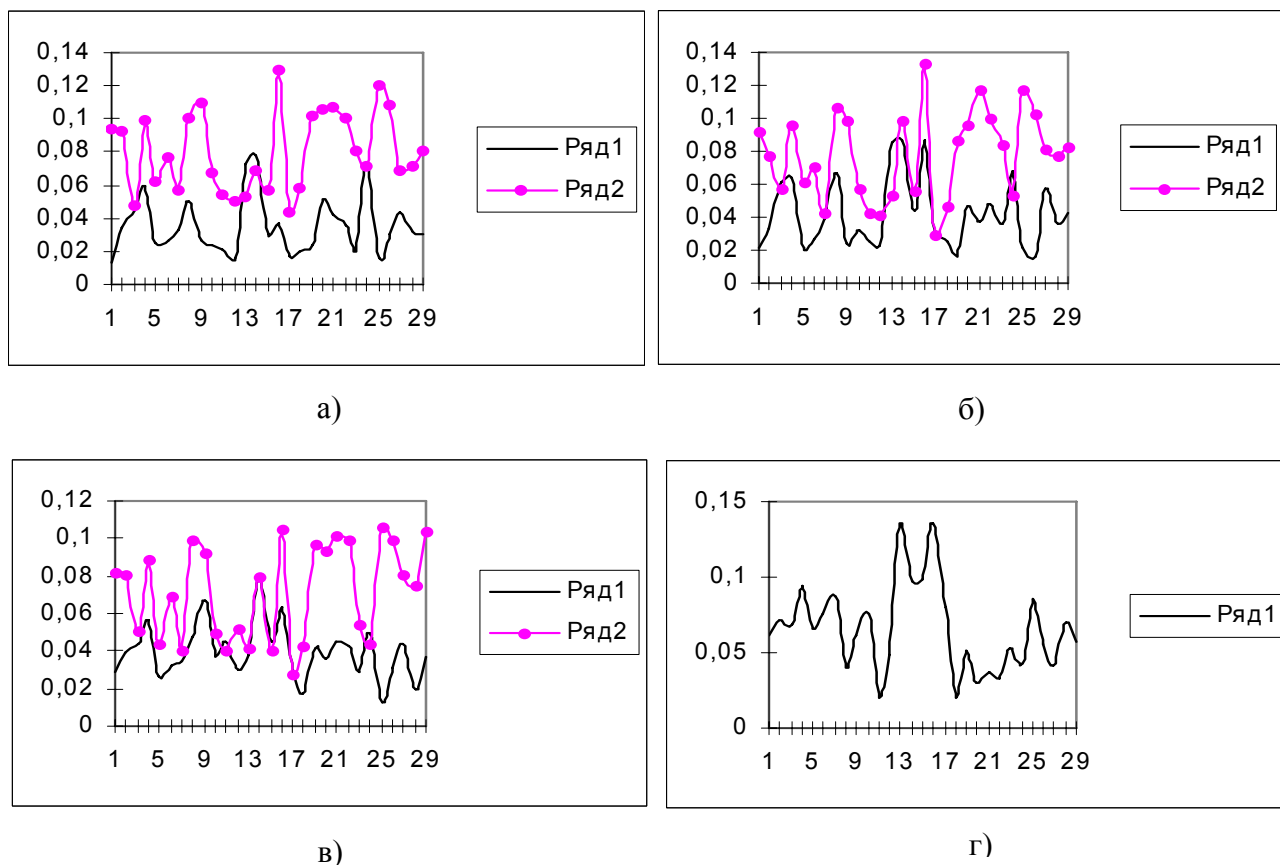


Рисунок 2.17 - Приведенные погрешности оценки нормированных корреляционных функций (нерекурсивная фильтрация)

На рисунке 2.17 приняты следующие обозначения:

- а) - ряд 1 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, ряд 2 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$;
- б) - ряд 1 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|)$, ряд 2 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$;
- в) - ряд 1 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|)$, ряд 2 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$;
- г) - ряд 1 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau| + \alpha^2 \tau^2 / 3)$.

Приведенные погрешности оценки нормированных корреляционных функций ПСП, полученные методом рекурсивной фильтрации для $N=5000$, представлены на рис. 2.18.

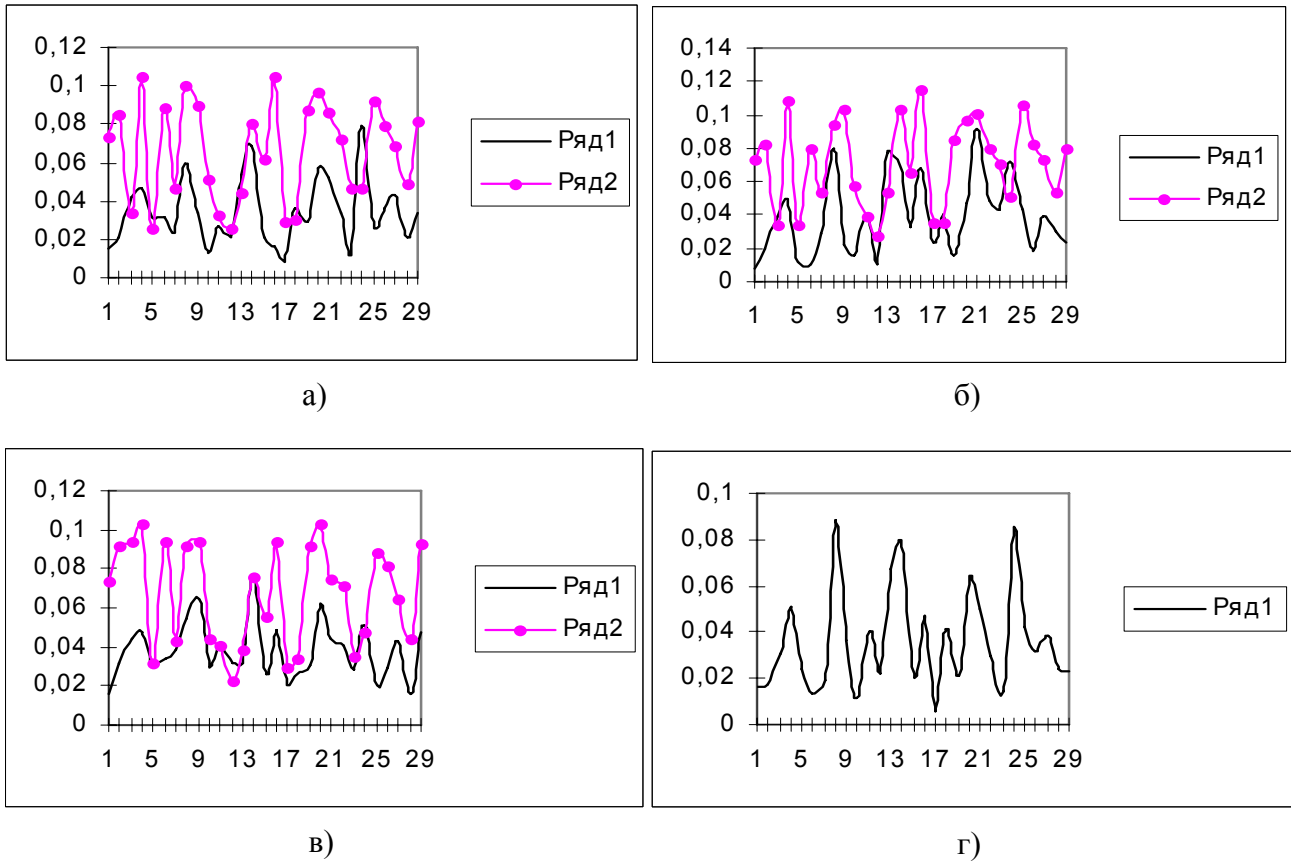


Рисунок 2.18 - Приведенные погрешности оценки нормированных корреляционных функций (рекурсивная фильтрация)

На рисунке 2.18 приняты следующие обозначения:

- а) - ряд 1 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, ряд 2 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$;
- б) - ряд 1 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|)$, ряд 2 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$;
- в) - ряд 1 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|)$, ряд 2 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$;
- г) - ряд 1 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau| + \alpha^2 \tau^2 / 3)$.

В таблице 2.14 приведено время генерирования ПСП для типовых моделей корреляционной функции при нерекурсивной и рекурсивной фильтрации с вычислением корреляционной функции при $N=5000$.

Из анализа таблиц 2.12 - 2.13. и рис. 2.17 -2.18 можно сделать следующие выводы:

1. значения приведенных погрешностей оценки корреляционной функции существенным образом зависят от значения ядра генератора «белого» шума, следовательно, в программу моделирования необходимо включать блок проверки - вычисления корреляционной функции с последующей её аппроксимацией параметрическими моделями;
2. максимальные значения приведенных погрешностей оценки нормированной корреляционной функции, вычисленных по 29 реализациям, для параметров, представленных в таблице 2.12 - 2.13, больше у алгоритмов нерекурсивной фильтрации;
3. время генерирования больше у алгоритмов нерекурсивной фильтрации;
4. объём памяти, необходимой для размещения программы, больше у алгоритмов рекурсивной фильтрации;
5. большие значения максимальной приведенной погрешности оценки нормированной корреляционной функции следует ожидать при генерировании ПСП с колебательными моделями корреляционной функции.

Время генерирования ПСП с заданным видом корреляционной функции

Таблица 2.14

№	$\rho_x(\tau)$	N1	Время решения	
			Нерекурсив	Рекурсив
1	$e^{-\alpha \tau }$	9	9,54	6,19
2	$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau)$	13	12,16	8,05
3	$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau)$	19	17,27	10,45
4	$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau + \alpha^2\tau^2/3)$	10	10,11	8,21
5	$e^{-\alpha \tau }\left(\cos \omega_0\tau \pm \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0\tau\right)$	40	33,26	18,26

2.8. Проверка качества генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций

Проверить качество генерирования псевдослучайной последовательности с заданным видом корреляционной функции можно и косвенными методами:

- путём сравнения параметров аппроксимирующего выражения корреляционной функции, соответствующих тому или иному критерию приближения, с заданными значениями;
- путем сравнения фазовых портретов заданной и вычисленной корреляционных функций сгенерированной последовательности.

Блок-схема программы оценки качества генерирования ПСП с заданным видом корреляционной функции с использованием аппроксимативного подхода представлена на рис. 2.19.



Рисунок 2.19 – Блок-схема алгоритма проверки качества генерирования ПСП

В этом случае по найденным ординатам корреляционной функции находятся параметры заданного аналитического выражения корреляционной функции и оценивается погрешность аппроксимации. Результаты оценки представлены на рис. 2.20. В рассмотренных примерах приведены реализации ПСП длительностью 20 сек., а параметры корреляционной функции определялись для объема выборки $M=1000$. Интервал дискретизации определялся по таблице 2.8 для погрешности восстановления корреляционной функции $\delta = 0,02$.

Для проверки качества генерирования ПСП, как и в случае идентификации законов распределения, корреляционных функций, представляется перспективным использование фазовых портретов. Под фазовым портретом будем понимать графическую зависимость, построенную в координатах: $\rho_x(\tau)$ и $\rho'_x(\tau)$ (см. рис. 2.21):

$$\rho'_x(\tau) = \Phi_x[\rho_x(\tau)]. \quad (2.66)$$

Следует отметить, что каждому типу корреляционных функций соответствует свой, уникальный фазовый портрет. На практике при построении фазового портрета вместо значения производных корреляционных функций возможно определение её приращений на заданном интервале.

ном интервале.

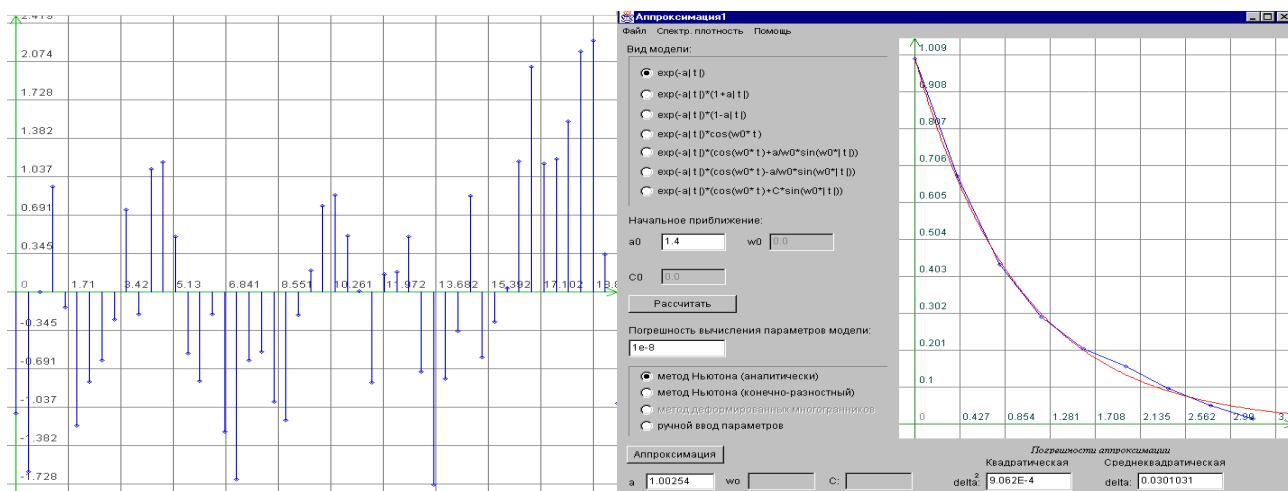
Для сравнения фазовых портретов определим квадратическую погрешность в виде:

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=0}^{J_{max}} \{\Phi_m[\rho_x(\tau_i)] - \Phi_x[\rho_x(\tau_i)]\}^2}{\sum_{i=0}^{J_{max}} \Phi_m^2[\rho_x(\tau_i)]}, \quad (2.67)$$

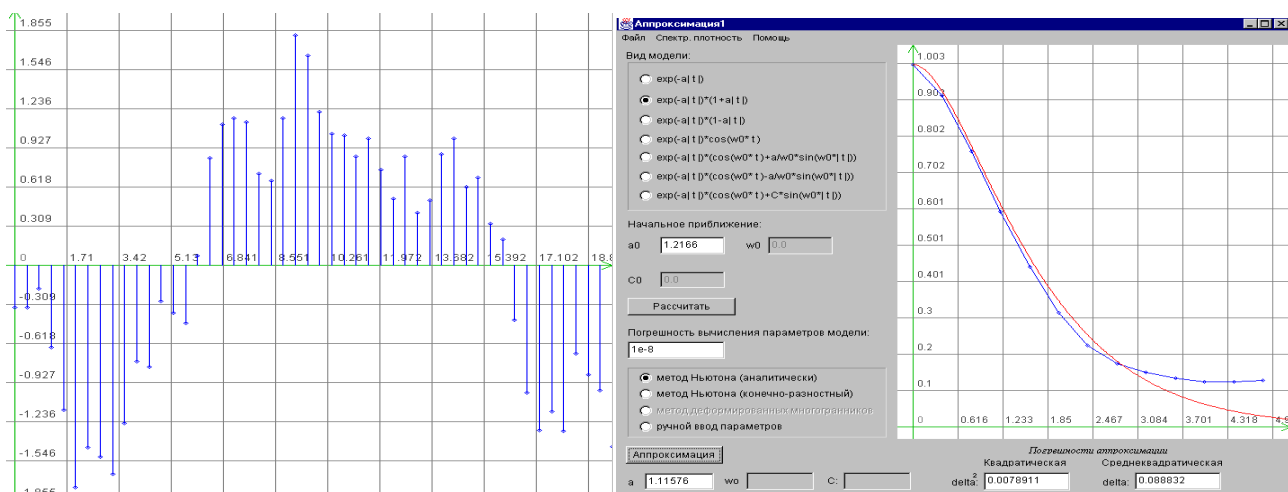
где $\Phi_m[\rho_x(\tau_i)]$ – эталонный фазовый портрет.

На рис. 2.21 приведены фазовые портреты широко применяемых однопараметрических моделей. Следует отметить, что за исключением фазового портрета корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$, все фазовые портреты расположены в четвертом квадранте и не пересекают ось абсцисс. Кроме этого, фазовые портреты второй и четвертой моделей очень близки по форме и отличаются лишь численными значениями, в частности, значениями минимума.

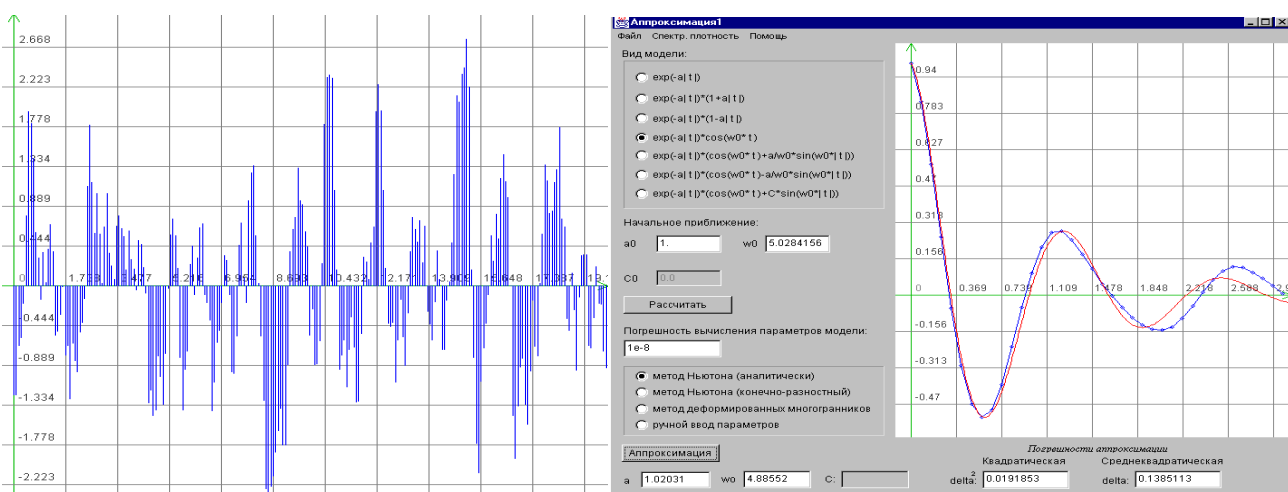
Фазовые портреты колебательных моделей, представленные на рис. 2.22, расположены во всех квадрантах. Причем количество пересечений оси абсцисс зависит не от вида корреляционной функции, а от численного значения показателя колебательности $\mu = \omega_0 / \alpha$.



$$a) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \alpha = 1, \Delta\tau = 0,4$$

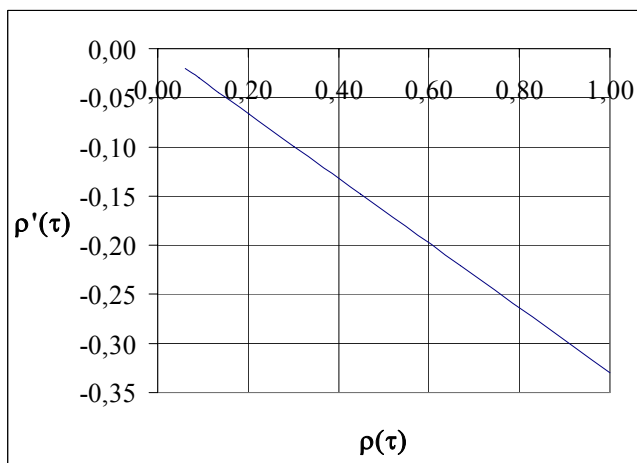


$$б) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|), \alpha = 1, \Delta\tau = 0,4$$

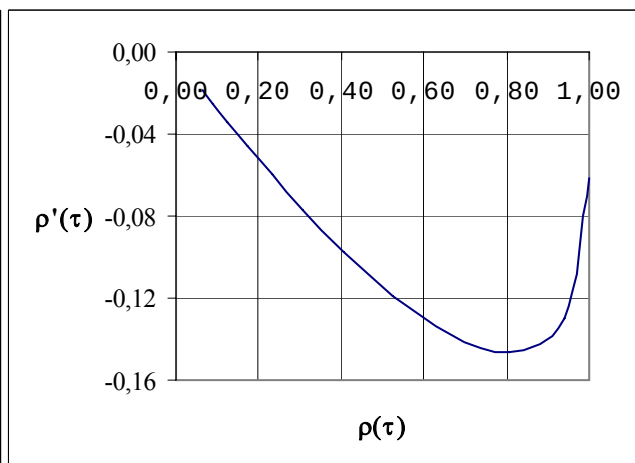


$$в) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \alpha = 1, \omega_0 = 5, \Delta\tau = 0,082$$

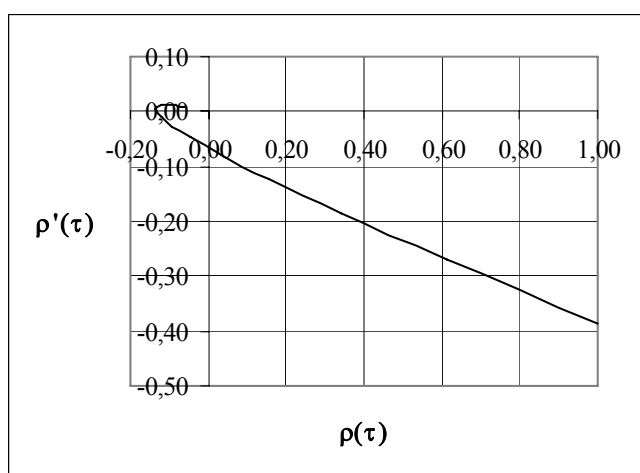
Рисунок 2.20 - Проверка качества генерирования ПСП с использованием аппроксимации корреляционных функций



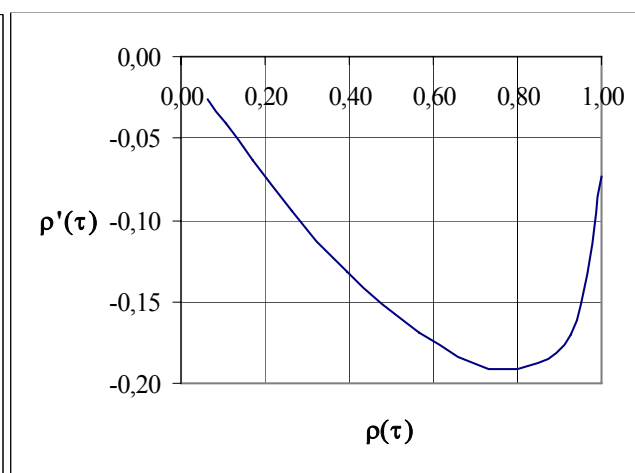
а) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \alpha\tau = 0,4$



б) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|), \alpha\tau = 0,4$



в) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|), \alpha\tau = 0,23$



г) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau| + \alpha^2\tau^2/3), \alpha\tau = 0,693$

Рисунок 2.21 - Фазовые портреты однопараметрических моделей

Алгоритм проверки качества генерирования ПСП с заданным видом КФ на основе анализа фазовых портретов (идентификации корреляционной функции ПСП) заключается в выполнении следующих этапов:

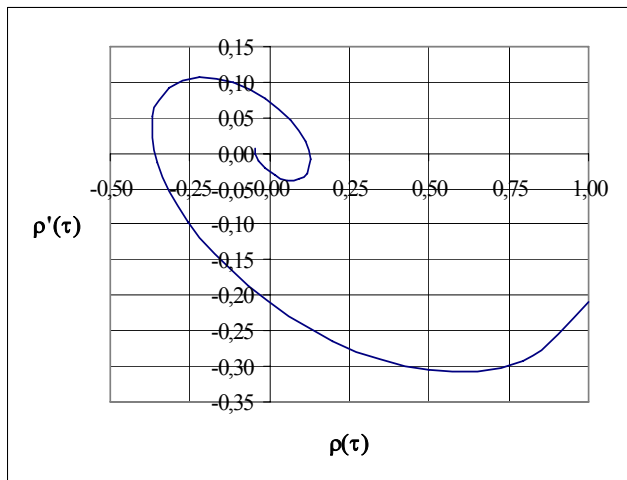
1. построения фазового портрета КФ сгенерированной ПСП с заданными параметрами;
2. построения фазового портрета заданной КФ - эталона;
3. сравнения фазовых портретов (вычисление квадратической погрешности).

На рис 2.23 представлены результаты анализа качества генерирования ПСП при различных объёмах выборки с $\rho_{x2}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$, а на рис. 2.24 – с $\rho_{x5}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$.

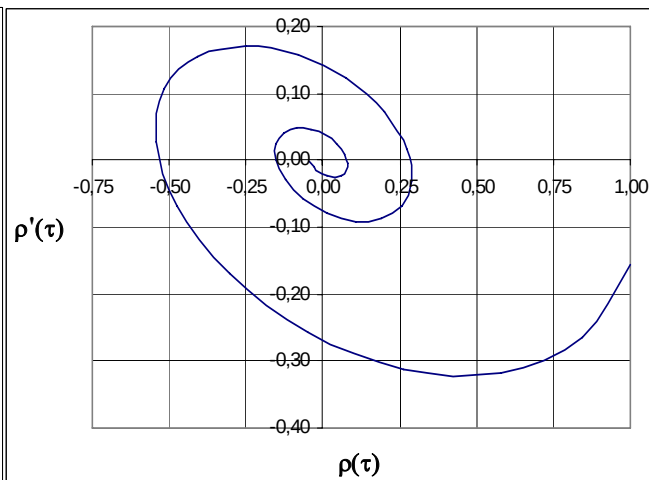
Как и следовало ожидать, погрешность идентификации КФ по фазовым портретам уменьшается с увеличением объёма выборки. Исследования показали, что фазовые портреты являются устойчивыми при отношении интервала наблюдения к интервалу корреляции ≥ 10 .

Тем не менее, проверять качество генерирования ПСП рекомендуется на выборке объёмом 5000-10000 отсчётов.

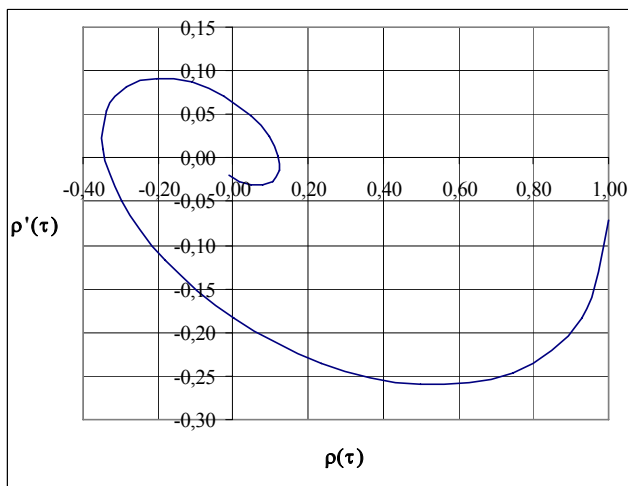
Поскольку при увеличении показателя колебательности наибольшие различия наблюдаются вблизи «нуля» корреляционной функции, наиболее информативным у фазового портрета является «хвост» [112].



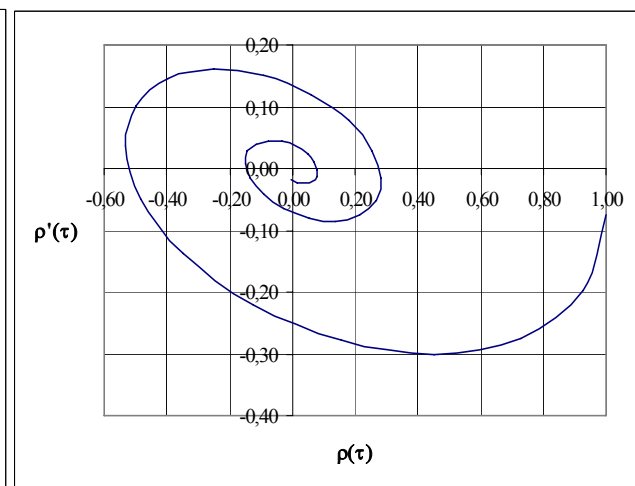
а) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \mu = 3$



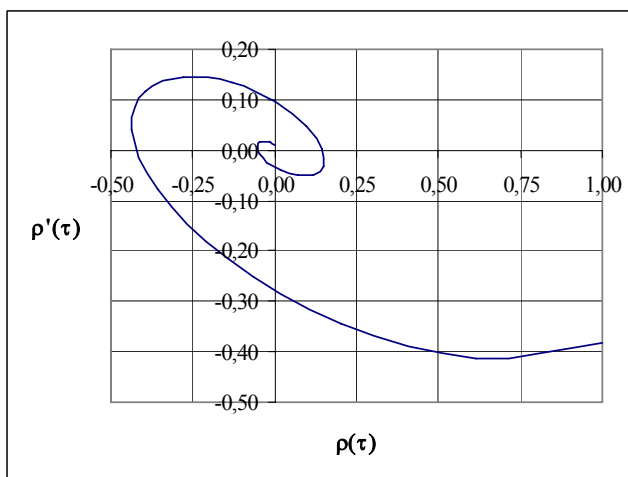
б) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \mu = 5$



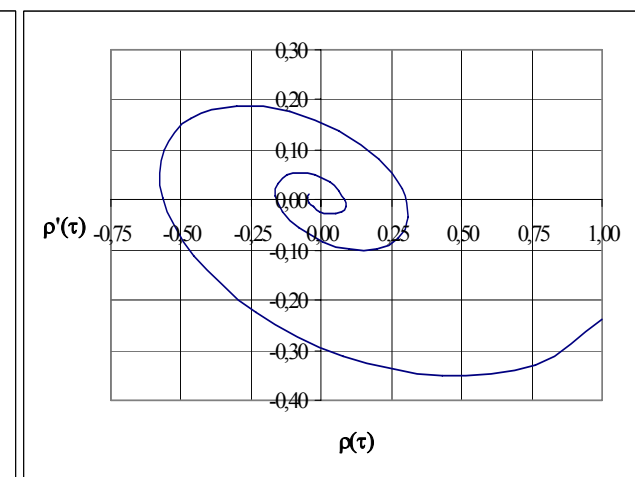
в) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 3$



г) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 5$

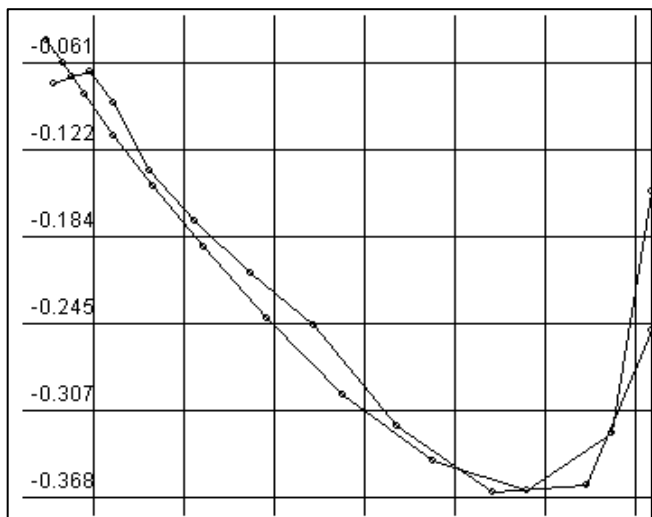


д) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 3$

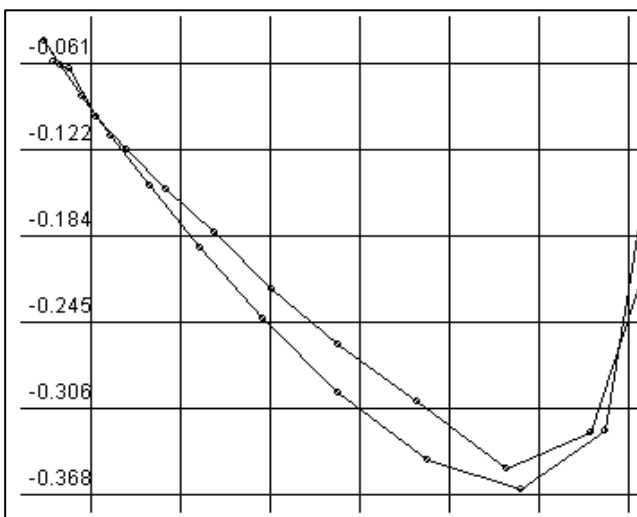


е) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 5$

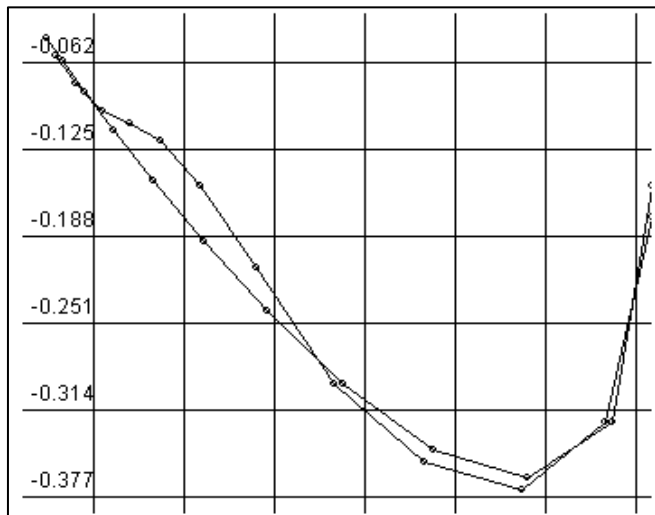
Рисунок 2.22 - Фазовые портреты колебательных корреляционных функций



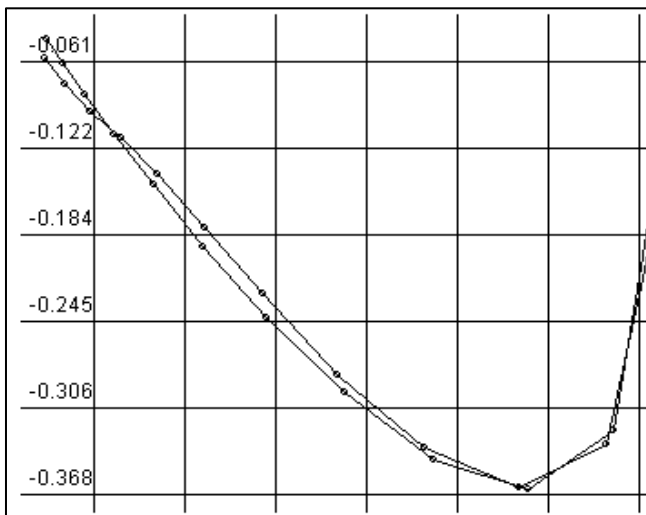
а) $M=100$; $\delta^2=0,0283$;



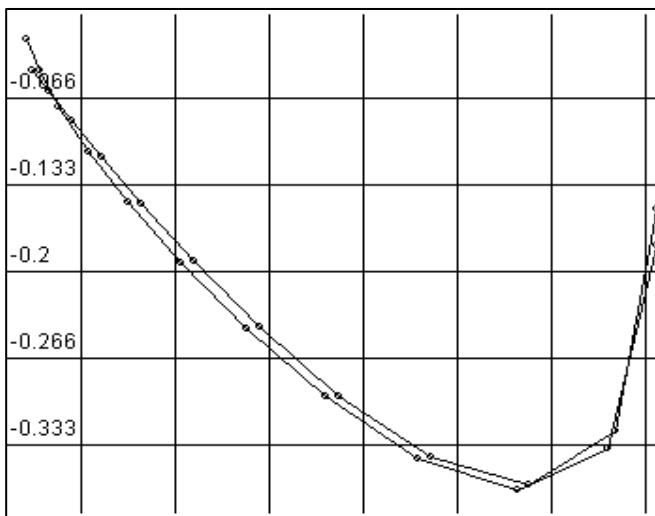
б) $M=500$; $\delta^2=0,0165$;



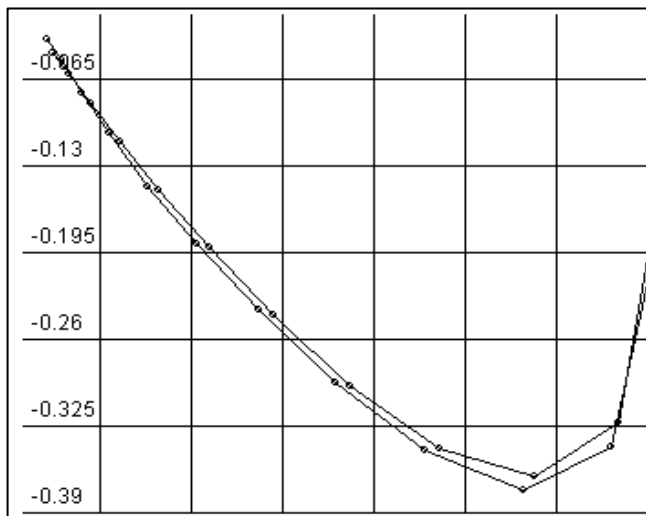
в) $M=1000$; $\delta^2=0,0122$;



г) $M=2000$; $\delta^2=0,0043$;

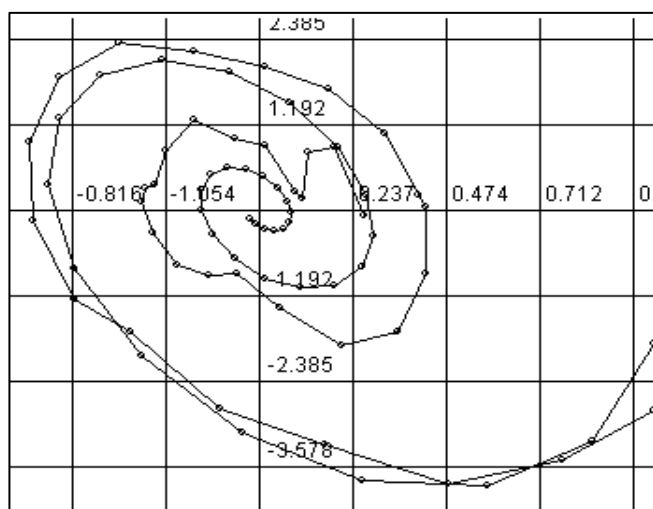


д) $M=5000$; $\delta^2=0,0034$;

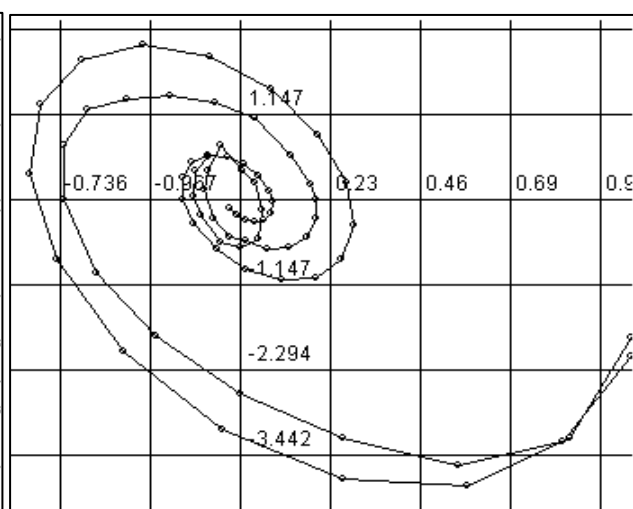


е) $M=10000$; $\delta^2=0,0023$;

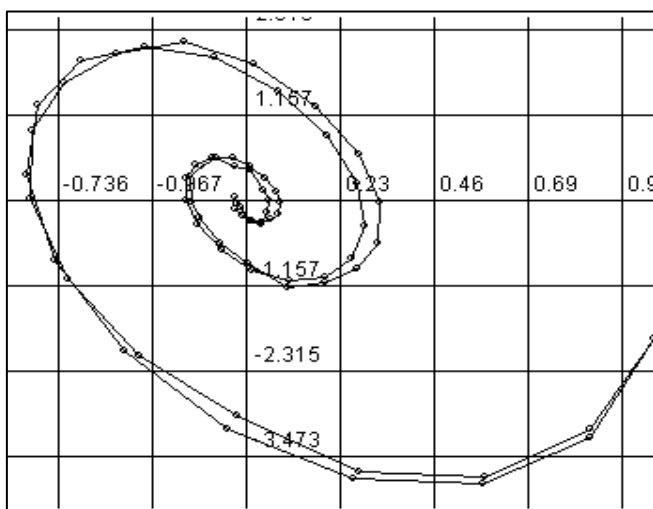
Рисунок 2.23 - Влияние объёма выборки на результат идентификации монотонной корреляционной функции



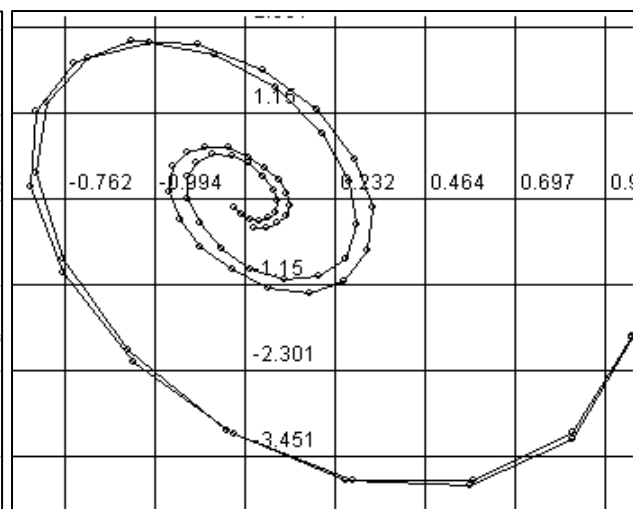
а) $M=100$; $\delta^2=0,5753$;



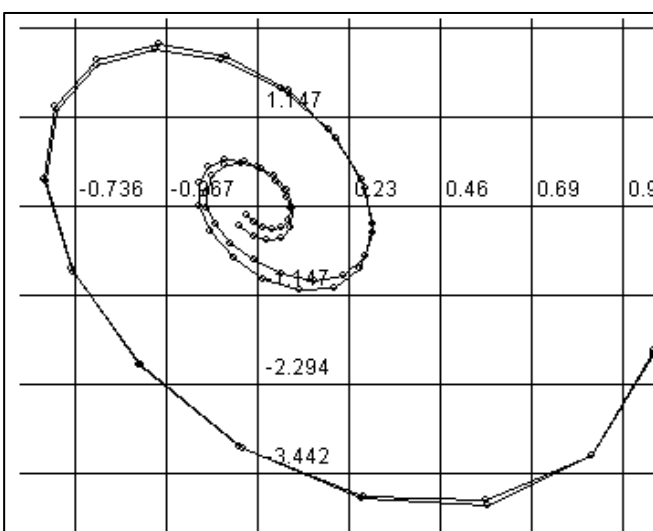
б) $M=500$; $\delta^2=0,1213$



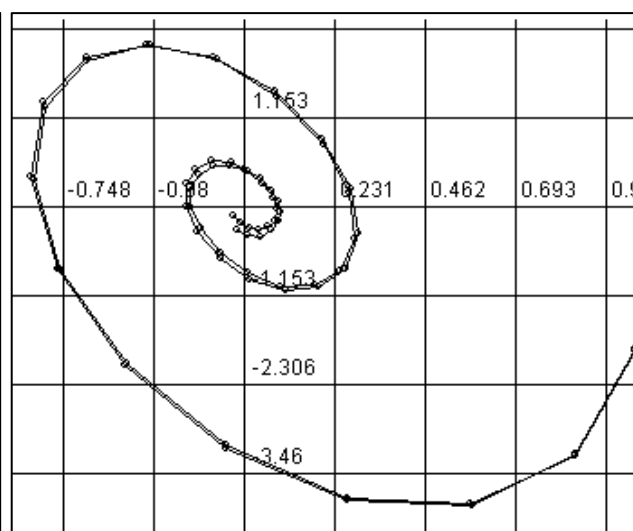
в) $M=1000$; $\delta^2=0,0289$;



г) $M=2000$; $\delta^2=0,0083$;



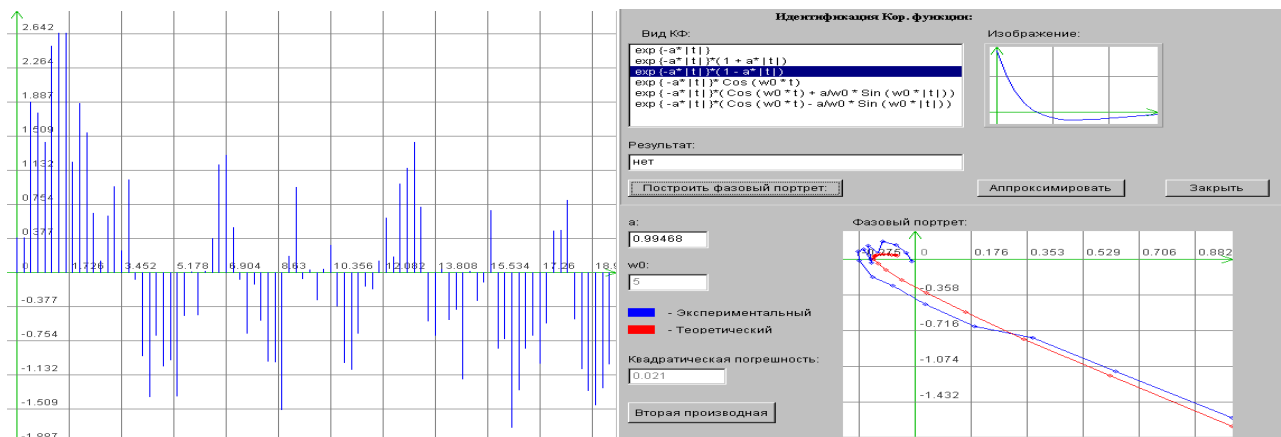
д) $M=5000$; $\delta^2=0,0025$;



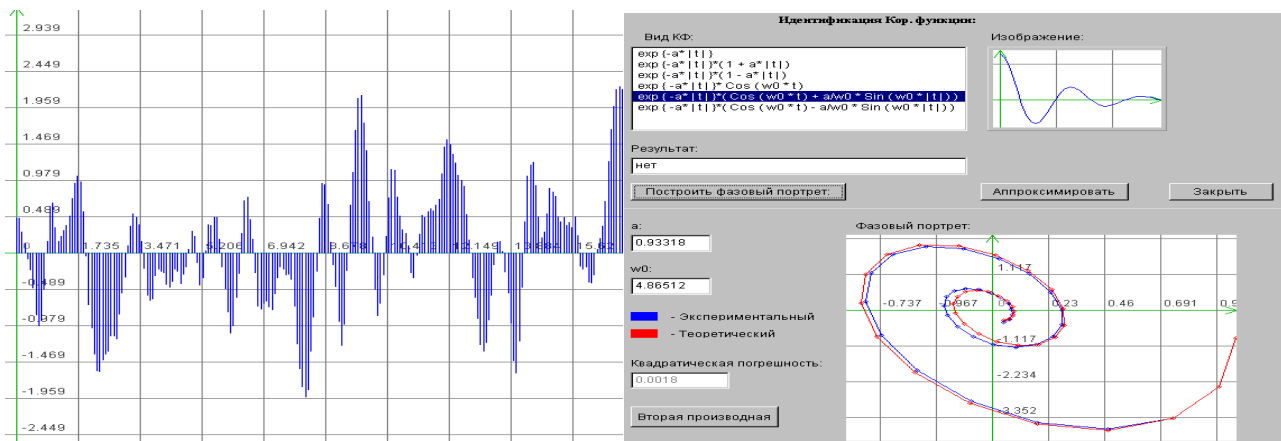
е) $M=10000$; $\delta^2=0,0019$;

Рисунок 2.24 - Влияние объёма выборки на результат идентификации колебательной корреляционной функции

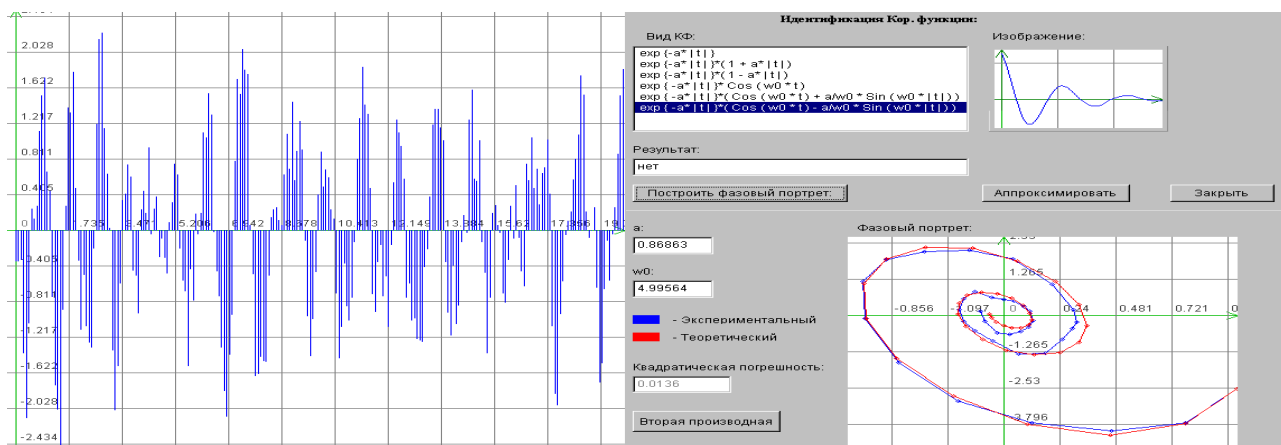
Результаты оценки качества генерирования ПСП с помощью автоматизированной системы [112] с использованием фазовых портретов представлены на рис. 2.25.



$$a) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|), \alpha = 1, \Delta\tau = 0,23$$



$$б) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau|), \alpha = 1, \omega_0 = 5, \Delta\tau = 0,078$$



$$в) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau|), \alpha = 1, \omega_0 = 5, \Delta\tau = 0,085$$

Рисунок 2.25 - Проверка качества генерирования ПСП с использованием фазовых портретов

2.9. Моделирование N ПСП с заданным видом корреляционных функций, некоррелированных между собой

При исследовании методами имитационного моделирования многоканальных систем возникает необходимость в моделировании N ПСП с заданным видом корреляционной функции с определенными параметрами и некоррелированных между собой.

При решении этой задачи возможно как использование N независимых первичных ПСП, так и одного источника [46].

Более предпочтителен метод моделирования, использующий единственный источник ПСП. Один из подходов к моделированию заключается в применении ортогональных фильтров: Лагерра, Лежандра, Чебышева и т.д. [39]. Учитывая, что в приложениях очень часто применяются ортогональные функции Лагерра:

$$L_k(\tau) = \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)!} \frac{(-\alpha\tau)^s}{(s!)^2} e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}, \quad (2.68)$$

обладающие свойством

$$\int_0^{\infty} L_k(\tau, \alpha) L_n(\tau, \alpha) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n; \\ \frac{1}{\alpha}, & \text{если } k = n \end{cases}, \quad (2.69)$$

найдем выходные сигналы ортогонального фильтра Лагерра.

Частотная характеристика фильтра Лагерра равна

$$\begin{aligned} W_k(j\omega) &= \alpha \int_0^{\infty} L_k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha/2} \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k = \\ &= \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right) W_{k-1}(j\omega). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Отсюда видно, что фильтр Лагерра имеет каноническую структуру (см. рис. 2.26). Выходные сигналы ячеек фильтра будут иметь вид:

$$y_k(t) = \alpha \int_0^{\infty} L_k(\tau, \alpha) x(t - \tau) d\tau. \quad (2.71)$$

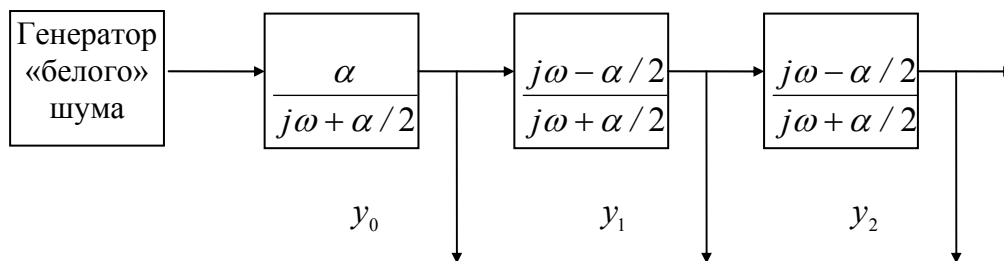


Рисунок 2.26 - Генерирование N некоррелированных ПСП с заданным видом корреляционных функций

Покажем, что два различных выходных сигнала соответствующих фильтров не коррелированы между собой. В соответствии с определением корреляционный момент между двумя сигналами равен:

$$K_{kn} = \alpha^2 \int_0^\infty \int_0^\infty L_k(\tau, \alpha) L_n(\tau_1, \alpha) K_x(\tau - \tau_1) d\tau d\tau_1. \quad (2.72)$$

Если входной сигнал является «белым» шумом, воспользовавшись свойствами ортогональных функций Лагерра (2.69) и δ -функции, получим:

$$K_{kn} = 2\pi S_0 \alpha^2 \int_0^\infty L_k(\tau, \alpha) L_n(\tau, \alpha) d\tau = 0. \quad (2.73)$$

Определим вид корреляционных функций выходных сигналов фильтра. Спектральная плотность мощности выходных сигналов фильтра с учётом (2.70) равна:

$$S_{y_k}(\omega) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2/4 + \omega^2} S_0. \quad (2.74)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье [76], определим корреляционные функции выходных сигналов фильтра:

$$K_{y_k}(\tau) = 2\pi\alpha S_0 e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}. \quad (2.75)$$

Отсюда видно, что корреляционные функции выходных сигналов соответствующих фильтров Лагерра имеют один и тот же вид и одинаковые параметры. Кроме того, как следует из выражения (2.73), выходные сигналы фильтра некоррелированы между собой.

При реализации алгоритма моделирования на ЭВМ возможно воспользоваться рекуррентной формулой для определения ортогональных функций $n+1$ порядка [39]:

$$L_{n+1}(\tau) = (2n+1-\tau)L_n(\tau) - n^2 L_{n-1}(\tau), \quad (2.76)$$

$$\text{где } \begin{cases} L_0(\tau) = e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}; \\ L_1(\tau) = e^{-\frac{\alpha\tau}{2}} (1 - \alpha\tau). \end{cases} \quad (2.77)$$

Аналогично может быть решена задача и для других ортогональных функций, рассмотренных, например, в [39].

2.10. Генерирование 2-х ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функций

При исследовании взаимных коррелометров, спектроанализаторов, анализаторов структурных функций возникает необходимость в генерировании ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функций.

Самый простой вариант решения этой задачи заключается в генерировании ПСП с заданным видом корреляционной функции и её задержке на заданный временной интервал. В качестве критерия качества генерирования ПСП можно также воспользоваться косвенным методом:

- оценить взаимную корреляционную функцию;
- аппроксимировать её заданным аналитическим выражением с параметрами, удовлетворяющими минимуму квадратической погрешности аппроксимации;

- сравнить найденные параметры модели с требуемыми значениями параметров корреляционной функции (см. рис. 2.27).

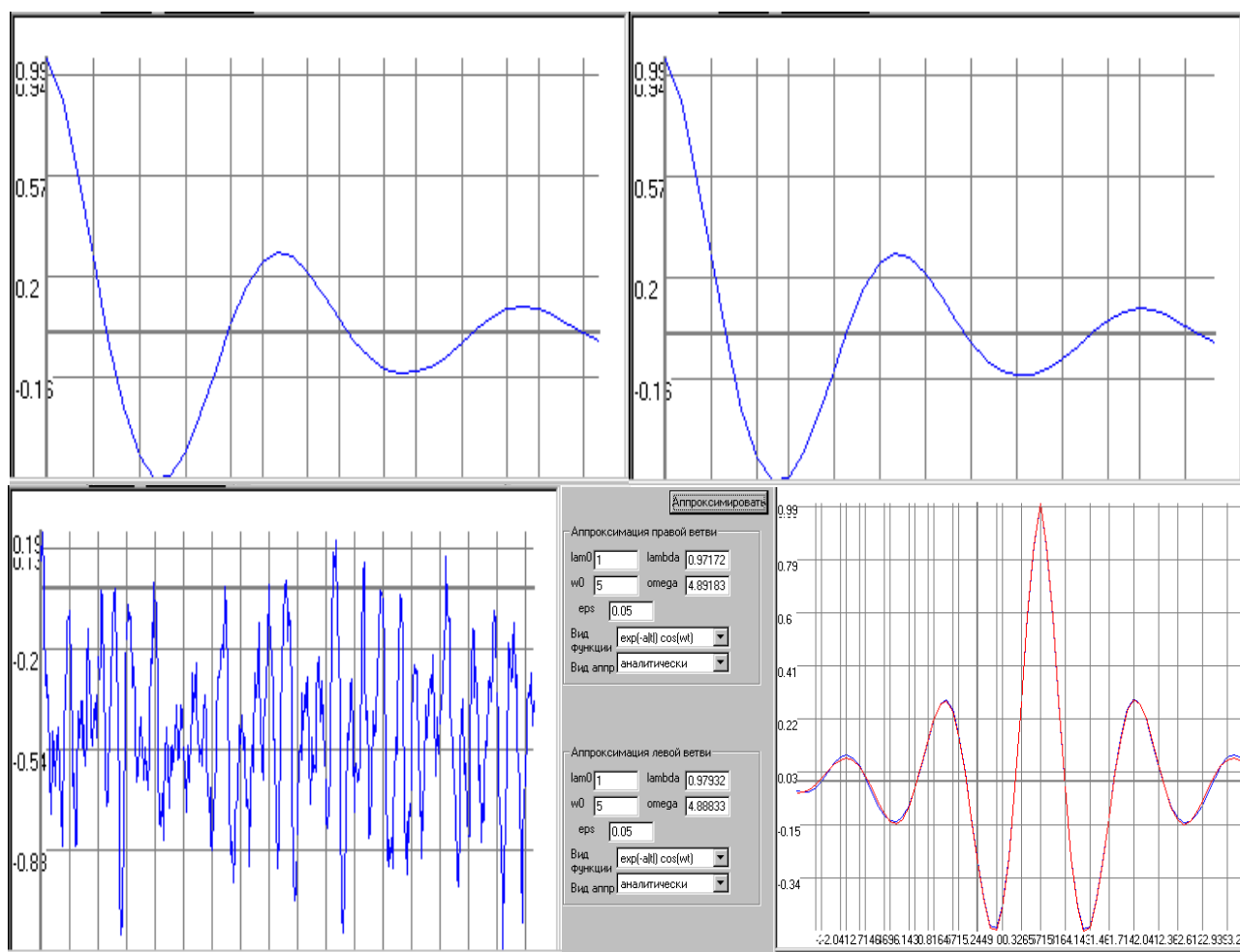


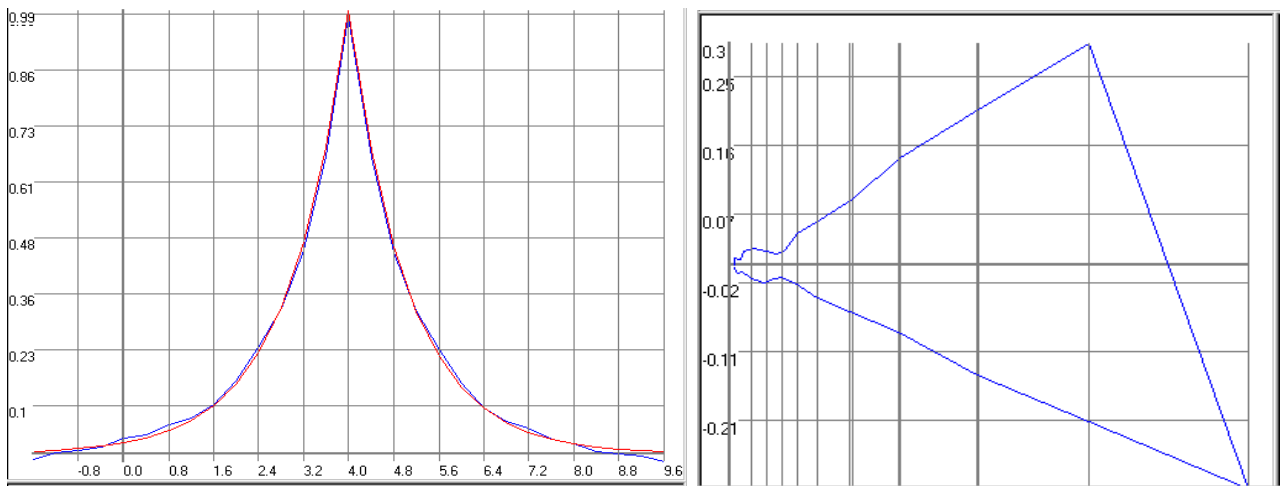
Рисунок 2.27 - Пример генерирования ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функции

Вторым методом косвенной проверки качества генерирования двух процессов с заданным видом взаимной корреляционной функции является применение фазовых портретов. Методика проверки заключается в выполнении следующих этапов:

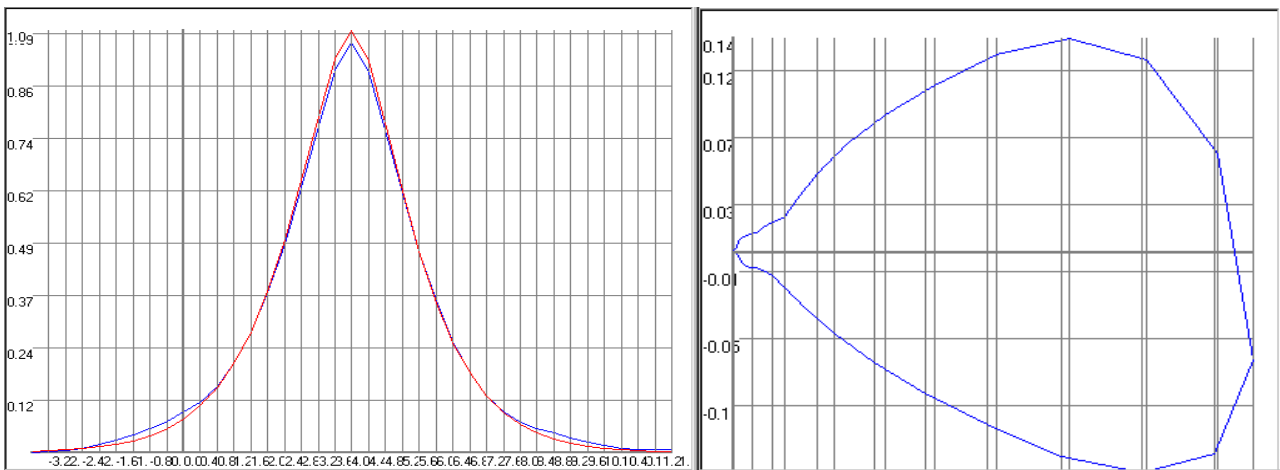
- генерирования ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функций;
- построения фазового портрета по взаимной корреляционной функции;
- сравнения полученного фазового портрета с эталонным, определенным по аналитической модели требуемой взаимной корреляционной функции.

Преимущество такого способа проверки качества генерирования заключается в простоте, наглядности и отсутствии необходимости решать аппроксимативную задачу. На рис. 2.27 - 2.28 приведены примеры фазовых портретов типовых моделей взаимных корреляционных функций. Для сравнения приведены результаты аппроксимации взаимных корреляционных функций соответствующими параметрическими моделями.

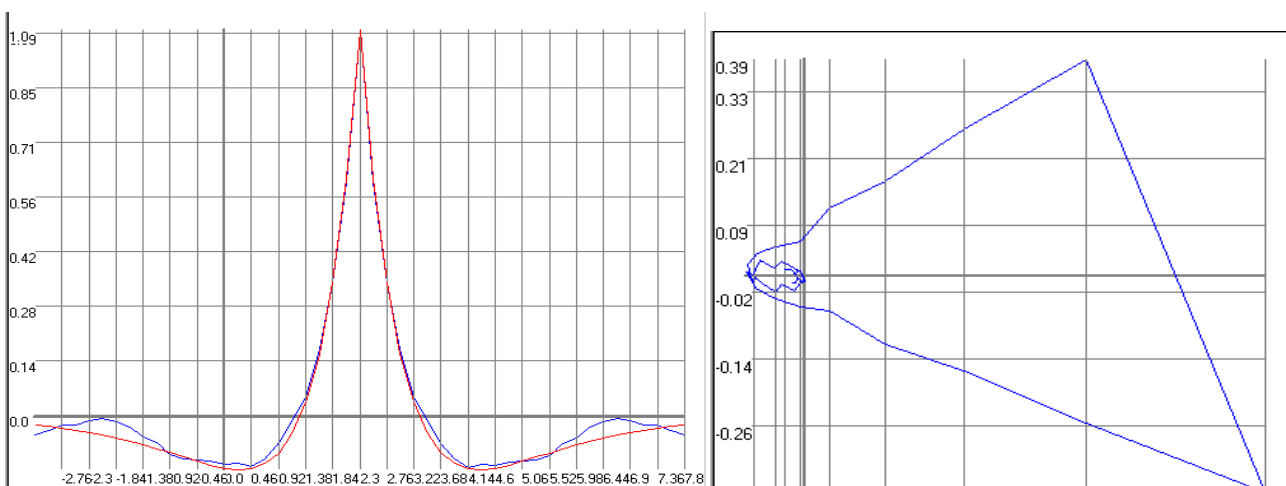
Следует отметить, что задача проверки качества подобным способом требует предварительного определения фазового портрета корреляционной функции для генерируемого процесса.



а) $\rho_x(\rho) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|}$, $\alpha=1, \tau_m=10$

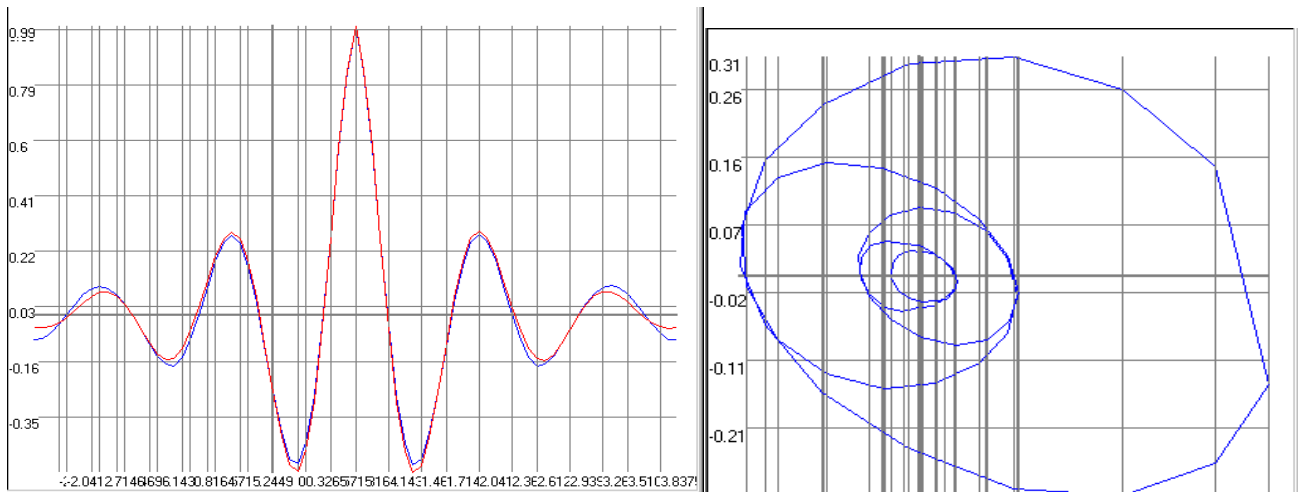


б) $\rho_x(\rho) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|}(1 + \alpha|\tau - \tau_m|)$, $\alpha=1, \tau_m=10$

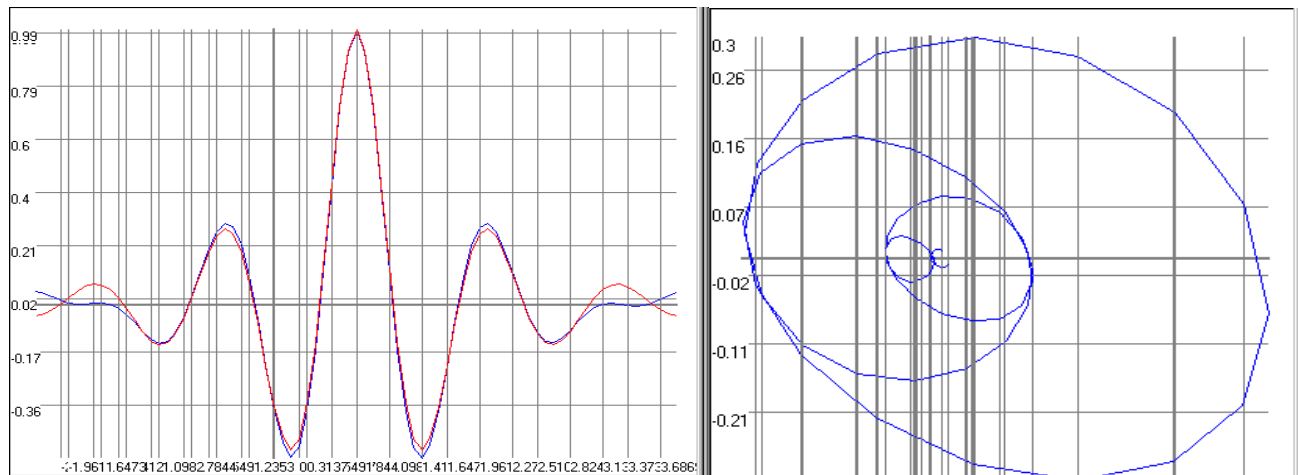


в) $\rho_x(\rho) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|}(1 - \alpha|\tau - \tau_m|)$, $\alpha=1, \tau_m=10$

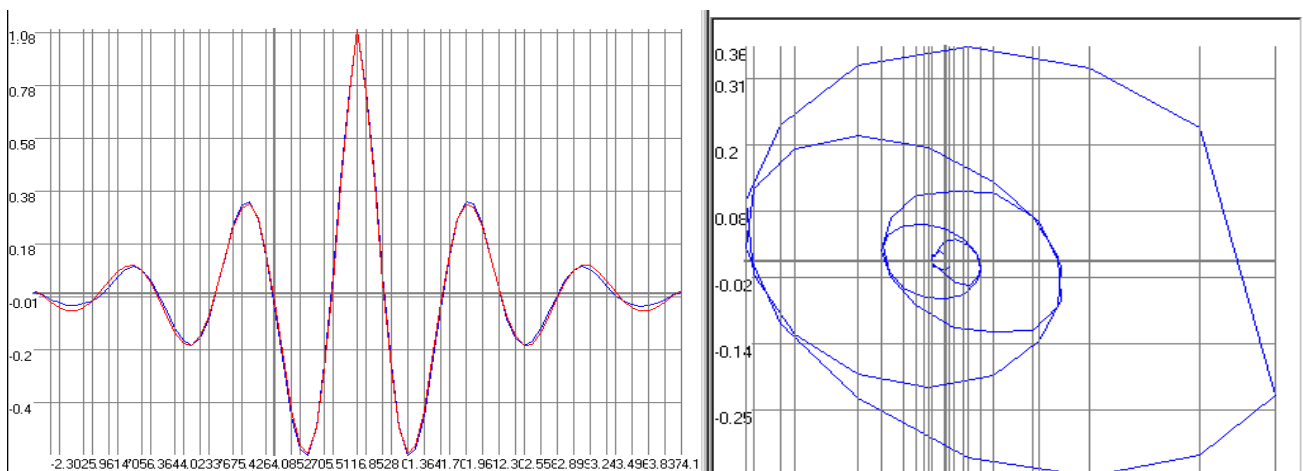
Рисунок 2.28 - Взаимные корреляционные функции и фазовые портреты монотонных моделей



$$a) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|} \cos \omega_0(\tau - \tau_m), \alpha = 1, \omega_0 = 5, \tau_m = 10$$



$$b) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|} (\cos \omega_0(\tau - \tau_m) + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0(\tau - \tau_m)), \alpha = 1, \omega_0 = 5, \tau_m = 10$$



$$v) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|} (\cos \omega_0(\tau - \tau_m) - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0(\tau - \tau_m)), \alpha = 1, \omega_0 = 5, \tau_m = 10$$

Рисунок 2.28 - Взаимные корреляционные функции и фазовые портреты колебательных моделей

Эта задача также может быть решена и методом фильтрации с использованием единственного источника первичного сигнала (см. рис. 2.29).

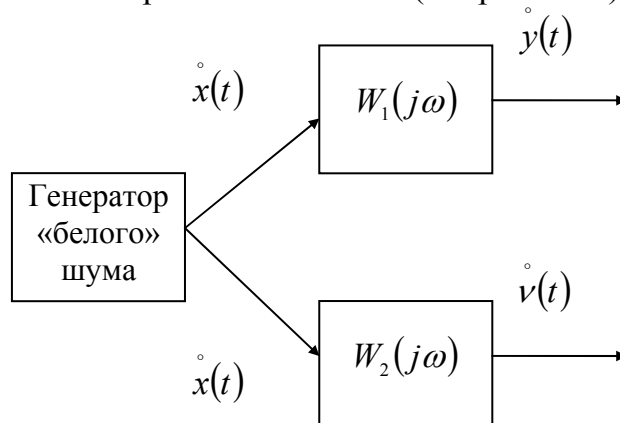


Рисунок 2.29 - Генерирование коррелированных ПСП с заданным видом корреляционных функций

Спектральные плотности мощности сигналов $\dot{y}(t)$ и $\dot{v}(t)$ соответственно равны:

$$\begin{cases} S_y(\omega) = S_0 |W_1(j\omega)|^2; \\ S_v(\omega) = S_0 |W_2(j\omega)|^2; \\ S_{yv}(\omega) = S_0 W_1(j\omega) W_2(-j\omega); \\ S_{vy}(\omega) = S_0 W_1(-j\omega) W_2(j\omega), \end{cases} \quad (2.78)$$

где $W_1(j\omega), W_2(j\omega)$ - частотные характеристики формирующих фильтров.

В таблице П.9 для примера приведены выражения для импульсных переходных характеристик формирующих фильтров, а в П10 - соответствующие им корреляционные функции.

2.11. Генерирование ПСП с заданным видом корреляционной функции и законом распределения отличным от нормального

При решении ряда задач возникает необходимость в анализе нелинейных систем при случайном входном воздействии. Аналитическое решение этой задачи возможно в некоторых случаях только для нормальных входных процессов, и даже в этом случае, как правило, применяют приближенные методы и оценивают погрешность приближения. Эта процедура достаточно сложна и громоздка [114]. Если же входной процесс отличен от нормального, аналитическое решение задачи практически невозможно. Тем не менее, успешное исследование подобных систем возможно методами имитационного моделирования на ЭВМ.

Первым шагом в этом направлении является генерирование ПСП с требуемым видом корреляционной функции и закона распределения. Следует отметить, что в настоящее время удовлетворительного решения этой задачи не найдено. Это объясняется рядом причин. Для генерирования подобных ПСП применяют две процедуры: линейную фильтрацию и нелинейное преобразование. Выходной сигнал фильтра при выполнении условия, а оно для «белого» шума всегда выполняется,

$$\Delta\omega_c \ll \Delta\omega_s, \quad (2.79)$$

где $\Delta\omega_c$ и $\Delta\omega_s$ эквивалентная полоса пропускания фильтра и эквивалентная ширина спектра мощности случайного процесса, распределен по закону близкому к нормальному. Нормализация процесса выполняется тем лучше, чем лучше выполняется условие (2.40). С другой стороны, нелинейное преобразование изменяет форму и значения параметров корреляционной функции.

Однако, как показали исследования, при удачном подборе функции преобразования возможно приемлемое решение задачи [166] (см. рис. 2.30).

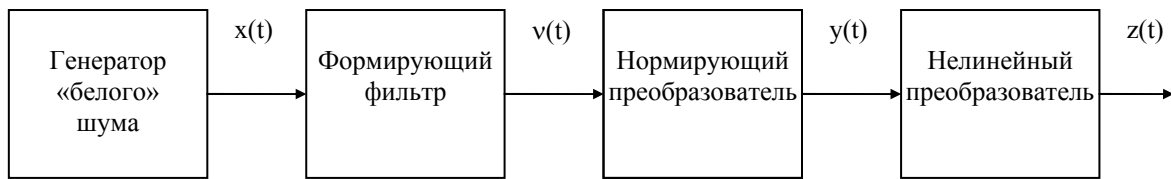


Рисунок 2.30 - Генерирование ПСП с заданным видом корреляционной функции и законом распределения отличным от нормального

Выходной сигнал генератора «белого» шума $x(t)$ распределен по равномерному закону и $x(t) \in [0, 1]$. Выходной сигнал формирующего фильтра $v(t)$ распределен по нормальному закону и находится в диапазоне $v(t) \in [v_{min}, v_{max}]$. Для нормальной работы нелинейного преобразователя необходимо, чтобы $y \in [0, 1]$ (см. подраздел 2.2). Следовательно, нормирующий преобразователь должен выполнять преобразование:

$$y(t) = \frac{v(t) - v_{min}}{v_{max} - v_{min}}. \quad (2.80)$$

Предположим, что корреляционная функция выходного сигнала формирующего фильтра известна (импульсная переходная характеристика формирующего фильтра определена), а нелинейная функция преобразования имеет вид:

$$z(t) = 1 - \exp(-\lambda y(t)), y(t) \in [0, 1]. \quad (2.81)$$

Разложим экспоненту в ряд Маклорена, ограничившись для простоты тремя членами ряда. Тогда

$$z(t) = \lambda y(t) - \frac{\lambda^2}{2} y^2(t). \quad (2.82)$$

Математическое значение сигнала $z(t)$ равно:

$$m_z = \lambda m_y - \frac{\lambda^2}{2} (m_y^2 + \sigma_y^2). \quad (2.83)$$

Центрированное значение случайной величины $\overset{\circ}{z}(t)$ примет вид:

$$\overset{\circ}{z}(t) = \lambda \overset{\circ}{y}(t) - \frac{\lambda^2}{2} [y^2(t) - m_y^2 - \sigma_y^2]. \quad (2.84)$$

Корреляционная функция сигнала $z(t)$ равна:

$$K_z(\tau) = K_y(\tau) \left(\lambda^2 - 2\lambda^3 m_y + \lambda^4 m_y^2 \right) - \frac{1}{2} M \left[\dot{y}(t) \dot{y}^2(t-\tau) \right] \left(\lambda^3 - \lambda^4 m_y \right) - \frac{1}{2} M \left[\dot{y}^2(t) \dot{y}(t-\tau) \right] \left(\lambda^3 - \lambda^4 m_y \right) + \frac{\lambda^4}{4} M \left[\dot{y}^2(t) \dot{y}^2(t-\tau) \right] - \frac{\lambda^4}{4} \sigma_y^4. \quad (2.85)$$

Для определения $K_z(\tau)$ необходимо вычислить:

$$\begin{cases} \mu_{1,2} = M \left[\dot{y}(t) \dot{y}^2(t-\tau) \right]; \\ \mu_{2,1} = M \left[\dot{y}^2(t) \dot{y}(t-\tau) \right]; \\ \mu_{2,2} = M \left[\dot{y}^2(t) \dot{y}^2(t-\tau) \right]. \end{cases} \quad (2.86)$$

Воспользовавшись результатами таблицы 1.3, определим, что

$$\begin{cases} \mu_{1,2} = \mu_{2,1} = 0; \\ \mu_{2,2} = \sigma_y^4 + 2K_y^2(\tau). \end{cases} \quad (2.87)$$

Подставив выражения (2.47) в (2.46), окончательно получим:

$$K_z(\tau) = K_y(\tau) \lambda^2 (1 - \lambda m_y)^2 + \frac{\lambda^2}{2} K_y^2(\tau). \quad (2.88)$$

Выражение (2.88) позволяет с некоторым приближением определить корреляционную функцию выходного сигнала.

Следующим шагом является определение закона распределение выходного сигнала. Для рассматриваемого случая, воспользовавшись теорией функции случайного аргумента (см. подраздел 1.3), закон распределения ПСП z равен:

$$f_z(z) = f_y[\psi(z)] \left| \frac{dy}{dz} \right|, \quad (2.89)$$

где

$$\begin{cases} f_y(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}; \\ y = \psi(z) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-z); \\ \left| \frac{dy}{dz} \right| = \frac{1}{\lambda(1-z)}. \end{cases} \quad (2.90)$$

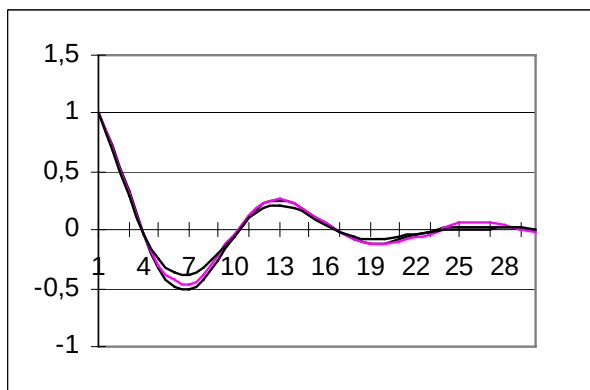
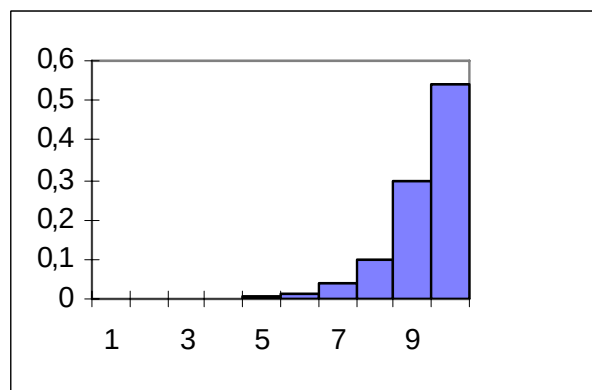
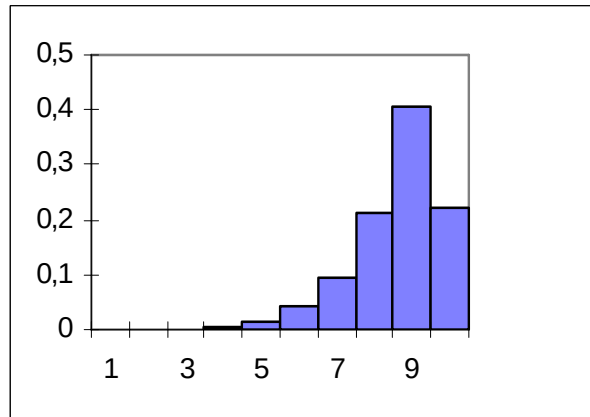
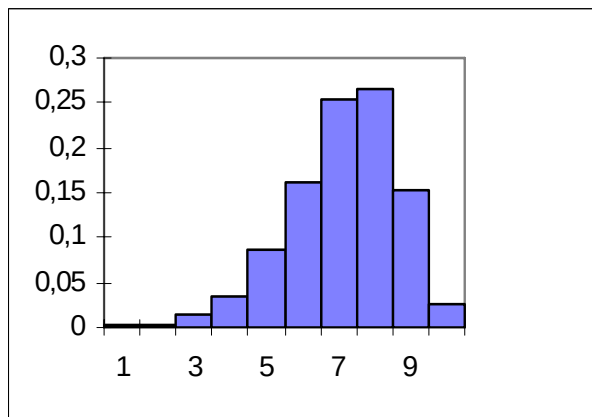
Подставив выражение (2.90) в (2.89), окончательно получим:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sigma_y \lambda \sqrt{2\pi} (1-z)} e^{-\frac{[\ln(1-z)+m_y]^2}{2\lambda^2 \sigma_y^2}}. \quad (2.91)$$

Задаваясь различным видом функций преобразования, значениями их параметров и импульсными переходными характеристиками формирующих фильтров, в соответствии с предложенной методикой можно определить корреляционные функции и плотности распределения вероятностей генерируемой ПСП.

Результаты генерирования ПСП с заданным видом корреляционной функции для различных видов функционального преобразования представлены на рис. 2.31-2.33 [185]:

- на рис. 2.31 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, $\alpha = 1 \text{ сек}^{-1}$, $\omega_0 = 5 \text{ сек}^{-1}$, $\Delta \tau = 0,1 \text{ сек}$;
 $z(t) = 1 - \exp(-\lambda y(t))$,
- на рис. 2.32 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, $z(t) = 1 - \exp(-\lambda y(t))$;
- на рис. 2.33 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, $z(t) = 1 - \exp(-\lambda y(t)) (1 + \lambda y(t) + \lambda^2 y(t)^2 / 3)$.



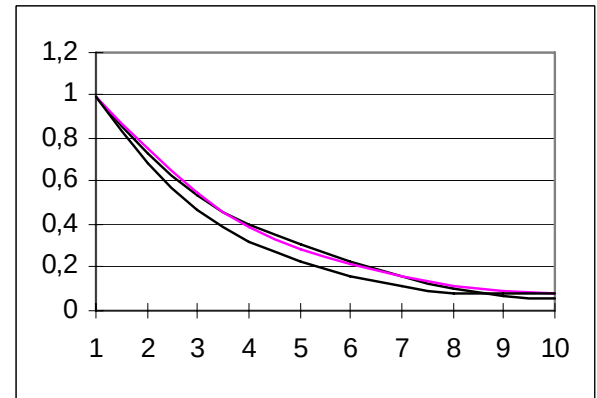
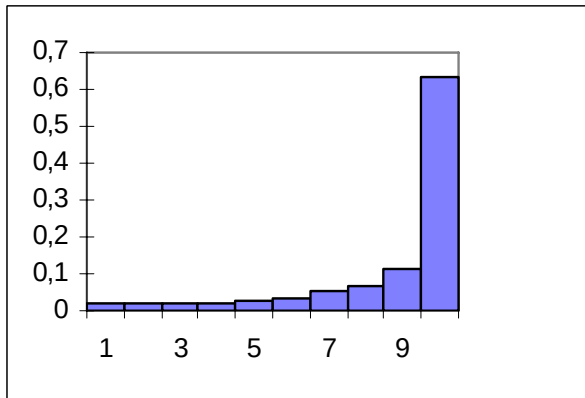
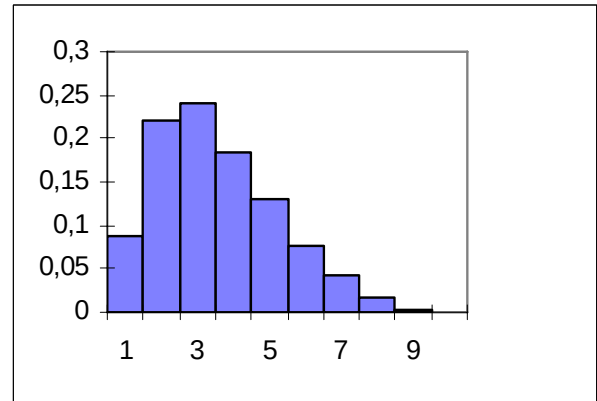
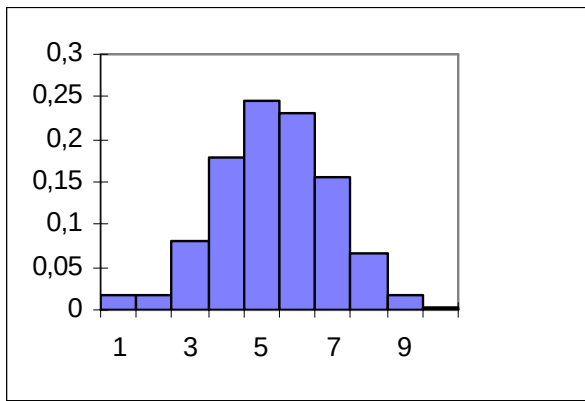
а) б)
Рисунок 2.31 - Гистограммы и корреляционные функции ПСП

В таблице 2.15 приведены характеристики законов распределения, представленных на рис. 2.31-2.32.

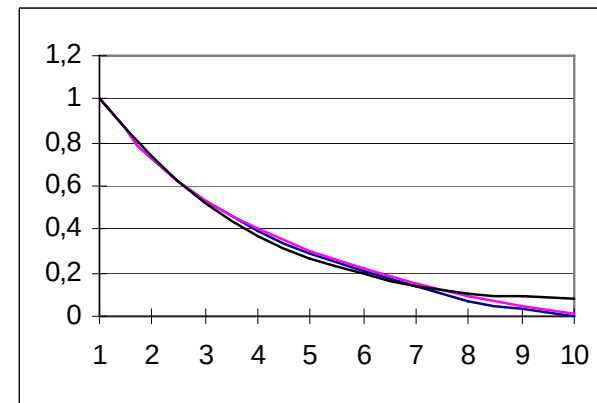
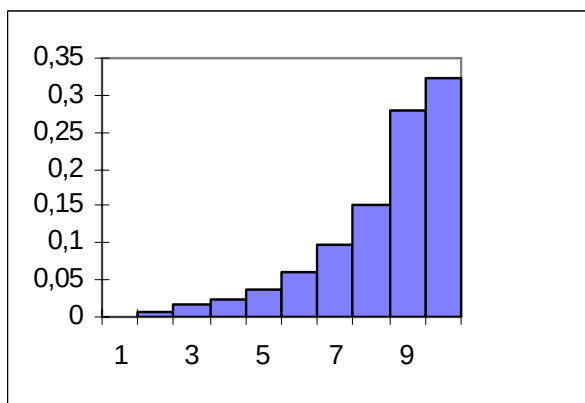
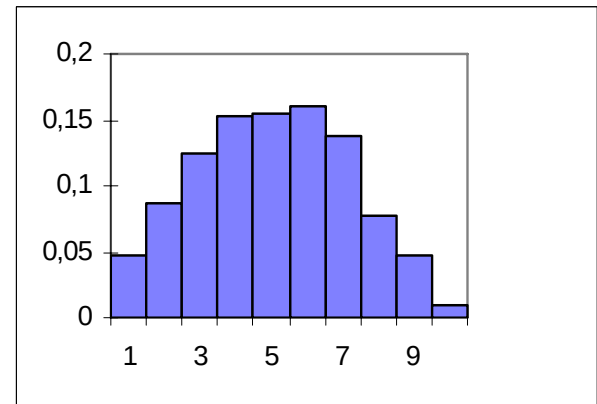
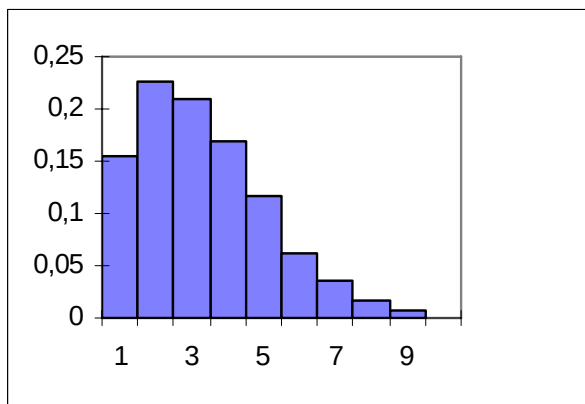
Характеристики законов распределения

Таблица 2.15

№ рисунка	λ	x_{min}	x_{max}	k_a	k_ε
2.21	5	-4,4469	2,2672	-0,6613	0,4969
	10	-6,7074	1,5922	-1,5109	3,5249
	15	-8,3298	1,1531	-2,3375	8,7062
2.22	0,1	-3,2973	3,3879	0,0874	-0,3046
	0,5	-1,8204	4,1507	0,6516	-0,0657
	5	-3,6871	0,06731	-1,8887	2,8578
2.23	1	-1,5769	4,0065	0,7694	0,2326
	5	-2,1405	2,5557	0,0254	-0,7388
	10	-4,3998	1,1921	-1,3581	1,5223



а) б)
Рисунок 2.32 - Гистограммы и корреляционные функции ПСП



а) б)
Рисунок 2.33 - Гистограммы и корреляционные функции ПСП

2.12. Генерирование неэквидистантных временных рядов

Генерирование неэквидистантных временных рядов основано на «прореживании» регулярного ($\Delta t_i = \text{const}$) временного ряда с учётом модели потока событий.

При этом выделим два случая:

- регулярный временной ряд и поток событий генерируются независимо;
- характеристики потока событий определяются характеристиками регулярного временного ряда.

В первом случае (см. рис. 1.21) на вход ключа поступает временной ряд, содержащий N отсчётов. На выходе ключа неэквидистантный временной ряд содержит лишь M отсчётов $x(t_i)$ в моменты времени, совпадающими с отсчётами потока событий t_i . При этом $M < N$.

Таким образом, генерируются неэквидистантные временные ряды в случае непреднамеренной нерегулярной дискретизации. Для генерирования регулярных временных рядов, а также потоков событий с заданными характеристиками необходимо воспользоваться результатами подразделов 2.1 и 2.2.

Случай, когда характеристики потока событий определяются характеристиками процесса (регулярного временного ряда) представлен на рис. 1.22.

Как следует из подраздела 1.10 к такому виду нерегулярной дискретизации приводит адаптивная, спорадическая дискретизация и адаптивная коммутация, которые и определяют алгоритм функционирования анализатора активности сигнала.

Неэквидистантные временные ряды используются как для определения их статистических характеристик, так и для проведения метрологического анализа результатов оценивания вероятностных характеристик с применением тех или иных аппаратно-программных средств.

На рис. 2.34 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, полученного в результате p -преобразования регулярного ряда со следующими параметрами: $\alpha = 1$, $\Delta\tau = 0,4$, $p = 0,3$, $N = 5000$.

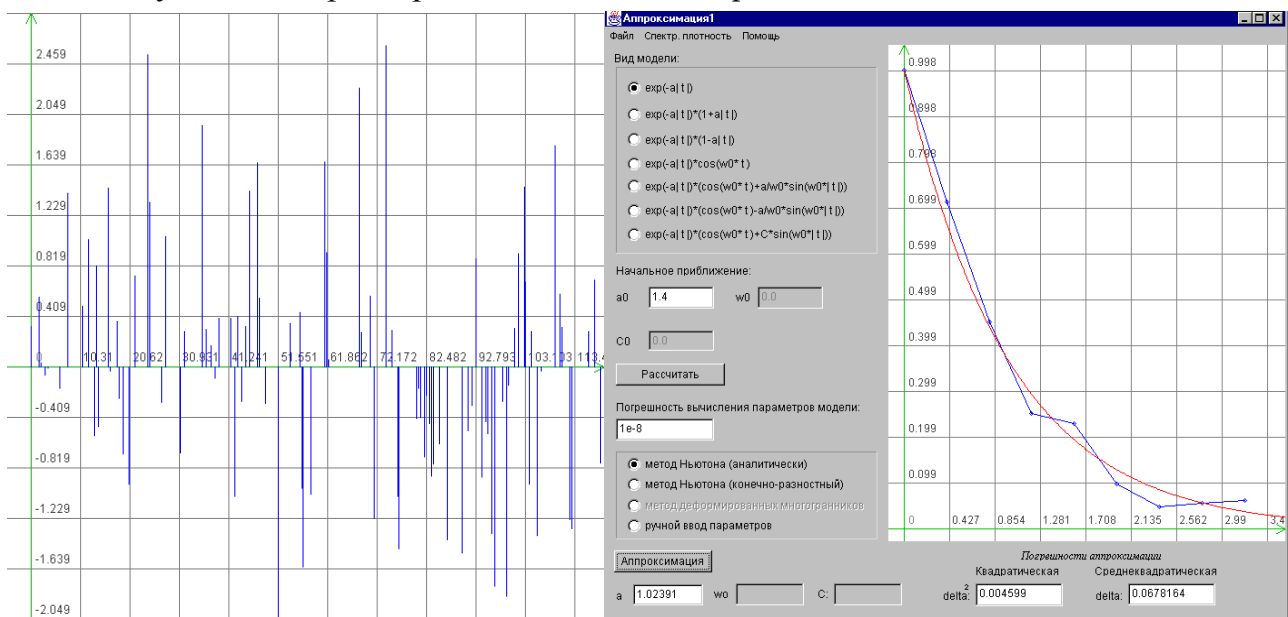


Рисунок 2.34 - Результаты генерирования неэквидистантного временного ряда (p -преобразование)

На рис. 2.35 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, полученного в результате р-преобразования регулярного ряда со следующими параметрами: $\alpha = 1, \omega_0 = 5, \Delta\tau = 0,082, p = 0,3, N = 5000$.

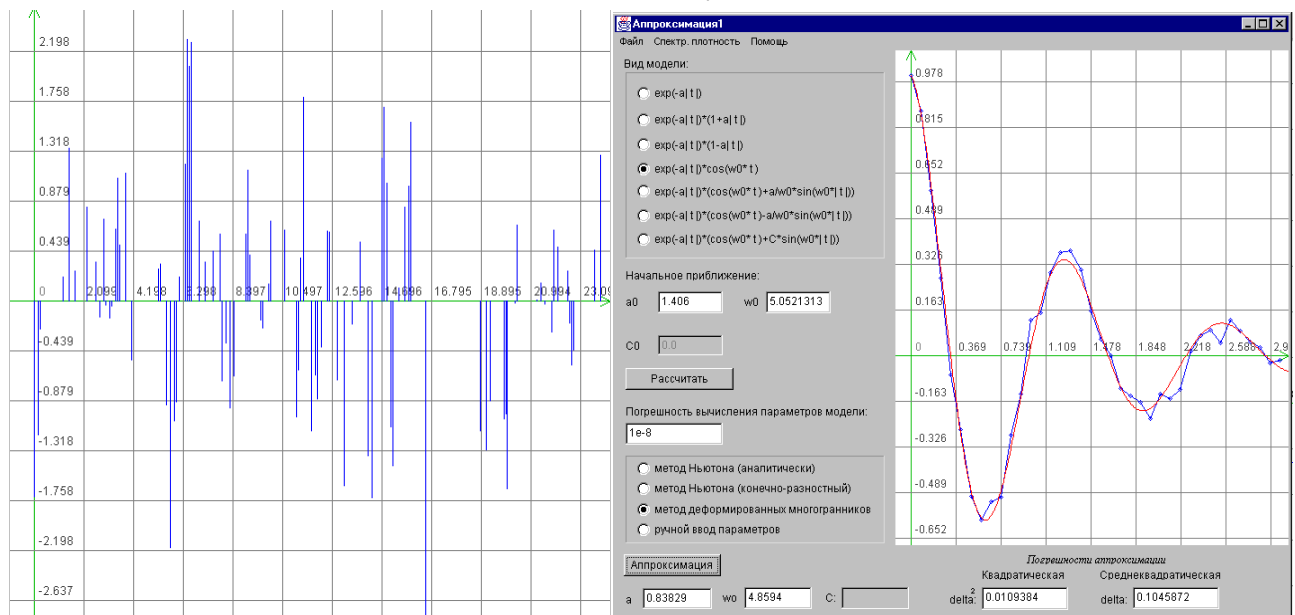


Рисунок 2.35 - Результаты генерирования неэквидистантного временного ряда (р-преобразование)

На рис. 2.36 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, полученного в результате «дрожания» регулярного ряда со следующими параметрами: $\alpha = 1, \Delta\tau = 0,4, N = 5000$.

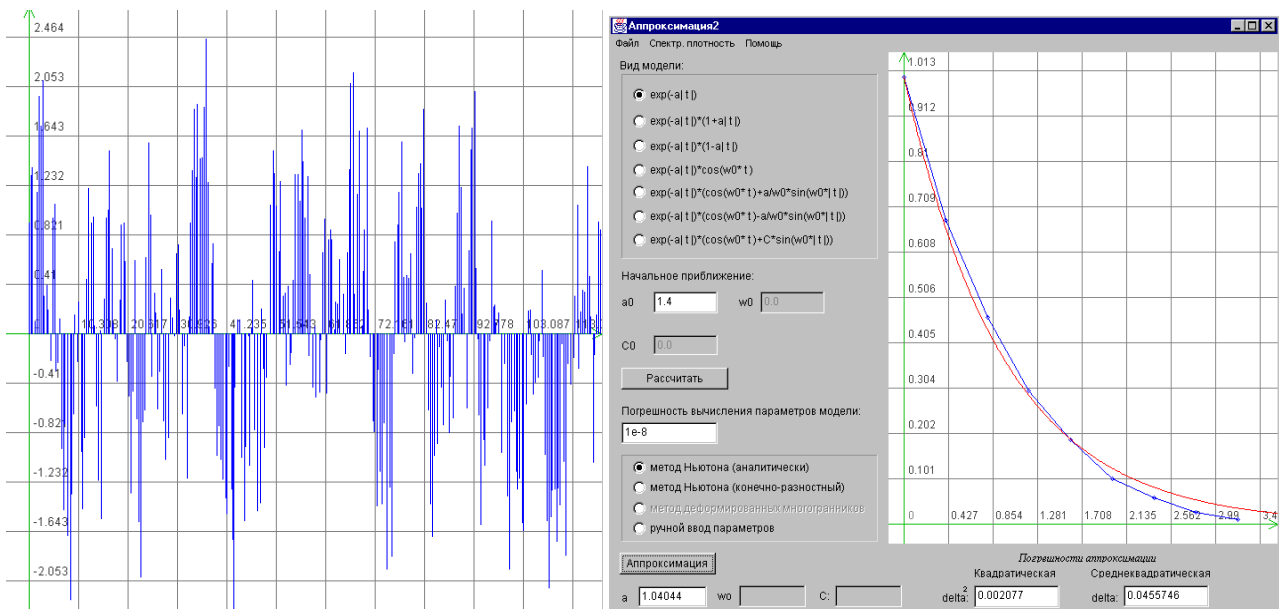


Рисунок 2.36 - Результаты генерирования неэквидистантного временного ряда («дрожание»)

На рис.2.37 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, полученного в результате «дрожания» регулярного ряда со следующими параметрами: $\alpha = 1, \omega_0 = 5, \Delta\tau = 0,082, N = 5000$.

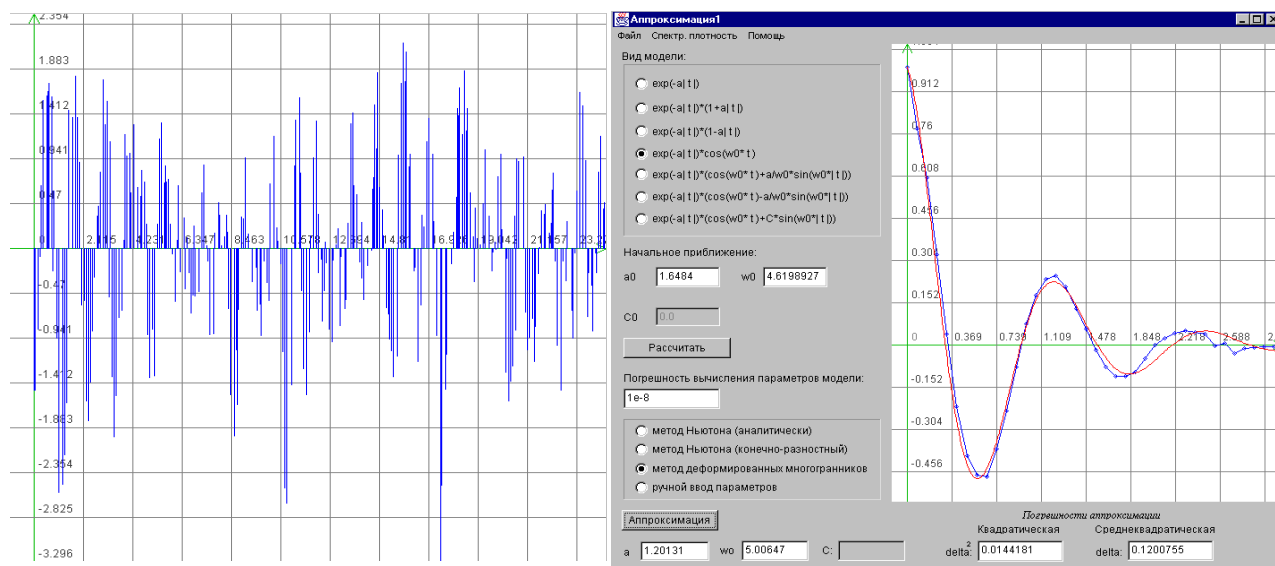


Рисунок 2.37 - Результаты генерирования неэквидистантного временного ряда («дрожание»)

На рис. 2.38 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, полученного в результате адаптивно-временной дискретизацией регулярного ряда со следующими параметрами: $\alpha = 1, \omega_0 = 5, \Delta\tau = 0,4, \gamma = 0,5, N = 5000$.

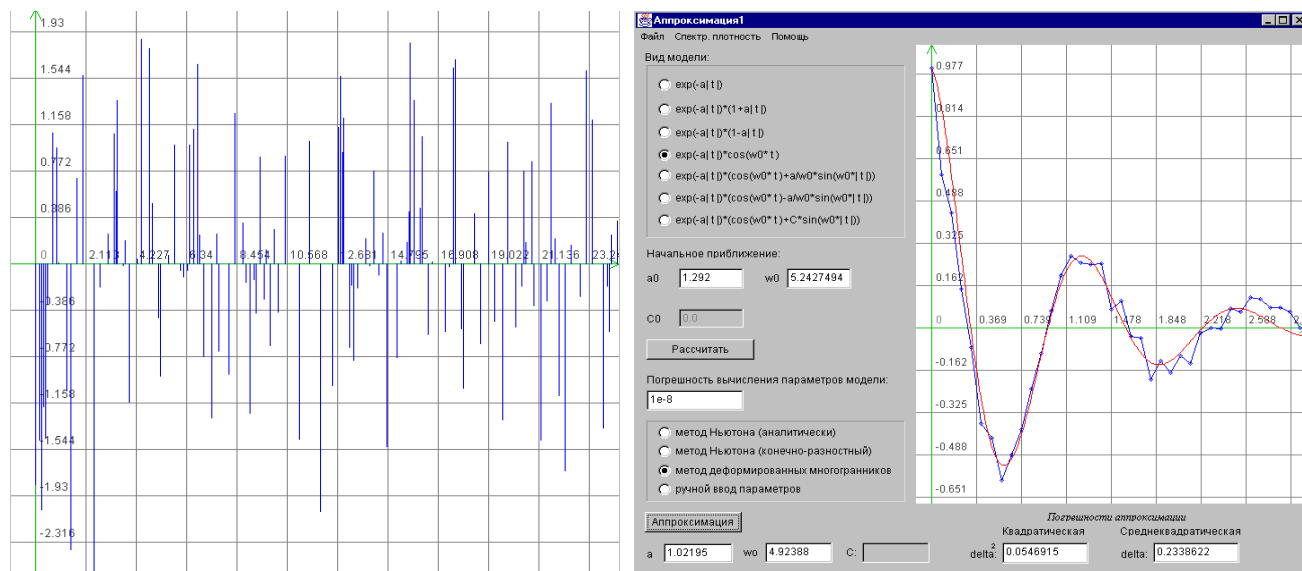


Рисунок 2.38 - Результаты генерирования НВР с адаптивно-временной дискретизацией

На рис. 2.39 приведены результаты генерирования неэквилидистантного временного ряда с $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, полученного в результате адаптивно-временной дискретизацией регулярного ряда со следующими параметрами: $\alpha = 1, \omega_0 = 5, \Delta\tau = 0,4, \gamma = 0,75, N = 5000$.

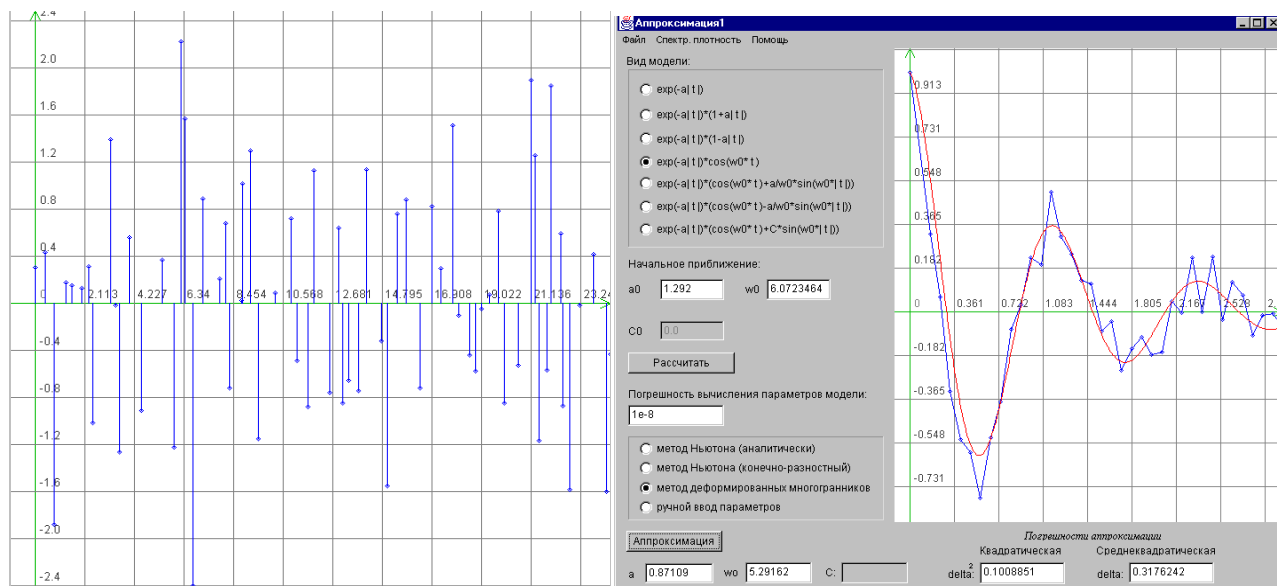


Рисунок 2.39 - Результаты генерирования НБР с адаптивно-временной дискретизацией

Аналогичным образом можно генерировать неэквилидистантные временные ряды и для других моделей нерегулярной дискретизации.

2.13. Генерирование нестационарных временных рядов

Различные комбинации ПСП, рассмотренные в подразделах 2.1, 2.2, 2.5 и т.д. и детерминированных последовательностей дают возможность построить более сложные модели, используемые при моделировании ПСП с заданными свойствами.

Так, представив модель исследуемой последовательности в виде (1.46) в зависимости от сочетания составляющих этой модели и значения ее параметров, получим следующие частные модели (см. таблицу 1.4.).

Генерирование детерминированных последовательностей сводится к расчёту по формулам и особой сложности не представляет.

Следует отметить, что в некоторых случаях для увеличения быстродействия целесообразно применение рекуррентных формул. Однако при генерировании достаточно продолжительных воздействий возможно накопление вычислительных погрешностей. Для уменьшения этого влияния необходимо как можно точнее вычислять константы рекуррентных формул.

Приведем несколько примеров.

Пусть требуется сгенерировать экспоненциальную последовательность - $x_i = e^{-i\alpha\Delta\tau}$, где α - параметр затухания, $\Delta\tau$ - интервал дискретизации.

Значение экспоненциальной последовательности в $(i+1)$ точке равно:

$$x_{i+1} = e^{-(i+1)\alpha\Delta\tau} = x_i e^{-\alpha\Delta\tau} = A x_i. \quad (2.92)$$

Отсюда видно, что для генерирования требуемой последовательности, необходимо вычислить $A = e^{-\alpha \Delta \tau}$, положить $x_0=1$ и, обратившись, к формуле (2.92), определить x_i для любого значения i .

Часто при решении разнообразных задач требуется генерировать последовательности синусоидальной формы:

$$x_i = A_m \sin i \omega_0 \Delta \tau. \quad (2.93)$$

Проведя необходимые тригонометрические преобразования получим:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i C_0 + y_i S_0; \\ y_{i+1} = y_i C_0 - x_i S_0, \end{cases}$$

где $S_0 = \sin \omega_0 \Delta \tau$, $C_0 = \cos \omega_0 \Delta \tau$, $x_0=1$, $y_0=0$.

С использованием рекуррентных формул легко можно генерировать ортогональные последовательности [39]. Так, например, формула для генерирования ортогональных последовательностей Лагерра имеет вид (2.76).

Аналогичным образом могут быть решены и другие задачи генерирования детерминированных последовательностей.

Рассмотрим пример генерирования нестационарной ПСП в соответствии с алгоритмом

$$\dot{y}_i = \dot{x}_i + A \sin(\omega_0 i \Delta \tau + \varphi), \quad (2.94)$$

где $\dot{x}_i = \dot{x}(i \Delta \tau)$ - стационарная ПСП, распределенная по закону отличному от нормального (см. подраздел 2.11).

Корреляционная функция ПСП равна:

$$K_y(i \Delta \tau) = K_x(i \Delta \tau) + \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 i \Delta \tau. \quad (2.95)$$

Отсюда нормированная корреляционная функция ρ имеет вид:

$$\rho_y(i \Delta \tau) = \frac{K_y(i \Delta \tau)}{\sigma_x^2 + \frac{A^2}{2}}. \quad (2.96)$$

Для генерирования ПСП x_i воспользуемся нелинейным преобразованием

$$x_i = 1 - e^{-\lambda v_i}, \quad (2.97)$$

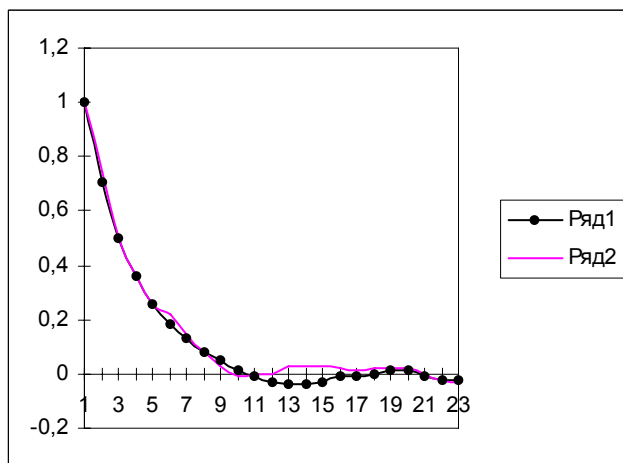


Рисунок 2.40 - Корреляционная функция нестационарной ПСП

где v_i - ПСП с нормированной корреляционной функцией $\rho_v(i \Delta \tau) = e^{-\alpha |i \Delta \tau|}$.

На рис. 2.40 - 2.44 приведены результаты определения нормированной корреляционной функции ПСП ρ для различных параметров модели (2.55).

На рис.2.40 приведены результаты для следующих параметров:

- ряд 1 - $\lambda=0,25$, $\alpha \Delta \tau=0,32$, $\sigma_x^2=1$, $A=0,1$, $\omega_0=1$, рассчитанные значения - $k_a = -0,3888$, $k_\varepsilon = 0,2286$;
- ряд 2 - $\lambda=0,25$, $\alpha \Delta \tau= 0,32$, $\sigma_x^2=1$, $A=0,2$, $\omega_0=1$, рассчитанные

значения $-k_a = -0,5564$, $k_\varepsilon = 0,0427$.

Отсюда видно, что при таком сочетании параметров генерирования ПСП y_i представляет собой широкополосную ПСП без выраженной колебательной составляющей.

На рис. 2.41 приведены результаты для следующих параметров:

- ряд 1 - $\lambda = 0,25$, $\alpha\Delta = 0,32$, $\sigma_x^2 = 1$, $A = 0,4$, $\omega_0 = 1$, рассчитанные значения- $k_a = 0,6609$, $k_\varepsilon = 0,1067$;

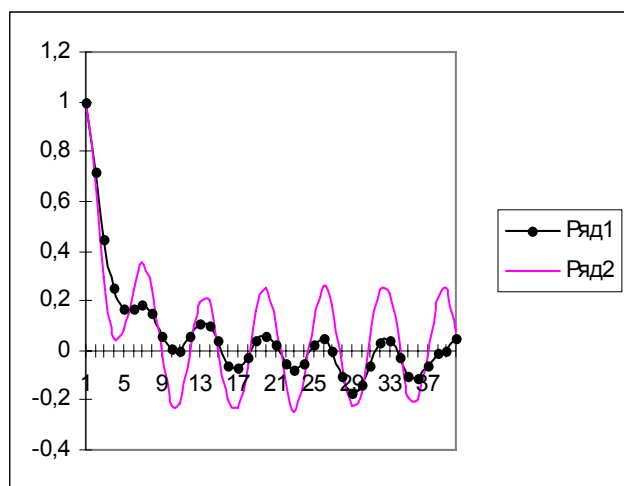


Рисунок 2.41 - Корреляционная функция нестационарной ПСП

На рис. 2.42 приведены результаты для следующих параметров:

- ряд 1 - $\lambda = 0,25$, $\alpha\Delta = 0,32$, $\sigma_x^2 = 1$, $A = 2$, $\omega_0 = 1$, рассчитанные значения - $k_a = 0,4950$, $k_\varepsilon = -0,1031$. Выходная ПСП имеет ярко выраженную колебательную составляющую со слабым затуханием..

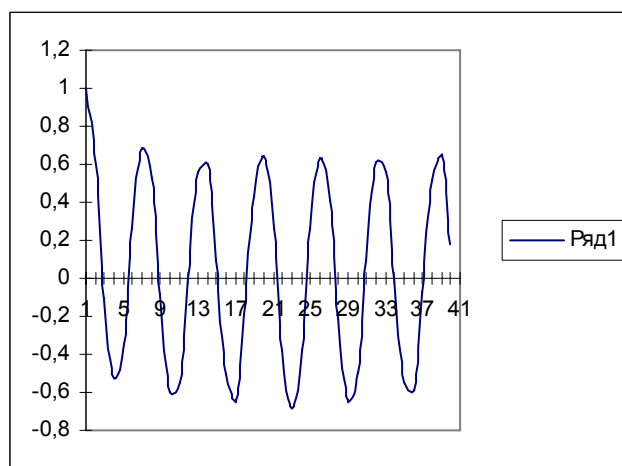


Рисунок 2.42 - Корреляционная функция нестационарной ПСП

Задавая различное сочетание параметров модели, можно определить момент, когда начинает проявляться скрытая колебательность ПСП, и использовать полученные результаты при исследовании реальных сигналов, например, при анализе сезонной изменчивости гидрологических параметров [117].

Воспользовавшись рассмотренной методикой, возможно генерирование нестационарных ПСП и для других моделей нестационарности.

3. АППРОКСИМАТИВНЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

3.1. Основные понятия и определения

При исследовании сложных объектов проводят, как правило, большое число испытаний. При этом происходит и накопление большого числа массивов числовых и функциональных характеристик, что в значительной степени затрудняет хранение, анализ и интерпретацию полученных результатов.

Выделяют первичную и вторичную статистическую обработку. Под **первичной** статистической обработкой будем понимать оценку вероятностных характеристик по ограниченному набору данных, под **вторичной** - построение аналитических моделей исследуемых процессов и их характеристик.

Алгоритмы оценки базовых вероятностных характеристик приведены в таблице 3.1.

Алгоритмы первичной обработки информации

Таблица 3.1

Наименование	Алгоритм
Начальные моменты k -ого порядка	$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i^k$
Математическое ожидаение	$\hat{m}_x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i$
Центрирование процесса	$\overset{\circ}{x}_i = x_i - \hat{m}_x$
Центральные моменты k -ого порядка	$\hat{\mu}_k = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \overset{\circ}{x}_i^k$
Дисперсия	$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\mu}_2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M \overset{\circ}{x}_i^2$
Корреляционная функция	$K_x(J) = \frac{1}{M-J-1} \sum_{i=1}^{M-J} \overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{x}_{i+J}, \quad J = 0, \dots, J_{max}$
Нормированная корреляционная функция	$\hat{\rho}_x(J) = \hat{K}_x(J) / \hat{\sigma}_x^2$
Взаимная корреляционная функция	$\hat{K}_{xy}(J) = \frac{1}{M-J-1} \sum_{i=1}^{M-J} \overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{y}_{i+J}, \quad J = 0, \dots, J_{max}$
Нормированная взаимная корреляционная функция	$\hat{\rho}_{xy}(J) = \hat{K}_{xy}(J) / \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y$
Структурная функция	$S_x(J) = \frac{1}{M-J-1} \sum_{i=1}^{M-J} [x_i - x_{i+J}]^2$
Взаимная структурная функция	$S_{xy}(J) = \frac{1}{M-J-1} \sum_{i=1}^{M-J} [x_i - y_{i+J}]^2$

Если не принимать во внимание фактор реального времени или задержку в обработке информации, то с точки зрения получения оценки по одному и тому же объему данных два подхода с методической точки зрения не отличаются друг от друга. Существенное отличие заключается в том, что работа в реальном масштабе времени накладывает жесткие ограничения на быстродействие технических средств. Это заставляет, в свою очередь, при статистических измерениях применять упрощенные алгоритмы оценивания интересующих параметров, обладающих значительным быстродействием. Кроме того, работа в реальном масштабе времени не дает возможность получить требуемые оценки, воспользовавшись другими алгоритмами, так как данную реализацию повторить нельзя - она **случайна**. Требуемую оценку необходимо получить за время, отводимое на эксперимент. Реализация же, записанная на промежуточный носитель или в память, становится **детерминированной**, и с ней можно экспериментировать сколь угодно долго. Это важное преимущество статистической обработки позволяет:

- с целью повышения точности оценивания осуществить оценку одного параметра с помощью различных алгоритмов обработки информации;
- выбрать оптимальный алгоритм оценивания, соответствующий выбранному критерию;
- с целью построения новой или уточнённой модели осуществить оценку других параметров, описывающих эту модель.

Один из возможных способов решения этой проблемы заключается в применении аппроксимативных методов (от латинского слова **approximo** - приближаюсь), суть которых заключается в нахождении подходящего аналитического выражения $\varphi(x(t), \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с неизвестными параметрами $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, удовлетворяющими заданному критерию оптимальности, которое бы описывало найденные экспериментальные результаты. Аппроксимативный подход оказывается эффективным и при обработке результатов имитационного моделирования (вычислительного эксперимента).

Предположим, что в результате опыта мы получили ряд экспериментальных точек и построили график зависимости $\xi_i = f(\xi_i)$. Желательно обработать экспериментальные данные таким образом, чтобы по возможности точно отразить общую тенденцию зависимости y от x и вместе с тем сгладить случайные отклонения, вызванные погрешностями самого эксперимента.

Наиболее эффективным методом решения этой задачи является метод наименьших квадратов [51].

Пусть задан некоторый класс функций $\varphi_j(x(t), \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с одинаковым числом неизвестных параметров. Тогда наилучшей будет та функция, для которой сумма квадратов

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^M [\xi_i - \varphi_j(\xi_i, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 = \min. \quad (3.1)$$

Если в сравнении участвуют функции с различным числом неизвестных параметров, это приводит к увеличению числа связей и к уменьшению числа степеней свободы $m-l$, что, в свою очередь, может ухудшить дисперсию [51].

$$D_j = \frac{\Delta_j}{m-r}. \quad (3.2)$$

Под числом связей r понимают число неопределенных выражений, входящих в аналитическое выражение.

Так как Δ_j является функцией $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ то, как известно [75], необходимыми условиями минимума дифференцируемой функции многих переменных является система нормальных уравнений:

$$\frac{\partial \Delta_j(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_k} = 0, k = 0, 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

решив которую с помощью того или иного численного метода найдем искомые параметры $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Классификация методов аппроксимации функциональных характеристик случайных процессов и последовательностей представлена на рис. 3.1.

Основными преимуществами аппроксимативного подхода являются:

- наглядность и компактность полученного аналитического выражения, легкость визуализации;
- возможность использования аналитического выражения для дальнейших аналитических исследований и преобразований, с целью получения обобщенных вероятностных характеристик;
- сокращения объёма хранимых данных.

К недостаткам метода следует отнести наличие методической погрешности, возникающей при замене полученных экспериментальных данных или другой функции более простым аналитическим выражением.

В общем случае, для реализации аппроксимативного подхода необходимо выполнить следующие этапы:

1. на основании анализа решаемой задачи определить требования к реализации входного процесса (последовательности): длине реализации (объёму выборки), интервалу дискретизации, числу уровней квантования и т.д. с целью получения оценок вероятностных характеристик для последующей аппроксимации с допустимыми погрешностями;

2. по измеренным значениям входного процесса (последовательности) оценить значения функциональной характеристики в заданных точках;

3. проанализировать полученный результат и выбрать подходящее аналитическое выражение, по возможности, с минимальным количеством неизвестных параметров, подлежащих определению, так как количество параметров в значительной мере определяет сложность аппаратуры или вычислений, его сходимость и устойчивость;

4. выбрать и обосновать критерий приближения;

5. составить и решить систему уравнений относительно неизвестных параметров аналитического выражения и определить погрешность приближения;

6. разработать структурную схему аппаратуры (программы) и рассчитать её параметры;

7. изготовить и отладить аппаратуру (написать и отладить программное обеспечение);

8. провести экспериментальные исследования (обработать полученные экспериментальные данные).

9. аналитически определить все интересующие обобщённые вероятностные характеристики.

Следует отметить, что определять аналитические выражения возможно как при анализе стационарных, так и нестационарных процессов. В первом случае

анализируются функциональные характеристики, во втором - и моментные, являющиеся функциями времени.

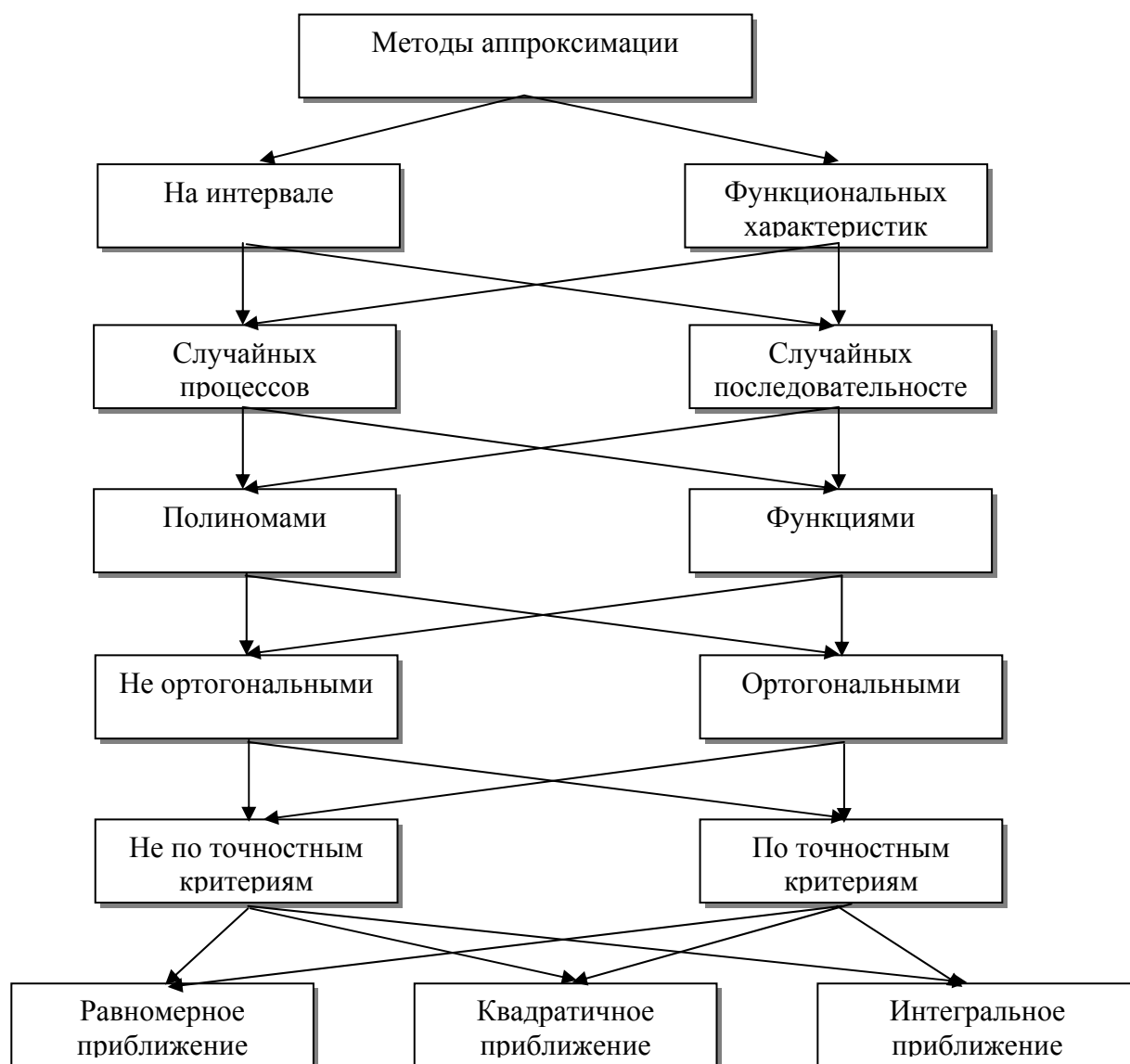


Рисунок 3.1 - Классификация методов аппроксимации случайных процессов и последовательностей

Определять параметры аналитических выражений возможно как с помощью **статистических измерений**, так и в результате **статистической обработки**.

Под **статистическими измерениями с аппроксимацией** будем понимать измерение (оценку) параметров аппроксимирующего выражения вероятностной функциональной характеристики случайных процессов с помощью специальных технических средств, работающих в реальном масштабе времени.

Под **статистической обработкой с аппроксимацией** будем понимать оценку параметров аппроксимирующего выражения вероятностной функциональной характеристики случайных процессов с помощью ЭВМ, записанных на промежуточный носитель или память. При этом происходит временная задержка в обработке информации.

3.2. Метод аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида

При выбранной аналитической модели корреляционной функции задача сводится к определению неизвестных параметров, удовлетворяющих минимуму квадратической погрешности аппроксимации [57]:

$$\Delta = \int_0^{\infty} [\rho_x(\tau) - \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 d\tau = \min. \quad (3.4)$$

Условием минимума погрешности Δ является следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i} = 2 \int_0^{\infty} [\rho_x(\tau) - \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)] \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} d\tau = 0. \quad (3.5)$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

Или

$$\int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} d\tau - \varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, \quad (3.6)$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

где

$$\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \int_0^{\infty} \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} d\tau. \quad (3.7)$$

Разделив левые и правые части уравнений системы (3.16) на $\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$, получим:

$$\frac{1}{\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \frac{\partial \rho_a(\tau, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_n} d\tau - 1 = 0. \quad (3.8)$$

Введем обозначение

$$h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} \quad (3.9)$$

и умножим левые и правые части уравнений системы на D_x .

Тогда

$$\int_0^{\infty} K_x(\tau) h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) d\tau - D_x = 0. \quad (3.10)$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

Учитывая, что $K_x(\tau) = M[\dot{x}(t)\dot{x}(t-\tau)]$, а $D_x = M[\dot{x}^2(t)]$, систему уравнений

приведем к виду:

$$M\left[\dot{x}(t) \int_0^{\infty} h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \dot{x}(t-\tau) d\tau\right] - M[\dot{x}^2] = 0. \quad (3.11)$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

Таким образом, задача аппроксимации корреляционных функций сводится к решению системы уравнений (3.11). Эта система может быть решена как с помощью специализированной аппаратуры, так и с помощью ЭВМ.

Аппаратура для решения этой системы будет состоять из n эквивалентных по структуре каналов. Блок-схема каждого канала имеет вид, представленный на рис 2.6 [1].

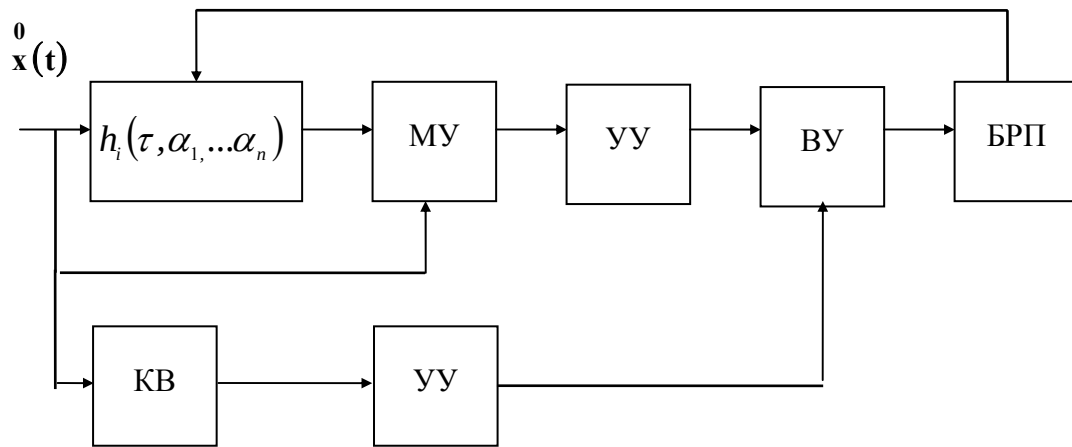


Рисунок 3.2 - *I*-й канал коррелометра с аппроксимацией параметрическими моделями

Проведя преобразования, систему уравнений (3.11) можно привести к виду:

$$M \left[\dot{x}(t) \int_0^{\infty} h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \dot{x}(t - \tau) d\tau - \dot{x}^2(t) \right] = 0, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.12)$$

Структурная схема *i*-ого канала этого коррелометра, представленная на рис. 3.3, отличается от предыдущей схемы перестановкой блоков и отсутствием одного усредняющего устройства [112].

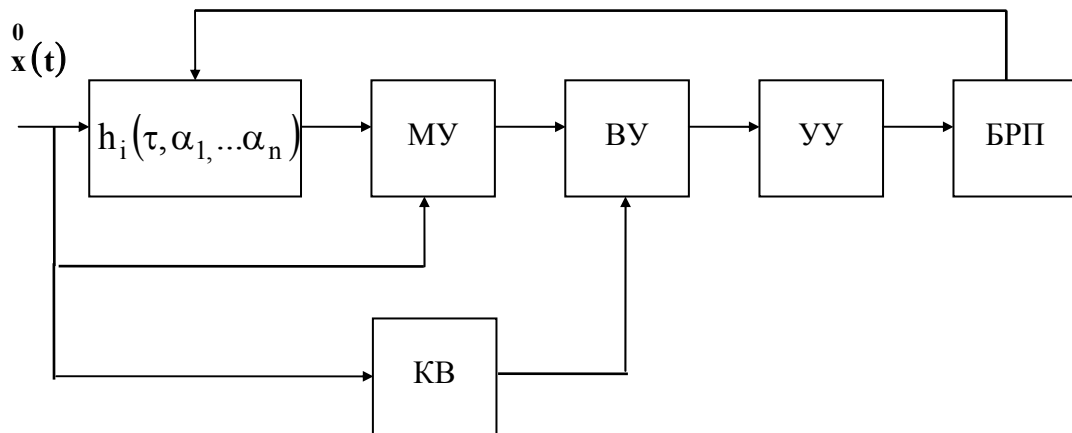


Рисунок 3.3 - *I*-ый канал коррелометра с аппроксимацией параметрическими моделями

Если привести систему уравнений (3.11) к виду

$$M \left\{ \dot{x}(t) \left[\int_0^{\infty} h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \dot{x}(t - \tau) d\tau - \dot{x}(t) \right] \right\} = 0, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.13)$$

возможна ещё одна аппаратная реализация каждого канала (см. рис 2.8). Заметим, что в структуре канала отсутствует квадратор, что, в свою очередь, упрощает его техническую реализацию [112].

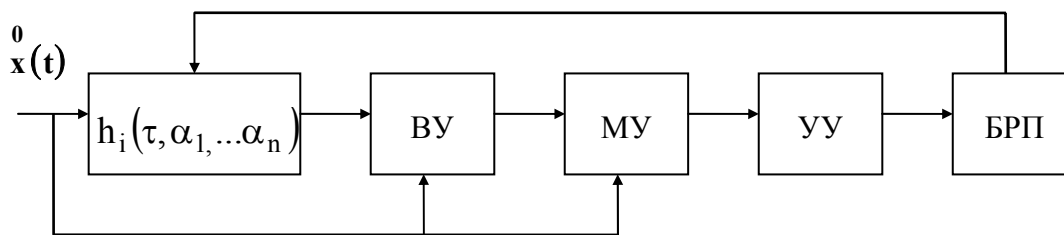


Рисунок 3.4 - I-ый канал коррелометра с аппроксимацией параметрическими моделями

На рис. 3.5 приведена одна из разработанных структурных схем двухканального коррелометра с аппроксимацией [7].

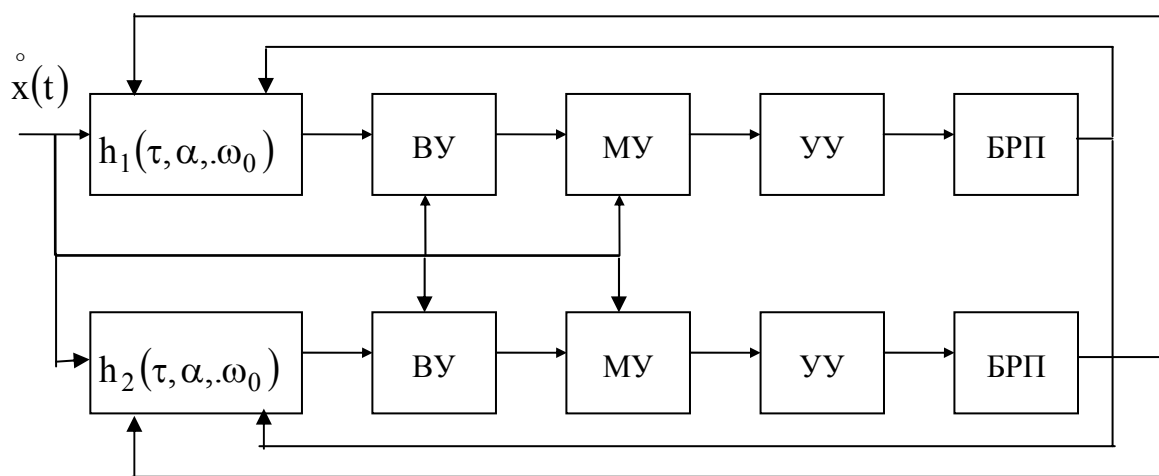


Рисунок 3.5 - Двухканальный коррелометр

В [12] разработана еще одна структурная схема для аппроксимации корреляционных функций двухпараметрическими моделями, представленная на рис. 3.6.

На рис. 3.6 приняты следующие обозначения:

1 – блок нормирования; 2 – фильтр с регулируемыми параметрами; 3, 8, 13 – блоки вычитания; 4, 9 – блок умножения; 5, 10 – блок усреднения; 6, 7 – блоки регулировки параметров; 11 – регулируемый функциональный преобразователь; 12- блок оценки интервала корреляции; 14 – блок деления.

Блок 12 формирует оценку интервала корреляции в виде несобственного интеграла от квадрата нормированной корреляционной функции [164].

Коррелометр работает следующим образом. При подаче на вход стационарного центрированного случайного процесса блоки регулировки параметров 6, 7 изменяют параметры фильтров 2 до обнуления сигналов на выходах блоков усреднения 5. Установившиеся значения параметров фильтров принимаются в качестве параметров одной из заданных моделей корреляционных функций. При этом обеспечивается минимум относительной погрешности аппроксимации корреляционной функции исследуемого случайного процесса выбранной моделью.

В [10] была разработана структурная схема коррелометра с аппроксимацией экспоненциально-косинусной моделью, представленная на рис. 3.7.

На рис. 3.7 приняты следующие обозначения:

1 – блок нормировки; 2 – источник эталонного напряжения; 3, 14 – блоки вычитания; 4, 8, 9 – блоки умножения; 5 – регулируемый фильтр; 6, 7 – ключи; 10, 11 – сумматоры.

ры; 12, 13 – блоки усреднения; 15 – блок регулировки параметра; 16 – блок регулировки частоты; 17 – генератор ортогональных сигналов.

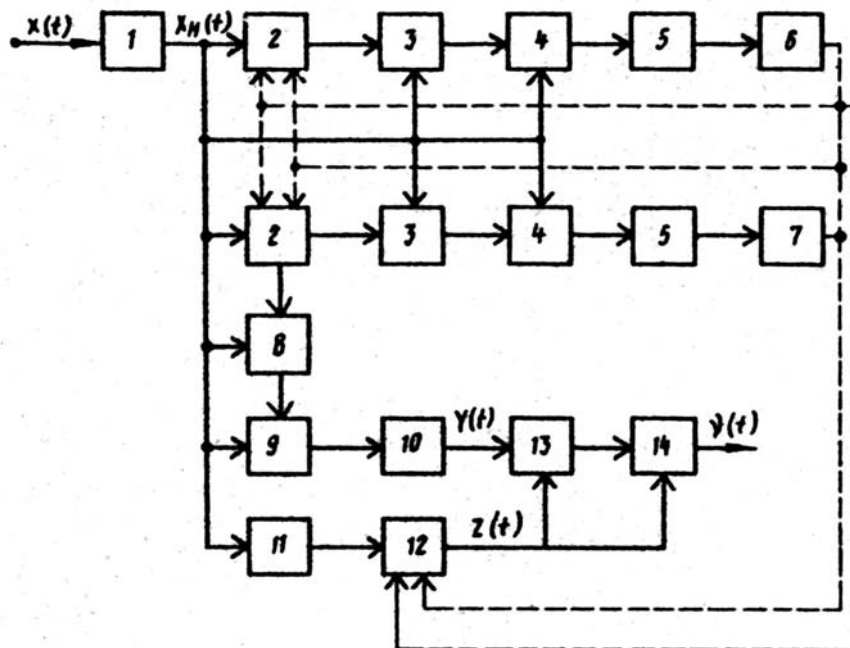


Рисунок 3.6 - Коррелометр с аппроксимацией двухпараметрическими моделями

Устройство работает следующим образом. При поступлении на вход блока нормировки, являющийся входом устройства, центрированной реализации случайного процесса $\dot{x}(t)$ блок 15 изменяет параметр α регулируемого фильтра с передаточной функцией $W(p, \alpha) = \frac{\pi}{2(1 + p/\alpha)^2}$. В свою очередь, блок 16 изменяет частоту генератора 17 до обнуления выходных сигналов блоков 12 и 13. Установившиеся значения параметра α и частоты ω_0 принимаются в качестве оценки параметров нормированной корреляционной функции $\rho_a(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$.

Предлагаемый коррелометр позволяет оценить параметры аппроксимирующего выражения, удовлетворяющие минимуму квадратической погрешности аппроксимации.

Как следует из рисунков 3.5 - 3.6, каналы регулирования взаимосвязаны, процесс уравнивания затруднен, в схеме имеется значительное число регулируемых элементов.

От ряда недостатков можно избавиться, если параметр затухания модели определять по минимуму квадратической погрешности также, как и для аппроксимирующей функции $e^{-\alpha|\tau|}$, а частоту колебания корреляционной функции ω_0 - как для функций $\rho_{a5}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, $\rho_{a6,7}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \pm \sin \omega_0 |\tau|)$.

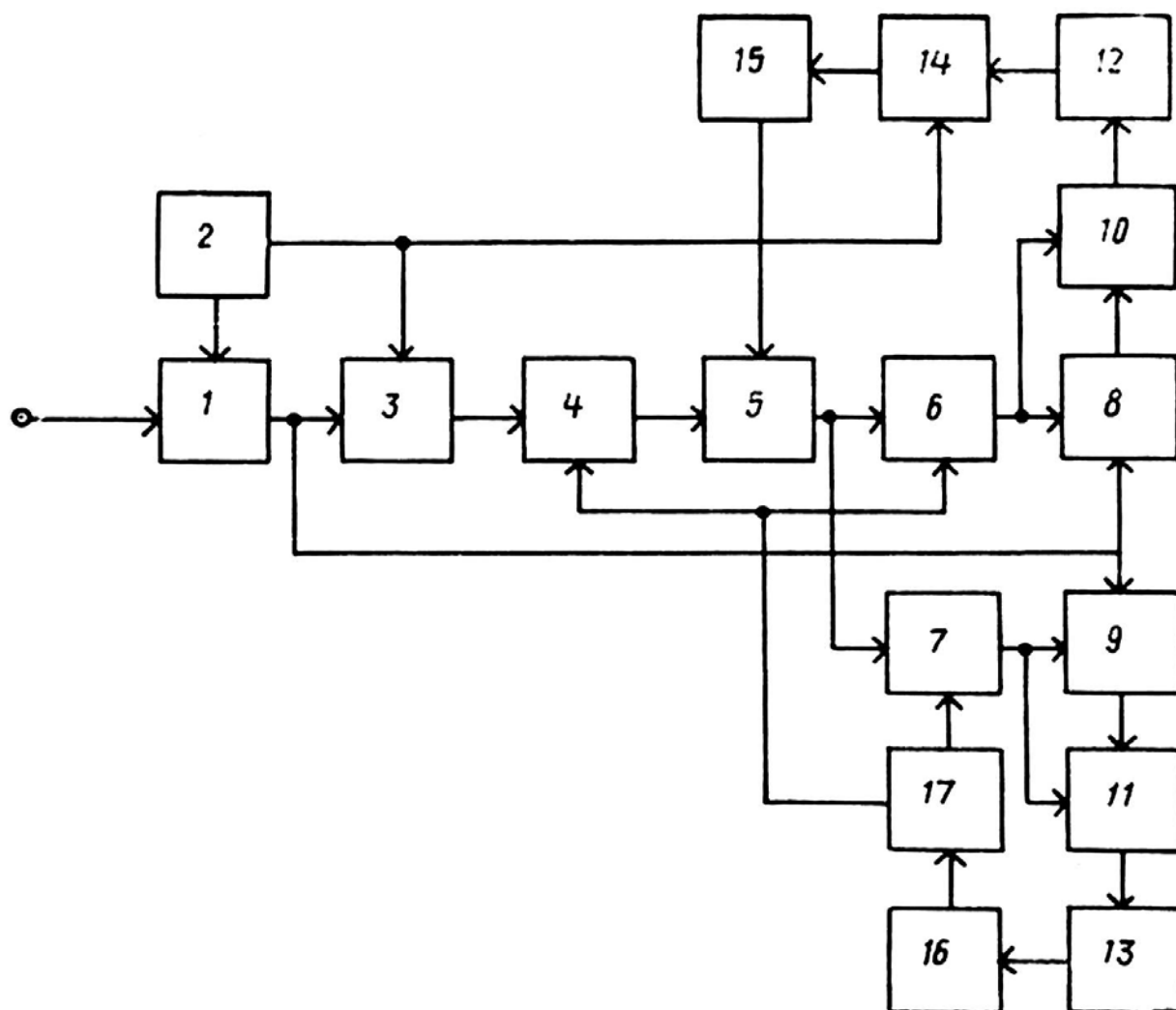


Рисунок 3.7 - Коррелометр с аппроксимацией экспоненциально-косинусной моделью

Алгоритм определения параметров модели заключается в следующем [112]. При поступлении на вход коррелометра реализации стационарного случайного процесса значение первого параметра α^* , определяемое в первом канале, устанавливается во втором фильтре. Затем определяется частота колебаний ω_0^* во втором канале.

Из рис. 3.2 - 3.7 видно, что одним из основных элементов схемы являются фильтры с регулируемыми параметрами, импульсные характеристики $h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ которых полностью определяются выбранными аналитическими выражениями корреляционных функций [57, 112]. Таким образом, задача создания устройств для аппроксимации корреляционных функций сводится, в основном, к синтезу этих фильтров. В таблице П.11 приведены, для примера, импульсные характеристики фильтров с регулируемыми параметрами, а в таблице П.12 - их передаточные функции для типовых аппроксимирующих моделей нормированных корреляционных функций.

3.3. Аппроксимация корреляционных функций параметрическими моделями с помощью ЭВМ

Рассмотренные в предыдущем разделе метод и аппаратура для аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями предназначены для работы с **реальными случайными сигналами**. Однако, часто исследователь имеет дело либо с **цифровыми данными**, полученными в ходе эксперимента с помощью информационно-измерительных систем, автоматизированных систем научных исследований, либо - в ходе **цифрового моделирования** того или иного процесса или явления.



Рисунок 3.8 - Примеры реализации регулярных случайных последовательностей

И в первом и во втором случае исследователь имеет дело со случайными последовательностями

$$\{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\}_{j=1, \dots, M}^{i=1, \dots, N}, \quad (3.14)$$

где j - номер реализации; i - номер отсчета в j -ой реализации; t_{ji} - время отсчета;

$$\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji}. \quad (3.15)$$

При $\Delta t_{ji} = \Delta t_0 = \text{const}$ исследователь имеет дело с **регулярной** временной последовательностью - регулярным временным рядом, примеры реализаций которого приведены на рис. 3.8.

Выражения (1.43) - (1.45) для оценки корреляционной функции при анализе последовательностей примут вид:

$$\begin{cases} \hat{K}_{xi}(J\Delta\tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{ji} x_{j,i+J}; \\ \hat{K}_{xj}(J\Delta\tau) = \frac{1}{M-J-1} \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} x_{j,i+J}; \\ \hat{K}_{xcp}(J\Delta\tau) = \frac{1}{N(M-J-1)} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} x_{j,i+J}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Следует отметить, что при аппроксимации корреляционных функций с помощью ЭВМ не важно, какая характеристика аппроксимируется - t -текущая, j -текущая или средняя, - подход один и тот же.

Блок схема алгоритма аппроксимации представлена на рис. 3.9.

В тех случаях, когда исследователь располагает только одной реализацией, при проведении корреляционного анализа, как правило, используется мультипликативный алгоритм, инвариантный к закону распределения случайного процесса.

При этом интервал дискретизации корреляционной функции, как правило, выбирают равным $\Delta\tau = \Delta t_0$.

Для получения достоверных оценок (статистическая погрешность 0,02-0,05), как показали исследования, количество отсчетов $M=5000-2000$ соответственно [97].

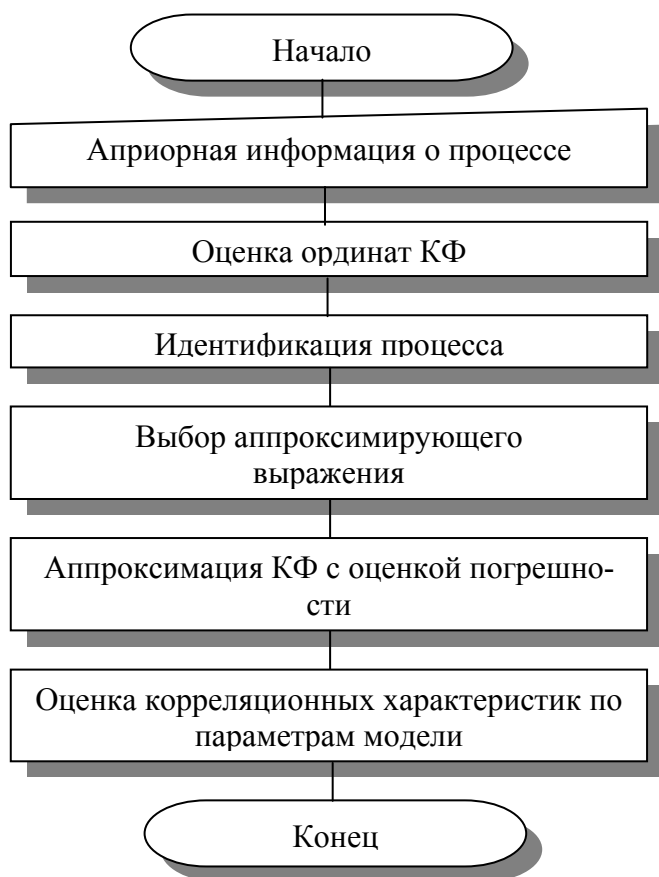


Рисунок 3.9 - Алгоритм аппроксимации

Значение интервала дискретизации $\Delta\tau$ зависит от вида корреляционной функции, значения её параметров, допустимой погрешности δ и способа восстановления корреляционной функции между узлами. Минимальное количество требуемых ординат корреляционной функции J_{max} при линейной интерполяции и различных погрешностях её восстановления представлено в таблице 3.1.

Специфика проведения аппроксимативного корреляционного анализа с помощью ЭВМ заключается либо в «дискретизации» полученных ранее уравнений, либо в получении новых уравнений, выборе численного метода для их решения, написании, отладке соответствующего программного обеспечения и проведении счёта.

Количество ординат корреляционной функции и интервалы дискретизации

Таблица 3.2

$\rho_x(\tau) \setminus \delta$	Δt	$\delta = 0,02$		$\delta = 0,05$	
		Δt	J_{max}	Δt	J_{max}
$e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sqrt{8\delta}}{\alpha}$	$\frac{0,4}{\alpha}$	9	$\frac{0,632}{\alpha}$	6
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau)$	$\frac{\sqrt{8\delta}}{\alpha}$	$\frac{0,4}{\alpha}$	13	$\frac{0,632}{\alpha}$	9
$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau)$	$\frac{\sqrt{8\delta/3}}{\alpha}$	$\frac{0,23}{\alpha}$	19	$\frac{0,365}{\alpha}$	13
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau + \alpha^2\tau^2/3)$	$\frac{\sqrt{24\delta}}{\alpha}$	$\frac{0,693}{\alpha}$	10	$\frac{1,095}{\alpha}$	7
$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0\tau$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{8\delta}{ \mu^2 - 1 }}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,16}{ \mu^2 - 1 }}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,16}{ \mu^2 - 1 }}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$
$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0\tau \pm \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0\tau \right)$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{8\delta}{ \mu^2 + 1 }}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,16}{ \mu^2 + 1 }}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,16}{ \mu^2 + 1 }}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$

Идентификация процесса по виду КФ решается с помощью фазовых портретов (см. 2.21 - 2.25).

3.3.1. Аппроксимация корреляционных функций функциями заданного вида методом Ньютона (с аналитическими производными)

Следующим шагом решения задачи аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями является составление системы уравнений (в случае однопараметрических моделей – уравнения) для определения неизвестных параметров. С учетом того, что исходными данными, подлежащими обработке, является массив значений ординат нормированной корреляционной функции - $\{\rho_x(J\Delta\tau)\}_{J=0,\dots,J_{max}}$, критерий приближения целесообразнее записать в виде:

$$\Delta = \sum_{i=0}^{J_{max}} [\rho_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 = \min. \quad (3.17)$$

В случае, если модель содержит один параметр, задача сводится к решению одного уравнения. Найдем это уравнение. Для этого необходимо, подставив в (3.17) $\rho_a(\tau_i, \alpha)$, выполнить дифференцирование и результат приравнять нулю:

$$\frac{\partial \Delta(\alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{i=0}^{J_{max}} [\rho_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha)] \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} = 0. \quad (3.18)$$

Для решения полученного уравнения воспользуемся методом Ньютона [75]. Тогда

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=0}^{J_{max}} R_i \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = \alpha_n}}{\sum_{i=0}^N \left\{ R_i \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial^2 \alpha} - \left[\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \right]^2 \right\} \Big|_{\alpha = \alpha_n}}, \quad (3.19)$$

где $R_i = \rho_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha)$.

Начальное приближение выбирается следующим образом: $\alpha_0 = \frac{\epsilon_{k_{max}}}{3}$ [111].

Процесс вычисления заканчивается, когда $|\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq \varepsilon$, где ε - любое малое наперед заданное число.

Рассмотрим примеры решения задачи аппроксимации корреляционных функций типовыми однопараметрическими моделями.

Аналитическое выражение $\rho_{a1}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}$ широко применяется для аппроксимации корреляционных функций недифференцируемых широкополосных процессов. Параметр модели определяется в результате решения следующего уравнения [111]:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=1}^{J_{max}} R_i \tau_i e^{-\alpha_n \tau_i}}{\sum_{i=1}^{J_{max}} [\tau_i^2 e^{-2\alpha_n \tau_i} - R_i \tau_i^2 e^{-\alpha_n \tau_i}]}, \quad (3.20)$$

где $R_i = \rho_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i}$.

Следует подчеркнуть, что эта простая модель оказывается весьма полезной при определении скорости затухания корреляционной функции, оценки максимального интервала корреляции. На рис 3.10 приведен пример аппроксимации корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\tau^2}$ (ряд 1) моделью $\rho_a(\tau) = e^{-1,07\tau}$ (ряд 2), параметр которой найден в результате решения уравнения (3.30).

Подобные задачи возникают при создании автоматизированных систем сбора и обработки информации, систем автоматического управления и регулирования, систем

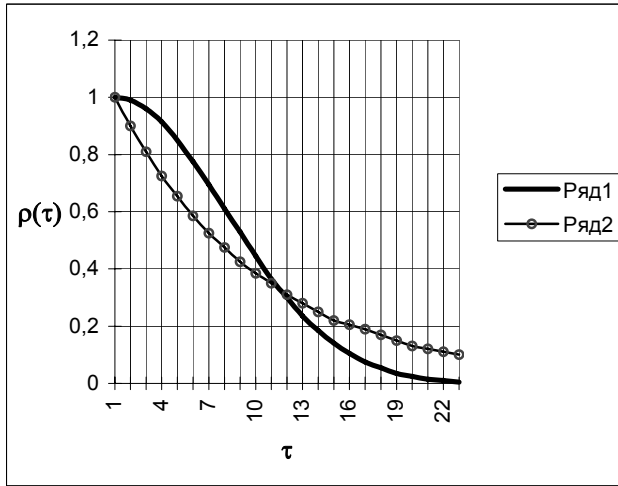


Рисунок 3.10 - Результат аппроксимации

функций однократно дифференцируемых широкополосных случайных процессов. Параметр модели определяется в результате решения уравнения [111]:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=1}^{J \max} R_i \alpha_n^2 \tau_i^2 e^{-\alpha_n \tau_i}}{\sum_{i=1}^{J \max} \tau_i^2 e^{-\alpha_n \tau_i} [R_i (\alpha_n \tau_i - 1) - \alpha_n^2 \tau_i^2]}, \quad (3.21)$$

где $R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 + \alpha_n \tau_i)$.

Аналитическое выражение $\rho_{a3}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|)$ применяется для аппроксимации корреляционных функций недифференцируемых широкополосных процессов, у которых $S_x(0) = 0$. Параметр определяется в результате решения уравнения [111]:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=1}^{J \max} R_i \tau_i e^{-\alpha_n \tau_i} (\alpha_n \tau_i - 1)}{\sum_{i=1}^{J \max} [R_i \tau_i^2 e^{-\alpha_n \tau_i} (2 - \alpha_n \tau_i) - \tau_i^2 e^{-2\alpha_n \tau_i} (\alpha_n \tau_i - 1)]}, \quad (3.22)$$

где $R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 - \alpha_n \tau_i)$.

Аналитическое выражение $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ применяется при аппроксимации корреляционных функций недифференцируемых узкополосных процессов. Параметры модели определяются в результате решения системы двух трансцендентных уравнений методом Ньютона [111]:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{S_1 S_5 - S_2 S_4}{S_3 S_5 - S_4^2}, \\ \omega_{n+1} = \omega_n - \frac{S_2 S_3 - S_1 S_4}{S_3 S_5 - S_4^2}, \end{cases} \quad (3.23)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= e^{-\alpha_n \tau_i}; A_2 = A_1 \cos \omega_n \tau_i; \dots A_3 = A_1 \sin \omega_n \tau_i; R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - A_2; \\ S_1 &= \sum_{i=0}^{J \max} R_i A_2 \tau_i; S_2 = \sum_{i=0}^{J \max} R_i A_3 \tau_i; S_3 = \sum_{i=0}^{J \max} \tau_i^2 A_2 (A_2 - R_i); S_4 = \sum_{i=0}^{J \max} \tau_i^2 A_3 (A_2 - R_i); \end{aligned}$$

$$S_5 = \sum_{i=0}^{J_{max}} \tau_i^2 (A_3^2 + R_i A_2)$$

Начальные значения α и ω_0 выбираются следующим образом [111]:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{3}{\tau_{k \max}}; \\ \omega_0 = \frac{\pi}{2\tau'}, \end{cases} \quad (3.24)$$

где τ' - интервал времени, соответствующий первому пересечению $\hat{\rho}_x(\tau)$ оси абсцисс.

Процесс вычисления заканчивается при совместном выполнении условий:

$$\begin{cases} |\omega_{n+1} - \omega_n| \leq \varepsilon; \\ |\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (3.25)$$

При аппроксимации корреляционных функций дифференцируемых узкополосных процессов применяется аналитическое выражение

$$\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Система уравнений для определения параметров модели имеет вид (3.23).

Для рассматриваемого случая [111]

$$\begin{aligned} A_1 &= e^{-\alpha_n \tau_i}; A_2 = A_1 \cos \omega_n \tau_i; A_3 = A_1 \sin \omega_n \tau_i; R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - A_2 - \frac{\alpha_n A_3}{\omega_n}; \\ S_1 &= \sum_{i=0}^{J_{max}} R_i (A_2 \tau_i + A_3 (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n); S_2 = \sum_{i=0}^{J_{max}} R_i (A_3 (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) - A_2 \tau_i \alpha_n / \omega_n); \\ S_3 &= \sum_{i=0}^{J_{max}} ((A_2 \tau_i + A_3 (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n)^2 - R_i \tau_i (A_3 (\alpha_n \tau_i + 2) / \omega_n + A_2 \tau_i)); \\ S_4 &= \sum_{i=0}^{J_{max}} \left((A_2 \tau_i + A_3 (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n) (A_3 (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) - A_2 \tau_i \alpha_n / \omega_n) + \right. \\ &\quad \left. + R_i (A_2 \tau_i (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n - A_3 ((\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n^2 + \tau_i^2)) \right); \\ S_5 &= \sum_{i=0}^{J_{max}} (A_3 (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) - A_2 \tau_i \alpha_n / \omega_n)^2 + R_i (A_2 \tau_i^2 + A_3 (\tau_i^2 + 1 / \omega_n^2) \alpha_n / \omega_n). \end{aligned} \quad (3.26)$$

При аппроксимации корреляционных функций недифференцируемых узкополосных случайных процессов, у которых $S_x(0) = 0$, применяют выражение

$$\rho_{a6}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Система уравнений для определения параметров модели имеет тот же вид – (3.23). В этом случае [111]

$$\begin{aligned} A_1 &= e^{-\alpha_n \tau_i}; A_2 = A_1 \cos \omega_n \tau_i; A_3 = A_1 \sin \omega_n \tau_i; R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - A_2 + \frac{\alpha_n A_3}{\omega_n}; \\ S_1 &= \sum_{i=0}^{J_{max}} R_i (A_2 \tau_i + A_3 (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n); S_2 = \sum_{i=0}^{J_{max}} R_i (A_2 \alpha_n \tau_i / \omega_n + (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) A_3); \\ S_3 &= \sum_{i=0}^{J_{max}} ((A_2 \tau_i + A_3 (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n)^2 - R_i \tau_i (A_2 \tau_i + A_3 (2 - \alpha_n \tau_i / \omega_n))); \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$S_4 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_2 \tau_i + A_3(1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n) (A_2 \alpha_n \tau_i / \omega_n + (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) A_3) + \right. \\ \left. + R_i (A_2 \tau_i (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n - A_3 (\tau_i^2 + (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n^2)) \right);$$

$$S_5 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_2 \alpha_n \tau_i / \omega_n + (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) A_3)^2 + R_i \left(A_3 (1 / \omega_n^2 - \tau_i^2) \alpha_n / \omega_n + \right. \right. \\ \left. \left. + A_2 \tau_i (\tau_i - 2 \alpha_n / \omega_n^2) \right) \right);$$

Начальные значения параметров модели и условия окончания вычислений аналогичны предыдущему случаю.

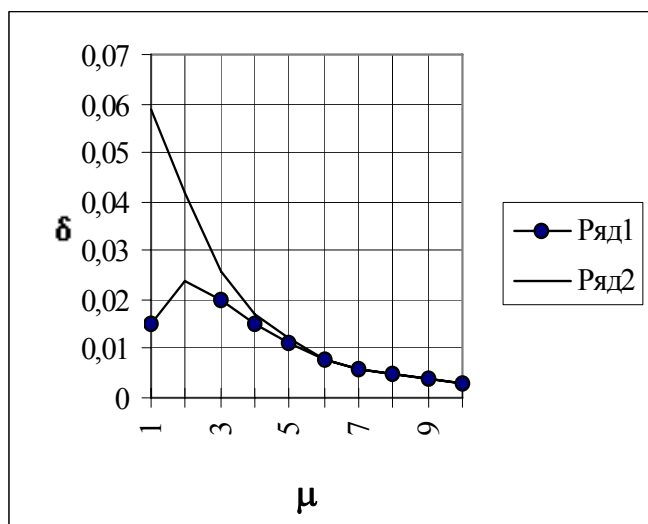


Рисунок 3.11 - Погрешности аппроксимации корреляционных функций

Сравнительный анализ выражений для оценки параметров двухпараметрических выражений показывает, что они существенно проще для экспоненциально- косинусной модели. Заметим, что при увеличении μ , модели $\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0)$ и $\rho_{a6}(\tau, \alpha, \omega_0)$ стремятся к модели $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0)$. Т.е., в том случае, когда не требуется сохранения свойств случайного процесса: дифференцируемости или $S_x(0)=0$, - более целесообразно применять в качестве модели узкополосного процесса экспоненциально-косинусную корреляционную функцию - $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0)$, допускающую более простое определение параметров и приемлемые погрешности аппроксимации (см. рис. 3.11). Ряд 1 иллюстрирует по-

грешности аппроксимации модели $\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0)$, а ряд 2 – модели $\rho_{a6}(\tau, \alpha, \omega_0)$ моделью $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0)$. Отсюда видно, что независимо от вида аппроксимируемой модели, погрешности аппроксимации при $\mu \geq 2$ меньше 0,05, что вполне допустимо при решении большинства практических задач.

В тех случаях, когда требуется учёт более «тонких свойств» процесса, необходимо тщательнее подходить к выбору аппроксимирующего выражения. На рис. 3.12 приведены примеры определения параметров колебательных моделей корреляционных функций с помощью системы [138, 139, 111].

3.3.2. Аппроксимация корреляционных функций функциями заданного вида методом Ньютона (с конечно-разностными производными)

Следует отметить, что система уравнений с использованием метода Ньютона с аналитическим взятием первой и второй производных имеет достаточно сложный вид, обладает плохой сходимостью, решение сильно зависит от начального приближения. Одним из способов устранения ряда недостатков является применение конечно-разностного метода Ньютона [175].

Рассмотрим примеры решения задачи аппроксимации корреляционных функций типовыми однопараметрическими моделями с использованием конечно-разностного метода Ньютона [138, 139].

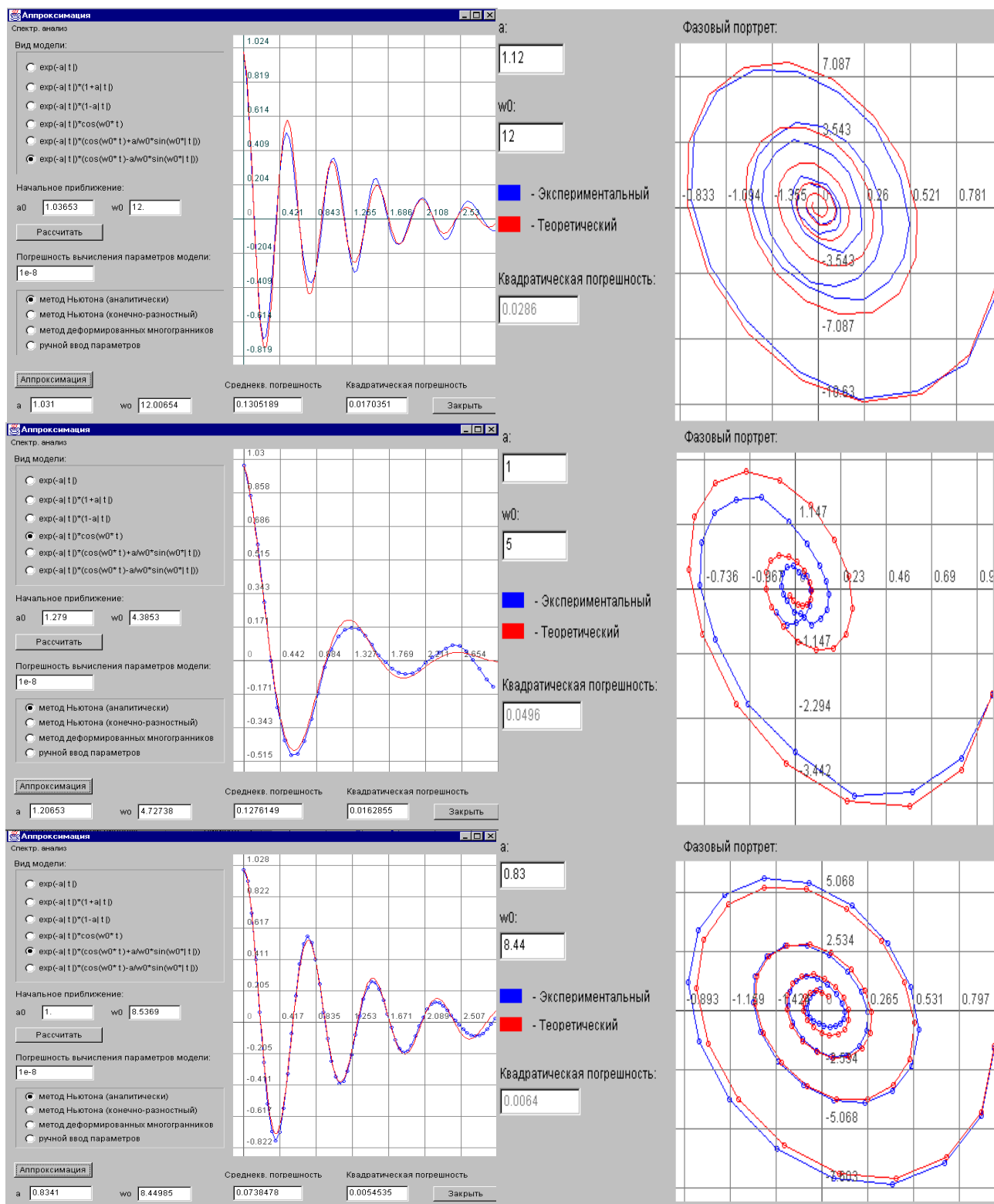


Рисунок 3.12 - Аппроксимация корреляционных функций колебательными моделями

$$1. \rho_{a1}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}.$$

Параметр модели определяется в результате решения уравнения (3.7), где

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha \tau_i};$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \approx \frac{e^{-(an+h)\pi} - e^{-an\pi}}{h};$$

$$\frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{e^{-(an+h)\pi} - 2e^{an\pi} + e^{-(an-h)\pi}}{h^2},$$

где h – любое достаточно малое приращение по α .

$$2. \rho_{a2}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

Параметр модели определяется в результате решения уравнения (3.18), в котором:

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-an\pi}(1 + \alpha_n\tau_i);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \approx \frac{e^{-(an+h)\pi}(1 + (\alpha_n + h)\tau_i) - e^{-an\pi}(1 + \alpha_n\tau_i)}{h};$$

$$\frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{e^{-(an+h)\pi}(1 + (\alpha_n + h)\tau_i) - 2e^{an\pi}(1 + \alpha_n\tau_i) + e^{-(an-h)\pi}(1 + (\alpha_n - h)\tau_i)}{h^2};$$

$$3. \rho_{a3}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$$

Параметр определяется в результате решения уравнения (3.28), где:

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-an\pi}(1 - \alpha_n\tau_i);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \approx \frac{e^{-(an+h)\pi}(1 - (\alpha_n + h)\tau_i) - e^{-an\pi}(1 - \alpha_n\tau_i)}{h};$$

$$\frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{e^{-(an+h)\pi}(1 - (\alpha_n + h)\tau_i) - 2e^{an\pi}(1 - \alpha_n\tau_i) + e^{-(an-h)\pi}(1 - (\alpha_n - h)\tau_i)}{h^2}.$$

Для двухпараметрических моделей корреляционных функций параметры модели определяются в результате решения системы двух трансцендентных уравнений методом Ньютона:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=0}^N R_i \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_n}}{\sum_{i=0}^N \left(R_i \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} - \left(\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \right)^2 \right) \Big|_{\alpha=\alpha_n}}; \\ \omega_{n+1} = \omega_n - \frac{\sum_{i=0}^N R_i \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} \Big|_{\omega_0=\omega_n}}{\sum_{i=0}^N \left(R_i \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0^2} - \left(\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} \right)^2 \right) \Big|_{\omega_0=\omega_n}}. \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Рассмотрим примеры решения задачи аппроксимации корреляционных функций типовыми двухпараметрическими моделями с использованием конечно-разностного метода Ньютона [111].

$$4. \text{ Для модели } \rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$$

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-an\pi} \cos \omega_n \tau_i;$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \approx \frac{\cos \omega_n \tau_i (e^{-(an+h)\pi} - e^{-an\pi})}{h};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} &\approx \frac{\cos \omega_n \tau_i (e^{-(an+h)\pi} - 2e^{-an\pi} + e^{-(an-h)\pi})}{h^2}; \\ \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} &\approx \frac{e^{-an\pi} (\cos((\omega_n + k)\tau_i) - \cos \omega_n \tau_i)}{k}; \\ \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} &\approx \frac{e^{-an\pi} (\cos((\omega_n + k)\tau_i) - 2\cos \omega_n \tau_i + \cos((\omega_n - k)\tau_i))}{k^2},\end{aligned}$$

где h – любое достаточно малое приращение по α ,
 k – любое достаточно малое приращение по ω_0 .

5. Для модели $\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - \left(e^{-an\pi} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right);$$

$$S_1 = e^{-an\pi} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$S_2 = e^{-(an+h)\pi} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{(\alpha_n + h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$S_3 = e^{-(an-h)\pi} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{(\alpha_n - h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \approx \frac{S_2 - S_1}{h}, \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{S_2 - 2S_1 + S_3}{h^2};$$

$$S_4 = e^{-an\pi} \left(\cos((\omega_n + k)\tau_i) + \frac{\alpha_n}{(\omega_n + k)} \sin((\omega_n + k)\tau_i) \right);$$

$$S_5 = e^{-an\pi} \left(\cos((\omega_n - k)\tau_i) + \frac{\alpha_n}{(\omega_n - k)} \sin((\omega_n - k)\tau_i) \right);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} \approx \frac{S_4 - S_1}{k}, \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0^2} \approx \frac{S_4 - 2S_1 + S_5}{k^2}.$$

6. Для модели $\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - \left(e^{-an\pi} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right);$$

$$S_1 = e^{-an\pi} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$S_2 = e^{-(an+h)\pi} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{(\alpha_n + h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$S_3 = e^{-(an-h)\pi} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{(\alpha_n - h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \approx \frac{S_2 - S_1}{h}, \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{S_2 - 2S_1 + S_3}{h^2};$$

$$S_4 = e^{-\alpha n \pi} \left(\cos((\omega_n + k)\tau_i) - \frac{\alpha_n}{(\omega_n + k)} \sin((\omega_n + k)\tau_i) \right);$$

$$S_5 = e^{-\alpha n \pi} \left(\cos((\omega_n - k)\tau_i) - \frac{\alpha_n}{(\omega_n - k)} \sin((\omega_n - k)\tau_i) \right);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} \approx \frac{S_4 - S_1}{k}, \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0^2} \approx \frac{S_4 - 2S_1 + S_5}{k^2}.$$

Начальные значения параметров модели и условия окончания вычислений определяются по формулам (3.24) и (3.25).

На рис. 3.17 – 3.19 приведены результаты аппроксимации корреляционных функций типовыми моделями с использованием конечно-разностного метода Ньютона. Для сравнения приведены результаты с использованием метода Ньютона с аналитическим взятием первой и второй производных. Объём выборки во всех рассматриваемых случаях равен $M=1000$.

Из анализа результатов видно, что погрешности аппроксимации практически равны. Однако конечно-разностный метод проще реализовать.

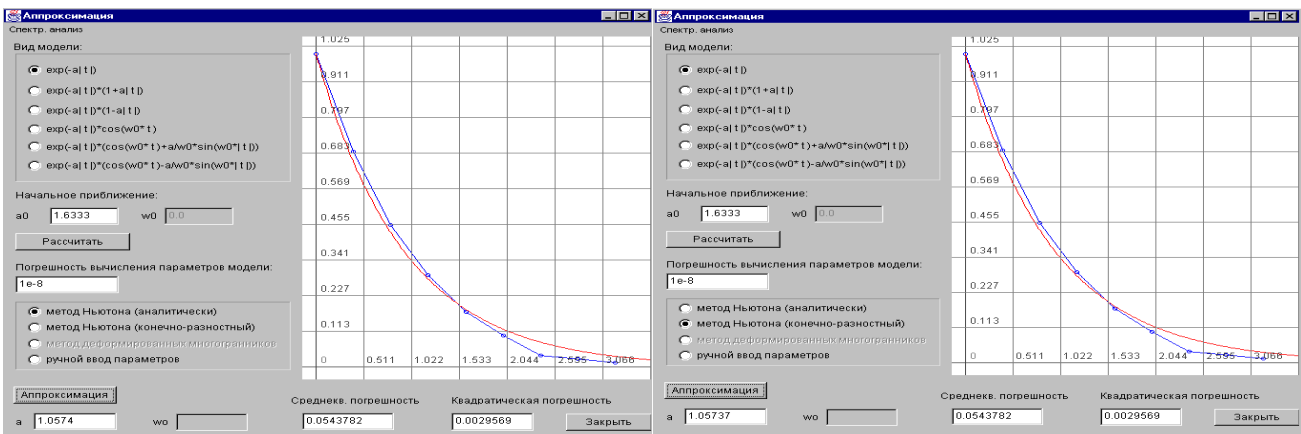


Рисунок 3.13 - Результаты аппроксимации моделью $\rho_{a1}(\tau)e^{-\alpha|\tau|}$

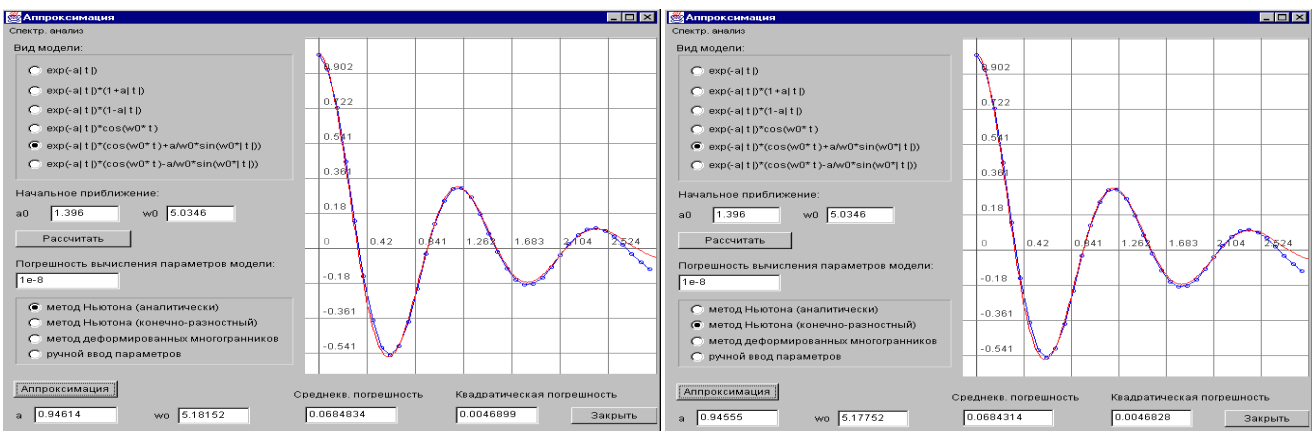


Рисунок 3.14 - Результаты аппроксимации моделью $\rho_{a6}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|)$

3.3.3. Аппроксимация корреляционных функций функциями заданного вида методом деформированного многогранника

При аппроксимации КФ функциями заданного вида можно также использовать метод деформированного многогранника, который является одним из прямых методов многомерного поиска и выделяется высокой эффективностью и помехозащищенностью [175].

Метод деформируемого многогранника Нелдера и Мида легко адаптируется к особенностям оптимизируемой функции, не «замечает» отдельные шероховатости функции (вызванные ошибками вычисления), а скорость сходимости алгоритма не слишком сильно зависит от регулярности целевой функции. Очень часто этот метод оптимизации конкурирует с такими мощными методами оптимизации, как метод Ньютона.

Метод деформируемого многогранника является модификацией симплексного метода. Симплексом называют регулярный многогранник в n -мерном евклидовом пространстве. Для случая 2-х переменных симплекс представляет собой равносторонний треугольник; 3-х переменных - тетраэдр и т.д. Для n -мерного пространства симплекс всегда имеет $n+1$ вершину.

Координаты вершин регулярного симплекса можно определить с помощью матрицы размером $n \times (n+1)$:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ 0 & r_2 & r_1 & \dots & r_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & r_2 & r_2 & \dots & r_1 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= \left[s / (n\sqrt{2}) \right] \left(\sqrt{n+1} + n - 1 \right), \\ r_2 &= \left[s / (n\sqrt{2}) \right] \left(\sqrt{n+1} - 1 \right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

s - параметр, отождествляемый с расстоянием между двумя вершинами.

Элемент r_{ij} матрицы R равен i -ой координате j -ой вершины симплекса.

Поиск минимума функции симплексным методом ведётся следующим образом:

1. В каждой вершине симплекса вычисляется значение функции $y_i = f(x_i)$.
2. Определяется вершина с наибольшим (наихудшим) значением $f(x)$.
3. Через эту вершину и центральную точку симплекса проводится прямая, на которой на некотором удалении от центра C устанавливается новая вершина (см. рис. 3.20).

4. Вершина с наибольшим значением $F(x)$ удаляется. Симплекс по существу «переворачивается» через грань, противоположную наихудшей вершине.

5. Далее процесс повторяется, начиная с п. 1.

Важной особенностью симплексного метода поиска является то, что для реализации каждого последующего шага итерации необходимо вычислить функцию $f(x)$ лишь в одной новой точке симплекса. Сама же оптимизация этим алгоритмом ассоциируется с процессом «кантования» симплекса вниз по поверхности функции $f(x)$ в направлении её минимума.

Регулярный метод симплексного поиска склонен к заикливанию, поэтому, Нелдер и Мид, нарушив регулярность, устранили указанный недостаток.

Обозначим X_k^A - вершину многогранника (первоначального симплекса), которая даёт максимальное значение $f(x)$ на k -ом шаге, а X_k^B - минимальную оценку функции $f(x)$. Определим вектор координат X_k^C центра многогранника по следующей формуле:

$$x_i^C = \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{n+1} x_i^j \right) - x_i^A \right], \quad (3.31)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

где i - номер координаты, j - номер вершины симплекса, k - номер шага итерации.

В методе деформируемого многогранника над многогранником выполняются операции **отражения, растяжения, сжатия и редукции**.

1. **Отражение** есть проецирование X_k^A через центр X_k^C в соответствии с соотношением:

$$X_k^0 = X_k^C + a(X_k^C - X_k^A), \quad (3.32)$$

где $a > 0$ - коэффициент отражения, X_k^0 - вектор координат новой (отражённой вершины).

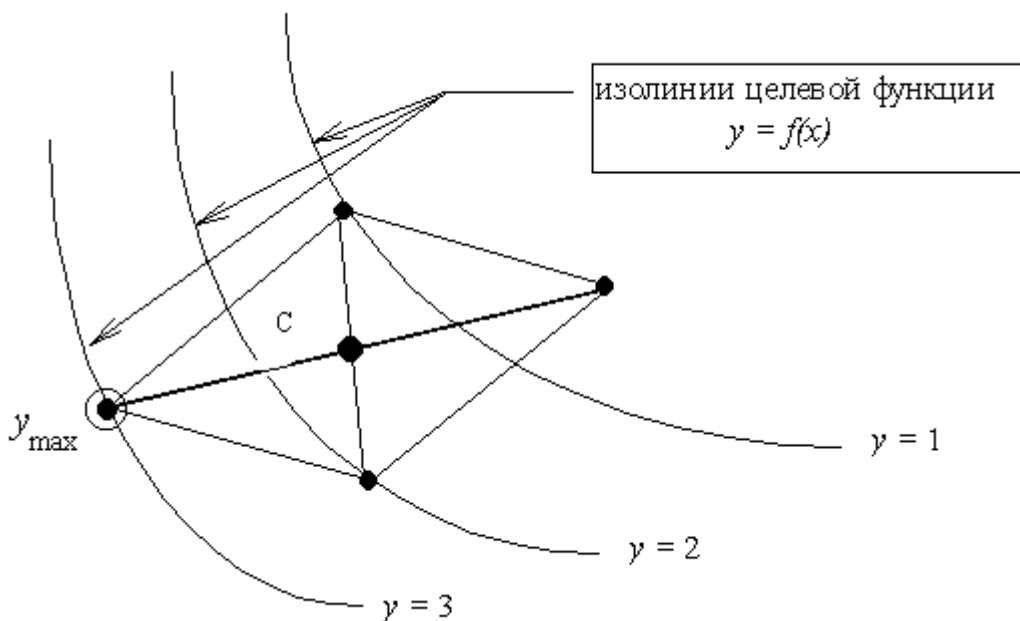


Рисунок 3.15 - Геометрическая интерпретация симплексного поиска

2. **Растяжение** применяется в том случае, когда отражение оказалось удачным, то есть значение функции в новой точке меньше, чем в наилучшей из вершин многогранника:

$$f(X_k^0) \leq f(X_k^B),$$

при этом вектор $X_k^0 - X_k^C$ растягивается, и получается новая точка

$$X_k^P = X_k^C + \gamma(X_k^0 - X_k^C), \quad (3.33)$$

где $\gamma > 1$ - коэффициент растяжения.

3. **Сжатие** выполняется, когда в результате отражения значение функции в

точке X_k^0 оказалось больше, чем во всех вершинах многогранника, кроме вершины X_k^A , то есть:

$$\begin{aligned} f(X_k^0) &< f(X_k^A); \\ f(X_k^0) &> f(X_k^j), j \neq A, \end{aligned}$$

тогда вектор $X_k^A - X_k^C$ сжимается так, что

$$X_k^{C_{\text{ж}}} = X_k^C + \beta(X_k^A - X_k^C), \quad (3.34)$$

где $0 < \beta < 1$ - коэффициент сжатия.

3. **Редукция**, то есть сжатие симплекса в два раза по отношению к вершине с наименьшим значением $f(x)$: $f(x_k^B)$.

Редукция применяется, если $f(X_k^0) > f(X_k^A)$ и выполняется по формуле:

$$X_k^j = X_k^B + 0,5(X_k^j - X_k^B), \text{ при } j=1, 2, \dots, n+1.$$

На рис. 3.16 схематично показаны перечисленные операции.

Метод деформируемого многогранника прекращает свою работу, если выполняются условия:

$$\left[\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} [f(x_k^j) - f(x_k^C)]^2 \right]^{1/2} \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ - малое число, определяющее ε -окрестность поиска экстремума.

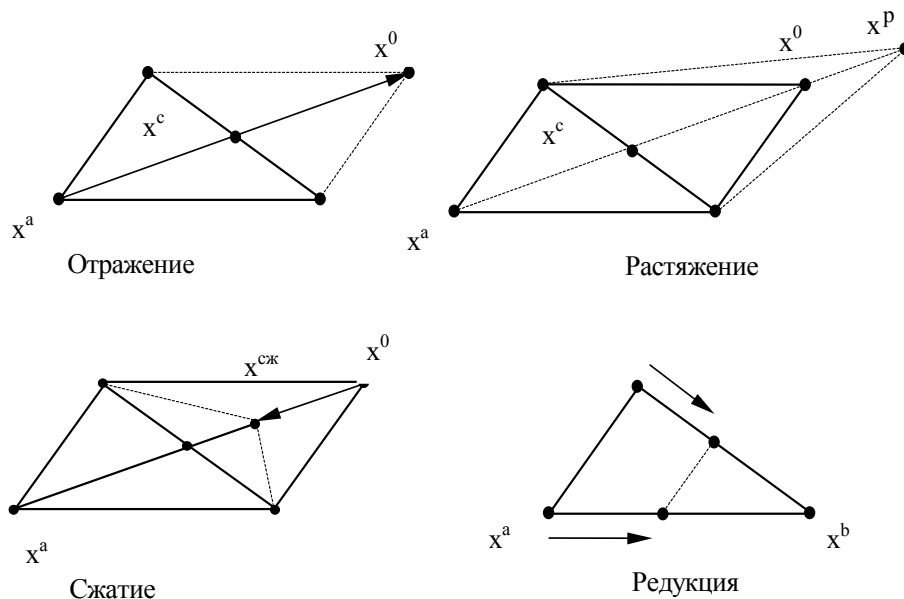


Рисунок 3.16 - Основные операции метода деформированного многогранника

Рассмотрим применение метода деформированного многогранника к решению задач аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида, параметры которой удовлетворяют минимуму квадратической погрешности аппроксимации.

При использовании метода деформированного многогранника задача поиска параметров, удовлетворяющих минимуму квадратичной погрешности, сводится к отысканию экстремума (минимума) следующей целевой функции:

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{i=0}^{J_{max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \right]^2 \rightarrow \min, \quad (3.35)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – независимые переменные (входные, варьируемые параметры).

Рассмотрим примеры целевых функций, используемых для решения задачи аппроксимации КФ типовыми однопараметрическими моделями [111].

$$1. \rho_{a1}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}.$$

Целевая функция:

$$f(\alpha_n) = \sum_{i=0}^{J_{max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \right]^2 \rightarrow \min.$$

$$2. \rho_{a2}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|).$$

Целевая функция:

$$f(\alpha_n) = \sum_{i=0}^{J_{max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 + \alpha_n \tau_i) \right]^2 \rightarrow \min.$$

$$3. \rho_{a3}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|).$$

Целевая функция:

$$f(\alpha_n) = \sum_{i=0}^{J_{max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 - \alpha_n \tau_i) \right]^2 \rightarrow \min.$$

$$3. \rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau.$$

Целевая функция:

$$f(\alpha_n, \omega_n) = \sum_{i=0}^{J_{max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \cos \omega_n \tau_i \right]^2 \rightarrow \min.$$

$$5. \rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Целевая функция:

$$f(\alpha_n, \omega_n) = \sum_{i=0}^{J_{max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right]^2 \rightarrow \min.$$

$$6. \rho_{a6}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Целевая функция:

$$f(\alpha_n, \omega_n) = \sum_{i=0}^{J_{max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right]^2 \rightarrow \min.$$

На рис. 3.17–3.18 приведены результаты аппроксимации колебательных корреляционных функций двухпараметрическими моделями методом деформированного многогранника. Объём выборки равен $M=1000$.

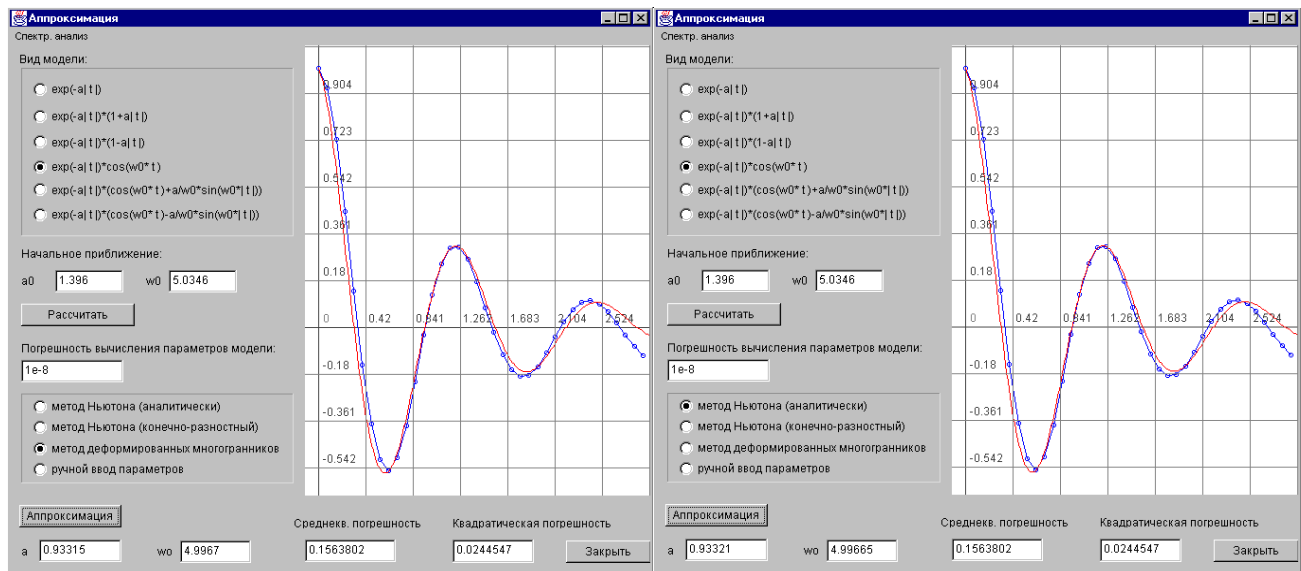


Рисунок 3.17 - Результаты аппроксимации $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$,
 $\alpha = 0,9332$, $\omega_0 = 4,9967$, $\delta = 0,1564$

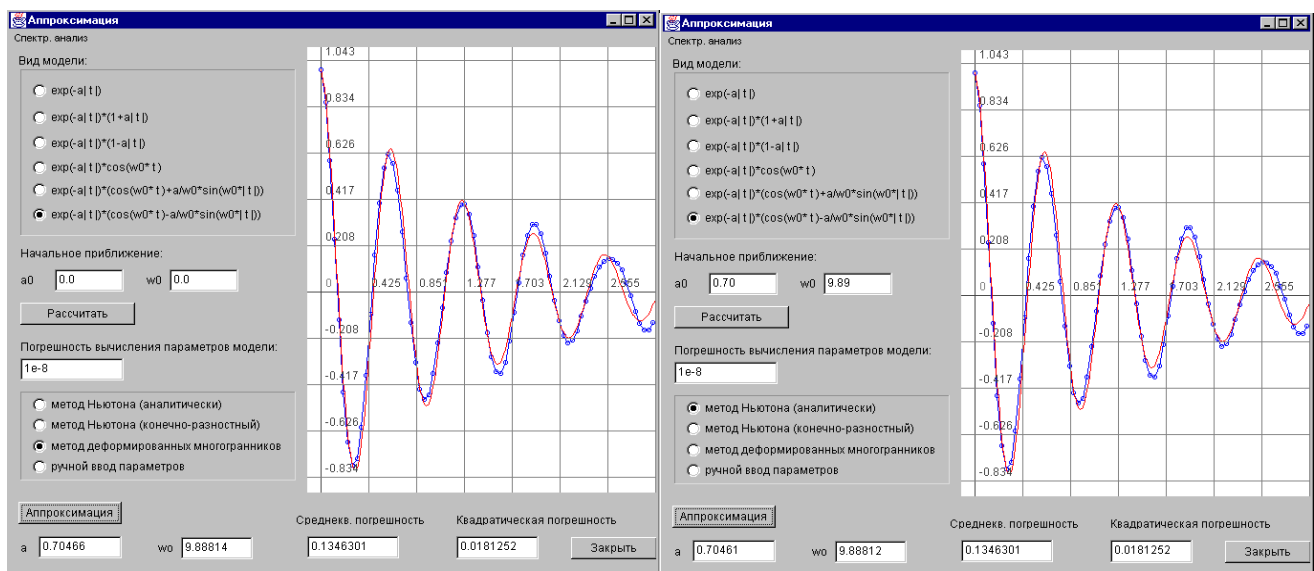


Рисунок 3.18 - Результаты аппроксимации $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau)$,
 $\alpha = 0,7047$, $\omega_0 = 9,8881$, $\delta = 0,1346$

На правых рисунках приведены результаты аппроксимации корреляционных функций методом Ньютона с аналитическим определением производных, которые практически не отличаются от результатов, полученных методом деформированного многогранника. Однако следует подчеркнуть (см. рис. 3.18), что метод деформируемых многогранников менее критичен к выбору начального приближения.

3.4. Аппроксимация законов распределения

3.4.1. Основные понятия и определения

При обработке статистического материала часто приходится решать вопрос о том, как подобрать для данного статистического ряда теоретическую кривую распределения, выражающую лишь существенные черты статистического материала. Такая задача, относящаяся к классу аппроксимативных задач, в данном случае называется задачей выравнивания (сглаживания) статистических рядов.

Последовательность этапов решения задачи сглаживания представлена на рис. 3.19.

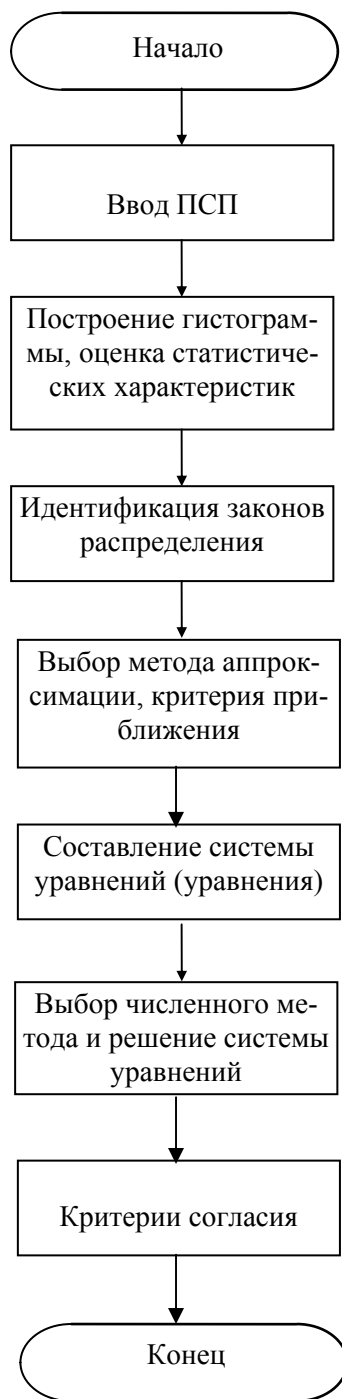


Рисунок 3.19 - Блок-схема сглаживания

После ввода исходных данных (ПСП) первым шагом решения этой задачи является построение гистограммы наблюдаемого статистического ряда $\{x_i\}_{i=1}^N$ (см. подраздел 2.4).

Далее на интервале $[x_{\min}, x_{\max}]$ построим линейную сплайн-модель гистограммы [144]. Для этого введем массив пар $\{x_j, y_j\}, j = \overline{1, M}$, где x_j – середина j -го интервала гистограммы, а $y_j = \hat{h}_j$ – соответственно высота j -го столбца. Значения сплайн-модели рассчитываются следующим образом:

$$f_{s,M}(x) = \begin{cases} y_1 + (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \cdot (x - x_1), & x < x_1, \\ y_j + (y_{j+1} - y_j)/(x_{j+1} - x_j) \cdot (x - x_j), & x_j < x < x_{j+1}, \\ y_{M-1} + (y_M - y_{M-1})/(x_M - x_{M-1}) \cdot (x - x_{M-1}), & x > x_M. \end{cases} \quad (3.36)$$

$f_{s,M}(x)$ – это линейный сплайн, построенный на M дифференциальных коридорах, который представляет собой модель аппроксимируемой плотности вероятности.

Очевидно, что внешний вид сплайн-модели сильно зависит от количества дифференциальных коридоров, причем утверждать однозначно, при каком именно значении M сплайн-модель наилучшим образом соответствует истинной плотности вероятности, невозможно. Поэтому зачастую может быть целесообразным применение механизма «усреднения» модели плотности вероятности по нескольким сплайн-моделям.

С учетом (3.36) усредненную модель плотности распределения вероятностей определим в виде

$$\bar{f}_{s,M}(x) = \frac{\sum_{m=M-1}^{M+1} f_{s,m}(x)}{2l+1}. \quad (3.37)$$

В данном случае в точке x суммируются значения $2l+1$ сплайн-моделей, построенных на одних и тех же исходных выборках для различного числа коридоров M (от $M-l$ до $M+l$), затем сумма делится на количество просуммированных значений $2l+1$, тем самым определяется среднее значение для указанного ряда сплайнов.

Построив гистограмму, можно приступить к задаче идентификации, заключающейся в подборе кривой распределения $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ с неизвестными параметрами $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, с той или иной точки зрения наилучшим образом описывающей данное статистическое распределение.

Решение этой задачи возможно различными методами, например: по совпадению моментов [51], с использованием фазовых портретов [111] и т. д. (см. подраздел 3.3.1).

После выбора аналитического выражения с неизвестными параметрами, приступают к решению задачи аппроксимации в соответствии с выбранным критерием приближения.

Классификация методов аппроксимации законов распределения, предложенная на основании общей классификации методов аппроксимации (см. рис. 3.1) и анализа литературных источников, представлена на рис. 3.20.

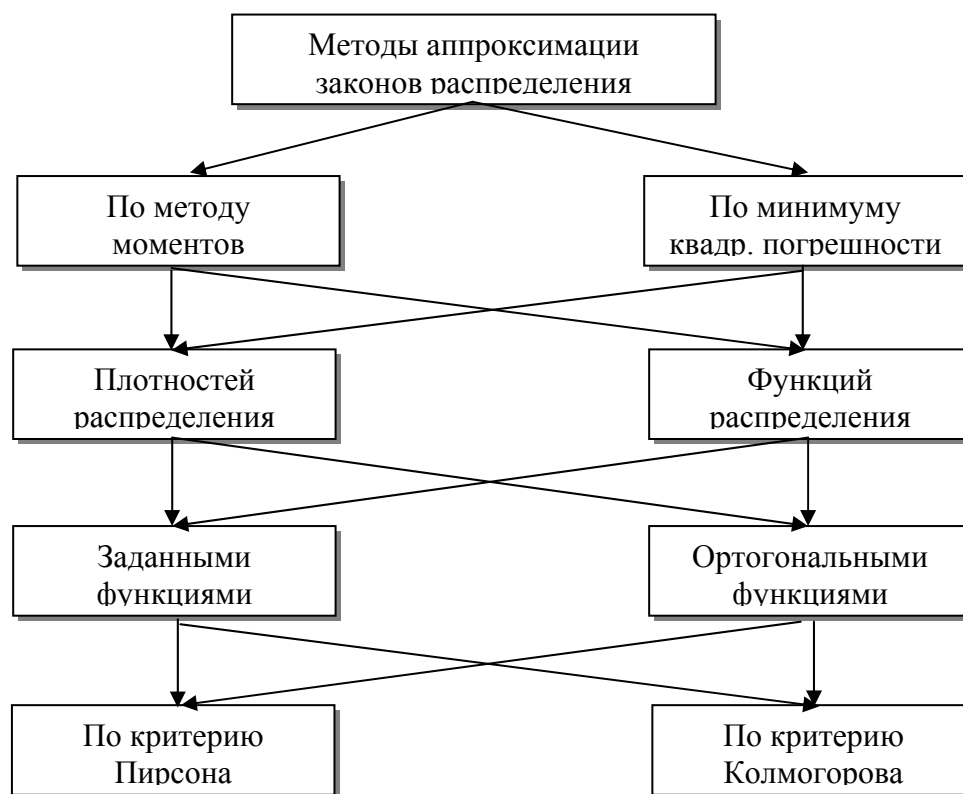


Рисунок 3.20 - Классификация методов аппроксимации законов распределения

Следует при этом иметь в виду, что, независимо от метода, аналитические функции $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ или $F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$, с помощью которых происходит аппроксимация статистического распределения, должна удовлетворять основным свойствам законов распределения:

$$\begin{cases} f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \geq 0; \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) dx = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \leq 1; \\ F'_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) > 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Вопросы аппроксимации законов распределения различными методами рассмотрены в подразделах 3.4.2 - 3.4.4.

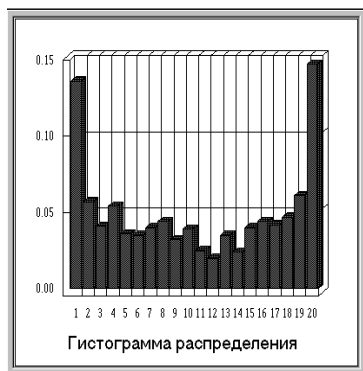
Заключительным шагом решения задачи сглаживания статистических рядов является проверка качества аппроксимации с использованием критериев согласия (см. подраздел 2.4). Если получено удовлетворительное решение задачи, то процесс сглаживания завершен. Если нет - необходимо повторить все этапы, начиная с идентификации.

Выбор подходящего аналитического выражения с неизвестными параметрами, подлежащими определению в соответствии с выбранным критерием приближения, является самым сложным этапом процедуры сглаживания. Это объясняется тем, что задача плохо формализована, всегда существует опасность, что рассмотрены не все возможные варианты законов распределения, решение необходимо принимать по ограниченному набору входных данных и. т. д.

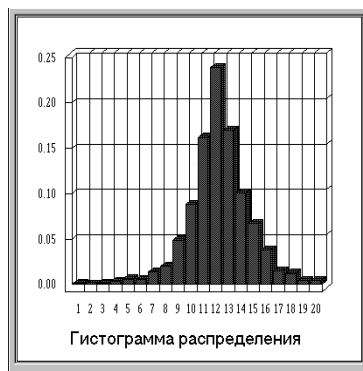
На практике задачу идентификации решают на основе анализа:

1. гистограммы и её соответствия кривой теоретического распределения;
2. числовых характеристик и их соответствия значениям теоретических числовых характеристик;
3. фазовых портретов (структурных функций).

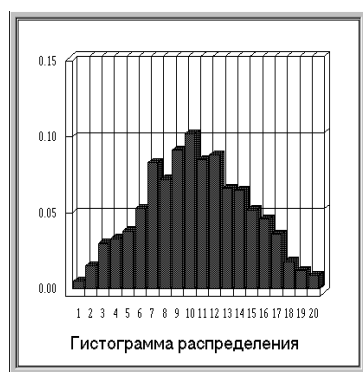
При большом числе экспериментальных данных в ряде случаев по виду гистограммы можно высказать предположение о виде закона распределения. На рис. 3.21 в качестве примера приведены гистограммы случайных процессов ($N=1000$), которые с большой долей уверенности можно отнести к тому или иному закону распределения.



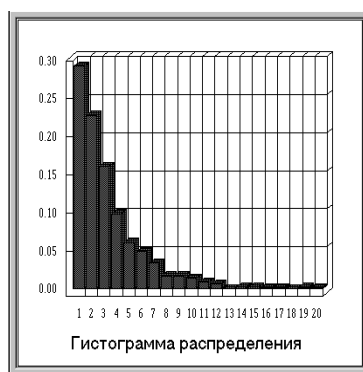
Закон арксинуса



Лапласа



Закон Симпсона



Экспоненциальный

Рисунок 3.21 - Гистограммы типовых распределений

Значения числовых характеристик для типовых законов распределения приведены в приложении 1.

Выберите закон распределения :
Арксинуса

Параметры закона распределения :
 а :

Начальные моменты :

Статистические :	Теоретические :
$\alpha_1=0,07412$	$\alpha_1=0,000$
$\alpha_2=2,05834$	
$\alpha_3=0,16388$	
$\alpha_4=6,17581$	

Центральные моменты :

Статистические :	Теоретические :
$\mu_2=2,05284$	$\mu_2=2,000$
$\mu_3=-0,29300$	$\mu_3=0,000$
$\mu_4=6,19497$	$\mu_4=6,000$

Прочие характеристики :

Статистические :	Теоретические :
$Ka=-0,09962$	$Ka=0,000$
$Ke=-1,52996$	$Ke=-1,500$
$Kф=0,90690$	
$\eta=1,39589$	
$\chi=19,33030$	
$\sigma=1,43277$	

На рис. 3.22 в качестве примера приведены результаты определения числовых характеристик случайного процесса, сгенерированных на ЭВМ ($N=1000$).

Сравнение теоретических и статистических числовых характеристик позволяет предположить, что случайный процесс распределен по закону арксинуса.

Однако более наглядным способом идентификации является идентификация, основанная на анализе фазовых портретов законов распределения. Под фазовым портретом будем понимать графическую зависимость, построенную в координатах: $f_x(x)$ и $f'_x(x)$. На рисунке 3.23 приведены фазовые портреты типовых законов распределения.

Рисунок 3.22 - Сравнительный анализ числовых характеристик случайной величины

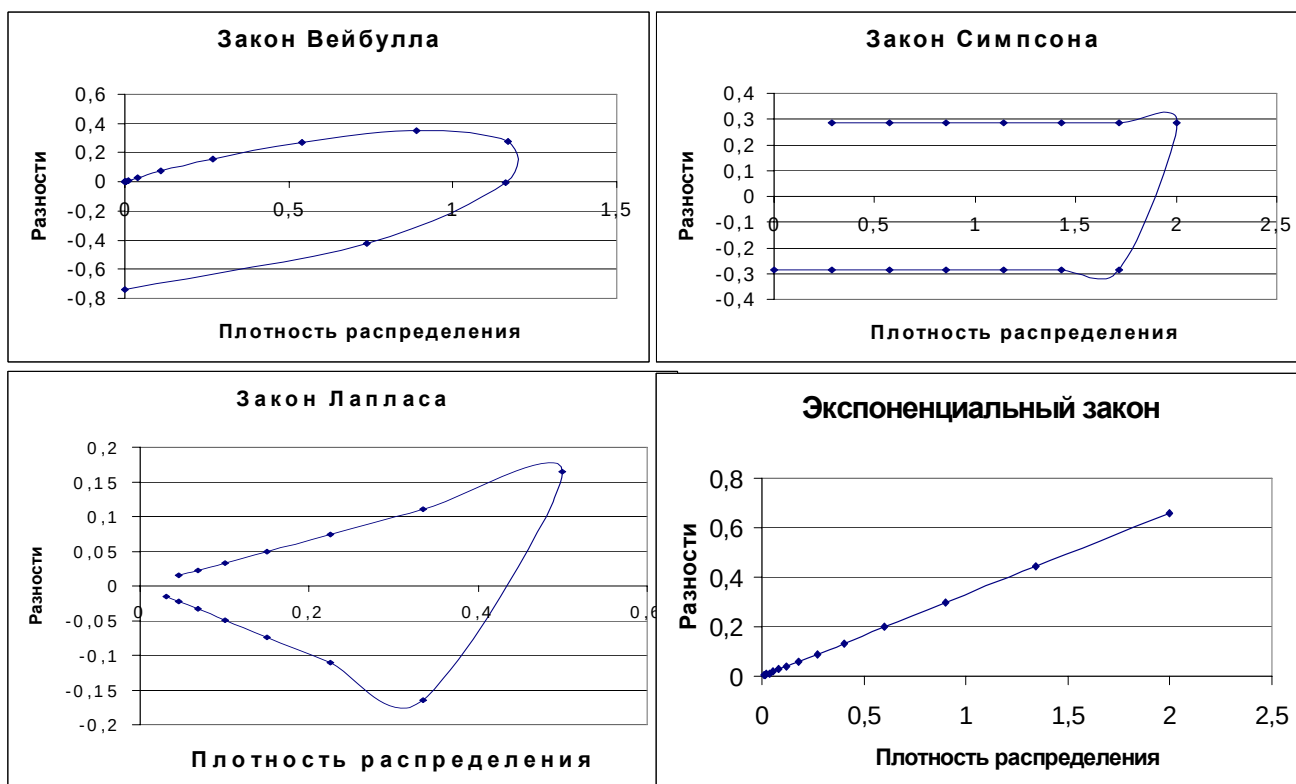
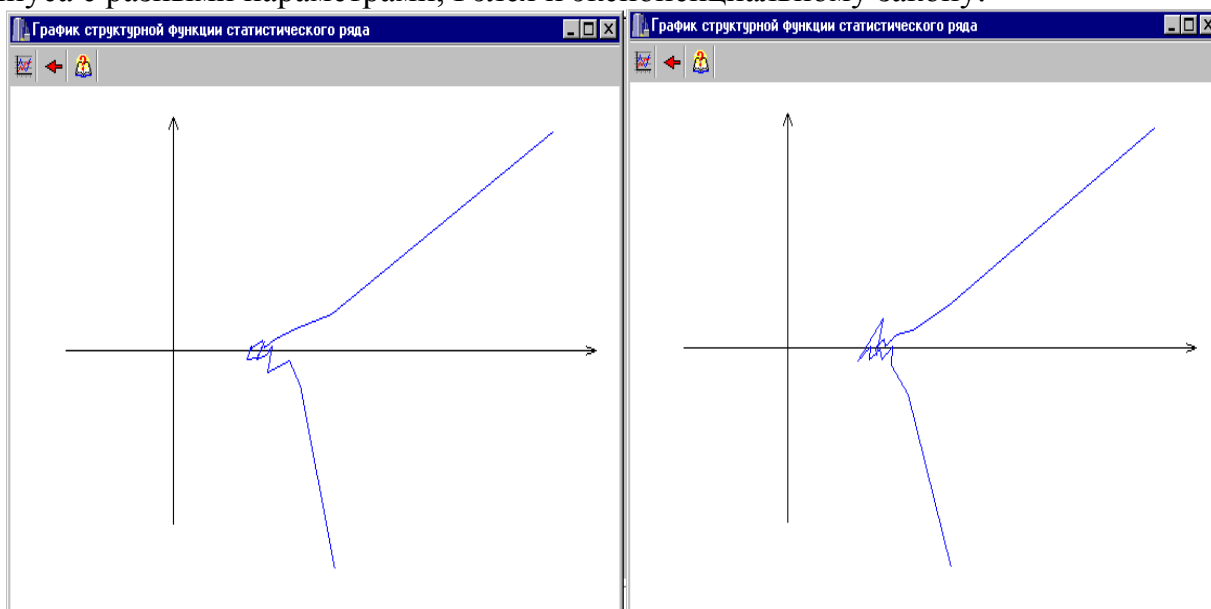


Рисунок 3.23 - Фазовые портреты законов распределения

Следует отметить, что каждому закону распределения соответствует свой, уникальный фазовый портрет, не зависящий от значений параметров закона распределения. Заметим, что при расчете координат фазового портрета вместо точного значения

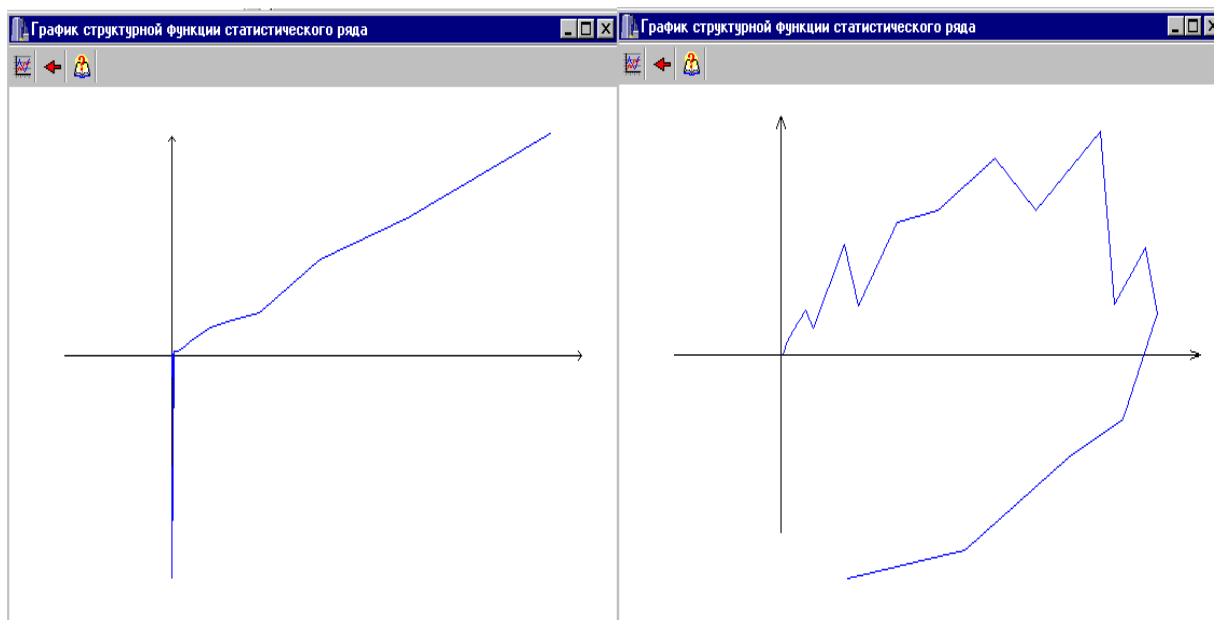
производной плотности распределения вероятностей определялось приращение плотности на заданном интервале.

В силу случайного характера исследуемых случайных величин фазовые портреты, построенные по экспериментальным данным, безусловно, будут отличаться от теоретических. Но эти отличия, тем не менее, позволяют идентифицировать случайные процессы по типу законов распределения. Ниже приведены фазовые портреты для случайного процесса, сгенерированного на ЭВМ по законам распределения арксинуса с разными параметрами, Рэлея и экспоненциальному закону.



а) закон арксинуса – $a=5$

б) закон арксинуса – $a=8$



в) экспоненциальное распределение - $\lambda=1$

г) распределение Рэлея - $\sigma=1$

Рисунок 3.24 - Фазовые портреты

Построив фазовый портрет по параметрам гистограммы, необходимо сравнить его с теоретическими фазовыми портретами и выбрать подходящий, т.е. выбрать соответствующий закон распределения. После этого необходимо перейти к определению параметров выбранного аналитического выражения.

3.4.2. Метод моментов

Один из методов, применяемый для решения задачи сглаживания статистических рядов, называется методом моментов [51]. Согласно этому методу, параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ выбираются таким образом, чтобы несколько важнейших числовых характеристик (моментов) теоретического распределения были равны статистическим характеристикам. При составлении уравнений для определения неизвестных параметров, как правило, выбирают моменты низших порядков. Общими рекомендациями являются здравый смысл и простота решения полученной системы уравнений. Рассмотрим несколько примеров.

Определим параметры аналитического выражения плотности распределения вероятностей генератора «белого шума» - стандартной программы ПЭВМ. Теоретически закон распределения должен быть равномерным $f_x(x) = \frac{1}{b-a}$, $a \leq x \leq b$ с параметрами $a = 0$ и $b = 1$.

Гистограмма приведена на рис. 2.1.

Уравнения для определения двух неизвестных параметров распределения могут быть составлены различными способами. Потребуем, например, чтобы у статистического и теоретического распределений совпадали математическое ожидание и дисперсия:

$$\begin{cases} \bar{m}_x = \frac{a+b}{2}; \\ \bar{D}_x = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{cases} \quad (3.39)$$

Отметим, что оценка начальных моментов статистического ряда определяется выражением:

$$\bar{C}_k = \sum_{j=1}^M \bar{x}_j^k \bar{p}_j, \quad (3.40)$$

где $\bar{x}_j$ - среднее значение j -ого интервала,
а центральных -

$$\bar{C}_k = \sum_{s=0}^k C_k^s \bar{C}_{k-s} \bar{m}_x^s. \quad (3.41)$$

Эта система уравнений имеет аналитическое решение:

$$\begin{cases} a = \bar{m}_x - \sqrt{3} \bar{C}_x; \\ b = \bar{m}_x + \sqrt{3} \bar{C}_x. \end{cases} \quad (3.42)$$

Для данного статистического распределения

$$\begin{cases} \bar{m}_x = 0,49994; \\ \bar{D}_x = 0,082208; \\ \bar{C}_x = 0,286719. \end{cases}$$

Подставив найденные оценки в выражения (3.42), получим: $a=0,003327$, $b=0,996553$. Отсюда видно, что рассчитанные параметры закона распределения незначительно, но отличаются от заданного при генерировании. Следовательно, при проведении статистического моделирования целесообразно проверять качество программных генераторов и оценивать его реальные характеристики.

Применив критерий Пирсона, вычислим по формуле (2.39) значение $\chi^2 = 7,77$, что соответствует вероятности $P_D > 0,3$ (см. П.7). Таким образом, можно принять гипотезу о том, что данный статистический ряд соответствует равномерному распределению с найденными параметрами.

Преимуществом метода моментов является простота определения параметров распределения, недостатком - неоднозначность в выборе уравнений, которых может быть большое количество. Так, например, оценив $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$, при определении параметра распределения Релея σ возможно использование следующих уравнений (см. приложение П.1):

$$\sigma = \frac{\mathcal{A}_1}{1,25}; \quad \sigma = \sqrt{\frac{\mathcal{A}_2}{0,43}}; \quad \sigma = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{A}_3}{0,1775}}; \quad \sigma = \sqrt[4]{\frac{\mathcal{A}_4}{0,5978}}. \quad (3.43)$$

Результаты расчетов при определении параметра закона распределения Релея при различном числе дифференциальных коридоров M и различном объеме выборки приведены в таблице 3.3. При этом, с помощью ЭВМ генерировалась псевдослучайная последовательность, распределенная по закону Релея с параметром распределения $\sigma = 1$, а параметр распределения определялся в результате решения одного из уравнений (3.53) через соответствующие моменты.

Результаты экспериментальных исследований при определении параметра закона распределения Рэлея

Таблица 3.3

M	N	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_4$
10	300	0,9944	1,0585	1,0626	1,0502
	1000	1,0051	1,0320	1,0565	1,040
	5000	0,9947	0,9848	1,0040	0,9931
	10000	1,0086	1,0039	1,0000	1,0074
20	300	1,0209	1,0162	1,0692	1,0378
	1000	0,9989	1,0068	1,0130	0,9975
	5000	1,0086	1,0079	1,0201	1,0141
	10000	1,0072	1,0065	1,0220	1,0165

Анализ результатов показывает, что при составлении уравнений для определения параметров теоретического распределения по методу моментов необходимо выбирать моменты более низких параметров.

Приведем аналитические решения систем уравнений для типовых законов распределений (см. таблицу 1.3).

На рис. 3.25-3.26 представлены результаты эксперимента - гистограмма, полигон частот и плотность распределения вероятностей для закона Рэлея при $N=300$, $M=10$, $\sigma=1,00084$.

Системы уравнений для типовых законов распределений

Таблица 3.4

№	Название	Функции распределения	Системы уравнений
1	Арксинуса	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < -a) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a}, (-a < x < a) \\ 1, (a < x < \infty) \end{cases}$	$a = \sqrt{2} \sigma_x$
2	Лапласа	$\begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda(x-\mu)}, (-\infty < x < \mu) \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda(x-\mu)}, (\mu < x < \infty) \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_x} \\ \mu = m_x \end{cases}$
3	Симпсона	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < a) \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, \left(a < x < \frac{a+b}{2}\right) \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, \left(\frac{a+b}{2} < x < b\right) \\ 1, (b < x < \infty) \end{cases}$	$\begin{cases} a = m_x - \sqrt{6} \sigma_x \\ b = m_x + \sqrt{6} \sigma_x \end{cases}$
4	Sech ²	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} ax$	$a = \frac{\pi}{2\sqrt{3} \sigma_x}$
5	Рэлея	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0) \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\sigma = \frac{m_x}{1,25}$
6	Экспоненциальный	$\begin{cases} 0 < (-\infty < x < 0) \\ 1 - e^{-\alpha x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\alpha = \frac{1}{m_x}$

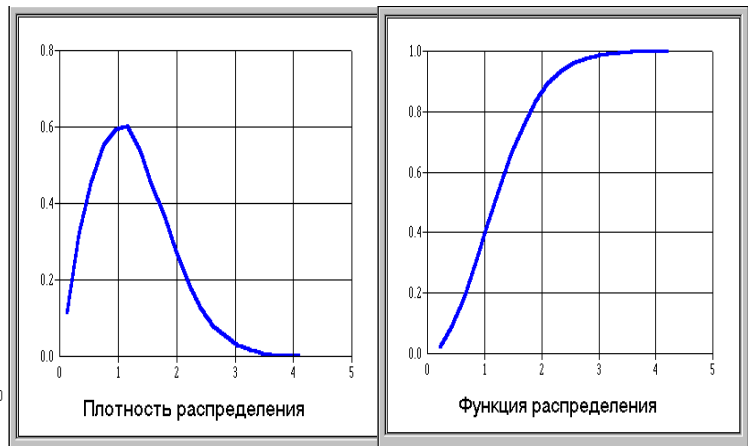
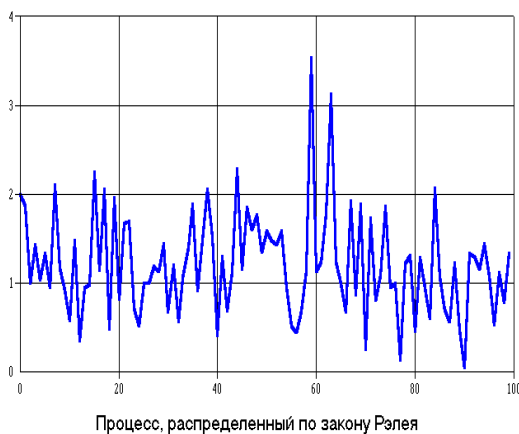


Рисунок 3.25 - Результаты экспериментальных исследований

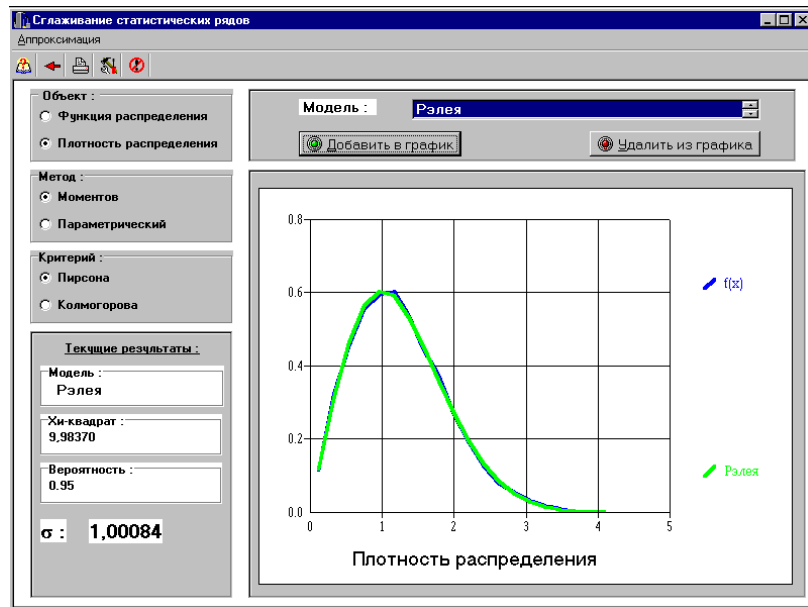


Рисунок 3.26 - Определение параметров закона Рэлея методом моментов

3.4.3. Аппроксимация плотностей распределения вероятностей параметрическими моделями

Другим способом решения задачи сглаживания статистических рядов является определение параметров аналитического выражения, удовлетворяющих минимуму квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \sum_{j=1}^M [\hat{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots)]^2 = \min, \quad (3.44)$$

где M - число дифференциальных коридоров;

$\hat{f}_x(\bar{x}_j) = \hat{f}_j / \Delta_j$ - значение плотности распределения вероятностей в середине j -го дифференциального коридора $\bar{x}_j$;

$f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots)$ - аналитическое выражение с неизвестными параметрами.

Условиями минимума погрешности Δ является следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M [\hat{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots)] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_1} = 0; \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M [\hat{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots)] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_2} = 0; \\ \dots \end{cases} \quad (3.45)$$

Сложность этой системы зависит от вида аналитического выражения и числа неизвестных параметров, подлежащих определению. Как правило, решение этой системы возможно лишь приближенными методами.

Так, например, при однопараметрической аппроксимации с использованием метода Ньютона [75], неизвестный параметр определяется в результате решения следующего уравнения:

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{\sum_{j=1}^M [\hat{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_n)] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta)}{\partial \beta}}{\sum_{j=1}^M \left\{ [\hat{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_n)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta)}{\partial \beta^2} - \left[\frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta)}{\partial \beta} \right]^2 \right\}_{\beta=\beta_n}}. \quad (3.46)$$

В качестве начального приближения можно выбрать значение параметра, определенное по методу моментов.

Алгоритм завершает свою работу, когда выполняется следующее условие:

$$|\beta_{n+1} - \beta_n| \leq \varepsilon, \quad (3.47)$$

где ε - погрешность вычисления параметра, задаваемая исследователем.

На рис. 3.27 приведен пример расчета по методу Ньютона параметра аппроксимации плотности распределения вероятностей закона арксинуса

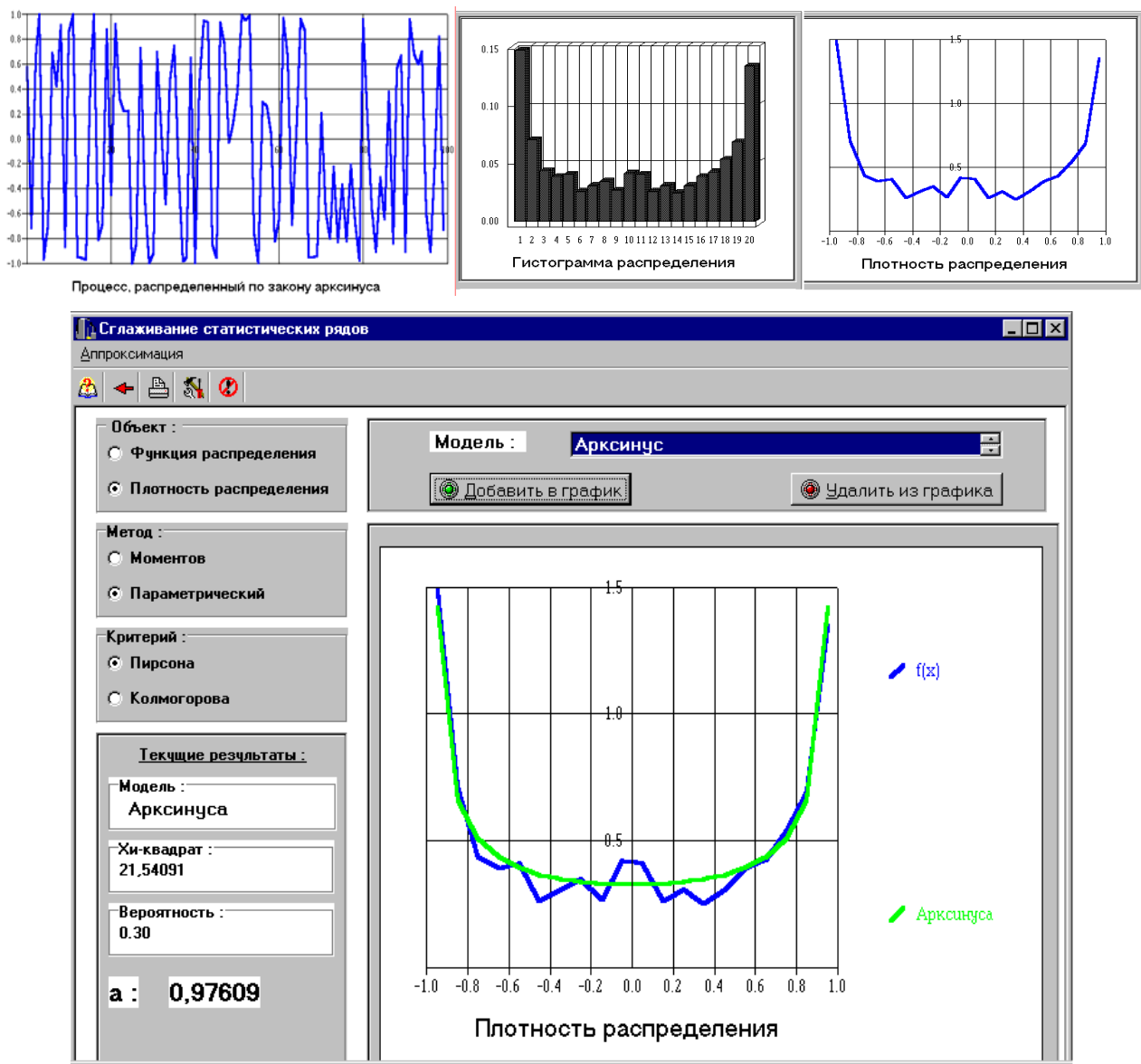


Рисунок 3.27 - Результаты определения параметров закона распределения арксинуса

Для нахождения параметров двухпараметрического закона распределения необходимо решить систему уравнений (3.45) для двумерного случая:

$$\begin{cases} f_1 = \sum_{j=1}^M [\mathcal{E}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} = 0; \\ f_2 = \sum_{j=1}^M [\mathcal{E}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} = 0; \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases} \quad (3.48)$$

Решить эту систему можно только приближенными методами, например, методом Ньютона. Воспользовавшись формулой для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными по методу Ньютона, получим:

$$\beta_{1,n+1} = \beta_{1,n} - \frac{1}{\Delta'} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} f_1(\beta_{1,n}, \beta_{2,n}) - \frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} f_2(\beta_{1,n}, \beta_{2,n}) \right), \quad (3.49)$$

$$\beta_{2,n+1} = \beta_{2,n} - \frac{1}{\Delta'} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} f_2(\beta_{1,n}, \beta_{2,n}) - \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} f_1(\beta_{1,n}, \beta_{2,n}) \right), \quad (3.50)$$

где

$$\Delta' = \frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} \frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} - \frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1}.$$

Для вычислений необходимо знать значения частных производных по неизвестным параметрам функций f_1 и f_2 . Их выражения приведены в формулах (3.51) - (3.54)

$$\frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M [\mathcal{E}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1^2} - \left[\frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \right]^2, \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M [\mathcal{E}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2^2} - \left[\frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \right]^2, \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} &= \sum_{j=1}^M [\mathcal{E}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} - \\ &- \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} &= \sum_{j=1}^M [\mathcal{E}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2 \partial \beta_1} - \\ &- \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Приведем пример расчета параметров аппроксимативной модели для закона распределения Симпсона.

Плотность распределения закона Симпсона:

$$f_a(\bar{x}_j, a, b) = \begin{cases} 0, (-\infty < \bar{x}_j < a); \\ \frac{4(\bar{x}_j - a)}{(b - a)^2}, \left(a < \bar{x}_j < \frac{a+b}{2}\right); \\ \frac{4(b - \bar{x}_j)}{(b - a)^2}, \left(\frac{a+b}{2} < \bar{x}_j < b\right); \\ 0, (b < \bar{x}_j < \infty). \end{cases} \quad (3.55)$$

В качестве примера на рис. 3.28 приведены результаты определения параметров распределения Симпсона.

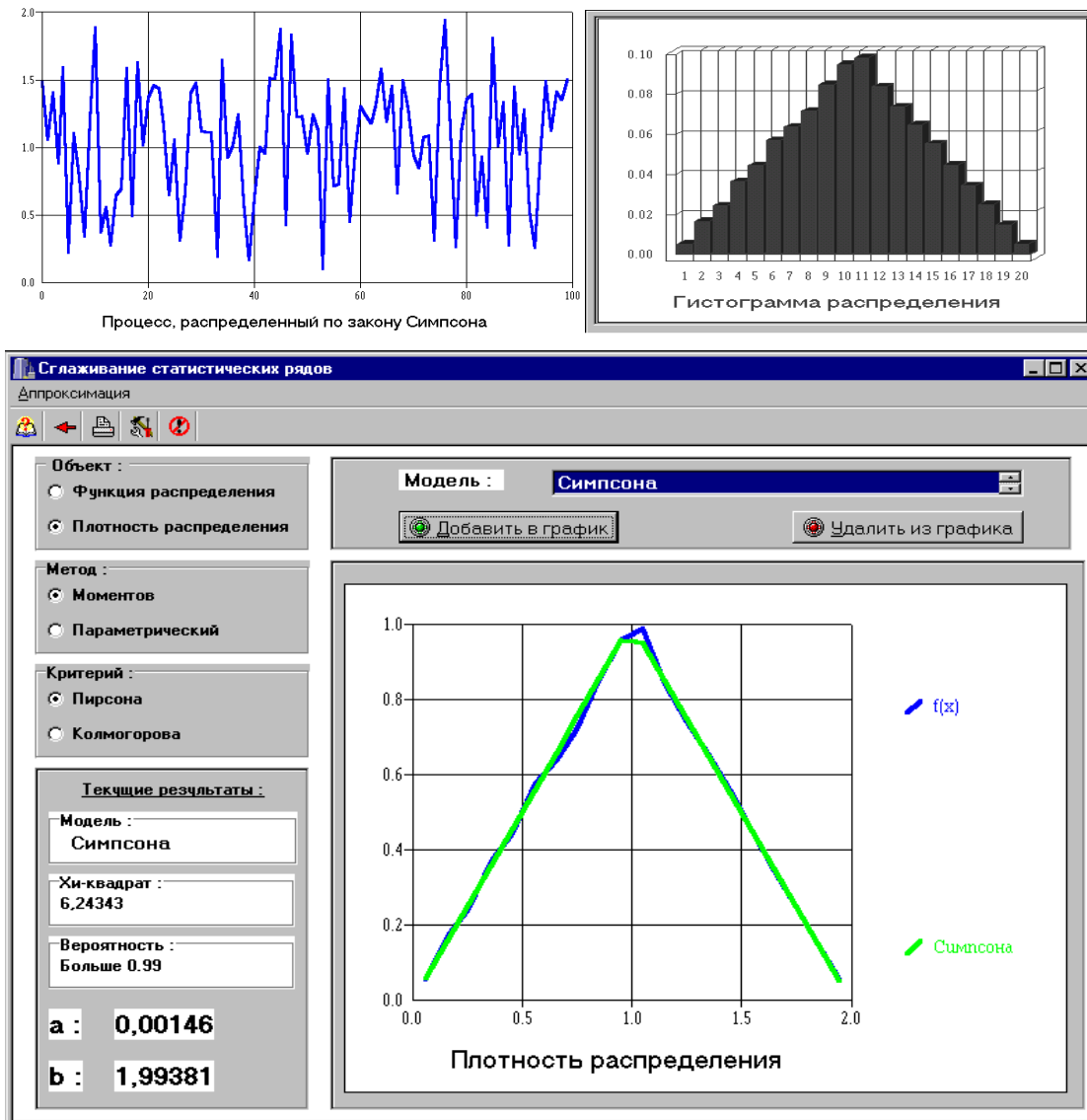


Рисунок 3.28 - Результаты определения параметров закона распределения Симпсона ($N=500$)

Из результатов раздела видно, что метод аппроксимации плотностей распределения вероятностей параметрическими моделями значительно сложнее метода моментов.

3.4.4. Аппроксимация функций распределения вероятностей

При аппроксимации плотностей распределения вероятностей в качестве аргумента используется середина дифференциального коридора, что, в свою очередь, вносит дополнительные погрешности при анализе асимметричных законов распределения. От этого недостатка свободна аппроксимация функций распределения вероятностей.

Задача аппроксимации статистического ряда функциями распределения вероятностей ставится аналогично задаче аппроксимации плотностей распределения вероятностей:

$$\Delta = \sum_{j=1}^M \left[\hat{F}(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots) \right]^2 = \min, \quad (3.56)$$

где M - число дифференциальных коридоров;

$$\hat{F}_x(x_j) = \sum_{s=1}^j \hat{F}_s - \text{значение функции распределения вероятностей в конце } j\text{-го}$$

дифференциального коридора x_j ;

$F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)$ - аналитическое выражение с неизвестными параметрами $\beta_1, \beta_2, \dots$

Условиями минимума погрешности Δ является следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M \left[\hat{F}(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots) \right] \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_1} = 0 \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M \left[\hat{F}(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots) \right] \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_2} = 0. \\ \dots \end{cases} \quad (3.57)$$

При однопараметрической аппроксимации с использованием метода Ньютона, неизвестный параметр определяется в результате решения следующего уравнения:

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{\sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_n)] \frac{\partial F_a(x_j, \beta)}{\partial \beta}}{\sum_{j=1}^M \left\{ [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_n)] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta)}{\partial \beta^2} - \left[\frac{\partial F_a(x_j, \beta)}{\partial \beta} \right]^2 \right\}_{\beta=\beta_n}}, \quad (3.58)$$

и дальше все расчеты производятся аналогично случаю с плотностями вероятностей (см. подраздел 3.4.3).

Для нахождения параметров двухпараметрического закона распределения необходимо решить уравнение (3.56) для двумерного случая.

Составим систему из двух уравнений для нахождения неизвестных параметров аппроксимации. Эту систему можно получить, продифференцировав выражение (3.56) по неизвестным параметрам.

$$\left\{ \begin{aligned} F_1 &= \sum_{j=1}^M \left[\hat{F}(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots) \right] \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_1} = 0; \\ F_2 &= \sum_{j=1}^M \left[\hat{F}(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots) \right] \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_2} = 0; \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned} \right. \quad (3.59)$$

Для решения системы (3.69) воспользуемся приближенным методом Ньютона. Способ нахождения неизвестных параметров аналогичен случаю с плотностями распределения вероятностей (см. подраздел 3.4.3) – по формулам (3.59) и (3.60).

Для вычислений необходимо определить частные производные по неизвестным параметрам β_1, β_2 функций F_1 и F_2 :

$$\frac{\partial F_1}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M \left[\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2) \right] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1^2} - \left[\frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \right]^2; \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M \left[\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2) \right] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2^2} - \left[\frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \right]^2; \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \beta_2} &= \sum_{j=1}^M \left[\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2) \right] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} - \\ &\quad - \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2}; \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial \beta_1} &= \sum_{j=1}^M \left[\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2) \right] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2 \partial \beta_1} - \\ &\quad - \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Значения неизвестных параметров вычисляются итерационно до достижения заданной точности. Ниже приведены результаты определения параметров функции распределения Симпсона.

$$F_x(x_j, a, b) = \begin{cases} 0, & (-\infty < x_j < a) \\ \frac{2(x_j - a)^2}{(b - a)^2}, & \left(a < x_j < \frac{a+b}{2} \right) \\ 1 - \frac{2(b - x_j)^2}{(b - a)^2}, & \left(\frac{a+b}{2} < x_j < b \right) \\ 1, & (b < x_j < \infty) \end{cases}. \quad (3.64)$$

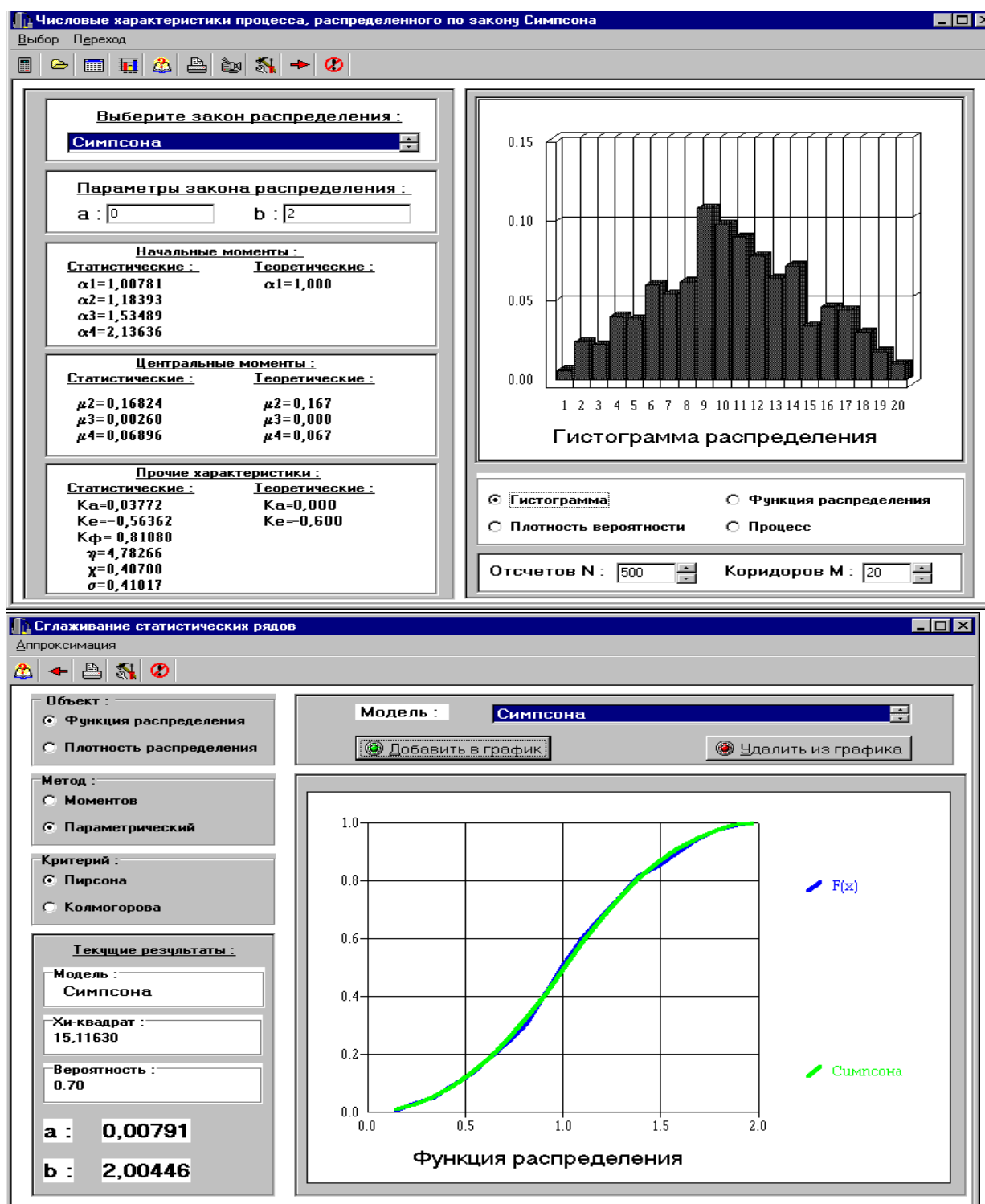


Рисунок 3.29 - Результаты аппроксимации

Сравнительный анализ методов аппроксимации законов распределения отдает преимущество методу аппроксимации функций распределения, особенно при малой выборке.

4. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

4.1. Ортогональные полиномы и функции

Рассмотрим основные понятия и определения, необходимые для описания и исследования ортогональных полиномов и функций, применяемых для построения функциональных вероятностных характеристик случайных процессов [174].

Определение 1. Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *функцией с суммируемым квадратом*, если

$$\int_a^b f^2(x) dx < \infty. \quad (4.1)$$

Множество всех функций с суммируемым квадратом обозначается обычно символом L_2 - $f(x) \in L_2$. Отметим, что и $c f(x) \in L_2$, где $c = const$.

Определение 2. *Нормой* функции $f(x)$ называется число, определяемое выражением

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}. \quad (4.2)$$

Отметим, что

1. $\|f\| \geq 0$, причем $\|f\| = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ тождественно равно нулю;
2. $\|cf\| = |c| \|f\|$ и, в частности $\|f\| = \|-f\|$;
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Введение нормы позволяет рассматривать L_2 как метрическое пространство, в котором можно производить измерения, если принять число

$$\rho(f, g) = \|f - g\|$$

за расстояние между элементами f и g класса L_2 .

При этом расстояние $\rho(f, g)$ обладает следующими свойствами:

1. $\rho(f, g) \geq 0$, причем $\rho(f, g) = 0$ тогда и только тогда, когда $f = g$;
2. $\rho(f, g) = \rho(g, f)$;
3. $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$.

Если на некотором множестве A элементов любой природы задана функция $\rho(f, g)$, то множество A называют метрическим пространством. Следовательно, множество L_2 - метрическое пространство. Впервые эту точку зрения на L_2 развил Д. Гильберт, поэтому L_2 часто называют пространством Гильберта.

Определение 3. Элемент f пространства L_2 называется пределом последовательности $f_1, f_2, \dots$ элементов этого же пространства, если всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое N , что при всех $n > N$ будет выполняться

$$\|f - f_n\| < \varepsilon, \text{ т.е.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0. \quad (4.3)$$

Этот вид сходимости последовательности функций называется **сходимостью в среднем**.

Определение 4. Две функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные на отрезке $[a, b]$, называются **взаимно ортогональными**, если

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0. \quad (4.4)$$

Определение 5. Функция $f_n(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется **нормированной**, если

$$\int_a^b f_n^2(x)dx = 1. \quad (4.5)$$

Отметим, что в общем случае $\int_a^b f^2(x)dx = \|f\|^2$ и $f_n(x) = \frac{f(x)}{\|f\|}$.

Определение 6. Система функций $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots$, заданных на отрезке $[a, b]$, называется **ортонормальной** системой, если каждая функция системы нормирована, а любые две функции системы ортогональны. Иначе говоря, система функций $\{\psi_k(x)\}$ **ортонормальна**, если

$$\int_a^b \psi_{n,k}(x)\psi_{n,n}(x)dx = \begin{cases} 1, & \text{если } k = n; \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases} \quad (4.6)$$

Определение 7. Система функций $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots$, заданных на отрезке $[a, b]$, называется **ортогональной** системой, если любые две функции системы ортогональны:

$$\int_a^b \psi_k(x)\psi_n(x)dx = \begin{cases} \|\psi_k\|^2, & \text{если } k = n; \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases} \quad (4.7)$$

Отметим, что $\psi_{n,k}(x) = \frac{\psi_k(x)}{\|\psi_k\|}$.

Определение 8. Пусть $\{\psi_{n,k}(x)\}$ есть ортонормальная система и $f(x)$ некоторая функция из L_2 . Тогда числа

$$\beta_k = \int_a^b f(x)\psi_{n,k}(x)dx \quad (4.8)$$

называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ в системе функций $\{\psi_{n,k}(x)\}$.

Для ортогональной системы $\{\psi_k(x)\}$ коэффициенты Фурье функции $f(x)$ определяются в виде

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|} \int_a^b f(x)\psi_k(x)dx. \quad (4.9)$$

Определение 9. Ряд $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \psi_{n,k}(x)$

называется рядом Фурье функции $f(x)$ в системе $\{\psi_{n,k}(x)\}$.

Рассмотрим, насколько близка в пространстве Гильберта частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_{n,k}(x), \quad (4.10)$$

к самой этой функции, т.е. вычислим $\|f - f_m\|^2$. С учетом свойств ортогональности (см. определение 6), получим

$$\|f - f_m\|^2 = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_{n,k}(x) \right]^2 dx = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^m \beta_k^2. \quad (4.11)$$

Это равенство называется **тождеством Бесселя**. Так как его левая часть не отрицательна, то из него следует **неравенство Бесселя**

$$\sum_{k=0}^m \beta_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (4.12)$$

Поскольку m произвольно, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (4.13)$$

Если

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 = \|f\|^2, \quad (4.14)$$

то это равенство носит название **формулы замкнутости или равенства Парсеваля**.

С учетом (4.14) формулу (4.12) представим в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_m\| = 0. \quad (4.15)$$

Иначе говоря, формула замкнутости означает, что частные суммы $f_m(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ **сходятся в среднем** к этой функции.

Для ортогональной системы функций выражение (4.12) приведем к виду

$$\|f - f_m\|^2 = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(x) \right]^2 dx = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (4.16)$$

Определение 10. Ортонормальная система $\{\psi_{n,k}(x)\}$ называется **замкнутой**, если формула замкнутости имеет место для любой функции из L_2 .

Теорема 10.1. Если система $\{\psi_{n,k}(x)\}$ замкнута, то для любой пары функций $f(x)$ и $g(x)$ из L_2 будет

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k, \quad (4.17)$$

$$\text{где } a_k = \int_a^b f(x) \psi_{n,k}(x) dx, \quad (4.18)$$

$$b_k = \int_a^b g(x) \psi_{n,k}(x) dx. \quad (4.19)$$

Эта формула называется *обобщенной формулы замкнутости*.

Следствие. Если система $\{\psi_{n,k}(x)\}$ замкнута и $f(x) \in L_2$, то ряд Фурье $f(x)$ в системе $\{\psi_{n,k}(x)\}$ можно почленно интегрировать по любому измеримому множеству $E \subset [a, b]$, т.е.

$$\int_E f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \int_E \psi_{n,k}(x) dx. \quad (4.20)$$

Определение 11. Система функций $\{\psi_{n,k}(x)\}$, заданных на отрезке $[a, b]$ и принадлежащих L_2 называется **полной**, если в L_2 не существуют отличной от нуля функции, ортогональной ко всем функциям $\{\psi_{n,k}(x)\}$.

Теорема. Для того, чтобы ортонормальная система $\{\psi_{n,k}(x)\}$ была полна, необходимо и достаточно, чтобы она была замкнута.

Определение 12. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана положительная непрерывная функция $\mu(x)$. Система функций $\{\varphi_k(x)\}$, заданная на отрезке $[a, b]$ называется **ортogonalной** на этом отрезке с весом $\mu(x)$, если

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_n(x) \mu(x) dx = \begin{cases} \|\varphi_k\|^2, & \text{если } k = n; \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases} \quad (4.21)$$

Из ортогональности системы $\{\varphi_k(x)\}$ с весом $\mu(x)$ следует ортогональность системы $\psi_k(x) = \sqrt{\mu(x)} \varphi_k(x)$. Отметим, что в этом случае $\|\varphi_k\| = \|\psi_k\|$.

Отметим, что для построения и исследования ортогональных моделей функциональных вероятностных характеристик необходимо для каждой ортогональной системы определить:

1. интервал ортогональности $[a, b]$;
2. вес;
3. аналитическое выражение ортогональной функции k -го порядка (полинома);
4. рекуррентную формулу определения ортогональной функции k -го порядка;
5. норму ортогональной функции k -го порядка;
6. значение ортогональной функции k -го порядка (полинома) в «нуле»;
7. длительность ортогональной функции k -го порядка;
8. преобразование Фурье ортогональной функции k -го порядка;
9. выражения для коэффициентов разложения для различных моделей исследуемой функциональной характеристики случайных процессов;
10. выражения для оценки методической погрешности аппроксимации функциональной характеристики;
11. аналитические выражения для оценки параметров ортогональных функций;
12. выражения для оценки методической погрешности коэффициентов разложения функциональной характеристики и её составляющих.

Следует отметить, что задачи 1 - 8 инварианты к виду вероятностной функциональной характеристики, а – 9 - 12 решаются для конкретных случаев.

4.2. Частотные свойства ортогональных функций

Рассмотрим ортогональные базисы Лагерра $L_k(\tau, \alpha)$, Лежандра $Leg_k(\tau, \alpha)$, Дирихле $D_k(\tau, \alpha)$ и Якоби $P_k^{(\alpha, \beta)}(\tau, \gamma)$ и их свойства (см. таблицу 4.1) [156].

Ортогональные функции Лагерра, Лежандра, Дирихле и Якоби

Таблица 4.1

№	$\{\psi_k(\tau, \alpha)\}$	$\ \psi_k(\alpha)\ ^2$	$\psi_k(0, \alpha)$
1	$L_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)!} \cdot \frac{(-\alpha\tau)^s}{(s!)^2} e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}$	$\frac{1}{\alpha}$	1
2	$Leg_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s e^{-(2s+1)\alpha\tau}$	$\frac{1}{2\alpha(2k+1)}$	$(-1)^k$
3	$D_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} e^{-(s+1)\alpha\tau}$	$\frac{1}{2\alpha(k+1)}$	1
4	$P_k^{(-1/2, 0)}(\tau, \gamma) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s e^{-\frac{(4s+1)\gamma\tau}{2}}$	$\frac{1}{\gamma(4k+1)}$	$(-1)^k$
5	$P_k^{(1/2, 0)}(\tau, \gamma) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s e^{-\frac{(4s+3)\gamma\tau}{2}}$	$\frac{1}{\gamma(4k+3)}$	$(-1)^k$
6	$P_k^{(1, 0)}(\tau, \gamma) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s e^{-(s+1)\gamma\tau}$	$\frac{1}{2\gamma(k+1)}$	$(-1)^k$
7	$P_k^{(0, 0)}(\tau, \gamma) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s e^{-(2s+1)\gamma\tau}$	$\frac{1}{2\gamma(2k+1)}$	$(-1)^k$
8	$P_k^{(2, 0)}(\tau, \gamma) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s e^{-(2s+3)\gamma\tau}$	$\frac{1}{2\gamma(2k+3)}$	$(-1)^k$

Найдем преобразование Фурье ортогональных функций (см. таблицу 4.2)

$$W_k(j\omega) = \int_0^\infty \psi_k(\tau, \alpha) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (4.22)$$

Преобразование Фурье ортогональных функций

Таблица 4.2

№	Наименование	$W_k(j\omega)$
1	Лагерра	$\frac{1}{j\omega + \alpha/2} \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k$
2	Лежандра	$\frac{1}{(2k+1)\alpha + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\alpha - j\omega}{(2s+1)\alpha + j\omega}$
3	Дирихле	$\frac{1}{j\omega + (k+1)\alpha} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{j\omega - (s+1)\alpha}{j\omega + (s+1)\alpha}$
4	Якоби (-1/2, 0)	$\frac{1}{(4k+1)\gamma/2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(4s+1)\gamma/2 - j\omega}{(4s+1)\gamma/2 + j\omega}$

5	Якоби (1/2, 0)	$\frac{1}{(4k+3)\gamma/2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(4s+3)\gamma/2 - j\omega}{(4s+3)\gamma/2 + j\omega}$
6	Якоби (1, 0)	$\frac{1}{(k+1)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(s+1)\gamma - j\omega}{(s+1)\gamma + j\omega}$
7	Якоби (0, 0)	$\frac{1}{(2k+1)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\gamma - j\omega}{(2s+1)\gamma + j\omega}$
8	Якоби (2,0)	$\frac{1}{(2k+3)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+3)\gamma - j\omega}{(2s+3)\gamma + j\omega}$

Из результатов, представленных в таблице 4.2, видно, что преобразование Фурье рассматриваемых ортогональных функций можно представить в общем виде [156] (для ортогональных функций Якоби $\alpha = \gamma$):

$$W_k(j\omega) = \frac{1}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{j\omega - 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2}{j\omega + 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2} [\psi_s(0, \alpha)]. \quad (4.23)$$

Выражение (4.23) приведем к виду

$$W_k(j\omega) = \frac{2\|\psi_k(\alpha)\|^2}{1 + j2\|\psi_k(\alpha)\|^2 \omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{j2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega - 1}{j2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega + 1} [\psi_s(0, \alpha)]. \quad (4.24)$$

$$(4.25)$$

Введем обозначения $tg\phi_s = 2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega$, $\phi_s = \arctg 2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega$. Тогда

$$\begin{aligned} W_k(j\omega) &= \frac{2\|\psi_k(\alpha)\|^2}{1 + jtg\phi_k} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{jtg\phi_s - 1}{jtg\phi_s + 1} [\psi_s(0, \alpha)] = \\ &= 2\|\psi_k(\alpha)\|^2 (-1)^k \cos\phi_k \exp\left(-j\left(\phi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \phi_s\right)\right) \psi_k(0, \alpha). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Отсюда

$$Re W_k(j\phi) = 2\|\psi_k(\alpha)\|^2 (-1)^k \cos\phi_k \cos\left[\phi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \phi_s\right] \psi_k(0, \alpha); \quad (4.27)$$

$$Im W_k(j\phi) = -2\|\psi_k(\alpha)\|^2 (-1)^k \cos\phi_k \sin\left[\phi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \phi_s\right] \psi_k(0, \alpha); \quad (4.28)$$

$$|W_k(j\phi)| = 2\|\psi_k(\alpha)\|^2 \cos\phi_k; \quad (4.29)$$

$$\Phi_k(j\omega) = -\left(\phi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \phi_s\right). \quad (4.30)$$

Полученные выражения для преобразования Фурье ортогональных функций позволяют решать разнообразные задачи аппроксимативного анализа случайных процессов. Так, например, из (4.26) можно найти выражение для определения интеграла от ортогональных функций (см. таблицу 4.3).

$$\tau_{k,u}^{(2)} = \int_0^\infty \psi_k(\tau, \alpha) d\tau = W_k(0, \alpha) = 2\|\psi_k(\alpha)\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k. \quad (4.31)$$

№	Наименование	$\tau_{k,u}^{(2)}$
1	Лагерра	$\frac{2(-1)^k}{\alpha}$
2	Лежандра	$\frac{1}{\alpha(2k+1)}$
3	Дирихле	$\frac{(-1)^k}{\alpha(k+1)}$
4	Якоби (-1/2, 0)	$\frac{2}{\gamma(4k+1)}$
5	Якоби (1/2, 0)	$\frac{2}{\gamma(4k+3)}$
6	Якоби (1, 0)	$\frac{1}{\gamma(k+1)}$
7	Якоби (0, 0)	$\frac{1}{\gamma(2k+1)}$
8	Якоби (2,0)	$\frac{1}{\gamma(2k+3)}$

4.3. Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями

Одной из сложных задач, которую приходится решать при аппроксимации корреляционных функций, является выбор модели корреляционной функции. Решение этой задачи осуществляется на основе априорной информации о свойствах исследуемого процесса. В тех случаях, когда этих данных недостаточно, как подсказывает практика, наиболее целесообразно применять разложение корреляционной функции в ряд по той или иной системе ортогональных функций. Впервые этот метод предложил Д. Лампард [183]. Математическим обоснованием этого метода является теорема Мерсера [111], согласно которой симметричная и положительно определенная функция, которой и является функция корреляции, может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд вида:

$$K_a(\tau) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \psi_k(\tau, \alpha), \quad (4.32)$$

где β_k - коэффициенты Фурье;

$\psi_k(\tau, \alpha)$ - семейство ортогональных функций в интервале $[0, \infty)$;

α - параметр масштаба.

Это семейство характеризуется интегралом:

$$\int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) \psi_n(\tau, \alpha) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n; \\ \|\psi_k(\alpha)\|^2, & \text{если } k = n. \end{cases} \quad (4.33)$$

Так как ряд сходится в интервале $[0, \infty)$, то коэффициенты разложения β_k в соответствии с (4.8) определяются выражением:

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^\infty \rho_x(\tau) \psi_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (4.34)$$

В качестве системы базисных функций применяются ортогональные функции Лагерра, Дирихле, Лежандра, Якоби и т. д. Выбор системы базисных функций зависит, в основном, от возможности представления корреляционной функции минимальным числом членов разложения для типовых моделей, удобством в работе.

Следует подчеркнуть, что на практике приходится ограничиваться конечным числом ряда (4.32)

$$\hat{K}_a(\tau) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(\tau, \alpha). \quad (4.35)$$

Это приводит к появлению методической погрешности, значение которой зависит как от свойств процесса, так и от способа оценки параметров модели. С учетом свойств ортогональных функций определим относительную методическую погрешность аппроксимации в виде

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{\sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k(\alpha)\|^2}{\tau_k^{(4)}}}. \quad (4.36)$$

Из (4.36) видно, что для определения методической погрешности аппроксимации необходимо знание аналитических выражений коэффициентов разложения β_k . Как показали исследования при прочих равных условиях численные значения методических погрешностей больше у колебательных моделей КФ [111]. Для решения этой задачи воспользуемся частотным представлением ортогональных функций.

Так, например, НКФ $\rho_{5,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, воспользовавшись преобразованием Эйлера, представим в виде

$$\rho_{5,x}(\tau) = \frac{1}{2} [e^{-(\lambda - j\omega_0)\tau} + e^{-(\lambda + j\omega_0)\tau}]. \quad (4.37)$$

Подставив выражение (4.37) в выражение (4.34), получим

$$\beta_{5,k} = \frac{1}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^\infty \psi_k(\tau, \alpha) [e^{-(\lambda - j\omega_0)\tau} + e^{-(\lambda + j\omega_0)\tau}] d\tau. \quad (4.38)$$

С учетом выражения (4.22) и (4.23), выражение (4.38) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \beta_{5,k} &= \frac{1}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} [W_k(\lambda - j\omega_0) + W_k(\lambda + j\omega_0)] = \\ &= \frac{1}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \left\{ \frac{1}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda - j\omega_0} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{\lambda - j\omega_0 - 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2}{1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2 + \lambda - j\omega_0} [\psi_s(0, \alpha)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda + j\omega_0} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{\lambda + j\omega_0 - 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2}{1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2 + \lambda + j\omega_0} [\psi_s(0, \alpha)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Введем обозначения:

$$\operatorname{tg} \varphi_{1,k} = \frac{\omega_0}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda}, \quad A_{1,k} = \frac{1}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \frac{1}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda},$$

$$tg \phi_{2,k} = \frac{\omega_0}{1/2 \|\psi_k(\alpha)\|^2 - \lambda}, \quad A_{2,k} = \frac{I}{2 \|\psi_k(\alpha)\|^2} \frac{I}{1/2 \|\psi_k(\alpha)\|^2 - \lambda}, \quad (4.40)$$

$$\phi_{1,k} = arctg \frac{\omega_0}{1/2 \|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda}, \quad \phi_{2,k} = arctg \frac{\omega_0}{1/2 \|\psi_k(\alpha)\|^2 - \lambda}.$$

Тогда

$$\beta_k = \frac{A_{1,k}}{1 - jtg \phi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{A_{1,s}}{A_{2,s}} \frac{1 - jtg \phi_{2,s}}{1 - jtg \phi_{1,s}} [\psi_s(0, \alpha)] + \frac{A_{1,k}}{1 + jtg \phi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{A_{1,s}}{A_{2,s}} \frac{1 + jtg \phi_{2,s}}{1 + jtg \phi_{1,s}} [\psi_s(0, \alpha)]. \quad (4.41)$$

Или

$$\begin{aligned} \beta_{5,k} = & \frac{A_{1,k} \cos \phi_{1,k}}{\cos \phi_{1,k} - j \sin \phi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} B_s \frac{\cos \phi_{2,s} - j \sin \phi_{2,s}}{\cos \phi_{1,s} - j \sin \phi_{1,s}} [\psi_s(0, \alpha)] + \\ & + \frac{A_{1,k} \cos \phi_{1,k}}{\cos \phi_{1,k} + j \sin \phi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} B_s \frac{\cos \phi_{2,s} + j \sin \phi_{2,s}}{\cos \phi_{1,s} + j \sin \phi_{1,s}} [\psi_s(0, \alpha)] \end{aligned}, \quad (4.42)$$

где $B_s = \frac{A_{1,s}}{A_{2,s}} \frac{\cos \phi_{1,s}}{\cos \phi_{2,s}}.$

$$\begin{aligned} \beta_{5,k} = & A_{1,k} \cos \phi_{1,k} \exp(j \phi_{1,k}) \prod_{s=0}^{k-1} B_s \exp[j(\phi_{1,s} - \phi_{2,s} [\psi_s(0, \alpha)])] + \\ & + A_{1,k} \cos \phi_{1,k} \exp(-j \phi_{1,k}) \prod_{s=0}^{k-1} B_s \exp[-j(\phi_{1,s} - \phi_{2,s} [\psi_s(0, \alpha)])] \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} \beta_{5,k} = & A_{1,k} \cos \phi_{1,k} \prod_{s=0}^{k-1} B_s \left\{ \exp \left[j \left(\phi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\phi_{1,s} - \phi_{2,s} [\psi_s(0, \alpha)]) \right) \right] + \right. \\ & \left. + \exp \left[-j \left(\phi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\phi_{1,s} - \phi_{2,s} [\psi_s(0, \alpha)]) \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\beta_{5,k} = 2 A_{1,k} \cos \phi_{1,k} \cos \left(\phi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\phi_{1,s} - \phi_{2,s} [\psi_s(0, \alpha)]) \right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s. \quad (4.43)$$

Выражения для коэффициентов разложения модели $\rho_{5,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ для различных ортогональных базисов зависят от принятых обозначений, представленных в таблице 4.4.

Принятые обозначения

Таблица 4.4

№	Наименование	$tg \phi_{1,k}$	$tg \phi_{2,k}$	$A_{1,k}$	$A_{2,k}$
1	Лагерра	$\frac{\omega_0}{\alpha/2 + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\alpha/2 - \lambda}$	$\frac{\alpha/2}{\alpha/2 + \lambda}$	$\frac{\alpha/2}{\alpha/2 - \lambda}$
2	Лежандра	$\frac{\omega_0}{\alpha(2k+1) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\alpha(2k+1) - \lambda}$	$\frac{\alpha(2k+1)}{\alpha(2k+1) + \lambda}$	$\frac{\alpha(2k+1)}{\alpha(2k+1) - \lambda}$
3	Дирихле	$\frac{\omega_0}{\alpha(k+1) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\alpha(k+1) - \lambda}$	$\frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k+1) + \lambda}$	$\frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k+1) - \lambda}$
4	Якоби (-1/2, 0)	$\frac{\omega_0}{\gamma(4k+1)/2 + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\gamma(4k+1)/2 - \lambda}$	$\frac{\gamma(4k+1)/2}{\gamma(4k+1)/2 + \lambda}$	$\frac{\gamma(4k+1)/2}{\gamma(4k+1)/2 - \lambda}$

5	Якоби (1/2, 0)	$\frac{\omega_0}{\gamma(4k+3)/2 + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\gamma(4k+3)/2 - \lambda}$	$\frac{\gamma(4k+3)/2}{\gamma(4k+3)/2 + \lambda}$	$\frac{\gamma(4k+3)/2}{\gamma(4k+3)/2 - \lambda}$
6	Якоби (1, 0)	$\frac{\omega_0}{\gamma(k+1) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\gamma(k+1) - \lambda}$	$\frac{\gamma(k+1)}{\gamma(k+1) + \lambda}$	$\frac{\gamma(k+1)}{\gamma(k+1) - \lambda}$
7	Якоби (0, 0)	$\frac{\omega_0}{\gamma(2k+1) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\gamma(2k+1) - \lambda}$	$\frac{\gamma(2k+1)}{\gamma(2k+1) + \lambda}$	$\frac{\gamma(2k+1)}{\gamma(2k+1) - \lambda}$
8	Якоби (2, 0)	$\frac{\omega_0}{\gamma(2k+3) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\gamma(2k+3) - \lambda}$	$\frac{\gamma(2k+3)}{\gamma(2k+3) + \lambda}$	$\frac{\gamma(2k+3)}{\gamma(2k+3) - \lambda}$

В таблице 4.5 представлены выражения коэффициентов разложения модели $\rho_{5,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$.

Выражения для расчета коэффициентов разложения

Таблица 4.5

№	Наименование	$\beta_{5,k}$
1	Лагерра	$2 A_{1,k} B_k^k \cos \varphi_{1,k} \cos((k+1)\varphi_{1,k} - k\varphi_{2,s})$
2	Дирихле	$2 A_{1,k} \cos \varphi_{1,k} \cos\left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s})\right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s$
3	Лежандра Якоби	$2 A_{1,k} \cos \varphi_{1,k} \cos\left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} + \varphi_{2,s})\right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s$

Для определения коэффициентов разложения 6 и 7 моделей

$\rho_{6,7,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$ необходимо определить

$$J = \frac{\lambda}{2 \|\psi_k(\alpha)\|^2 j \omega_0} \int_0^\infty \psi_k(\tau, \alpha) [e^{-(\lambda - j \omega_0) \tau} - e^{-(\lambda + j \omega_0) \tau}] d\tau. \quad (4.44)$$

Тогда

$$\beta_{6,7,k} = \beta_{5,k} \pm J. \quad (4.45)$$

С учетом (4.8), получим

$$J = \frac{\lambda}{2 \|\psi_k(\alpha)\|^2 j \omega_0} [W_k(\lambda - j \omega_0) - W_k(\lambda + j \omega_0)]. \quad (4.46)$$

С учетом принятых обозначений (4.9)

$$\begin{aligned} J &= \frac{A_{1,k} \lambda}{j \omega_0} \cos \varphi_{1,k} \prod_{s=0}^{k-1} B_s \left\{ \exp \left[j \left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s} [\psi_s(0, \alpha)]) \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \exp \left[-j \left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s} [\psi_s(0, \alpha)]) \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{2 A_{1,k} \lambda}{\omega_0} A_{1,k} \cos \varphi_{1,k} \sin \left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s} [\psi_s(0, \alpha)]) \right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Подставив выражение (4.40) в выражение (4.45), окончательно получим

$$\begin{aligned} \beta_{6,7,k} = & 2A_{1,k} \cos \varphi_{1,k} \left[\cos \left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s} [\psi_s(0, \alpha)]) \right) \right] \pm \\ & \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s} [\psi_s(0, \alpha)]) \right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s. \end{aligned} \quad (4.48)$$

В таблице 4.6 представлены выражения коэффициентов разложения модели $\rho_{6,7,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$.

Выражения для расчета коэффициентов разложения

Таблица 4.6

№	Наименование	$\beta_{6,7,k}$
1	Лагерра	$2A_{1,k} B_k^k \cos \varphi_{1,k} [\cos((k+1)\varphi_{1,k} - k\varphi_{2,s}) \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin((k+1)\varphi_{1,k} - k\varphi_{2,s})]$
2	Дирихле	$2A_{1,k} \cos \varphi_{1,k} \left[\cos \left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s \right]$
3	Лежандра Якоби	$2A_{1,k} \cos \varphi_{1,k} \left[\cos \left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} + \varphi_{2,s}) \right) \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} + \varphi_{2,s}) \right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s \right]$

Другой способ определения коэффициентов разложения типовых моделей корреляционных функций в различных ортогональных базисах приведен в таблицах 4.7-4.9.

Ортогональный базис Лежандра

Таблица 4.7

№	$\rho_x(\tau)$	β_k
1	$e^{-\lambda \tau }$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{1}{\lambda + \alpha(2s+1)}$
2	$e^{-\lambda \tau } (1 + \lambda \tau)$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{2\lambda + \alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2}$
3	$e^{-\lambda \tau } (1 - \lambda \tau)$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2}$
4	$e^{-\lambda \tau } (1 + \lambda \tau + \lambda^2 \tau^2 / 3)$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{8\lambda^2 + 9\alpha\lambda(2s+1) + \alpha^2(2s+1)^2}{3[\lambda + \alpha(2s+1)]^3}$
5	$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\lambda + \alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2 + \omega_0^2}$

6	$e^{-\lambda \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{2\lambda + \alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2 + \omega_0^2}$
7	$e^{-\lambda \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2 + \omega_0^2}$

Ортогональный базис Дирихле

Таблица 4.8

№	$\rho_x(\tau)$	β_k
1	$e^{-\lambda \tau }$	$2\alpha(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \frac{1}{\lambda + \alpha(s+1)}$
2	$e^{-\lambda \tau } (1 + \lambda \tau)$	$2\alpha(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \frac{2\lambda + \alpha(s+1)}{[\lambda + \alpha(s+1)]^2}$
3	$e^{-\lambda \tau } (1 - \lambda \tau)$	$2\alpha(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \frac{\alpha(s+1)}{[\lambda + \alpha(s+1)]^2}$
4	$e^{-\lambda \tau } (1 + \lambda \tau + \lambda^2 \tau^2 / 3)$	$2\alpha(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \frac{8\lambda^2 + 9\alpha\lambda(s+1) + \alpha^2(s+1)^2}{3[\lambda + \alpha(s+1)]^3}$
5	$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$	$2\alpha(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \frac{\lambda + \alpha(s+1)}{[\lambda + \alpha(s+1)]^2 + \omega_0^2}$
6	$e^{-\lambda \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$2\alpha(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \frac{2\lambda + \alpha(s+1)}{[\lambda + \alpha(s+1)]^2 + \omega_0^2}$
7	$e^{-\lambda \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$2\alpha(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \frac{\alpha(s+1)}{[\lambda + \alpha(s+1)]^2 + \omega_0^2}$

Ортогональный базис Лагерра

Таблица 4.9

№	$\rho_x(\tau)$	β_k
1	$e^{-\lambda \tau }$	$\frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \left(\frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^k$
2	$e^{-\lambda \tau } (1 + \lambda \tau)$	$\frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \left(\frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^{k-1} \left\{ \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \frac{2\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} - k \frac{\alpha\lambda}{(\lambda + \alpha/2)^2} \right\}$
3	$e^{-\lambda \tau } (1 - \lambda \tau)$	$\frac{\alpha^2/2}{(\lambda + \alpha/2)^2} \left[\left(\frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^k + \frac{2k\lambda}{(\lambda + \alpha/2)} \left(\frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^{k-1} \right]$

Как показали исследования, относительная погрешность аппроксимации (4.36) зависит от величины параметра масштаба, вида корреляционной функции и ее показателя колебательности $\mu_i = \frac{\omega_{0,i}}{\lambda_i}$, числа членов разложения ряда m . В таблице 4.10-4.11 приведены результаты определения погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции вида $\rho_x(\tau, \lambda_s, \omega_{0,5}) = e^{-\lambda_s|\tau|} \cos \omega_{0,5} \tau$ при разных значениях m , в зависимости от отношения параметра ортогональных функций к показателю

затухания исследуемых корреляционных функций – $\chi_5 = \frac{\alpha}{\lambda_5}$ для различных ортогональных базисов.

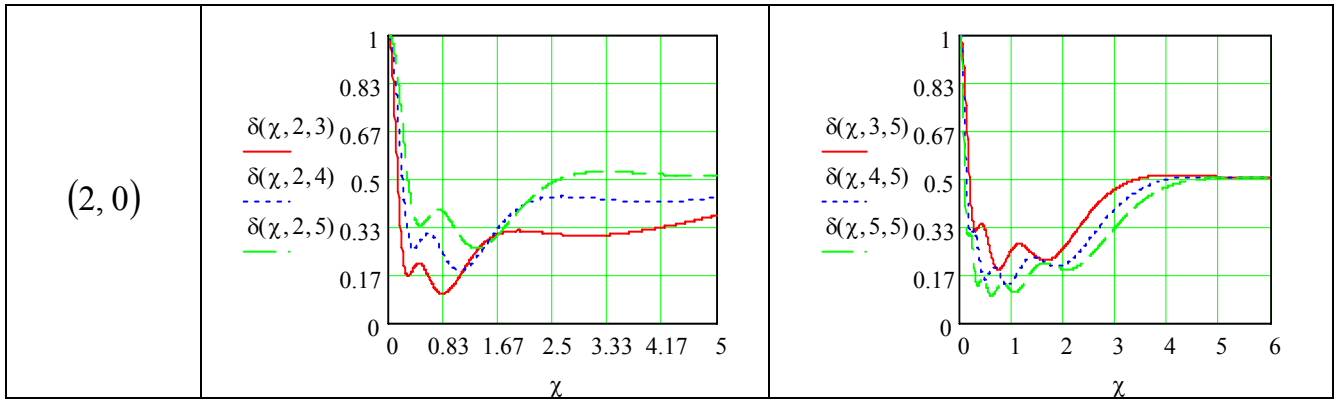
Методическая погрешность аппроксимации

Таблица 4.10

Ортогональ- ный базис	График методической погрешно- сти ($\mu_5=3,4,5$; $m=2$)	График методической погрешно- сти ($\mu_5=5$; $m=3,4,5$)
Лагерра		
Лежандра		
Дирихле		

Относительная методическая погрешность аппроксимации НКФ $\delta(\chi, m, \mu)$ в ортогональном базисе Якоби приведена в таблице 4.11.

Параметры орт.базиса Якоби (α, β)	График методической погрешности ($\mu_5 = 3, 4, 5; m = 2$)	График методической погрешности ($\mu_5 = 5; m = 3, 4, 5$)
$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$		
$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$		
$(1, 0)$		
$(0, 0)$		



Из полученных результатов видно, что при выбранной модели корреляционной функции, $\mu = const$, $m = const$, погрешность существенным образом зависит от χ , т.е. α . Кроме того, наблюдаются локальные экстремумы погрешности, количество которых зависит от m [111]. Следует отметить, что исследователя интересует значение параметра α , обеспечивающего минимум квадратической погрешности аппроксимации, т.е. определение глобального минимума.

4.4. Оценка параметра масштаба ортогональных функций

Отметим, что точное решение задачи определения параметра масштаба в силу свойств ортогональных функций возможно лишь для ортогональных функций Лагерра [60].

Предложенный в работах [57, 111] метод аппаратной аппроксимации корреляционных функций позволил свести задачу разработки алгоритма оценки параметра ортогональных функций Лагерра к задаче параметрической аппроксимации корреляционных функций.

Определим квадрат модуля частной характеристики ортогональных фильтров k -ого порядка:

$$|W_k(j\omega)|^2 = \frac{1/\|\psi_k(\alpha)\|^4}{1/4\|\psi_k(\alpha)\|^4 + \omega^2}. \quad (4.49)$$

Заметим, что квадраты модуля частотных характеристик рассматриваемых ортогональных фильтров соответствуют квадратам модуля апериодического звена первого порядка. Следовательно, можно записать, что при погрешности восстановления импульсной переходной характеристики $\delta = 2\%$ [97]

$$\Delta\tau_0 = 0,4\tau_u^{(2)}, \quad (4.50)$$

где $\Delta\tau_0$ - интервал дискретизации импульсной переходной характеристики, равный интервалу дискретизации случайного процесса,

$\tau_u^{(2)} = \frac{\int_0^\infty \psi_k(\tau, \alpha) d\tau}{\psi_k(\tau, \alpha)_{max}}$ - длительность импульсной переходной характеристики ортогонального фильтра k -ого порядка.

С учетом результатов таблицы 4.3 и выражения (4.50) параметр масштаба ортогонального фильтра k -ого порядка для различных ортогональных базисов представлен в таблице 4.12 (3 столбец).

Параметр масштаба

Таблица 4.12

№	Наименование	$\alpha(\gamma)$	$\alpha(\gamma)$
1	Лагерра	$\frac{0,8}{\Delta\tau_0}$	$2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}$
2	Лежандра	$\frac{0,4}{(2k+1)\Delta\tau_0}$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(2k+1)}$
3	Дирихле	$\frac{0,4}{(k+1)\Delta\tau_0}$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(k+1)}$
4	Якоби (-1/2, 0)	$\frac{0,8}{(4k+1)\Delta\tau_0}$	$\frac{2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(4k+1)}$
5	Якоби (1/2, 0)	$\frac{0,8}{(4k+3)\Delta\tau_0}$	$\frac{2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(4k+3)}$
6	Якоби (1, 0)	$\frac{0,4}{(k+1)\Delta\tau_0}$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(k+1)}$
7	Якоби (0, 0)	$\frac{0,4}{(2k+1)\Delta\tau_0}$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(2k+1)}$
8	Якоби (2,0)	$\frac{0,4}{(2k+3)\Delta\tau_0}$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(2k+3)}$

Так как для колебательных моделей КФ с погрешностью восстановления 2% (см. таблицу 3.2)

$$\Delta\tau_0 = \frac{0,4}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}, \quad (4.51)$$

выражения для определения параметра масштаба α для различных ортогональных функций могут быть представлены иначе (см. таблицу 4.12, четвертый столбец).

Результаты расчетов квадратов модулей частотных характеристик ортогональных фильтров k -ого порядка и спектральной плотности мощности для различных моделей КФ и ортогональных функций представлены на рис. 4.1 – 4.3, где ряд 1 - спектральная плотность мощности, ряд 2 - квадрат модуля частотной характеристики ортогонального фильтра.

Исходные данные для расчета параметров ортогональных функций

Таблица 4.13

КФ	СПМ	λ	ω_0	α	m
5-7	Лагерра	1	5	5,102	12
5-7	Лежандра	1	5	0,2041	12
5-7	Дирихле	1	5	0,3925	12

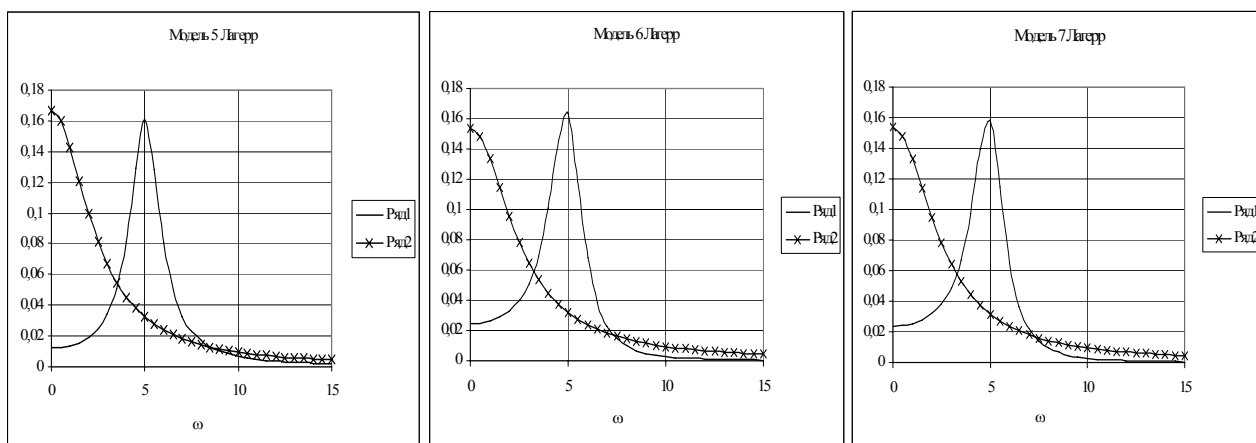


Рисунок 4.1 - Квадрат модуля частотной характеристики фильтра Лагерра и СПМ

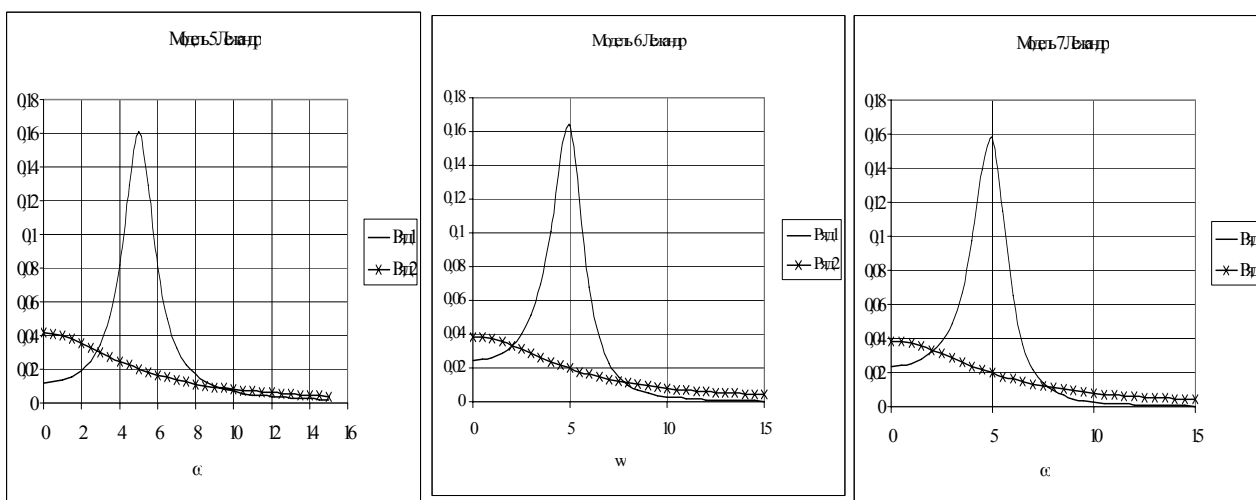


Рисунок 4.2 - Квадрат модуля частотной характеристики фильтра Лежандра и СПМ

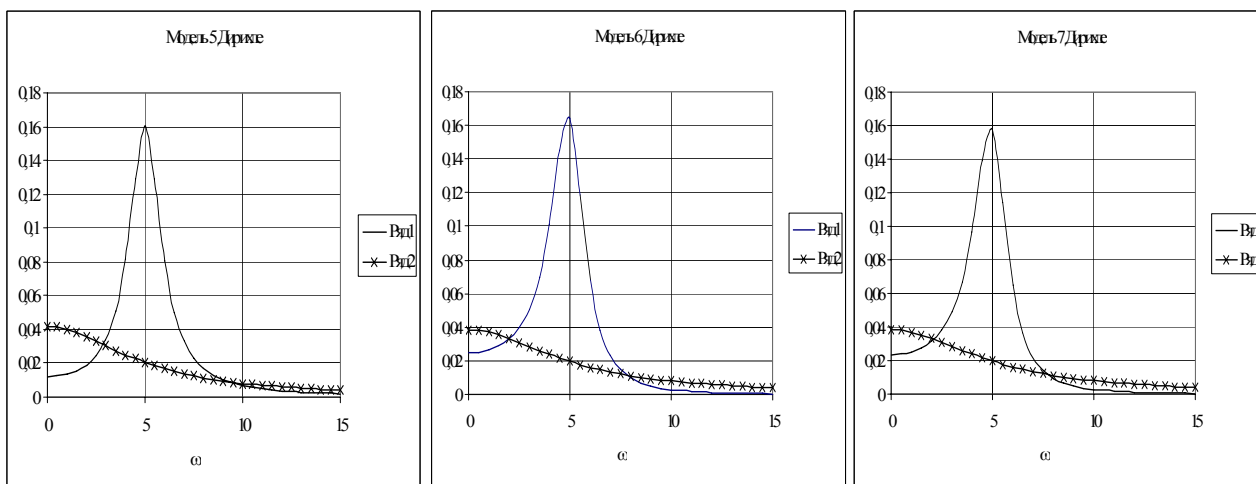


Рисунок 4.3 - Квадрат модуля частотной характеристики фильтра Дирихле и СПМ

На рис. 4.4 – 4.6 приведены результаты аппроксимации КФ ортогональными функциями для параметров масштаба α , определенного по предлагаемой методике.

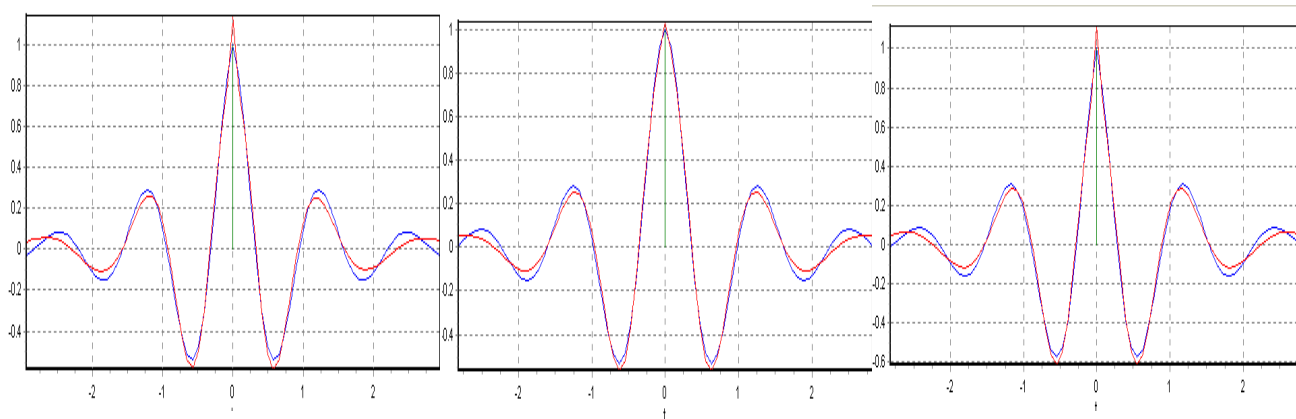


Рисунок 4.4 - Аппроксимация КФ ортогональными функциями Лагерра

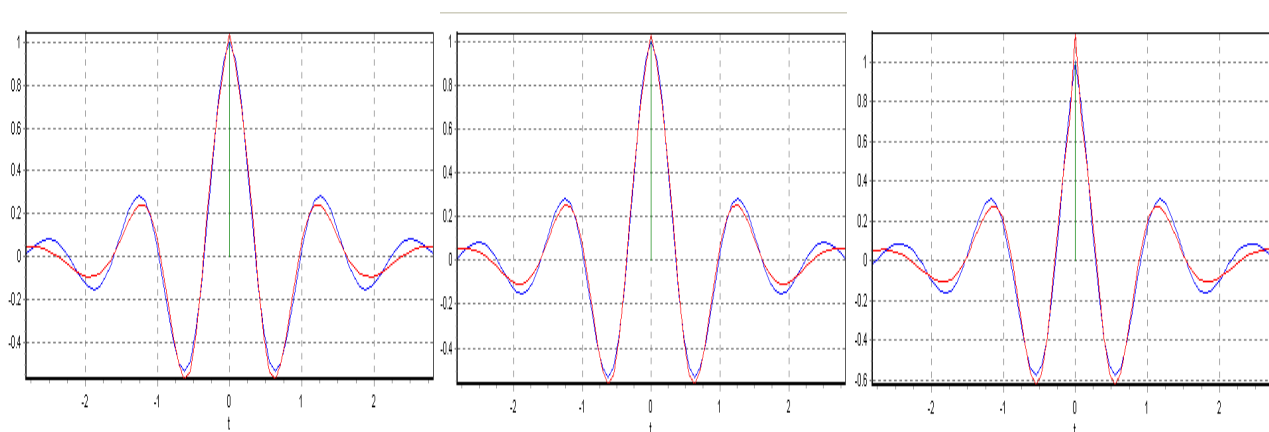


Рисунок 4.5 - Аппроксимация КФ ортогональными функциями Лежандра

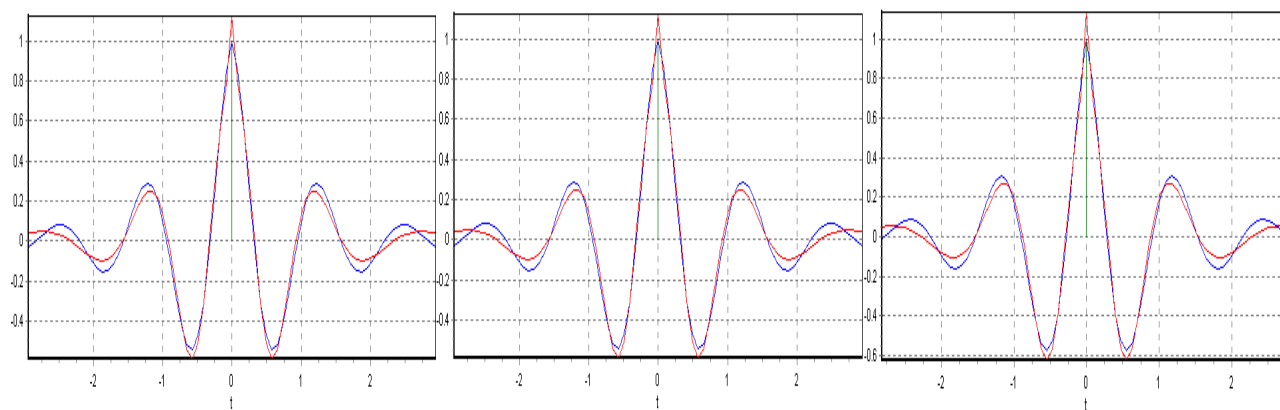


Рисунок 4.6 - Аппроксимация КФ ортогональными функциями Дирихле

Ниже для примера на рис. 4.7 приведены результаты аппроксимации КФ 5 модели при произвольном выборе численного значения $\alpha = 7,000$, $m = 12$ (левая ветвь).

На рис. 4.8 приведены результаты аппроксимации КФ 6 модели с показателем колебательности $\mu = 5$ ортогональными функциями Лежандра, а на рис. 4.9 – 7 модели с $\mu = 5$ ортогональными функциями Дирихле (левая ветвь).

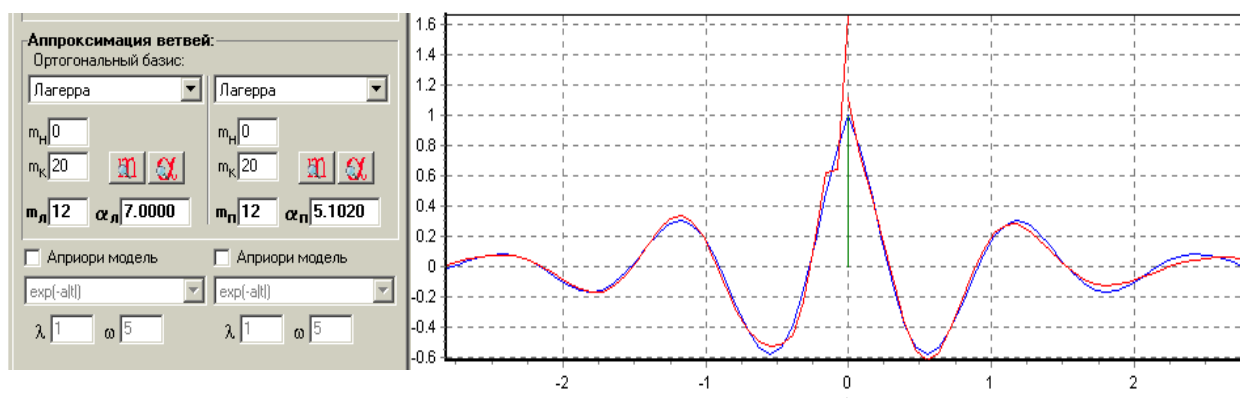


Рисунок 4.7 - Аппроксимация КФ ортогональными функциями Лагерра

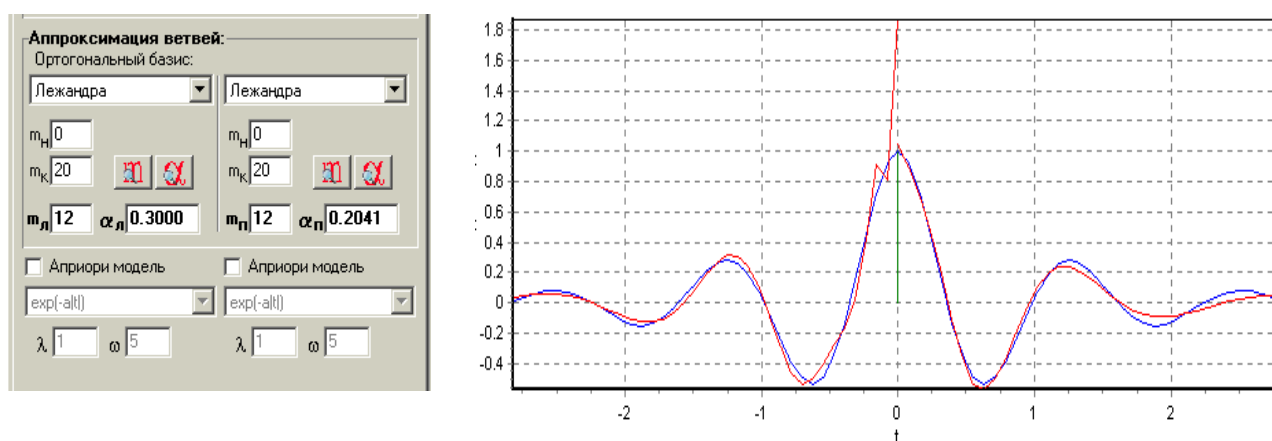


Рисунок 4.8 - Аппроксимация КФ ортогональными функциями Лежандра

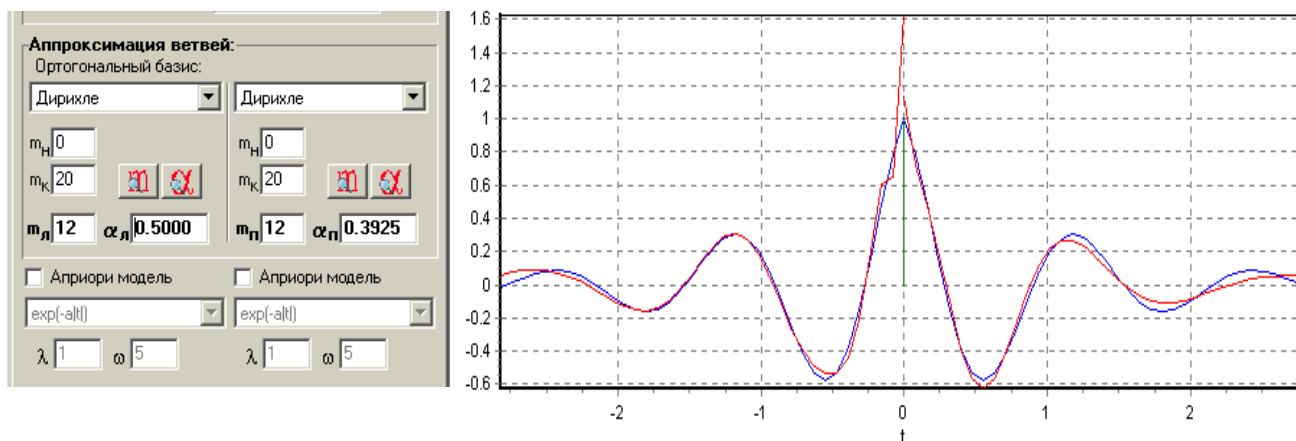


Рисунок 4.9 - Аппроксимация КФ ортогональными функциями Дирихле

Из анализа рисунков 4.7 - 4.9 видно, что при произвольном выборе параметра масштаба ортогональных функций результаты аппроксимации неудовлетворительные (см. левую ветвь КФ).

В работе [111] показано, что для ортогональных функций Лагерра параметр масштаба α может быть определен в результате решения уравнения

$$\beta_0 = 1. \quad (4.52)$$

Рассмотрим это же уравнение для ортогональных функций экспоненциального типа в общем виде:

$$\frac{1}{\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^\infty \rho_x(\tau) \psi_k^*(\tau, \alpha) d\tau - 1 = 0, \quad (4.53)$$

где $\psi_k^*(\tau, \alpha) = \exp(-\tau / 2\|\psi_k(\alpha)\|^2)$.

Так для $\rho_{x,5}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ это уравнение приведем к виду:

$$\frac{1}{\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^\infty \cos \omega_0 \tau \exp\left[-\left(1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda\right)\tau\right] d\tau - 1 = 0. \quad (4.54)$$

Разрешив уравнение относительно $1/\|\psi_k(\alpha)\|^2$, получим:

$$1/\|\psi_k(\alpha)\|^2 = 2 \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}. \quad (4.55)$$

Результаты определения параметра масштаба для различных ортогональных функций представлены в таблице 4.14.

Параметры масштаба ортогонального фильтра для 5 модели

Таблица 4.14

№	$\{\psi_k(\tau, \alpha / \gamma)\}$	$\alpha_0 (\gamma_0)$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$2 \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}$
2	$D_k(\tau, \alpha), P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / (k+1)$
3	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$2 \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / (4k+1)$
4	$Leg_k(\tau, \alpha), P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / (2k+1)$
5	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$2 \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / 3(4k+3)$
6	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / 3(2k+3)$

Решив уравнение (4.53) для корреляционных функций

$\rho_{x,6,7}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$, получим:

$$1/\|\psi_k(\alpha)\|^2 = 2 \left(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right). \quad (4.56)$$

Результаты определения параметра масштаба для различных ортогональных функций представлены в таблице 4.15.

Параметры масштаба ортогонального фильтра для 6,7 моделей

Таблица 4.15

№	$\{\psi_k(\tau, \alpha / \gamma)\}$	$\alpha (\gamma)$
1	$L_k(\tau, \alpha),$	$2 \left(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right)$
2	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$2 \left(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right) / (4k+1)$
3	$D_k(\tau, \alpha), P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\left(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right) / (k+1)$
4	$Leg_k(\tau, \alpha), P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\left(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right) / (2k+1)$
5	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$2 \left(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right) / 3(4k+3)$
6	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\left(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right) / 3(2k+3)$

4.5. Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями при ограничениях на ее модель

Одной из отрицательных черт аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями является то, что её основное свойство

$$K_{ax}(0) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha) \neq \sigma_x^2 \quad (4.57)$$

при произвольной величине α не выполняется при конечном m [60].

Для обеспечения условия (4.57) аналитическое выражение $K_x(\tau)$ можно искать в виде:

$$K_{ax}(\tau) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m c_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha)$$

где
$$c_k = \frac{\beta_k}{\sum_{k=0}^m \beta_k}. \quad (4.58)$$

Легко проверить, что в этом случае $\rho_{ax}(0) = \sum_{k=0}^m c_k \psi_k(0, \alpha) = 1$. Однако, коэффициенты разложения c_k , определенные по формуле (4.58), не обеспечивают минимума квадратической погрешности аппроксимации.

Таким образом, общим недостатком известных способов определения коэффициентов разложения является то, что они либо нарушают основное свойство корреляционных функций, либо не обеспечивают минимума квадратической погрешности аппроксимации.

Поставим задачу определить коэффициенты разложения корреляционной функции b_k

$$\rho_{ax}(\tau) = \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \quad (4.59)$$

так, чтобы квадратическая погрешность аппроксимации была минимальной при дополнительном условии

$$\rho_{ax}(0) = \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(0, \alpha) = 1. \quad (4.60)$$

Т.е. для этого необходимо минимизировать Δ_I по b_k [60]:

$$\Delta_I = \int_0^\infty \left[\rho_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau + \lambda \cdot \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(0, \alpha) = \min.$$

Найдём частные производные $\frac{\partial \Delta_I}{\partial \beta_n}$ и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial \Delta_I}{\partial b_n} = -2 \int_0^\infty \left[\rho_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) \right] \psi_n(\tau, \alpha) d\tau + \lambda \psi_n(0, \alpha) = 0. \quad (4.61)$$

Выполнив промежуточные преобразования, определим

$$-2\beta_n \|\psi_n\|^2 + 2b_n \|\psi_n\|^2 + \lambda \psi_n(0, \alpha) = 0. \quad (4.62)$$

Отсюда

$$b_n = \beta_n - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\psi_n(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2}. \quad (4.63)$$

Подставляя найденное значение b_n в выражение (4.60), получим:

$$\sum_{k=0}^m \left[\beta_k - \frac{\lambda}{2} \frac{\psi_k(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2} \right] \cdot \psi_k(0, \alpha) = 1. \quad (4.64)$$

Тогда

$$\frac{\lambda}{2} = - \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha) \right)}{\sum_{k=0}^m \frac{\psi_k^2(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2}} \quad (4.65)$$

Отметим, что для рассматриваемых ортогональных базисов $\psi_k^2(0, \alpha) = 1$.

Подставив $\lambda/2$ в выражение для оценки коэффициента разложения b_n , получим:

$$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha) \right)}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{\|\psi_k\|^2}} \cdot \frac{\psi_n(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2} = \beta_n + C_n. \quad (4.66)$$

Выражения для C_n для различных ортогональных базисов представлены в таблице 4.16.

Значения коэффициентов при ограничениях на модель
корреляционной функции

Таблица 4.16

Ортогональный базис	C_n
Лагерра	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \right)}{(m+1)}$
Лежандра	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot (-1)^k \right)}{(m+1)^2} \cdot (-1)^n \cdot (2$
Дирихле	$\frac{2(n+1) \left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \right)}{(m+1)(m+2)}$

Аналитическое выражение НКФ в ортогональном базисе Якоби представим в виде

$$K_a(\tau) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \beta_k P_k^{(\alpha, \beta)}(\tau, \gamma), \quad (4.67)$$

где $P_k^{(\alpha, \beta)}(\tau, \gamma)$ - ортогональные функции Якоби с параметрами (α, β) и нормой $\|P_k^{(\alpha, \beta)}(\tau, \gamma)\|^2$ и весом $\mu(\tau)$;

γ - параметр масштаба ортогональных функций Якоби;

$$\beta_k = \frac{1}{\|P_k^{(\alpha,\beta)}(\tau, \gamma)\|^2} \int_0^\infty \rho_x(\tau) P_k^{(\alpha,\beta)}(\tau, \gamma) \mu(\tau) d\tau \quad - \quad \text{коэффициенты разложения НКФ,}$$

обеспечивающие минимум среднеквадратической погрешности аппроксимации Δ .

Выражение для поправочного члена C_k с учетом (4.66) примет вид

$$C_k = \frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(0, \gamma)}{\|P_k^{(\alpha,\beta)}(\tau, \gamma)\|^2} \frac{1 - \sum_{s=0}^m \beta_s P_s^{(\alpha,\beta)}(0, \gamma)}{\sum_{s=0}^m \frac{P_s^{(\alpha,\beta)}(0, \gamma)^2}{\|P_s^{(\alpha,\beta)}(\tau, \gamma)\|^2}}. \quad (4.68)$$

В таблице 4.17 приведены аналитические выражения для оценки $\|P_k^{(\alpha,\beta)}(\tau, \gamma)\|^2$ и C_k для различных функций Якоби $P_k^{(\alpha,\beta)}(\tau, \gamma)$. Отметим, что для рассматриваемых ортогональных функций Якоби $P_k^{(\alpha,\beta)}(0, \gamma) = (-1)^k$.

Коэффициенты разложения КФ в ортогональных базисах Якоби (α, β)

Таблица 4.17

№	(α, β)	Аналитическое выражение	Норма функций	C_k
1	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s e^{\frac{(4s+1)\gamma\tau}{2}}$	$\frac{1}{\gamma(4k+1)}$	$\frac{(-1)^k (4k+1) \left[1 - \sum_{s=0}^m (-1)^s \beta_s\right]}{(m+1)(2m+1)}$
2	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s e^{\frac{(4s+3)\gamma\tau}{2}}$	$\frac{1}{\gamma(4k+3)}$	$\frac{(-1)^k (4k+3) \left[1 - \sum_{s=0}^m (-1)^s \beta_s\right]}{(m+1)(2m+3)}$
3	$(1, 0)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s e^{-(s+1)\gamma\tau}$	$\frac{1}{2\gamma(k+1)}$	$\frac{(-1)^k 2(k+1) \left[1 - \sum_{s=0}^m (-1)^s \beta_s\right]}{(m+1)(m+2)}$
4	$(0, 0)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s e^{-(2s+1)\gamma\tau}$	$\frac{1}{2\gamma(2k+1)}$	$\frac{(-1)^k (2k+1) \left[1 - \sum_{s=0}^m (-1)^s \beta_s\right]}{(m+1)^2}$
5	$(2, 0)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s e^{-(2s+3)\gamma\tau}$	$\frac{1}{2\gamma(2k+3)}$	$\frac{(-1)^k (2k+3) \left[1 - \sum_{s=0}^m (-1)^s \beta_s\right]}{(m+1)(m+3)}$

Определим погрешность аппроксимации Δ_l

$$\begin{aligned} \Delta_l &= \int_0^\infty \left[\rho_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \\ &= \tau_k^{(4)} - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m c_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Представим погрешности аппроксимации КФ в виде:

$$\Delta_l = \Delta + \Delta_2, \quad (4.70)$$

где Δ_2 - составляющая методической погрешности аппроксимации, вызванная дополнительным условием (4.60).

Тогда

$$\begin{cases} \Delta = \tau_k^{(4)} - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2; \\ \Delta_2 = \sum_{k=0}^m c_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{cases} \quad (4.71)$$

Вторую составляющую погрешности, вызванную необходимостью выполнения условия (4.60), с учетом (4.66) удобнее представить в виде:

$$\Delta_2 = \frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(0, \alpha)\right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{\|\psi_k\|^2}}. \quad (4.72)$$

В таблице 4.18 приведены выражения для оценки Δ и Δ_2 для различных базисов.

Составляющие методической погрешности аппроксимации НКФ
ортогональными функциями

Таблица 4.18

Ортогональный базис	Δ	Δ_2
Лагерра	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2$	$\frac{1}{\alpha} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_s\right)^2}{(m+1)}$
Лежандра	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{2k+1}$	$\frac{1}{2 \cdot \alpha} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_s \cdot (-1)^k\right)^2}{(m+1)^2}$
Дирихле	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{k+1}$	$\frac{1}{\alpha} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_s\right)^2}{(m+1)(m+2)}$

Составляющие методической погрешности для ортогонального базиса Якоби примут вид

$$\begin{cases} \Delta = \tau_k^{(4)} - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|P_k^{(\alpha, \beta)}\|^2; \\ \Delta_2 = \frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m \beta_k P_k^{(\alpha, \beta)}(0, \gamma)\right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{\|P_k^{(\alpha, \beta)}\|^2}}. \end{cases} \quad (4.73)$$

Выражения для оценки составляющей погрешности Δ_2 для ортогонального базиса Якоби представлены в таблице 4.19.

Составляющие методической погрешности аппроксимации НКФ
ортогональными функциями Якоби

Таблица 4.19

№	(α, β)	Аналитическое выражение	Норма функций	Δ_2
1	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s e^{-\frac{(4s+1)\gamma\tau}{2}}$	$\frac{1}{\gamma(4k+1)}$	$\frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]^2}{\gamma(m+1)(2m+1)}$
2	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s e^{-\frac{(4s+3)\gamma\tau}{2}}$	$\frac{1}{\gamma(4k+3)}$	$\frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]^2}{\gamma(m+1)(2m+3)}$
3	$(1, 0)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s e^{-(s+1)\gamma\tau}$	$\frac{1}{2\gamma(k+1)}$	$\frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]^2}{\gamma(m+1)(m+2)}$
4	$(0, 0)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s e^{-(2s+1)\gamma\tau}$	$\frac{1}{2\gamma(2k+1)}$	$\frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]^2}{2\gamma(m+1)^2}$
5	$(2, 0)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s e^{-(2s+3)\gamma\tau}$	$\frac{1}{2\gamma(2k+3)}$	$\frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]^2}{2\gamma(m+1)(m+3)}$

4.6. Аппроксимация взаимных корреляционных функций

Формально полученные результаты для аппроксимации НКФ можно обобщить и для построения ортогональных моделей взаимных корреляционных функций (ВКФ). Так как ВКФ не является четной [158], необходимо аппроксимировать как правую, так и левую её ветви. Причем число членов аппроксимирующего ряда для каждой ветви будет свое:

$$K_{axy}(\tau) = A_m \left\{ \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} 1(\tau) \psi_k(\tau, \alpha_n) + \sum_{k=0}^{m_x} \beta_{k,x} 1(-\tau) \psi_k(-\tau, \alpha_x) \right\}, \quad (4.74)$$

где

$$1(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0; \\ \frac{1}{2}, & \tau = 0; \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} \text{ и } 1(-\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > 0; \\ \frac{1}{2}, & \tau = 0; \\ 1, & \tau < 0, \end{cases} \quad (4.75)$$

$A_m = \sigma_x \sigma_y$ - наибольшее значение ВКФ.

Учитывая, что нормированная ВКФ для стационарно связанных процессов равна

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (4.76)$$

коэффициенты разложения ВКФ определяются следующими выражениями

$$\beta_{k,n} = \alpha_n \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau) \psi_n(\tau, \alpha_n) d\tau; \quad (4.77)$$

$$\beta_{k,l} = \alpha_l \int_0^{\infty} \rho_{yx}(\tau) \psi_n(\tau, \alpha_l) d\tau. \quad (4.78)$$

Соответственно методическая погрешность аппроксимации будет равна

$$\Delta = \sigma_x \sigma_y \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}^2(\tau) d\tau - \left(\frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n}^2 + \frac{1}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l}^2 \right) \right\}. \quad (4.79)$$

Исследования показали, что модель (4.74) будет справедлива, если максимум ВКФ будет находиться в «нуле». В противном случае в нулевой точке будет разрыв первого рода. Результаты аппроксимации нормированной взаимной корреляционной функции $\rho_{xy}(\tau) = e^{-\lambda|\tau-\tau_m|}$, где τ_m - значение аргумента, соответствующее максимуму ВКФ, при $M = 5000$ представлены на рис. 4.10.

Из анализа результатов видно, что даже при аппроксимации простейших моделей взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра для обеспечения допустимых погрешностей необходимо определять большое число членов разложения ряда (4.74) – 82 параметра. Эти обстоятельства без модификации модели затрудняют её применение.

Для устранения этих недостатков необходимо, в первую очередь, определить τ_m и искать модель взаимной корреляционной функции в виде:

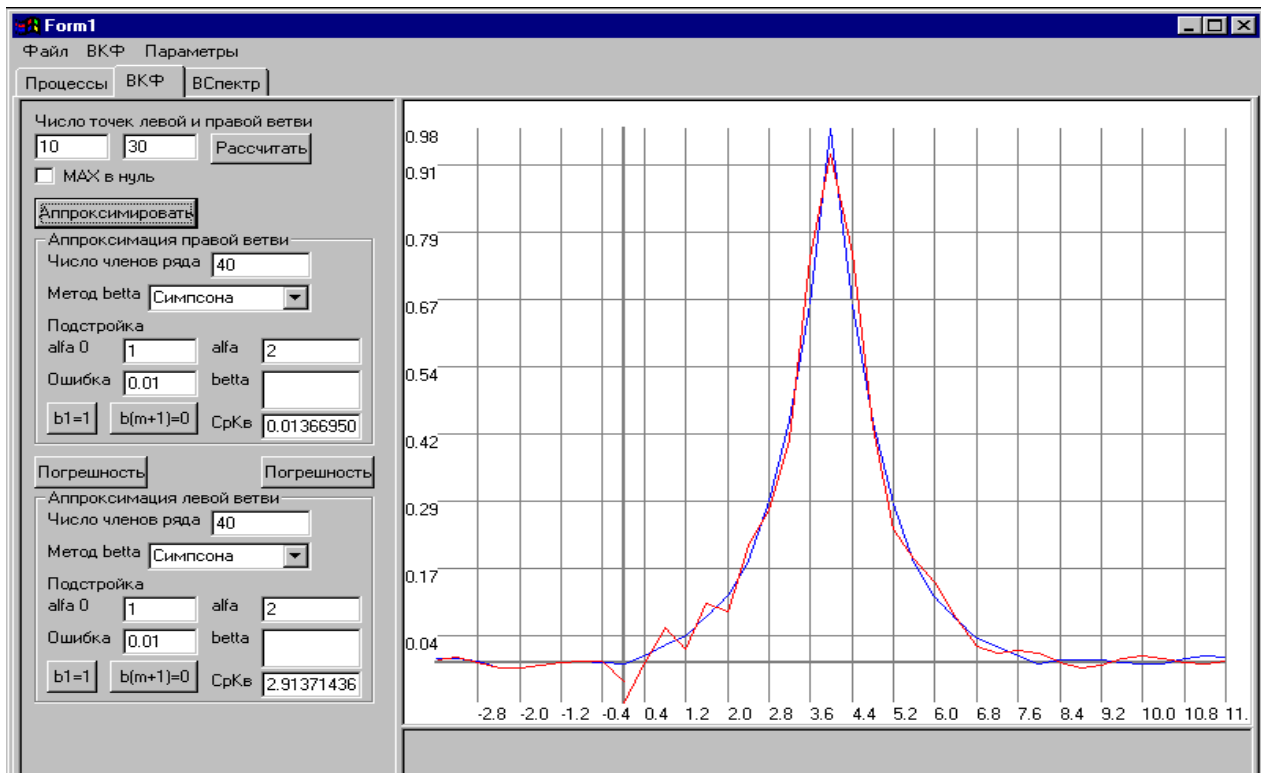


Рисунок 4.10 - Результаты аппроксимации ВКФ

$$K_{axy}(\tau) = \sigma_x \sigma_y \left\{ \sum_{k=0}^m \beta_{k,n} 1(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_{k=0}^m \beta_{k,l} 1(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_2) \right\}. \quad (4.80)$$

Коэффициенты разложения для модели (4.80) запишутся в виде:

$$\beta_{k,n} = \alpha_n \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau + \tau_m) \psi_n(\tau + \tau_m, \alpha_n) d\tau; \quad (4.81)$$

$$\beta_{k,l} = \alpha_l \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau_m - \tau) \psi_n(\tau_m - \tau, \alpha_l) d\tau. \quad (4.82)$$

Для обеспечения «склеивания» левой и правой ветвей ВНКФ, т.е. выполнения условия:

$$\rho_{axy}(\tau_m) = \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \psi_k(0, \alpha_n) = \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \psi_k(0, \alpha_l) = 1, \quad (4.83)$$

в соответствии с рекомендациями подраздела 4.3 рекомендуется вместо коэффициентов β_k использовать коэффициенты b_k , определяемые в виде (4.66) (см. таблицы 4.15 – 4.16):

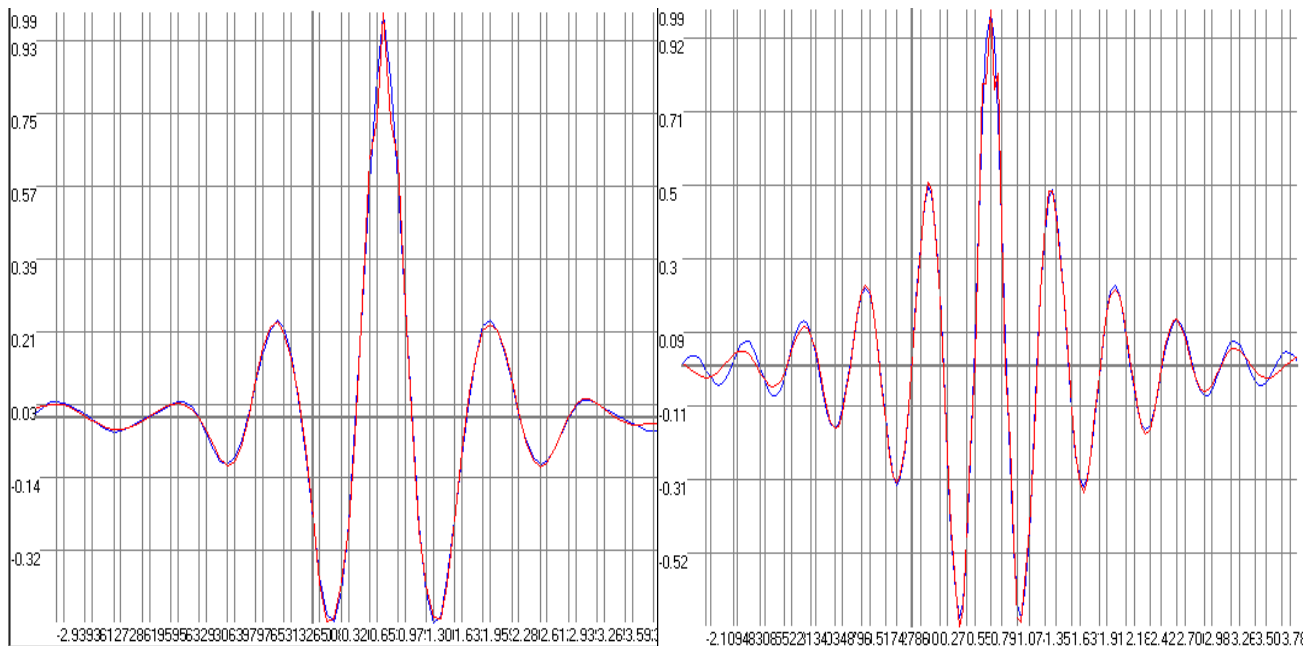
$$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha)\right)}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{\|\psi_n\|^2}} \cdot \frac{\psi_n(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2} = \beta_n + C_n.$$

С учетом (4.66) модель ВНКФ можно представить в виде

$$\rho_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} 1(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_n) + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} 1(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_l). \quad (4.84)$$

Численные значения параметров масштаба α_l и α_n определяются в соответствии с результатами таблиц 4.12.

Следует отметить, что «склеивание» левой и правой ветвей в точке τ_m , позволяет использовать для построения ортогональной модели (4.80) разные базисы.



а) $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$

б) $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} (\cos 8\tau + 0.125 \sin 8|\tau|)$

Рисунок 4.11 - Результаты аппроксимации

4.7. Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциям с помощью ЭВМ

Специфика проведения аппроксимативного корреляционного анализа с помощью ЭВМ заключается в «дискретизации» полученных ранее уравнений, выборе численного метода для их решения, написании, отладке соответствующего программного обеспечения и проведении счёта.

Диаграмма деятельности аппроксимации ВКФ ортогональными функциями приведена на рис. 4.12.

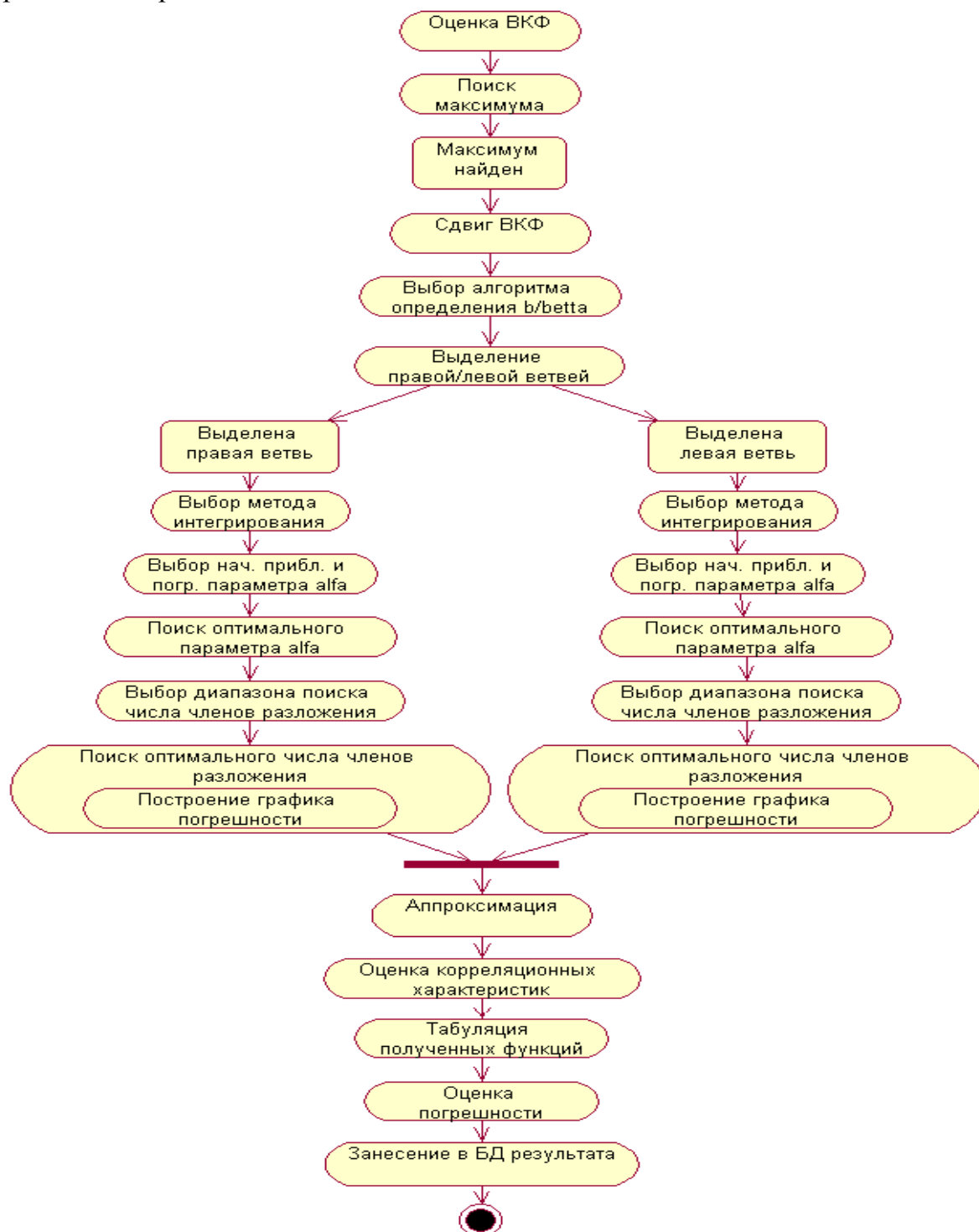


Рисунок 4.12 - Диаграмма деятельности (UML). Аппроксимация ВКФ ортогональными функциями

Первым шагом построения ортогональной модели является определение параметра масштаба. В [111] рассматривались различные алгоритмы решения этой задачи для ортогонального базиса Лагерра, которые для удобства сравнения представим в таблице 4.20. Кроме этого, в таблице представлен эвристический алгоритм (см. 8).

Алгоритмы подбора параметра α для ортогонального базиса Лагерра

Таблица 4.20

№	Алгоритм	Преимущества	Недостатки
1	$\beta_{m+1} = 0$	Минимум погрешности	$(m+1)$ корней
2	$b_{m+1} = \beta_{m+1} + \frac{1 - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1} = 0$	Минимум погрешности, $\rho_x(\tau) = 1$	$(m+1)$
3	$\beta_0 - 1 = 0$	Аналитическое решение, один корень	$\delta \neq \min$
4	$\begin{cases} \beta_0 - 1 = 0 \\ \beta_{m+1} = 0 \end{cases}$	Выход на глобальный минимум погрешности	Сложность реализации, увеличивается время анализа
5	$\begin{cases} \beta_0 - 1 = 0 \\ b_{m+1} = 0 \end{cases}$	Выход на минимум погрешности, $\rho_x(\tau) = 1$	Сложность реализации, увеличивается время анализа
6	$\beta_0 - \beta_1 - 1 = 0$	Один корень	$\delta \neq \min$
7	$\sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k - 1 = 0$	Близок к $\delta_{\min}$	$(m+1)$ корней
8	$\alpha = 2\omega_0$	Простота определения α	$\delta \neq \min$

Сравнительный анализ алгоритмов показывает, что с точки зрения минимизации вычислительных затрат, обеспечения допустимых погрешностей аппроксимации и обеспечения лучшей сходимости (уравнение имеет только один корень) наиболее целесообразно выбрать алгоритм 3. Параметр α , определенный по этому алгоритму находится вблизи α_{opt} и обеспечивает погрешности аппроксимации, близкие к минимальным. Решение этого же уравнения дает приемлемые результаты и для других ортогональных базисов.

При решении уравнения (4.52) более точный результат дает формула Симпсона [58]:

$$\frac{\alpha \Delta \tau}{3} \left\{ \rho_x(0) + \rho_x(2n)e^{-2n\alpha \Delta \tau/2} + 2[\rho_x(2\Delta \tau)e^{-2\alpha \Delta \tau/2} + \dots + \rho_x[(2n-2)\Delta \tau]e^{-(2n-2)\alpha \Delta \tau/2}] + \right. \\ \left. + [\rho_x(\Delta \tau)e^{-\alpha \Delta \tau/2} + \dots + \rho_x[(2n-1)\Delta \tau]e^{-(2n-1)\alpha \Delta \tau/2}] \right\} - 1 = 0; \quad (4.85)$$

где $m = J_{\max}/2$.

Проверим выполнения свойства ортогональности при численном интегрировании выражения (4.33). В таблице 4.21 приведены результаты расчета норм ортогональных функций Лагерра по методу Симпсона.

Результаты расчета

Таблица 4.21

	L0^2	L1^2	L2^2	L3^2	L0*L1	L0*L2	L0*L3	L1*L2	L1*L3	L2*L3
Произ	1,000009	1,000047	1,000181	0,999937	1,45E-05	3,61E-05	7,26E-05	0,000103	0,00017	0,000426
Норма	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
Погреш	3,63E-06	4,68E-05	0,000181	-6,33E-05	1,45E-05	3,61E-05	7,26E-05	0,000103	0,00017	0,000426

Анализ результатов, представленных в таблице 4.19 показывает, что условие ортогональности при применении метода Симпсона соблюдается.

Следующим шагом является определение интервала дискретизации ортогональных функций. В таблицах 4.22 – 4.24 приведены результаты определения интервалов дискретизации и необходимое число отсчетов для различных ортогональных функций.

Интервалы дискретизации и число отсчетов ортогональных функций Лагерра ($\alpha = 1$).

Таблица 4.22

k	$ L_k''(\tau, \alpha) _{\max}$	$\delta=0,02$			$\delta=0,05$		
		$\tau_{k\max}$	n	Δt	$\tau_{k\max}$	n	Δt
0	0,25	7,824	10	0,8	5,991	5	1,265
1	1,25	12,752	36	0,358	10,492	19	0,566
2	3,25	17,343	78	0,222	14,768	42	0,351
3	6,25	21,786	136	0,16	18,949	75	0,253
4	10,25	26,141	209	0,125	23,077	117	0,198

Интервалы дискретизации и число отсчетов ортогональных функций Лежандра ($\alpha = 1$).

Таблица 4.23

k	$ Leg_k''(\tau, \alpha) _{\max}$	$\delta=0,02$			$\delta=0,05$		
		$\tau_{k\max}$	n	Δt	$\tau_{k\max}$	n	Δt
0	1	3,912	10	0,4	2,996	5	0,632
1	17	3,911	40	0,097	2,991	19	0,153
2	97	3,910	96	0,041	2,980	46	0,064
3	337	3,907	179	0,022	2,963	86	0,034
4	881	3,904	290	0,013	2,939	138	0,021

Интервалы дискретизации и число отсчетов ортогональных функций Дирихле ($\alpha = 1$).

Таблица 4.24

k	$ D_k''(\tau, \alpha) _{\max}$	$\delta=0,02$			$\delta=0,05$		
		$\tau_{k\max}$	n	Δt	$\tau_{k\max}$	n	Δt
0	1	3,912	10	0,4	2,996	5	0,632
1	10	4,59	36	0,126	3,649	18	0,2
2	45	4,983	84	0,06	4,021	43	0,094
3	136	5,259	153	0,034	4,275	79	0,054
4	325	5,47	247	0,022	4,463	127	0,035

Выражение (4.34) при применении метод Симпсона запишется в виде:

$$\beta_k = \frac{\alpha \Delta \tau}{3} \left\{ \rho_x(0)L_k(0) + 2[\rho_x(2\Delta\tau)L_k(2\Delta\tau) + \dots + \rho_x[(2n-2)\Delta\tau]L_k[(2n-2)\Delta\tau]] + \right. \\ \left. + 4[\rho_x(\Delta\tau)L_k(\Delta\tau) + \dots + \rho_x[(2n-1)\Delta\tau]L_k[(2n-1)\Delta\tau]] + \rho_x(2n\Delta\tau)L_k(2n\Delta\tau) \right\}. \quad (4.86)$$

А коэффициенты разложения b_k , обеспечивающие минимальную погрешность аппроксимации при ограничениях на модель корреляционной функции, определяются в соответствии с выражением (4.66).

При определении числа членов разложения ряда m , обеспечивающих минимум квадратической погрешности аппроксимации

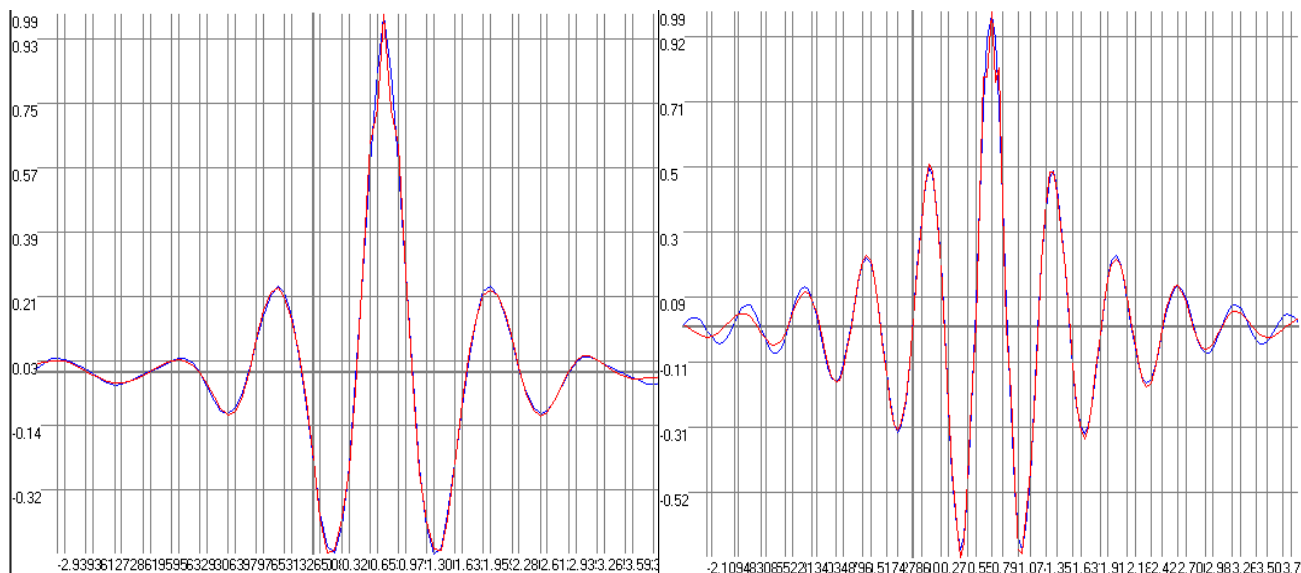
$$m = \arg \min \Delta, \quad (4.87)$$

воспользуемся методом перебора.

Таким образом, методика аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями заключается в выполнении следующих этапов:

1. определяются ординаты нормированной корреляционной функции $\{\rho_x(J\Delta\tau)\}_{J=0,\dots,J_{\max}}$;
2. выбирается ортогональный базис $\psi_k(\tau, \alpha)$;
3. определяется параметр ортогональных функций α в результате решения уравнения (4.52) (см. таблицу 4.14 – 4.15);
4. определяются коэффициенты разложения $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$ в соответствии с выражением (4.86);
5. определяются коэффициенты разложения $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$ в соответствии с выражением (4.66);
6. определяется число членов разложения ряда (4.32) m_{opt} , обеспечивающее минимальное значение погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции δ .

Результаты аппроксимации корреляционной функции ортогональными функциями Лагерра приведены на рис. 4.13.



а) $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$

б) $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} (\cos 8\tau + 0.125 \sin 8|\tau|)$

Рисунок 4.13 - Результаты аппроксимации

4.8. Аппроксимативный корреляционный анализ неэквидистантных временных рядов

При решении самых разнообразных научно-технических задач исследователю приходится сталкиваться с ситуациями, когда исследуемый процесс $X(t)$ представлен **неэквидистантным временным рядом**

$$\left[x_{ji}(t_{ji} / \Delta t_{ji}) \right]_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, Mj}, \quad (4.88)$$

где $\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = random$.

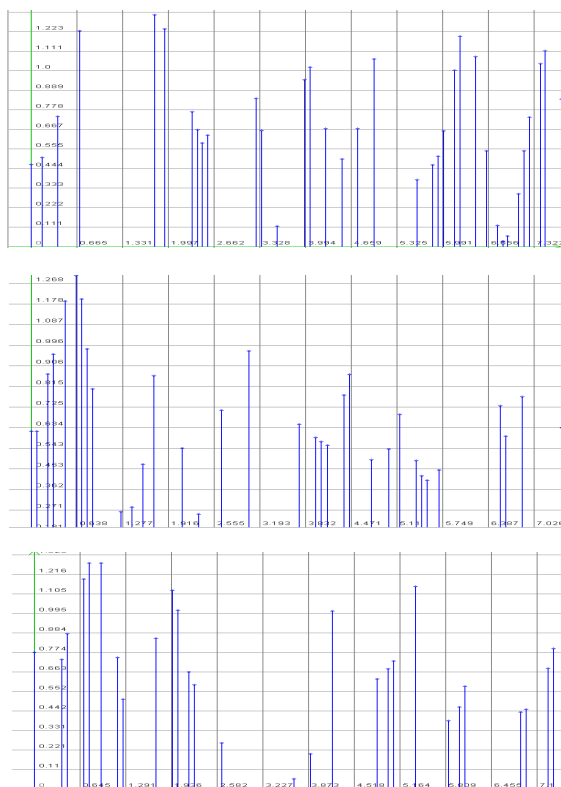


Рисунок 4.14 - Примеры реализаций неэквидистантных временных рядов

Заметим, что индекс i в этом случае характеризует лишь место отсчёта или метки времени в массивах, где хранятся входные данные, а не характеризует время наступления события. Примеры реализаций неэквидистантных временных рядов приведены на рис. 4.14.

В большинстве случаев это обстоятельство не позволяет применять классические алгоритмы оценивания и соответствующие им технические средства, принципиально ориентированные на обработку регулярных временных рядов.

С учетом особенностей представления данных, участвующих в формировании оценки измеряемой случайной величины, сформировались три основных направления статистических измерений вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов:

- оценка вероятностной характеристики без учета нерегулярности временного ряда;
- оценка измеряемой величины с предварительным восстановлением неэквидистантного временного ряда в промежуточных точках (точках регулярной дискретизации) с учетом модели и критерия восстановления;

оценка измеряемой величины без восстановления неэквидистантного временного ряда в промежуточных точках с использованием только существенных отсчетов и соответствующих им меток времени.

Первые два направления ориентированы на применение классической теории оценивания и соответствующих ей классических алгоритмов и аппаратно-программных средств.

Третье - требует разработки новой теории описания неэквидистантных временных рядов, оценки их вероятностных характеристик, а также принципов построения и проектирования видов обеспечения и всего комплекса аппаратно-программных средств в целом.

В соответствии с общей теорией статистических измерений выражение для оценки вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов примет вид [117]:

$$\hat{G}[X(t)] = S_d g \left\{ x_{ji}(t_{ji}) \right\}_{j=1,2,\dots,N}^{i=1,2,\dots,Mj}. \quad (4.89)$$

Отсюда видны основные отличия алгоритмов оценивания вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов от классических алгоритмов:

1. x_{ji}, t_{ji} и M_j являются случайными величинами;
2. необходимо определить вид функционального преобразования $g[]$, учитывающий специфику представления входных данных x_{ji}, t_{ji} и M_j ;
3. необходимо определить вид оператора усреднения S_d .

При оценке корреляционных функций неэквидистантных временных рядов, аргументом которых являются t, t' или τ , необходимо учитывать нерегулярность временного ряда, так как $\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \text{random}$. В этом случае применение классических алгоритмов корреляционного анализа без восстановления пропущенных отсчётов невозможно - получится неверный результат.

Предположим, что в результате эксперимента получена совокупность центрированных неэквидистантных временных рядов (в противном случае ряды необходимо предварительно центрировать):

$$\left[\overset{\circ}{x}_{ji}(t_{ji}) \right]_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, M_j}. \quad (4.90)$$

Отметим, что длительность j -реализации ряда

$$T_j = \sum_{i=1}^{M_j-1} \Delta t_{ji}. \quad (4.91)$$

Восстановив пропущенные отсчёты по какому-либо алгоритму восстановления (пока неважно по какому), получим регулярный временной ряд с интервалом дискретизации $\Delta \tau$ между отсчётами:

$$\left[\overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} \right]_{j=1, \dots, N}^{n=1, \dots, M^*j}, \quad (4.92)$$

где $\overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)}[(n-1)\Delta \tau]$ - модельное значение регулярного временного ряда;

$M_j^* = \text{ent} \left[\frac{T_j}{\Delta \tau} \right]$ - объём выборки j -ой реализации восстановленного ряда.

В каждом j -ом ряду случайным образом будут расположены и существенные, и модельные отсчеты, причём, в ряде случаев модельные и существенные значения будут совпадать - $\overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)}[(n-1)\Delta \tau] = \overset{\circ}{x}_{ji}(t_{ji})$.

Пусть требуется найти **j -текущую** оценку корреляционной функции стационарного неэквидистантного временного ряда с учетом восстановления пропущенных отсчётов. В этом случае при оценке корреляционной функции возможны четыре варианта произведений существенных и модельных отсчётов. Для однозначности введем индикатор состояния $\delta_{jn,k}$, который в зависимости от выполнения некоторых условий принимает одно из двух значений: 0 или 1. Тогда

$$\hat{K}_{x_j}(J) = M \left[\overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} \right] = M \left[\overset{\circ}{x}_{jn} \overset{\circ}{x}_{j,n+J} \delta_{jn,1} + \overset{\circ}{x}_{jn} \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} \delta_{jn,2} + \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} \overset{\circ}{x}_{j,n+J} \delta_{jn,3} + \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} \delta_{jn,4} \right], \quad (4.93)$$

где $\delta_{jn,l} = \begin{cases} 1, \text{ если } \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{jn} \cap \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{j,n+J}; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$

$$\begin{aligned}\delta_{jn,2} &= \begin{cases} 1, \text{ если } \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{jn} \cap \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} ; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \\ \delta_{jn,3} &= \begin{cases} 1, \text{ если } \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} \cap \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} ; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \\ \delta_{jn,4} &= \begin{cases} 1, \text{ если } \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} \cap \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} . \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}\end{aligned}$$

В том случае, когда восстановление пропущенных отсчётов невозможно или алгоритм восстановления неизвестен, необходимо обрабатывать только существенные отсчёты неэквидистантного временного ряда. Тогда $\delta_{jn,1} = 1$, а $\delta_{jn,2} = \delta_{jn,3} = \delta_{jn,4} = 0$, и корреляционная функция будет определяться выражением:

$$\hat{K}_{xj}(J) = M \left[\overset{\circ}{x}_{jn} \overset{\circ}{x}_{j,n+J} \right]. \quad (4.94)$$

Полученное выражение, из-за случайного характера расположения существенных отсчетов в восстановленном ряду, не позволяет синтезировать алгоритм для оценки корреляционной функции, так как **значение индекса n не определяет датирование отсчётов неэквидистантного временного ряда**. Напомним, что в неэквидистантном временном ряду значение второго индекса i не определяет время прихода существенного отсчёта, а определяет лишь его место в массивах данных, подлежащих обработке.

Заметим, что значение индикатора состояния $\delta_{jn,1} = 1$ только в том случае, когда на временном интервале $J\Delta\tau$ находятся два существенных отсчёта неэквидистантного временного ряда $\overset{\circ}{x}_{ji}(t_{ji}) = \overset{\circ}{x}_{jn}$ и $\overset{\circ}{x}_{j,i+s}(t_{j,i+s}) = \overset{\circ}{x}_{j,n+J}$, где s - целая случайная величина, характеризующая количество пропущенных существенных отсчётов. Значение случайной величины s при оценке корреляционной функции находится в диапазоне $(0, L \leq J_{max})$, при этом равенство соблюдается только для регулярного потока.

Таким образом, необходимо ввести новый индикатор состояния, который бы однозначно определял отсчёт $\overset{\circ}{x}_{j,i+s}(t_{j,i+s})$, отстоящий от отсчёта $\overset{\circ}{x}_{ji}(t_{ji})$ на временном интервале $J\Delta\tau$. Так как в общем случае t_{ji} являются действительными, а не целыми числами, определим индикатор состояния с использованием оператора выделения целой части $ent[\]$ в виде:

$$\delta_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ ent} \left[\frac{t_{j,i+s} - t_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}. \quad (4.95)$$

Выражение для определения отсчёта ряда с учётом (4.8) и фильтрующего свойства индикатора состояния (аналогичного фильтрующему свойству δ - функции) примет вид:

$$\overset{\circ}{x}_{j,i}(t_{ji} + J\Delta\tau) = \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s}, \quad (4.96)$$

С учётом (4.96) выражение (4.94) представим в виде:

$$\mathcal{K}_{xj}(J) = M \left[x_{ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right]. \quad (4.97)$$

Заметим, что количество произведений существенных отсчётов в выражении (4.10) будет равно сумме индикаторов состояния:

$$d = \sum_{i=1}^{Mj} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}, M_j \leq M_j^*. \quad (4.98)$$

Это значение d используется для усреднения при получении оценок корреляционных функций. С учетом выражений (4.89) и (4.98) выражение (4.97) запишется в виде:

$$\mathcal{K}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} x_{ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{Mj} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}. \quad (4.99)$$

Разделив числитель и знаменатель в (4.99) на M_j , окончательно получим:

$$\mathcal{K}_{xj}(J) = \frac{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{Mj} x_{ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{Mj} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}. \quad (4.100)$$

Выражение

$$\mathcal{E}_{xj}(J) = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{Mj} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s} \quad (4.101)$$

является **j-текущей** оценкой **интервальной корреляционной функции** и характеризует распределение отсчётов в потоке, находящихся на временном интервале $J\Delta\tau$ [95, 96].

Отсюда видно, что выражение (4.99) отличается от классического алгоритма **j-текущей** оценки корреляционной функции (см. таблицу 3.1):

1. видом функционального преобразования $g \left[x_{ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right]$, учитывающего специфику представления входных данных x_{ji}, t_{ji}, L и $\Delta\tau$;

2. видом оператора усреднения $S_d = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{Mj} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$ и значением d ;

3. переходом алгоритма в **класс косвенных алгоритмов** оценивания корреляционных функций.

Таким образом, **j-текущая** оценка корреляционной функции зависит от интервальной корреляционной функции потока отсчётов неэквидистантного временного ряда. Назовем этот алгоритм **алгоритмом с использованием интервальной корреляционной функции (АИИКФ)**, а метод - **косвенным методом измерения корреляционных функций неэквидистантных временных рядов с использованием интервальной корреляционной функции**.

Заметим, что для регулярного временного ряда с интервалом дискретизации $\Delta\tau$ $M_j = M$ и, как видно из выражения (4.95),

$$\delta_{j,i+s} = \begin{cases} 1, & \text{если } s = J \\ 0, & \text{если } s \neq J \end{cases} \quad (4.102)$$

Из выражения (4.98) следует, что $d = M - J$ и

$$\mathcal{E}_{xj}(J) = \frac{1}{M-J} \sum_{i=1}^{M-J} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s} = 1 \quad (4.103)$$

Подставив выражение (4.102) в выражение (4.98), окончательно получим:

$$\mathcal{K}_{xj}(J) = \frac{1}{M-J} \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} x_{j,i+J} \quad (4.104)$$

Отметим, что выражение (4.104) является **частным случаем** выражения (4.99) или (4.100) для регулярного временного ряда и представляет собой **классический мультипликативный алгоритм j-текущей оценки корреляционной функции**.

При синтезе аппаратных, аппаратно-программных средств j-текущей оценки корреляционной функции неэквидистантного временного ряда или интервальной корреляционной функции потока отсчётов целесообразно использовать выражение (4.99). При теоретических же исследованиях, особенно при анализе погрешностей оценивания, - выражение (4.100), так как оно в явном виде содержит интервальную корреляционную функцию, что позволяет использовать при решении ряда задач математический аппарат, разработанный для анализа результатов косвенных измерений [88].

На основе выражения (4.99) возможен синтез алгоритмов для оценивания различных корреляционно-структурных функций, в том числе, и взаимных корреляционных функций [117]. Следует заметить, что необходимо оценивать две ветви взаимных корреляционных функций. При оценке правой ветви $x_{j,i+s}^\circ = y_{j,i+s}^\circ$, а левой - $x_{ji}^\circ = y_{ji}^\circ$.

Для получения более общего результата преобразуем выражение (4.12) к виду:

$$\mathcal{G}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} g_1 \left[x_{ji}^\circ \right] \sum_{s=0}^L g_2 \left[x_{j,i+s}^\circ \delta_{j,i+s} \right]}{\sum_{i=1}^{Mj} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}, \quad (4.105)$$

где $g_1[\]$ и $g_2[\]$ - функциональные преобразования x_{ji}° и $x_{j,i+s}^\circ$ соответственно. Отметим, что в некоторых случаях функциональные преобразования могут совпадать.

Аналогично можно найти **t-текущую** оценку корреляционной функции неэквидистантного ряда с использованием только существенных отсчётов:

$$\mathcal{K}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} x_{ji}^\circ \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s}^\circ \delta_{j,i+s}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}, \quad (4.106)$$

$$\text{где } \delta_{\zeta, ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{ent} \left[\frac{t_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = \zeta; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.107)$$

Только в случае, когда индикатор состояния $\delta_{\zeta,ji} = 1$, можно выполнять функциональное преобразование в (4.106) и искать отсчет, находящийся на временном интервале $J\Delta\tau$ от отсчёта $x_{ji}(\zeta\Delta\tau)$.

Заметим, что выражение (4.106) отличается от классического алгоритма **t-текущей** оценки корреляционной функции и **j-текущей** оценки (4.99):

1. видом функционального преобразования $g\left[\sum_{i=1}^{Mj} x_{ji} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}\right]$, учитывающего специфику представления входных данных x_{ji}, t_{ji}, M_j, L и $\Delta\tau$;

2. видом оператора усреднения $S_d = \frac{\sum_{i=1}^N}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$ и значением d ;

3. переходом алгоритма в **класс косвенных алгоритмов** оценивания корреляционных функций.

Разделив числитель и знаменатель в (4.106) на N , окончательно получим:

$$\mathcal{K}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} x_{ji} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}. \quad (4.108)$$

Знаменатель в выражении (4.108), представляющий собой функцию от $\zeta, \zeta + J$, характеризует распределение отсчётов в потоке, находящихся на временном интервале $J\Delta\tau$ от точки $t = \zeta\Delta\tau$, является **t-текущей** оценкой интервальной корреляционной функции [117]:

$$\mathcal{E}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}. \quad (4.109)$$

Таким образом, алгоритм **t текущей** оценки корреляционной функции также относится классу алгоритмов **с использованием интервальной корреляционной функции**, синтезированных на основе **косвенного метода измерения корреляционных функций неэквидистантных временных рядов**.

На основе выражения (4.106) возможен синтез алгоритмов для оценивания различных корреляционно-структурных функций, в том числе, и взаимных корреляционных.

Для получения более общего результата преобразуем выражение (4.106) к виду:

$$\mathcal{G}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} g_1 \left[x_{ji} \delta_{\zeta,ji} \right] \sum_{s=0}^L g_2 \left[x_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right]}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}. \quad (4.110)$$

Заметим, что для регулярного временного ряда с интервалом дискретизации $\Delta\tau$, $M_j = M$,

$$\delta_{\zeta,ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = \zeta; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (4.111)$$

а

$$\delta_{j,i+s} = \begin{cases} 1, & \text{если } s = J \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}. \quad (4.112)$$

Из выражения (4.108) следует, что $d = N$ и

$$\epsilon_{xj}(J) = \frac{1}{M-J} \sum_{i=1}^{M-J} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s} = 1. \quad (4.113)$$

Окончательно получим

$$\kappa_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{j\zeta} x_{j,\zeta+J}. \quad (4.114)$$

Отсюда видно, что выражение (4.114), является **частным случаем** выражения (4.106) или (4.108) для регулярного временного ряда и представляет собой **классический мультипликативный алгоритм t -текущей оценки корреляционной функции**.

При нахождения **t -текущей** оценки корреляционной функции неэквидистантного временного ряда из-за случайного характера объёма выборки **j – реализации M_j** необходимо иметь в виду, что, для получения оценки по всей совокупности реализации, требуется выполнение условия:

$$(\zeta + J)\Delta\tau \leq \sum_{i=1}^{Mj-1} \Delta t_{ji}. \quad (4.115)$$

Полученные результаты можно обобщить и для получения **средних** оценок корреляционных функций неэквидистантных временных рядов. Для этого необходимо полученные j -текущие оценки усреднить по совокупности реализации, например

$$\kappa_{xcp}(J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\sum_{i=1}^{Mj} x_{ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{Mj} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}. \quad (4.116)$$

Специфика аппроксимации корреляционных функций неэквидистантных временных рядов заключается в следующем:

1. пропуски наблюдений, «дрожание» приводят к увеличению дисперсии оценки ординат корреляционной функции, особенно при небольшой выборке;
2. при небольшой выборке теряет смысл понятие погрешности приближения, так как корреляционная функция оценивается с большой погрешностью;
3. минимальное значение погрешности аппроксимации позволяет убедиться, что выбрана лучшая модель из рассматриваемого класса моделей.

В таблице 4.25 в качестве примера приведены результаты аппроксимации корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ неэквидистантного временного ряда, полученного p -преобразованием исходного ряда, ортогональными функциями Лагерра.

Результаты аппроксимации

Таблица 4.25

M	P	α	m	δ	M	P	α	m	δ
		10,028	21	0,1872			11,848	27	0,1936
		10,728	18	0,2027			11,124	21	0,1700
6667	0,15	10,712	18	0,2093	10000	0,15	11,282	17	0,1445
		10,236	21	0,1513			10,370	20	0,1712

		10,186	29	0,2184			8,758	24	0,1545
		9,923	18	0,1659			11,116	19	0,1168
		11,594	18	0,1173			10,126	21	0,1177
3333	0,30	9,604	20	0,1253	5000	0,30	11,538	19	0,1181
		9,578	19	0,1195			10,688	19	0,1068
		11,185	17	0,1203			10,452	19	0,0919
		10,109	22	0,1265			10,527	18	0,0842
		9,772	22	0,1051			10,811	18	0,0878
2222	0,45	10,502	20	0,1192	3333	0,45	9,672	21	0,0969
		10,137	19	0,0861			9,762	21	0,0892
		10,581	21	0,1130			9,895	18	0,0904
		10,340	18	0,0754			10,263	20	0,0785
		10,963	16	0,0814			10,130	21	0,0896
1667	0,60	10,436	18	0,0872	2500	0,60	10,605	18	0,0821
		10,351	18	0,0980			10,602	18	0,0774
		10,964	18	0,0954			10,202	20	0,0910
		10,713	18	0,0757			10,444	20	0,0792
		10,735	18	0,0838			9,772	18	0,0994
1333	0,75	10,413	20	0,0825	2000	0,75	10,586	20	0,0747
		9,396	22	0,0786			10,369	20	0,0887
		10,899	18	0,0941			10,076	18	0,0823
		10,332	20	0,0741			10,009	18	0,0764
		10,228	21	0,0781			10,255	20	0,0723
1111	0,90	10,108	19	0,0722	1667	0,90	10,585	18	0,0759
		9,814	18	0,0671			10,384	19	0,0762
		10,253	20	0,0725			10,002	19	0,0769
		10,566	17	0,0787			10,180	20	0,0683
		10,401	18	0,0642			10,300	20	0,0820
1000	1	10,197	21	0,0844	1500	1,00	10,255	18	0,0667
		10,545	20	0,0878			10,452	18	0,0785
		10,100	19	0,0728			10,025	22	0,0957

На рис. 4.15 приведены результаты оценки погрешности аппроксимации δ , параметра функции Лагерра α и оптимального числа членов разложения ряда m от значения параметра p - преобразования для различных эквивалентных объёмов выборки.

Анализ результатов показывает, что погрешность аппроксимации зависит от численного значения параметра p - преобразования и уменьшается с увеличением p .

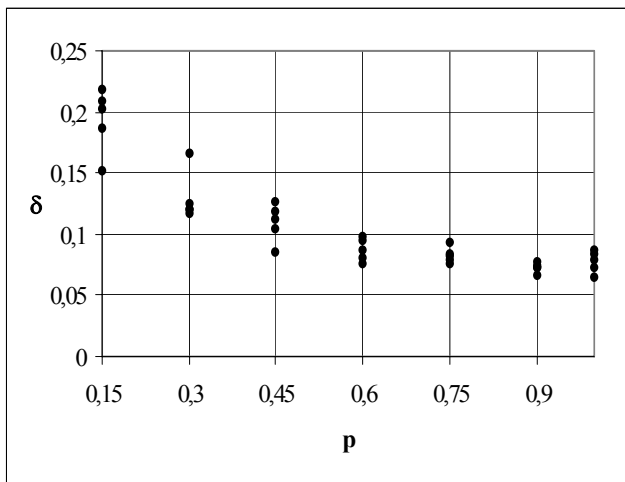
Значение параметра функции Лагерра α для рассматриваемой модели близко к теоретическому значению $\alpha_m = 10,2$ и практически не зависит от значения параметра p при эквивалентном объёме выборки $M_s \geq 1000$.

Оптимальное число членов разложения ряда m колеблется около 20 и также мало зависит от значения параметра p и эквивалентного объёма выборки при $M_s \geq 1000$.

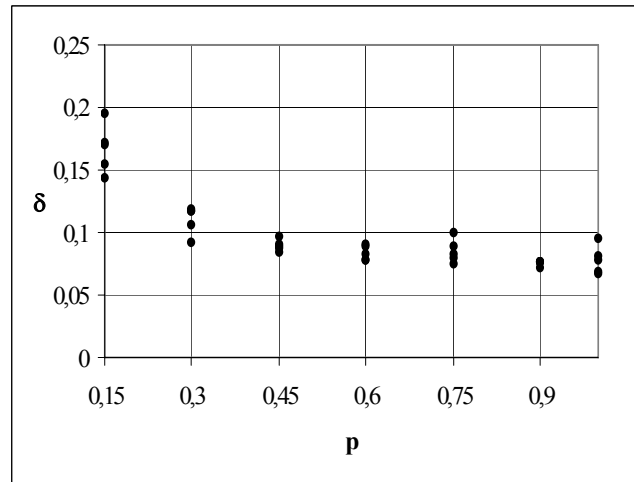
На рис. 4.16-4.18 приведены: зависимости погрешности аппроксимации от числа членов разложения ряда и результаты аппроксимации для корреляционной функции вида $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ для $M_s = 1500$, на рис. 4.19 - 4.20 – для других колебательных моделей.

Полученные результаты удовлетворяют требованиям практики.

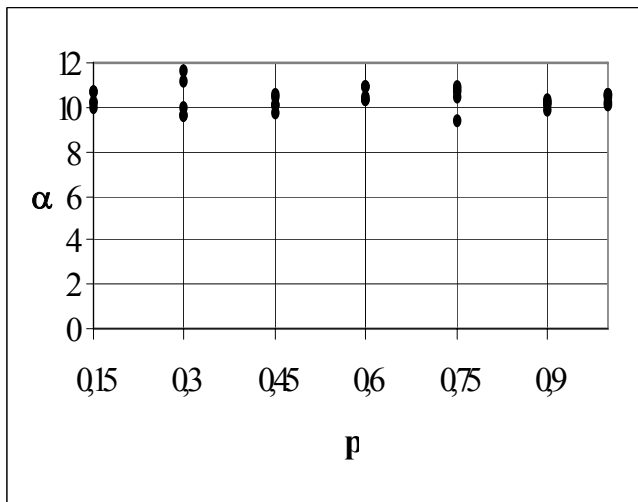
В таблице 4.26 приведены результаты аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра при «дрожании» временного ряда.



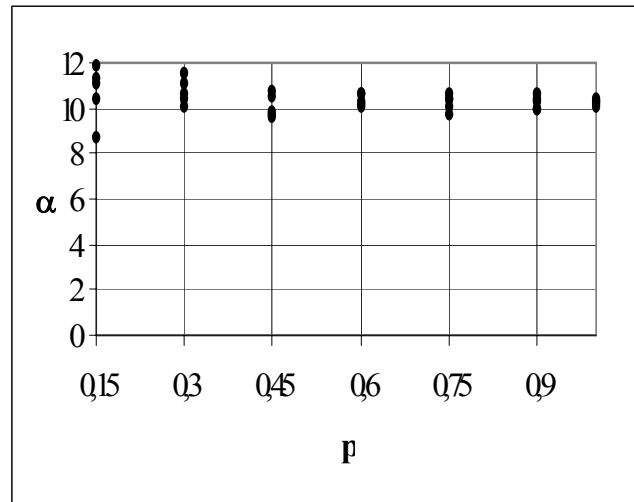
а) $\delta = f(p), M_s = 1000$



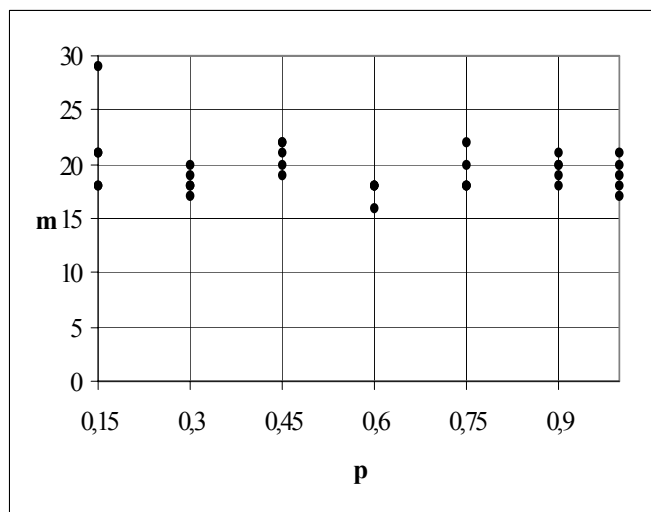
б) $\delta = f(p), M_s = 1500$



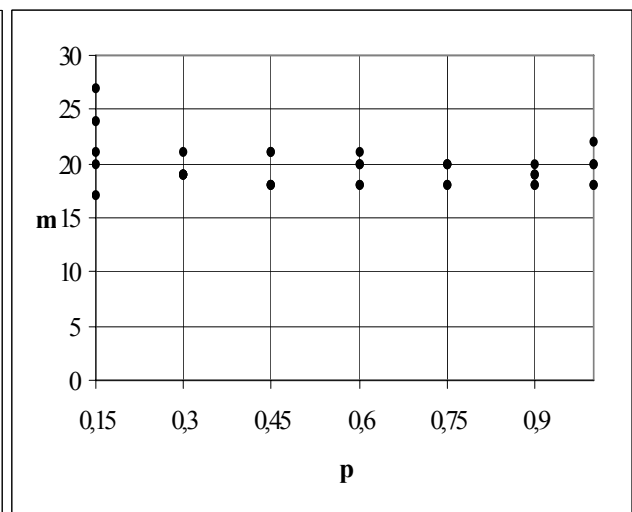
в) $\alpha = f(p), M_s = 1000$



г) $\alpha = f(p), M_s = 1500$



д) $m = f(p), M_s = 1000$



е) $m = f(p), M_s = 1500$

Рисунок 4.15 - Результаты аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра при p -преобразовании неэквидистантных временных рядов

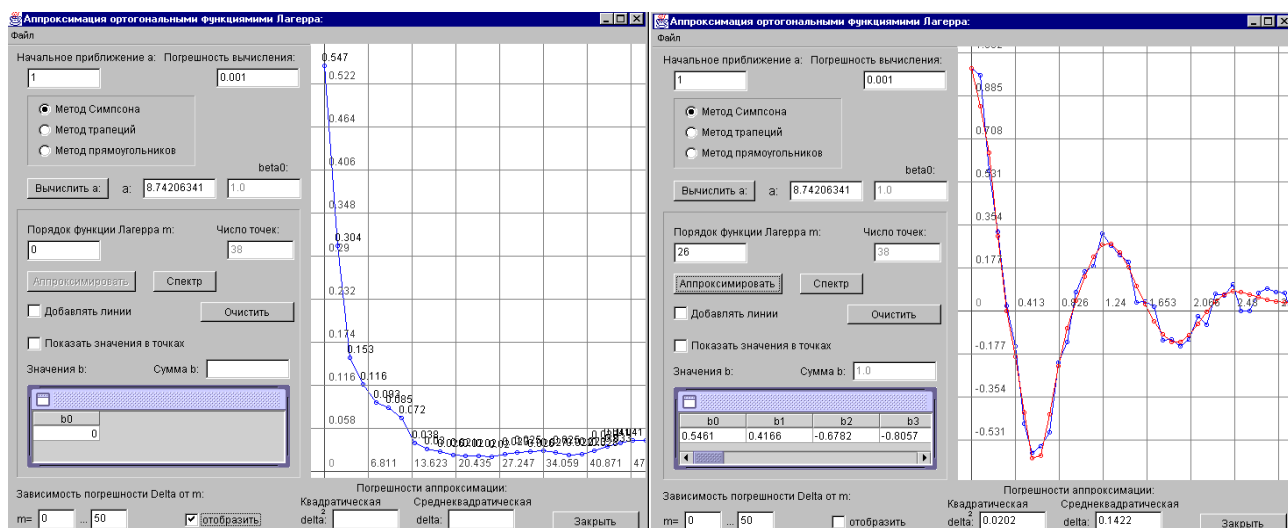


Рисунок 4.16 - Результаты аппроксимации $p=0.15$, $M=10000$

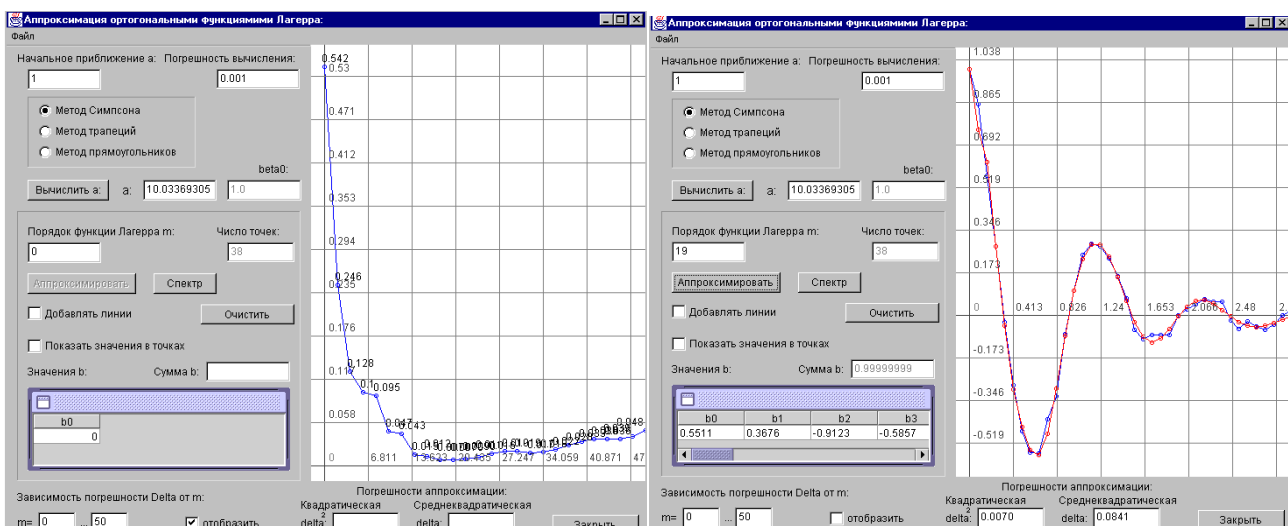


Рисунок 4.17 - Результаты аппроксимации $p=0.45$, $M=3333$

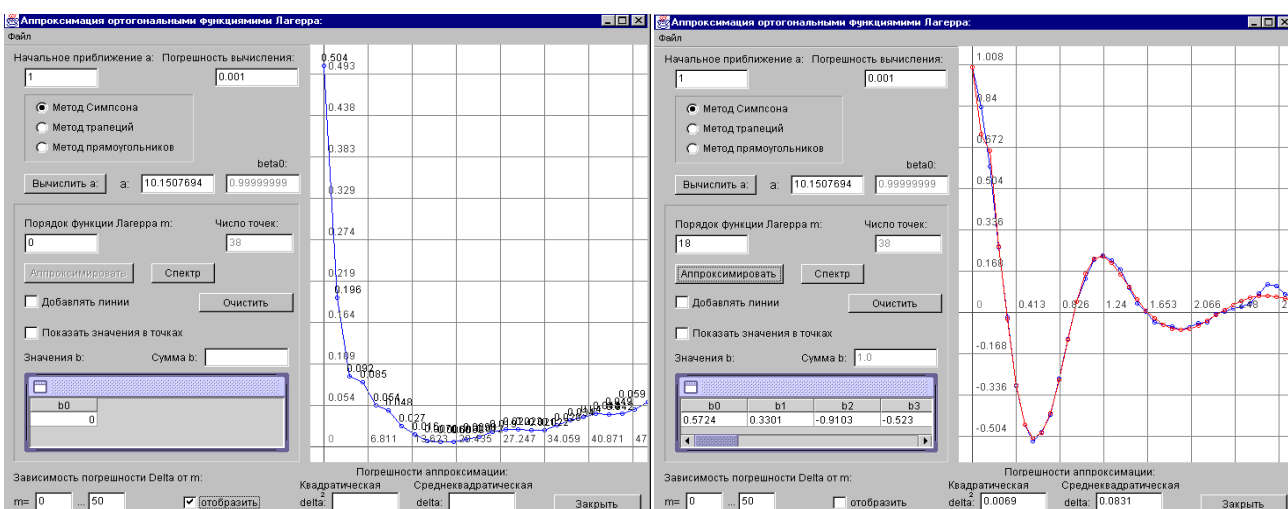


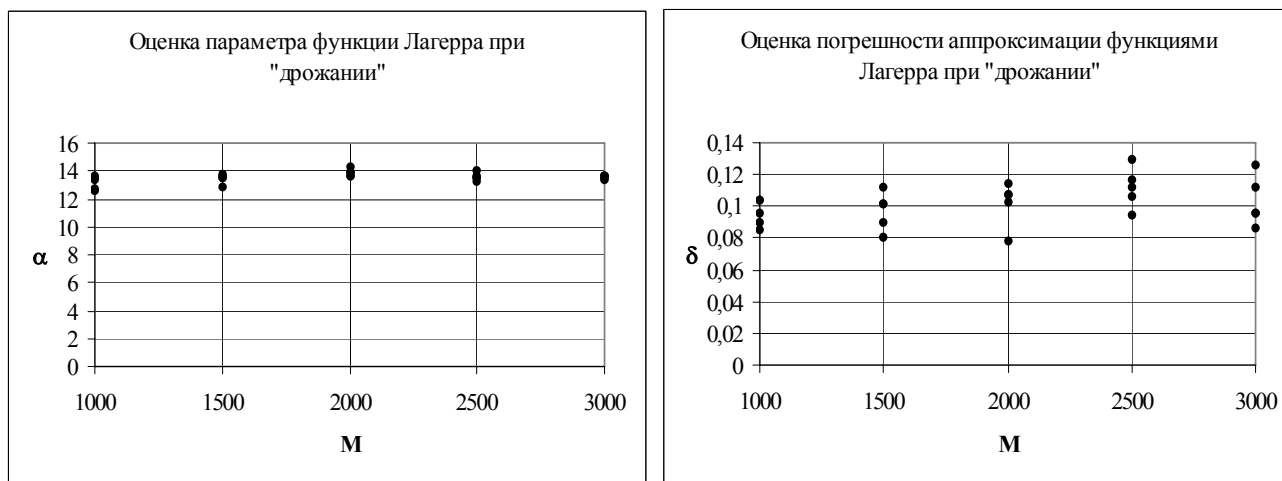
Рисунок 4.18 - Результаты аппроксимации $p=0.75$, $M=2000$

Результаты аппроксимации корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ неэквидистантного временного ряда с «дрожанием».

Таблица 4.26

M	α	m	δ	M	α	m	δ
1000	12,6230	16	0,1042	2000	13,9360	14	0,1074
	13,4440	14	0,0903		13,5993	14	0,0779
	12,7640	16	0,1044		13,5965	15	0,1147
	13,6737	14	0,0851		14,2770	16	0,1073
	13,4274	14	0,0957		13,856	14	0,1028
1500	13,6140	15	0,0801	3000	13,6764	14	0,0864
	12,8356	14	0,1017		13,5061	14	0,0959
	13,4841	14	0,1011		13,3281	14	0,0960
	13,795	15	0,1119		13,6684	14	0,1122
	13,5194	16	0,0898		13,6922	14	0,1259

На рис. 4.19 приведены результаты оценки параметра функции Лагерра и погрешности аппроксимации ортогональными функциями Лагерра.



а)

б)

Рисунок 4.19 - Результаты аппроксимации

Анализ результатов показывает, что:

1. значение параметра функции Лагерра при изменении объёма выборки в диапазоне 1000-3000 изменяется незначительно;
2. число членов разложения ряда m в этом же диапазоне тоже изменяется в небольших пределах;
3. диапазон изменения погрешности аппроксимации также изменяется в незначительно.

Отсюда следует вывод, что при аппроксимации корреляционных функций неэквидистантных временных рядов целесообразно применять модель на базе ортогональных функций Лагерра, параметры которой можно определять при эквивалентном объёме выборки больше 1000.

На рис. 4.20 представлены результаты аппроксимации для различных моделей корреляционных функций при $M=1000$.

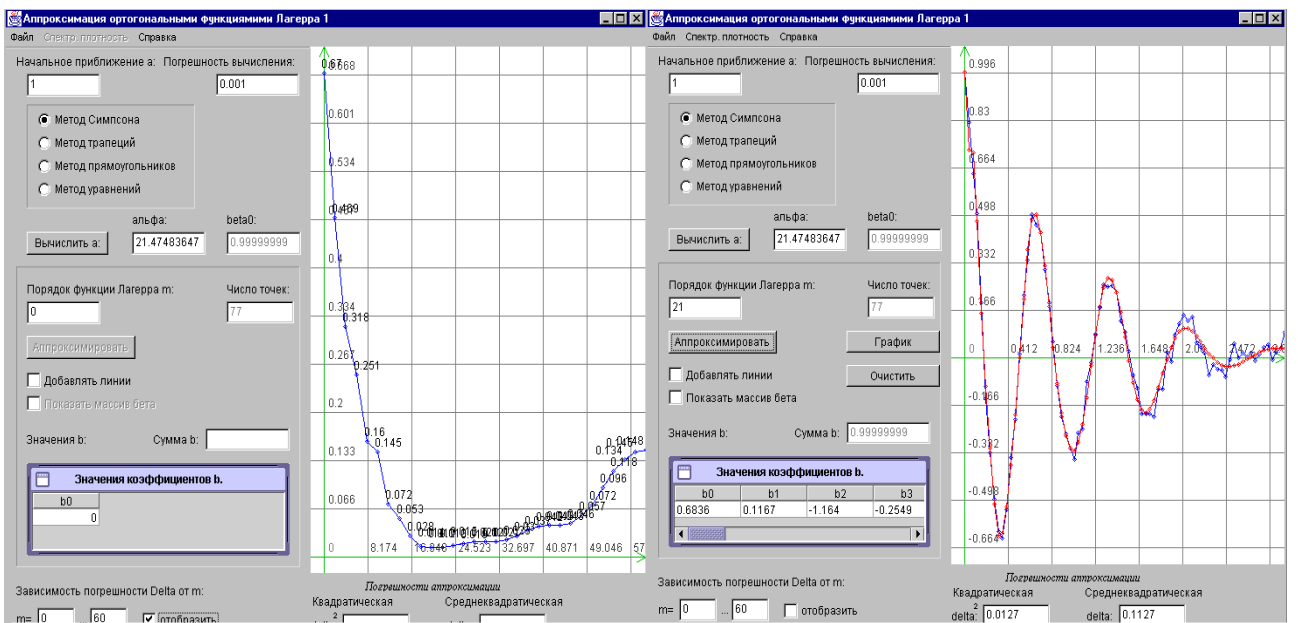
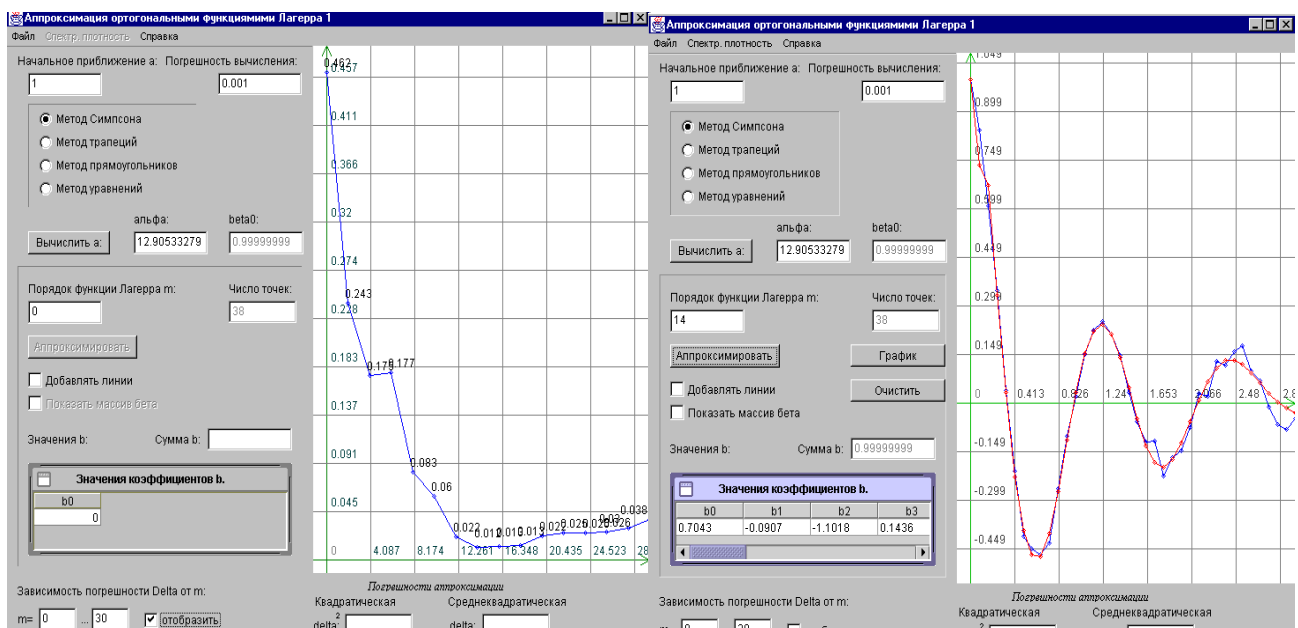


Рисунок 4.20 - Результаты аппроксимации

4.9. Ортогональные модели структурного анализа

При анализе случайных процессов со стационарными приращениями часто вместо корреляционного анализа проводят структурный анализ [164].

Представив ортогональную модель структурной функции (с учетом четности) в виде

$$S_a(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(\tau), \quad (4.117)$$

даже на примере анализа стационарного случайного процесса с нормированной корреляционной функцией $\rho_{x,5}(\tau) = \exp(-|\tau|) \cos 5\tau$ можно показать, что результаты аппроксимации структурной функции неудовлетворительные (см. рис. 4.21), особенно на «хвосте» структурной функции. Объясняется это большим отличием вида ортогональных функций Лагерра от анализируемой СФ -

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} L_k(\tau, \alpha) = 0.$$

Отметим, что параметры модели структурной функции m и α определяются по методике определения указанных параметров при аппроксимации корреляционных функций [111].

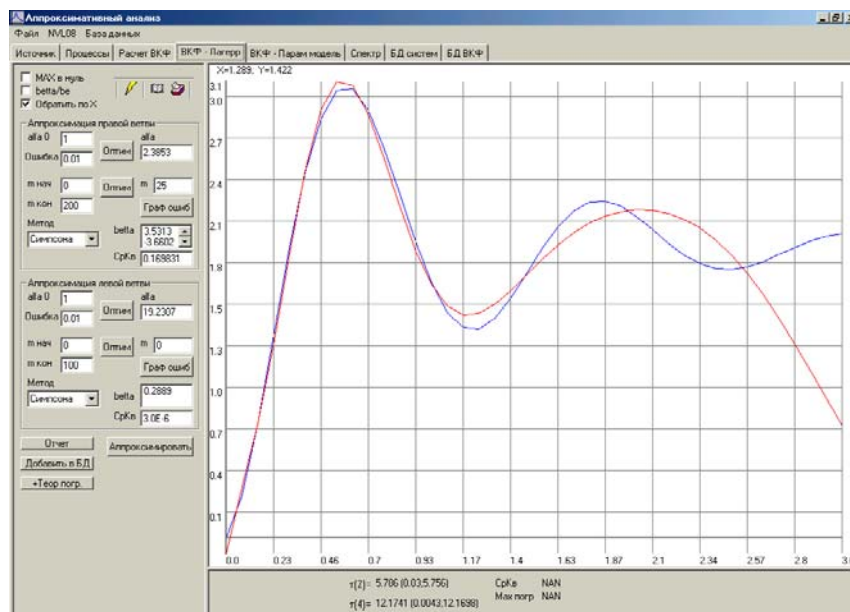


Рисунок 4.21 - Результаты аппроксимации СФ ортогональными функциями Лагерра

Из анализа рис. 4.21 видно, что аппроксимация неудовлетворительная, особенно на «хвосте» СФ.

Для устранения этого недостатка воспользуемся следующим подходом.

Найдем центрированную СФ (ЦСФ) в виде

$$\overset{\circ}{S}_x(\tau) = S_x(\tau) - m_s, \quad (4.118)$$

где $m_s = M[S_x(\tau)]$ - математическое значение СФ.

Разложим в ряд по ортогональным функциям ЦСФ

$$\overset{\circ}{S}_{an}(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(\tau, \alpha), \quad (4.119)$$

где $\dot{S}_{an}(\tau) = \dot{S}_a(\tau) / A_m$.

Коэффициенты разложения определим в виде

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \int_a^b \dot{S}_{xn}(\tau) \psi_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (4.120)$$

С учетом выражения (4.118) представим модель СФ в виде

$$S_a(\tau) = m_s + A_m \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(\tau, \alpha), \quad (4.121)$$

На рис. 4.22-4.24 представлены результаты аппроксимации ЦСФ в ортогональных базисах Лагерра, Лежандра, Дирихле для рассматриваемого примера. Заметим, что $m_s = 1,9705 = -S_x(0)$.

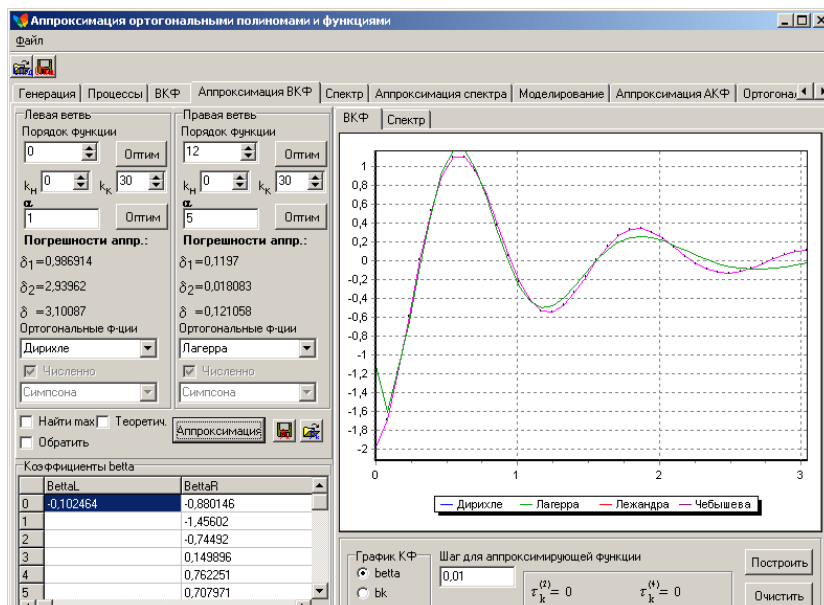


Рисунок 4.22 - Результаты аппроксимации ЦСФ ортогональными функциями Лагерра

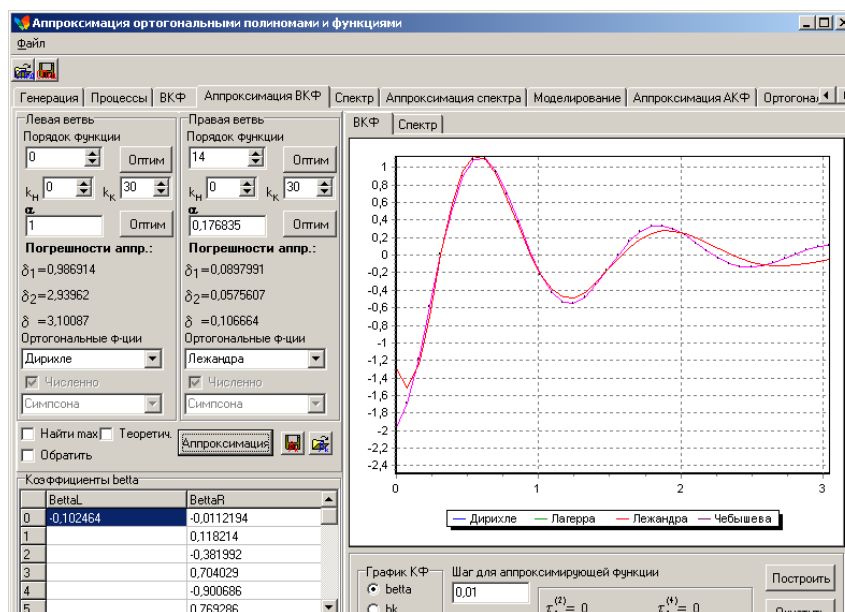


Рисунок 4.23 - Результаты аппроксимации ЦСФ ортогональными функциями Лежандра

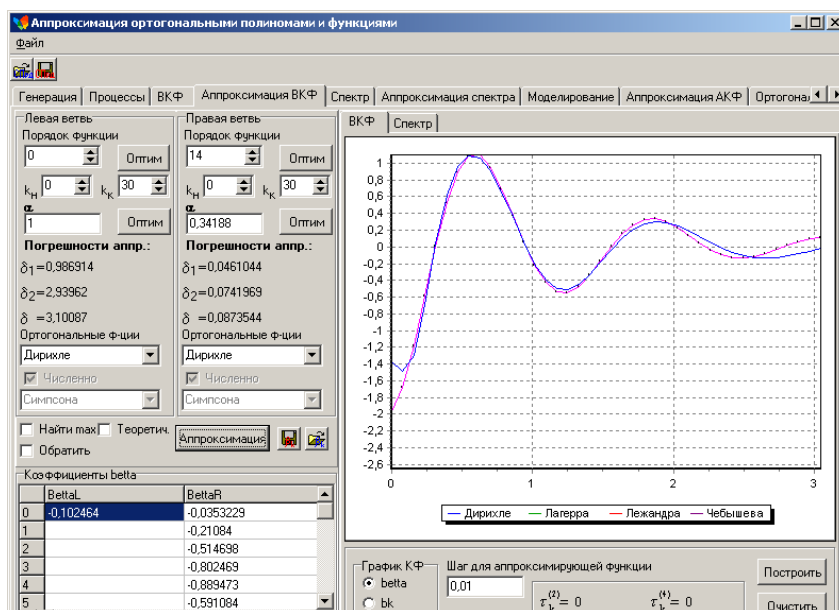


Рисунок 4.24 - Результаты аппроксимации ЦСФ ортогональными функциями Дирихле

Анализ результатов, представленных на рис. 4.22 – 4.24, показывает, что значение модели ЦСФ в «нуле» не равно значению ЦСФ в нуле – 1,9075.

Поставим задачу определить коэффициенты разложения ЦСФ в ортогональном базисе b_k

$$S_{an}(\tau) = \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) \quad (4.122)$$

так, чтобы квадратическая погрешность аппроксимации была минимальной при дополнительном условии

$$\sum_{k=0}^m b_k \psi_k(0, \alpha) = 1. \quad (4.123)$$

Т.е. для этого необходимо минимизировать Δ_1 по b_k [122]:

$$\Delta_1 = \int_0^\infty \left[S_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau + \lambda \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(0, \alpha) = \min. \quad (4.124)$$

Найдём частные производные $\frac{\partial \Delta_1}{\partial b_n}$ и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial b_n} = -2 \int_0^\infty \left[S_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) \right] \psi_n(\tau, \alpha) d\tau + \lambda \psi_n(0, \alpha) = 0. \quad (4.125)$$

Отсюда

$$-2 \beta_n \|\psi_n\|^2 + 2 b_n \|\psi_n\|^2 + \lambda \psi_n(0, \alpha) = 0. \quad (4.126)$$

Или

$$b_n = \beta_n - \frac{\lambda \psi_n(0, \alpha)}{2 \|\psi_n\|^2}. \quad (4.127)$$

С учетом (4.123)

$$\sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(0, \alpha) - \frac{\lambda}{2} \sum_{k=0}^m \frac{\psi_k(0, \alpha)}{\|\psi_k\|^2} = 1. \quad (4.128)$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{2 \left[\sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 - \dot{S}_x(0) \right]}{\sum_{k=0}^m \frac{\psi_k(0, \alpha)}{\|\psi_k\|^2}}. \quad (4.129)$$

Подставив это выражение в выражение для оценки коэффициента разложения b_n , получим:

$$b_n = \beta_n + \frac{\left(\dot{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha) \right)}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{\|\psi_k\|^2}} \cdot \frac{\psi_n(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2} = \beta_n + C_n. \quad (4.130)$$

Выражения для C_n для различных ортогональных базисов представлены в таблице 4.27.

Значения коэффициентов при ограничениях на модель
структурной функции

Таблица 4.27

Ортогональный базис	C_n
Лагерра	$\frac{\left(\dot{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m \beta_k \right)}{(m+1)}$
Лежандра	$\frac{\left(\dot{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot (-1)^k \right)}{(m+1)^2} \cdot (-1)^n \cdot (2n+1)$
Дирихле	$\frac{2(n+1) \left(\dot{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m \beta_k \right)}{(m+1)(m+2)}$

Выражение для поправочного коэффициента C_n для ортогонального базиса Якоби с учетом (4.130) примет вид

$$C_n = \frac{P_k^{(\alpha, \beta)}(0, \gamma)}{\|P_k^{(\alpha, \beta)}(\tau, \gamma)\|^2} \frac{\dot{S}_x(0) - \sum_{s=0}^m \beta_s P_s^{(\alpha, \beta)}(0, \gamma)}{\sum_{s=0}^m \frac{P_s^{(\alpha, \beta)}(0, \gamma)^2}{\|P_s^{(\alpha, \beta)}(\tau, \gamma)\|^2}}. \quad (4.131)$$

В таблице 4.28 приведены аналитические выражения для оценки $\|P_n^{(\alpha, \beta)}(\tau, \gamma)\|^2$ и C_n для различных функций Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(\tau, \gamma)$. Отметим, что для рассматриваемых ортогональных функций Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(0, \gamma) = (-1)^n$.

Выражение для поправочного коэффициента в ортогональных базисах
Якоби (α, β)

Таблица 4.28

№	(α, β)	C_k
1	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$\frac{(-1)^k (4k+1) \left[\overset{\circ}{S}_x(0) - \sum_{s=0}^m (-1)^s \beta_s \right]}{(m+1)(2m+1)}$
2	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$\frac{(-1)^k (4k+3) \left[\overset{\circ}{S}_x(0) - \sum_{s=0}^m (-1)^s \beta_s \right]}{(m+1)(2m+3)}$
3	$(1, 0)$	$\frac{(-1)^k 2(k+1) \left[\overset{\circ}{S}_x(0) - \sum_{s=0}^m (-1)^s \beta_s \right]}{(m+1)(m+2)}$
4	$(0, 0)$	$\frac{(-1)^k (2k+1) \left[\overset{\circ}{S}_x(0) - \sum_{s=0}^m (-1)^s \beta_s \right]}{(m+1)^2}$
5	$(2, 0)$	$\frac{(-1)^k (2k+3) \left[\overset{\circ}{S}_x(0) - \sum_{s=0}^m (-1)^s \beta_s \right]}{(m+1)(m+3)}$

Определим погрешность аппроксимации Δ

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \int_0^\infty \left[\overset{\circ}{S}_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \\ &= \int_0^\infty \overset{\circ}{S}_x(\tau) d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m c_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Представим погрешности аппроксимации СФ в виде:

$$\Delta_1 = \Delta + \Delta_2, \quad (4.133)$$

где Δ_2 составляющая методической погрешности аппроксимации, вызванная дополнительным условием (4.123).

Тогда

$$\begin{cases} \Delta = \int_0^\infty \overset{\circ}{S}_x(\tau) d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2; \\ \Delta_2 = \sum_{k=0}^m c_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{cases} \quad (4.134)$$

Вторую составляющую погрешности, вызванную необходимостью выполнения условия (4.123), с учетом (4.130) удобнее представить в виде:

$$\Delta_2 = \frac{\left[\overset{\circ}{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(0, \alpha) \right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{\|\psi_k\|^2}}. \quad (4.135)$$

В таблице 4.29 приведены выражения для оценки Δ и Δ_2 для различных базисов.

Ортогональный ба- зис	Δ	Δ_1
Лагерра	$\left\ \overset{\circ}{S}_x \right\ ^2 - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2$	$\frac{\left(\overset{\circ}{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m \beta_k \right)^2}{\alpha(m+1)}$
Лежандра	$\left\ \overset{\circ}{S}_x \right\ ^2 - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{2k+1}$	$\frac{\left(\overset{\circ}{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot (-1)^k \right)^2}{2\alpha(m+1)^2}$
Дирихле	$\left\ \overset{\circ}{S}_x \right\ ^2 - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{k+1}$	$\frac{\left(\overset{\circ}{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m \beta_k \right)^2}{\alpha(m+1)(m+2)}$

Составляющие методической погрешности для ортогонального базиса Якоби примут вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = \int_0^1 \overset{\circ}{S}_x(\tau) d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \left\| P_k^{(\alpha, \beta)} \right\|^2; \\ \Delta_2 = \frac{\left[\overset{\circ}{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m \beta_k P_k^{(\alpha, \beta)}(0, \gamma) \right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{\left\| P_k^{(\alpha, \beta)} \right\|^2}}. \end{array} \right. \quad (4.136)$$

Выражения для оценки составляющей погрешности Δ_2 для ортогонального базиса Якоби представлены в таблице 4.30.

Составляющие методической погрешности аппроксимации СФ

Таблица 4.30

№	(α, β)	Δ_2
1	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$\frac{\left[\overset{\circ}{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k \right]^2}{\gamma(m+1)(2m+1)}$
2	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$\frac{\left[\overset{\circ}{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k \right]^2}{\gamma(m+1)(2m+3)}$
3	$(1, 0)$	$\frac{\left[\overset{\circ}{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k \right]^2}{\gamma(m+1)(m+2)}$
4	$(0, 0)$	$\frac{\left[\overset{\circ}{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k \right]^2}{2\gamma(m+1)^2}$
5	$(2, 0)$	$\frac{\left[\overset{\circ}{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k \right]^2}{2\gamma(m+1)(m+3)}$

На рис. 4.25 – 4.26 приведены результаты аппроксимации нормированной ЦСФ для ортогональных базисов Лагерра, Лежандра, Дирихле, подтверждающие работоспособность предложенных алгоритмов определения коэффициентов разложения b_k .

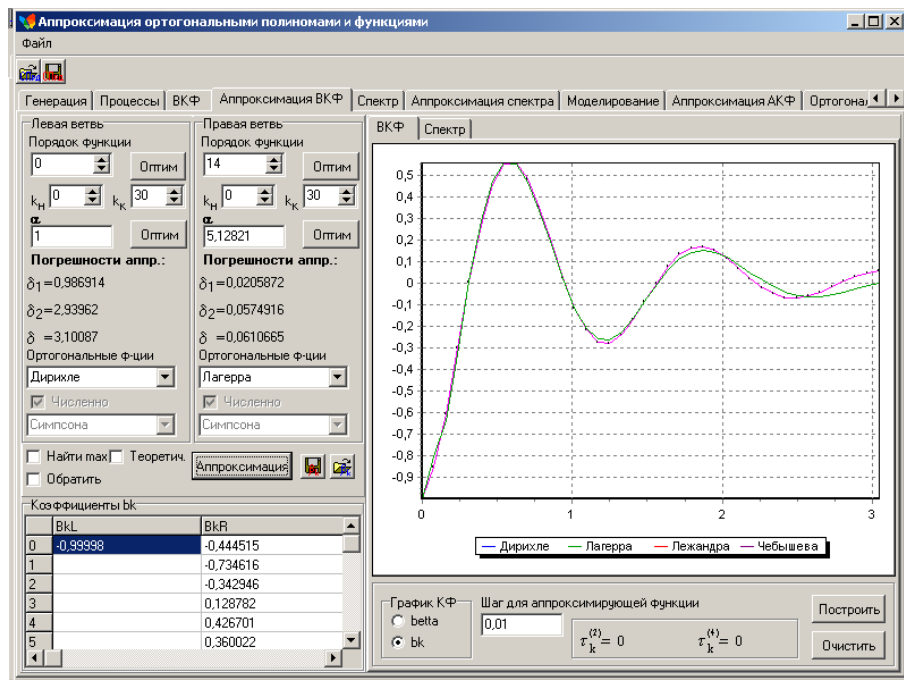


Рисунок 4.25 - Результаты аппроксимации НЦСФ ортогональными функциями Лагерра

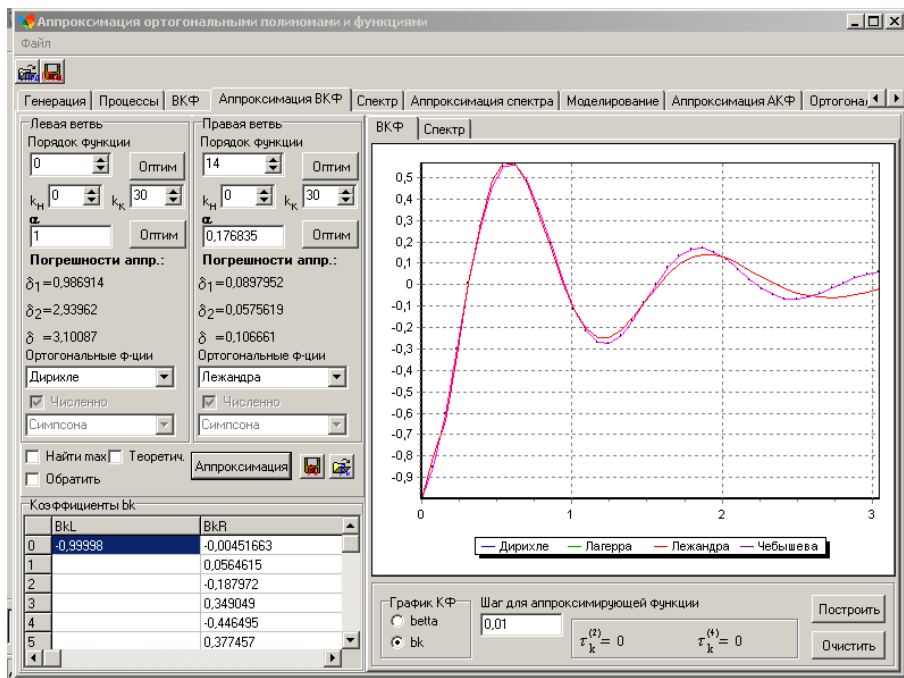


Рисунок 4.26 - Результаты аппроксимации НЦСФ ортогональными функциями Лежандра

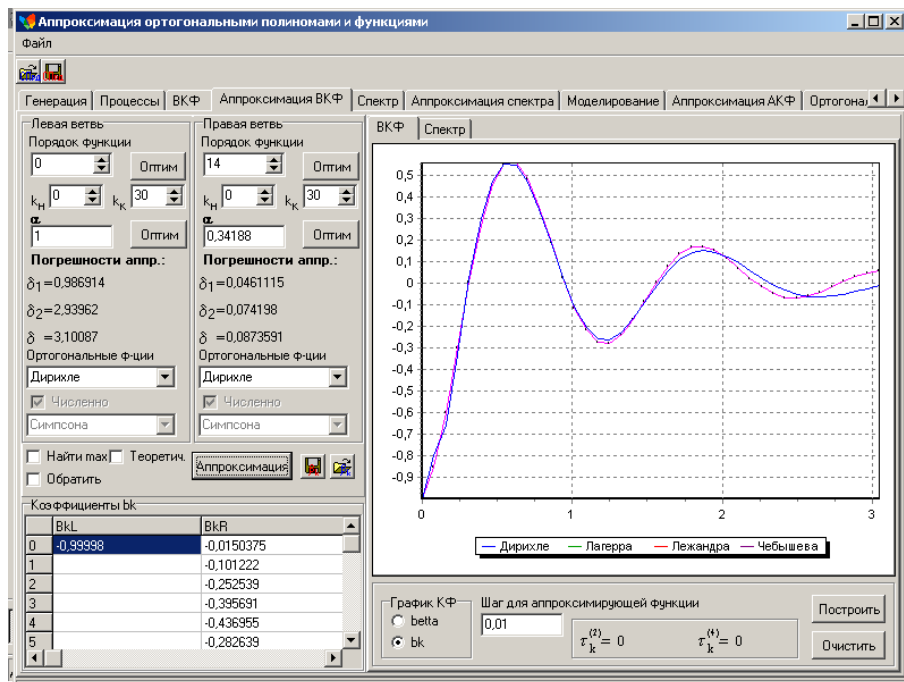


Рисунок 4.27 - Результаты аппроксимации НЦСФ ортогональными функциями Дирихле

Таким образом, предложенная методика позволяет определить параметры модели колебательной структурной функции с соблюдением свойства (4.123). Отметим, что аналогичным образом возможно построение ортогональных моделей и других функций, у которых принципиально значение функции в «нуле» равно нулю, например, переходных характеристик и т.д.

Для монотонных СФ предложенная методика дает большие погрешности. Для устранения этого недостатка необходимо модель СФ представить в виде

$$\dot{S}_x(\tau) = S_x(\tau) - S_x(\infty). \quad (4.137)$$

При этом все остальные алгоритмы остаются без изменения.

На рис. 4.28 представлены результаты аппроксимации монотонной СФ в ортогональном базисе Дирихле, модель которой представлена выражением (4.119).

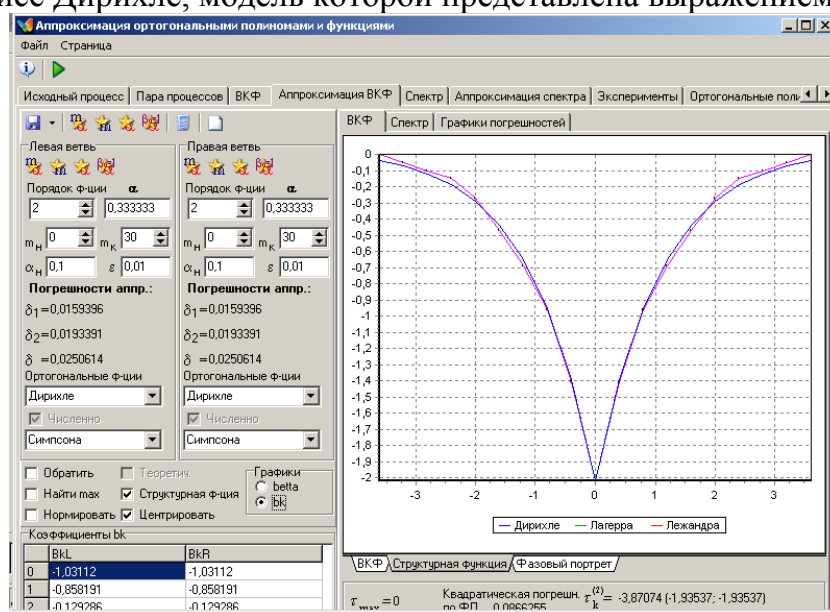


Рисунок 4.28 - Результаты аппроксимации монотонной СФ в ортогональном базисе Дирихле

Полученные результаты можно обобщить и на аппроксимацию взаимной структурной функции, под которой понимают

$$S_{xy}(\tau) = M \{ [x(t) - y(t - \tau)]^2 \}. \quad (4.138)$$

Так как взаимная структурная функция не обладает свойством четности, необходимо аппроксимировать её левую и правую ветви отдельно. Представив модель центрированной СФ в виде

$$\overset{\circ}{S}_{axy}(\tau) = A_m \left\{ \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} 1(\tau) \psi_k(\tau, \alpha_n) + \sum_{k=0}^{m_a} \beta_{k,l} 1(-\tau) \psi_k(-\tau, \alpha_l) \right\}, \quad (4.139)$$

можно заметить, что в точке нуль наблюдается разрыв первого рода (см. рис. 4.29).

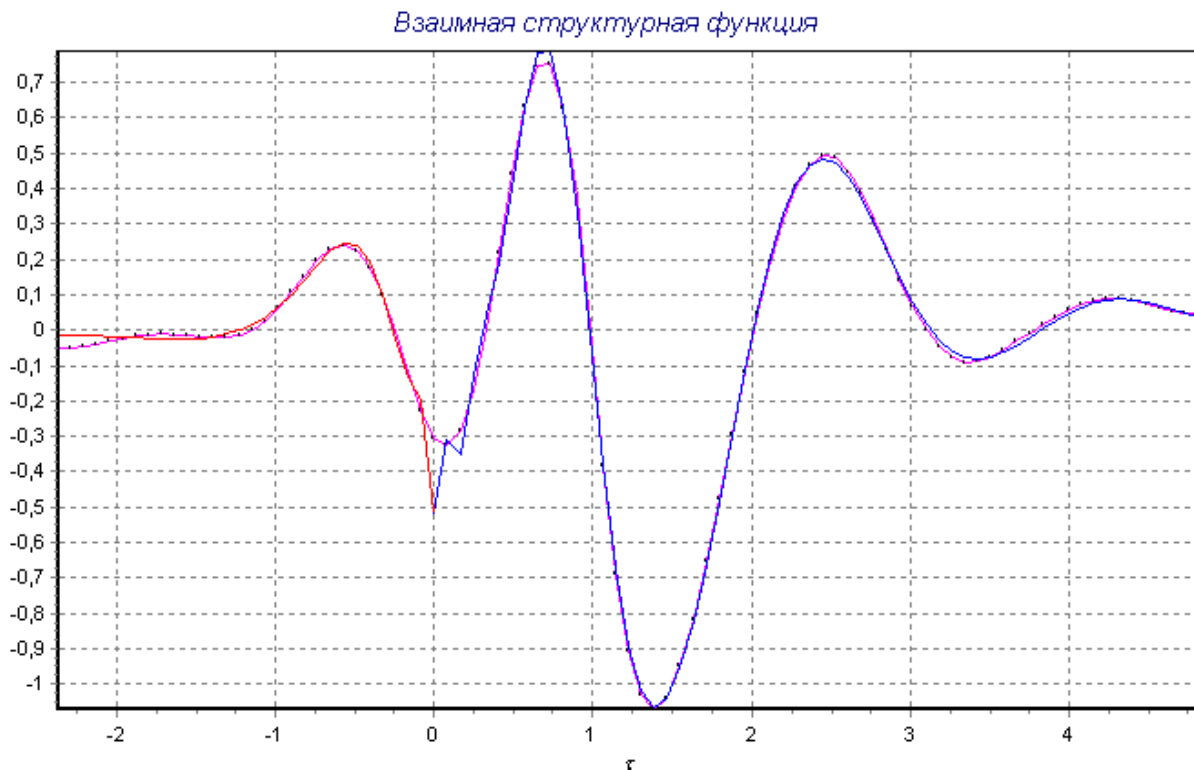


Рисунок 4.29 - Результат аппроксимации

Для устранения этого недостатка можно воспользоваться результатами подраздела 4. и представить модель СФ в виде

$$\overset{\circ}{S}_{axy}(\tau) = A_m \left\{ \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} 1(\tau) \psi_k(\tau, \alpha_n) + \sum_{k=0}^{m_a} b_{k,l} 1(-\tau) \psi_k(-\tau, \alpha_l) \right\}. \quad (4.140)$$

Отметим, что для аппроксимации ветвей можно использовать разные ортогональные базисы (см. рис. 4.30).

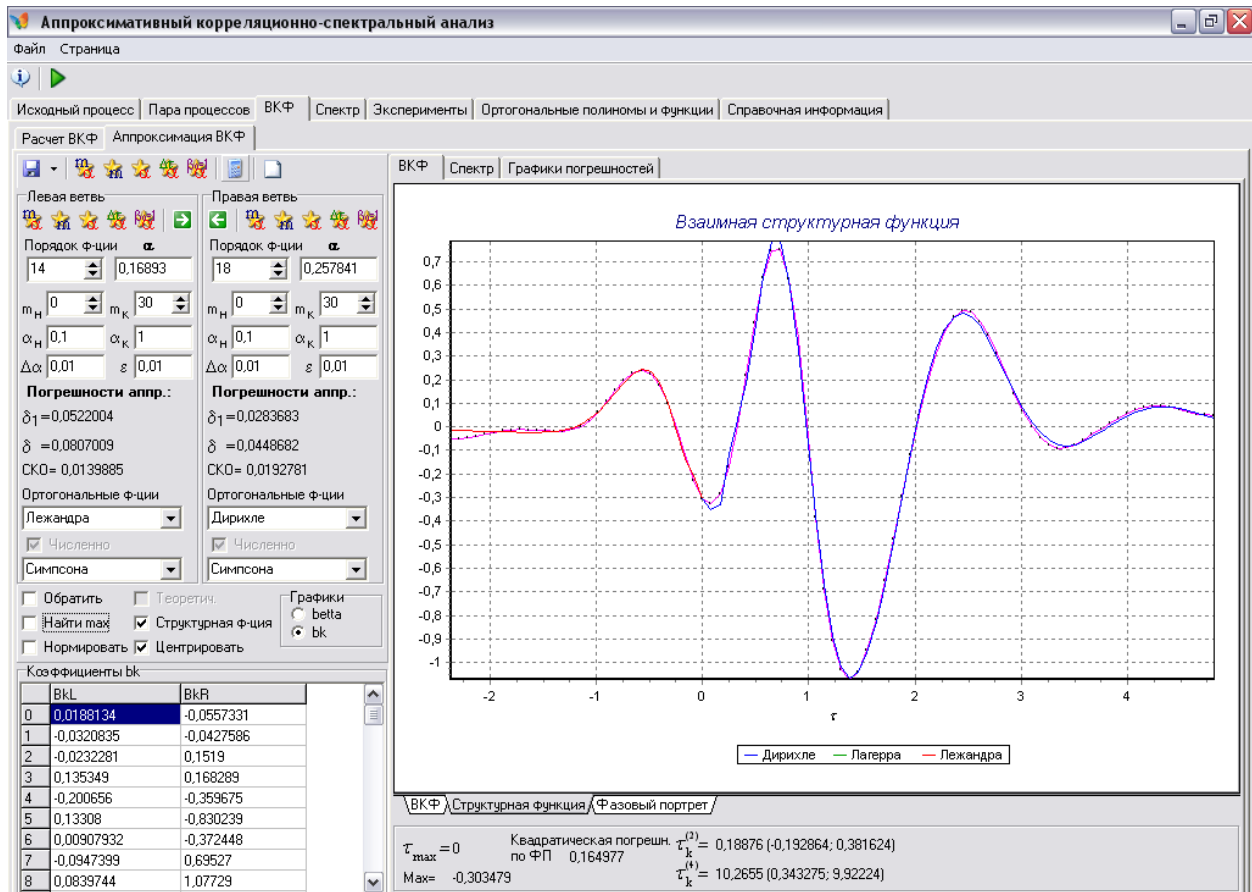


Рисунок 4.30 - Результат аппроксимации с учетом «склеивания»

Алгоритмы определения параметра масштаба α / γ и m аналогичны алгоритмам оценки соответствующих параметров корреляционной функции (см. подразделы 4.3-4.6).

Следует отметить, что модель (4.140) даёт хорошие результаты, если минимальное значение $\dot{S}_{axy}(\tau)$ незначительно смещено относительно начала координат. В противном случае квадратическая погрешность аппроксимации возрастает. Для устранения этого недостатка необходимо модифицировать ортогональную модель, воспользовавшись результатами подраздела 4.6:

$$\dot{S}_{axy}(\tau) = A_m \left\{ \sum_{k=0}^m \beta_{k,n} 1(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_k \beta_{k,l} 1(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_2) \right\}, \quad (4.141)$$

где τ_m - значение аргумента, соответствующее минимуму $\dot{S}_{axy}(\tau)$.

Коэффициенты разложения для модели (4.141) запишутся в виде:

$$\beta_{k,n} = \alpha_n \int_0^{\infty} \dot{S}_{axy_n}(\tau + \tau_m) \psi_n(\tau + \tau_m, \alpha_n) d\tau; \quad (4.142)$$

$$\beta_{k,l} = \alpha_l \int_0^{\infty} \dot{S}_{axy_n}(\tau_m - \tau) \psi_n(\tau_m - \tau, \alpha_l) d\tau. \quad (4.143)$$

Для обеспечения «склеивания» левой и правой ветвей взаимной структурной функции, т.е. выполнения условия:

$$\dot{S}_{axy_n}(\tau_m) = \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \psi_k(0, \alpha_n) = \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,l} \psi_k(0, \alpha_l) = 1, \quad (4.144)$$

в соответствии с рекомендациями подраздела 4.5 рекомендуется вместо коэффициентов β_k использовать коэффициенты b_k , определяемые в виде (4.66) (см. таблицы 4.16-4.17):

$$b_{k,i} = \beta_{k,i} + \frac{\left(1 - \sum_{s=0}^m \beta_{s,i} \cdot \psi_s(0, \alpha)\right)}{\sum_{s=0}^m \frac{1}{\|\psi_s\|^2}} \cdot \frac{\psi_k(0, \alpha)}{\|\psi_k\|^2} = \beta_k + C_k.$$

С учетом (4.66) окончательную модель взаимной структурной функции представим в виде

$$\hat{S}_{axy}(\tau) = A_m \left\{ \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} 1(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_n) + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} 1(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_l) \right\}. \quad (4.145)$$

Результаты аппроксимации взаимной структурной функции приведены на рис. 4.31.

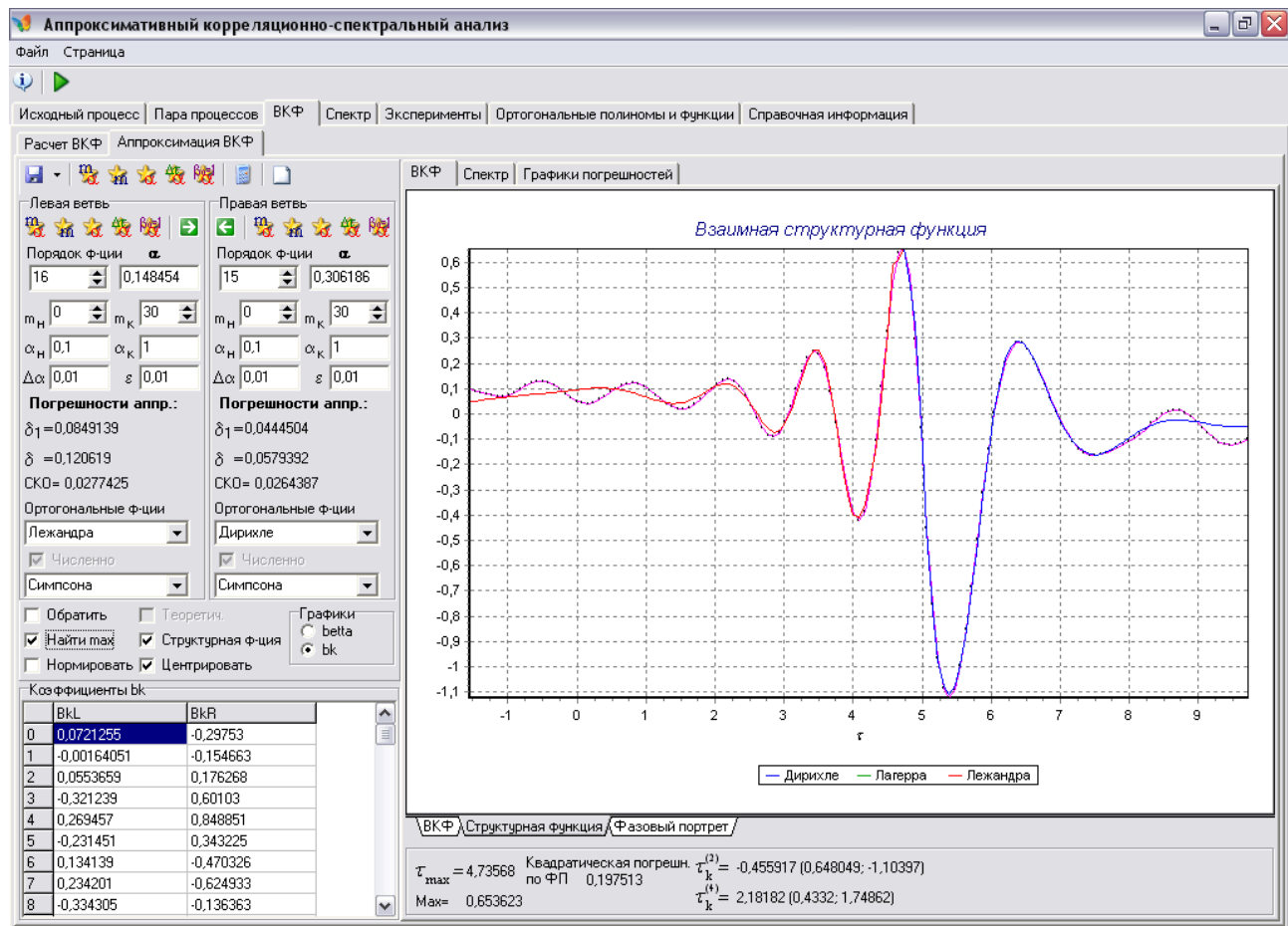


Рисунок 4.31 - Результаты аппроксимации взаимной структурной функции

4.10. Ортогональные модели спектральных плотностей мощности

Определив параметры ортогональной модели корреляционной функции $b_0, \dots, b_m, \alpha$ с учетом (4.66)

$$K_a(\tau) = \sigma_x^2 \left\{ \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) l(\tau) + \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(-\tau, \alpha) l(-\tau) \right\}, \quad (4.146)$$

оценим спектральную плотность мощности случайного процесса.

В результате получим.

$$\begin{aligned} S_a(\omega) &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) l(\tau) + \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(-\tau, \alpha) l(-\tau) \right] e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^m b_k [W_k(j\omega) + W_k(-j\omega)] \right] = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \operatorname{Re} W_k(j\omega). \end{aligned} \quad (4.147)$$

Воспользовавшись результатами, представленными в разделе подраздела 4.2, приведем аналитические модели спектральной плотности для различных базисов (см. табл. 4.31-4.32).

Аналитические выражения спектральной плотности мощности

Таблица 4.31

№	Орт. базис	φ_k	$S_a(\omega)$
1	Лагерра	$\arctg \frac{2\omega}{\alpha}$	$\frac{2\sigma_x^2 \cos \varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \cos(2k+1)\varphi$
2	Лежандра	$\arctg \frac{\omega}{2(k+1)\alpha}$	$\frac{\sigma_x^2}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+1)} \cos \varphi_k \cos \left[\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
3	Дирихле	$\arctg \frac{\omega}{(k+l)\alpha}$	$\frac{\sigma_x^2}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{(-1)^k}{(k+1)} \cos \varphi_k \cos \left[\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$

Аналитические выражения спектральной плотности мощности для частных ортогональных функций Якоби (α, β)

Таблица 4.32

№	(α, β)	φ_k	$S_a(\omega)$
1	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$\arctg \frac{2\omega}{(4k+1)\gamma}$	$\frac{2\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(4k+1)} \cos \varphi_k \cos \left[\left(\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$
2	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$\arctg \frac{2\omega}{(4k+3)\gamma}$	$\frac{2\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(4k+3)} \cos \varphi_k \cos \left[\left(\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$
3	$(1, 0)$	$\arctg \frac{\omega}{(k+l)\gamma}$	$\frac{\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(k+1)} \cos \varphi_k \cos \left[\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
4	$(0, 0)$	$\arctg \frac{\omega}{(2k+l)\gamma}$	$\frac{\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+1)} \cos \varphi_k \cos \left[\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
5	$(2, 0)$	$\arctg \frac{\omega}{(2k+3)\gamma}$	$\frac{\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+3)} \cos \varphi_k \cos \left[\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$

На рисунке 4.32 представлены результаты аппроксимации КФ и СПМ в ортогональном базисе Якоби с параметрами (0,0) (функции Лежандра) для случайного процесса с $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$, $N = 5000$, $\Delta\tau = 0,078$.

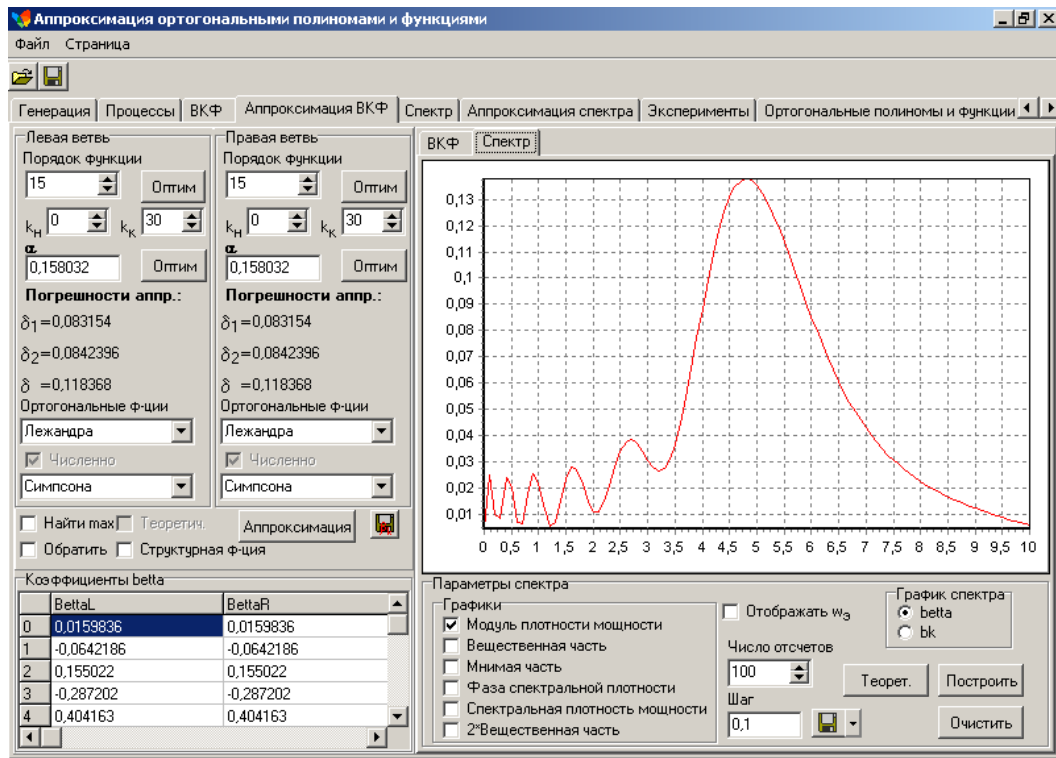


Рисунок 4.32 - Результат аппроксимации СПМ ортогональными функциями Якоби с параметрами (0,0)

4.10.1. Взаимный спектральный анализ

Полученные результаты можно обобщить на оценку взаимной спектральной плотности мощности и её составляющих по параметрам ортогональных моделей ВКФ.

Представим модель ВКФ в виде:

$$K_{axy}(\tau) = \sigma_x \sigma_y \left\{ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} 1(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_k^{m2} b_{k,l} 1(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_2) \right\}. \quad (4.148)$$

где τ_m - значение аргумента, соответствующего максимуму ВКФ

Определим взаимную спектральную плотность мощности

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} 1(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} 1(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_2) \right] \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (4.149)$$

Введем замену переменных $u = \tau - \tau_m$.

Тогда

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y \exp(-j\omega\tau_m)}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} \int_0^\infty \psi_k(u, \alpha_1) \exp(-j\omega u) du + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} \int_{-\infty}^0 \psi_k(-u, \alpha_2) \exp(-j\omega u) du \right] = \\ = \frac{\sigma_x \sigma_y \exp(-j\omega\tau_m)}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} W_k(j\omega) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} W_k(-j\omega) \right]. \quad (4.150)$$

Отсюда

$$Re S_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} \left\{ \cos \omega \tau_m \left[\sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} Re W_k(j\omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} Re W_k(j\omega) \right] - \sin \omega \tau_m \left[\sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} Im W_k(j\omega) - \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} Im W_k(j\omega) \right] \right\}, \quad (4.151)$$

$$Im S_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} \left\{ -\sin \omega \tau_m \left[\sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} Re W_k(j\omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} Re W_k(j\omega) \right] + \cos \omega \tau_m \left[\sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} Im W_k(j\omega) - \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} Im W_k(j\omega) \right] \right\}. \quad (4.152)$$

Введем обозначения

$$A(\omega) = \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} Re W_k(j\omega) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} Re W_k(j\omega); \quad (4.153)$$

$$B(\omega) = \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} Im W_k(j\omega) - \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} Im W_k(j\omega). \quad (4.154)$$

Окончательно получим

$$Re S_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} [A(\omega) \cos \omega \tau_m - B(\omega) \sin \omega \tau_m]; \quad (4.155)$$

$$Im S_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} [B(\omega) \cos \omega \tau_m - A(\omega) \sin \omega \tau_m]. \quad (4.156)$$

В таблице 4.33 - 4.34 для различных ортогональных базисов приведены выражения для $Re W_k(j\omega)$ $Im W_k(j\omega)$.

Вещественные и мнимые части преобразования Фурье
ортогональных функций

Таблица 4.33

№	Орт. ба- зис	$Re W_k(j\omega)$	$Im W_k(j\omega)$
1	Лагерра	$\frac{2}{\alpha} (-1)^k \cos \varphi \cos(2k+1)\varphi$	$-\frac{2}{\alpha} (-1)^k \cos \varphi \sin(2k+1)\varphi$
2	Лежандра	$\frac{1}{(2k+1)\alpha} \cos \varphi_k \cos \left[\left(\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$	$-\frac{1}{(2k+1)\alpha} \cos \varphi_k \sin \left[\left(\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$
3	Дирихле	$\frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha} \cos \varphi_k \cos \left[\left(\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$	$-\frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha} \cos \varphi_k \sin \left[\left(\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$

Вещественные и мнимые части преобразования Фурье ортогональных функций Якоби

Таблица 4.34

Якоби	$Re W_k(j\omega)$	$Im W_k(j\omega)$
$(-1/2, 0)$	$\frac{2}{(4k+1)\gamma} \cos \varphi_k \cos \left[\left(\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$	$-\frac{2}{(4k+1)\gamma} \cos \varphi_k \sin \left[\left(\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$
$(1/2, 0)$	$\frac{2}{(4k+3)\gamma} \cos \varphi_k \cos \left[\left(\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$	$-\frac{2}{(4k+3)\gamma} \cos \varphi_k \sin \left[\left(\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$
$(1, 0)$	$\frac{1}{(k+1)\gamma} \cos \varphi_k \cos \left[\left(\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$	$-\frac{1}{(k+1)\gamma} \cos \varphi_k \sin \left[\left(\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$
$(2, 0)$	$\frac{1}{(2k+3)\gamma} \cos \varphi_k \cos \left[\left(\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$	$-\frac{1}{(2k+3)\gamma} \cos \varphi_k \sin \left[\left(\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$

На рисунках 4.33 – 4.34 приведены результаты построения взаимной спектральной плотности мощности с помощью аппроксимирующих выражений Лагерра в сравнении с результатами аппроксимации функциями заданного вида [111].

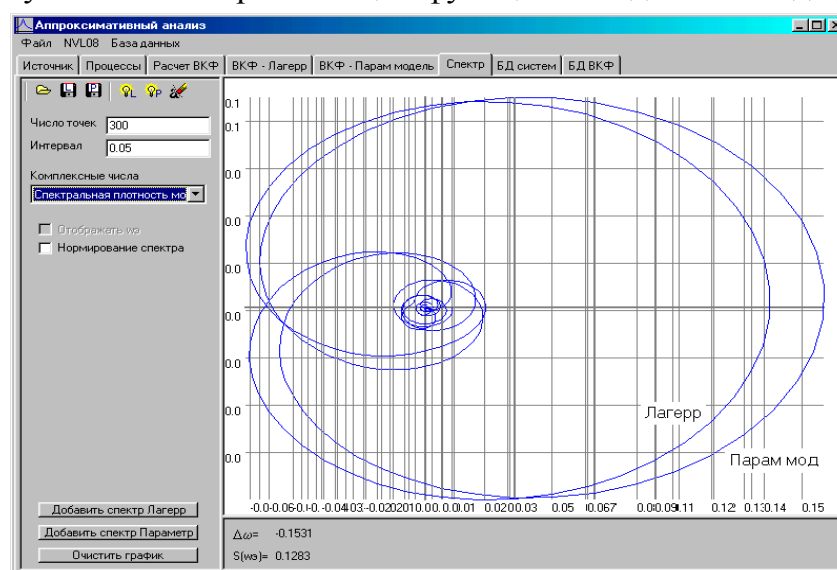


Рисунок 4.33 - Спектральная плотность мощности

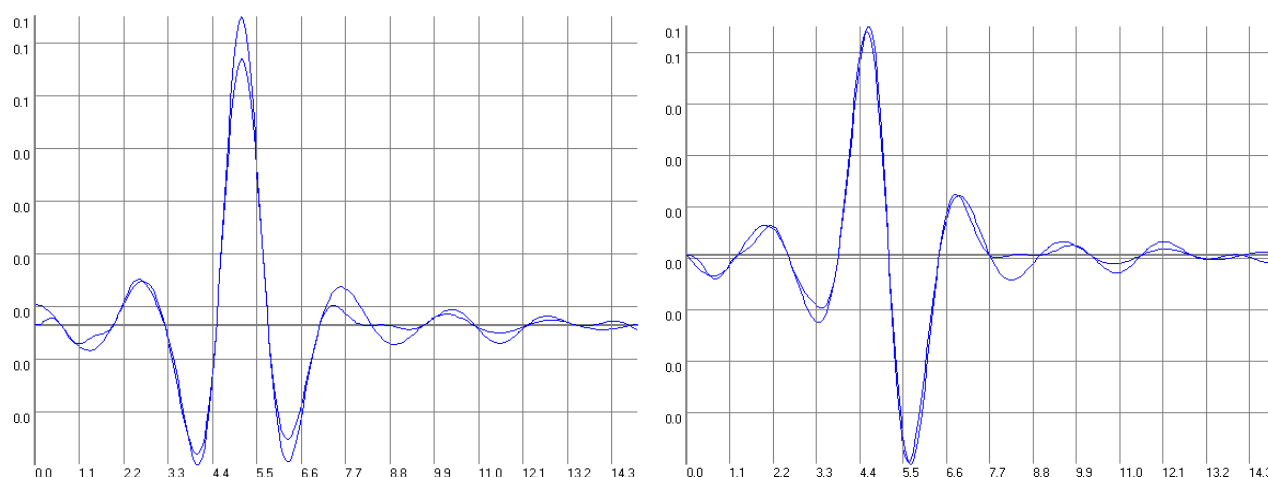


Рисунок 4.34 - Вещественная, мнимая части взаимной
спектральной плотности мощности

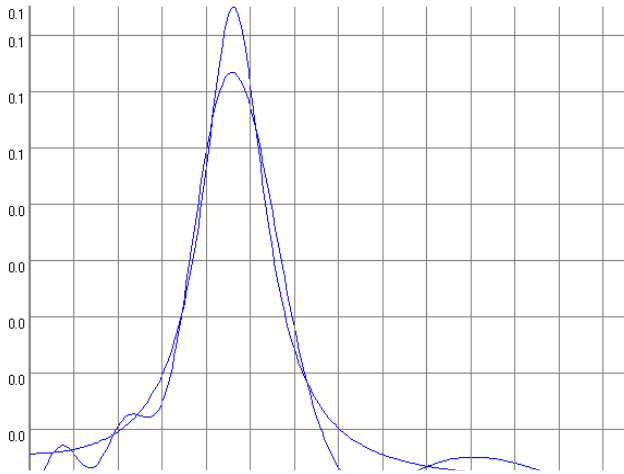


Рисунок 4.35 - Модуль спектральной плотности мощности

При построении спектра с большим значением τ_m , необходимо правильно выбирать значение интервала дискретизации спектра $\Delta\omega$. В противном случае будет проявляться эффект наложения частот. Рекомендуемое значение интервала дискретизации, определяемое для восстановления $\cos \omega\tau_m$ [118],

$$\Delta\omega \leq \frac{0,2 \div 0,4}{\tau_m}. \quad (4.137)$$

4.10.2. Аппроксимация спектральной плотности мощности

Второй вариант построения ортогональной модели сводится к аппроксимации спектральной плотности мощности ортогональными функциями $\{\psi_k(\omega, \alpha)\}_{k=0, \dots, m}$, т.е. к оценке коэффициентов разложения спектральной плотности мощности. При этом, учитывая четность спектральной плотности мощности, необходимо выбором параметров модели гарантировать выполнения условия нормировки

$$\begin{aligned} \int_0^\infty S_{an}(\omega) d\omega &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(\omega, \alpha) d\omega = \sum_{k=0}^m \beta_k W_k(0) = \\ &= 2 \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k = 1/2. \end{aligned} \quad (4.138)$$

Однако, в общем случае условие (4.138) не выполняется.

Для выполнения свойства (4.138), представим модель в виде

$$S_{an}(\omega) = \sum_{k=0}^m c_k \psi_k(\omega, \alpha). \quad (4.139)$$

при условии, что

$$2 \sum_{k=0}^m c_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k = 1/2. \quad (4.140)$$

Запишем выражение для оценки погрешности с учетом условия (4.140)

$$\Delta = \int_0^\infty \left[S_{xn}(\omega) - \sum_{k=0}^m c_k \psi_k(\omega, \alpha) \right]^2 d\omega + 2\lambda \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k = \min. \quad (4.141)$$

Для определения значения параметров c_n найдем

$$\frac{\partial \Delta}{\partial c_n} = -2 \int_0^\infty \left[S_{xn}(\omega) - \sum_{k=0}^m c_k \psi_k(\omega, \alpha) \right] \psi_n(\omega, \alpha) d\omega + 2\lambda \|\psi_n\|^2 [-\psi_n(0, \alpha)]^n = 0. \quad (4.142)$$

С учетом свойств ортогональных функций выражение (4.142) приведем к виду

$$-2\beta_n \|\psi_n\|^2 + 2c_n \|\psi_n\|^2 + 2\lambda \|\psi_n\|^2 [-\psi_n(0, \alpha)]^n = 0. \quad (4.143)$$

Отсюда

$$c_n = \beta_n - \lambda [-\psi_n(0, \alpha)]^n. \quad (4.144)$$

С учетом (4.140) выражение для определения λ равно

$$\lambda = \frac{\sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k - 1/4}{\sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2}. \quad (4.145)$$

Подставив выражение (4.145) в выражение (4.144), окончательно получим

$$C_n = \beta_n + \left[\frac{1/4 - \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k}{\sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2} \right] [-\psi_n(0, \alpha)]^n =$$

$$= \beta_n + \zeta_n.$$

Пример уточнения коэффициентов разложения по предлагаемому алгоритму для $\rho_{x5}(\tau) = \exp(-\lambda|\tau|) \cos \omega_0 \tau$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 5$ представлен на рис. 4.36.

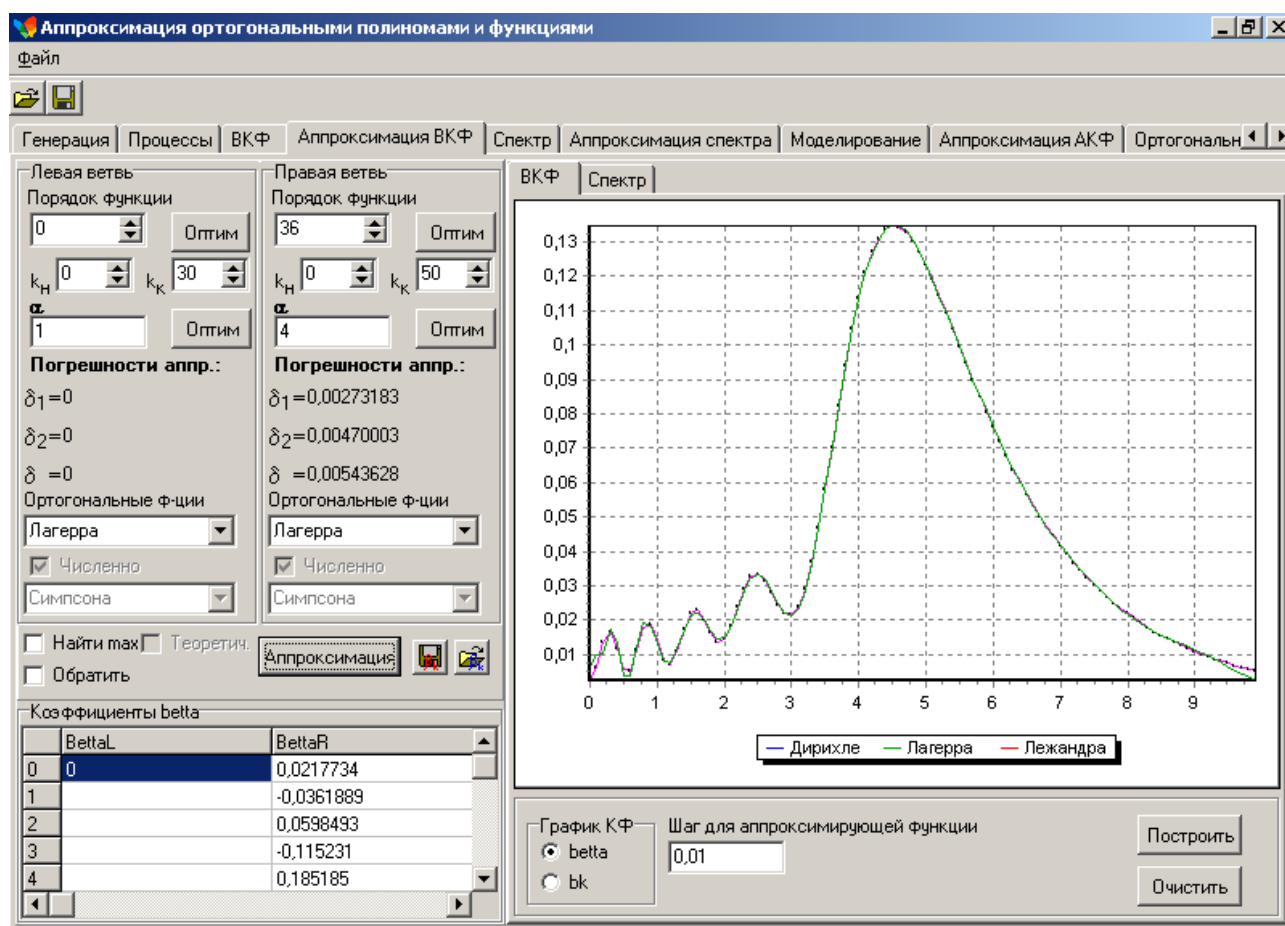


Рисунок 4.36 - Аппроксимация спектральной плотности мощности ортогональными функциями Лагерра, $\alpha = 4$, $m = 36$

Выражения для поправочного коэффициента ζ_n для различных ортогональных базисов представлены в таблице 4.35.

Ортогональный базис	ζ_n
Лагерра	$\left[\frac{\alpha / 4 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k}{m+1} \right] (-1)^n$
Лежандра	$\frac{\alpha / 2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{2k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+1}}$
Дирихле	$\left[\frac{\alpha / 2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k (-1)^k}{k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1}} \right] (-1)^n$
Якоби $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$\frac{\gamma / 4 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{4k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{4k+1}}$
Якоби $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$\frac{\gamma / 4 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{4k+3}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{4k+3}}$
Якоби $(1, 0)$	$\frac{\gamma / 4 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{4k+3}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{4k+3}}$
Якоби $(2, 0)$	$\frac{\gamma / 2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{2k+3}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+3}}$

Определим погрешность аппроксимации Δ_l

$$\begin{aligned} \Delta_l &= \int_0^\infty \left[S_{xH}(\omega) - \sum_{k=0}^m c_k \cdot \psi_k(\omega, \alpha) \right]^2 d\omega = \\ &= \int_0^\infty S_{xH}^2(\omega) d\omega - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m \zeta_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \quad (4.147)$$

Представим погрешности аппроксимации спектральной плотности мощности в виде:

$$\Delta_l = \Delta + \Delta_2, \quad (4.148)$$

где Δ_2 составляющая методической погрешности аппроксимации, вызванная дополнительным условием (4.140).

Тогда

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta &= \int_0^\infty S_{xH}^2(\omega) d\omega - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2; \\ \Delta_2 &= \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \right. \quad (4.149)$$

Вторую составляющую погрешности, вызванную необходимостью выполнения условия (4.140), с учетом (4.146) удобнее представить в виде:

$$\Delta_2 = \frac{\left[1/4 - \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k \right]^2}{\sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2}. \quad (4.150)$$

В таблице 4.36 приведены выражения для оценки Δ_2 для различных базисов. Составляющие методической погрешности аппроксимации нормированной спектральной плотности мощности ортогональными функциями

Таблица 4.36

Ортогональный базис	Δ_2
Лагерра	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \right]^2}{\frac{m+1}{\alpha}}$
Лежандра	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(2k+1)} \right]^2}{\frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(2k+1)}}$
Дирихле	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{(-1)^k}{(k+1)} \right]^2}{\frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(k+1)}}$
Якоби $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(4k+1)} \right]^2}{\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(4k+1)}}$
Якоби $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(4k+3)} \right]^2}{\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(4k+3)}}$
Якоби $(1, 0)$	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(k+1)} \right]^2}{\frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(k+1)}}$

Якоби (2,0)	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(2k+3)}\right]^2}{\frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(2k+3)}}$

4.10.3. Аппроксимация составляющих взаимного спектра

Аналогично может быть решена задача аппроксимации вещественной и мнимой частей взаимного спектра, по которым можно построить как ортогональную модель взаимного спектра, так и - взаимной корреляционной функции. Рассмотрим вторую задачу.

Обозначим

$$S_{xy}(j\omega) = ReS_{xy}(j\omega) - jImS_{xy}(j\omega). \quad (4.151)$$

Отсюда очевидно, что

$$S_{yx}(j\omega) = ReS_{xy}(j\omega) + jImS_{xy}(j\omega). \quad (4.152)$$

Запишем синфазную и квадратурную составляющие спектра:

$$C_{xy}(\omega) = 2ReS(j\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau)] \cos \omega\tau d\tau, \quad (4.153)$$

$$Q_{xy}(\omega) = 2ImS_{xy}(j\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [K_{yx}(\tau) - K_{xy}(\tau)] \sin \omega\tau d\tau. \quad (4.154)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, получим:

$$K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^\infty C_{xy}(\omega) \cos \omega\tau d\omega; \quad (4.155)$$

$$K_{yx}(\tau) - K_{xy}(\tau) = 2 \int_0^\infty Q_{xy}(\omega) \sin \omega\tau d\omega. \quad (4.156)$$

Из (4.155) и (4.156) следует, что

$$K_{xy}(\tau) = \int_0^\infty C_{xy}(\omega) \cos \omega\tau d\omega - \int_0^\infty Q_{xy}(\omega) \sin \omega\tau d\omega, \quad (4.157)$$

$$K_{xy}(\tau) = 2 \int_0^\infty ReS_{xy}(\omega) \cos \omega\tau d\omega - 2 \int_0^\infty ImS_{xy}(\omega) \sin \omega\tau d\omega. \quad (4.158)$$

Учитывая тот факт, что спектральная плотность мощности – функция комплексной переменной, необходимо аппроксимировать вещественную и мнимую части отдельно. При использовании в качестве аппроксимирующих функций ортогональные функции $\psi_k(\omega, \alpha_{Re})$ получим:

$$ReS_{xy}(\omega) = \sum_{k=0}^{m_{Re}} \beta_{kRe} \psi_k(\omega, \alpha_{Re}); \quad (4.159)$$

$$ImS_{xy}(\omega) = \sum_{k=0}^{m_{Im}} \beta_{kIm} \psi_k(\omega, \alpha_{Im}). \quad (4.160)$$

Представим взаимную корреляционную функцию в виде:

$$K_{xy}(\tau) = 2 \int_0^\infty \sum_{k=0}^{m_{Re}} \beta_{kRe} \psi_k(\omega, \alpha_{Re}) \cos \omega\tau d\omega -$$

$$- 2 \int \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k Im} \psi_k(\omega, \alpha_{Im}) \sin \omega \tau d\omega. \quad (4.161)$$

Воспользовавшись формулами Эйлера, получим:

$$K_{xy}(\tau) = 2 \int \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k Re} \psi_k(\omega, \alpha_{Re}) \frac{1}{2} (e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}) d\omega - \\ - 2 \int \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k Im} \psi_k(\omega, \alpha_{Im}) \frac{1}{2j} (e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}) d\omega. \quad (4.162)$$

Используя свойство ортогональности, можно записать:

$$K_{xy}(\tau) = \sum_{k=0}^{m_{Re}} \beta_{k Re} \int_0^{\infty} \psi_k(\omega, \alpha_{Re}) (e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}) d\omega - \\ - \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{m_{Im}} \beta_{k Im} \int_0^{\infty} \psi_k(\omega, \alpha_{Im}) (e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}) d\omega; \quad (4.163)$$

$$K_{xy}(\tau) = 2 \sum_{k=0}^{m_{Re}} \beta_{k Re} Re W_k(j\omega) - 2 \sum_{k=0}^{m_{Im}} \beta_{k Im} Im W_k(j\omega).$$

Так, например, для ортогональных функций Лагерра

$$K_{xy}(\tau) = \frac{4 \cos \varphi_{Re}}{\alpha_{Re}} \sum_{k=0}^{m_{Re}} \beta_{k Re} (-1)^k \cos(2k+1) \varphi_{Re} - \\ - \frac{4 \cos \varphi_{Im}}{\alpha_{Im}} \sum_{k=0}^{m_{Im}} \beta_{k Im} (-1)^k \sin(2k+1) \varphi_{Im}, \quad (4.164)$$

где $\varphi_{Re} = \arctg \frac{2\tau}{\alpha_{Re}}$, $\varphi_{Im} = \arctg \frac{2\tau}{\alpha_{Im}}$.

Аналогично может быть решена задача и для других ортогональных базисов.

Таким образом, возможна аппроксимация как взаимной корреляционной функции, так и взаимной спектральной плотности мощности и получение их по параметрам аппроксимирующих выражений.

На рис. 4.37 приведены результаты аппроксимации вещественной и мнимой частей спектральной плотности мощности, а на рис. 4.38 – результат оценки ВКФ по параметрам модели спектральной плотности мощности.

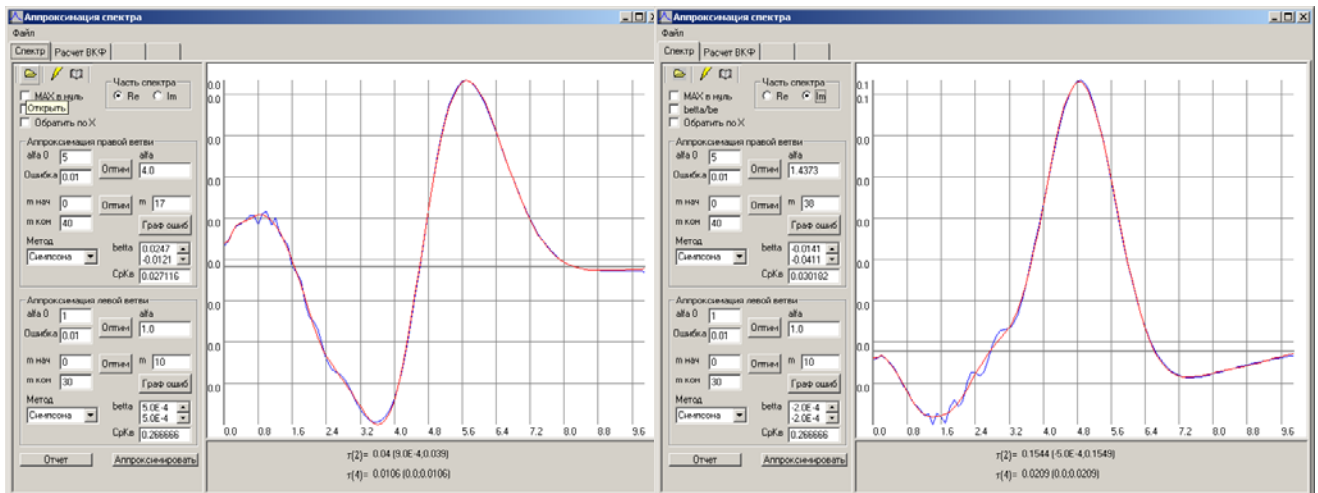


Рисунок 4.37 – Аппроксимация вещественной (вверху) и мнимой частей спектральной плотности мощности

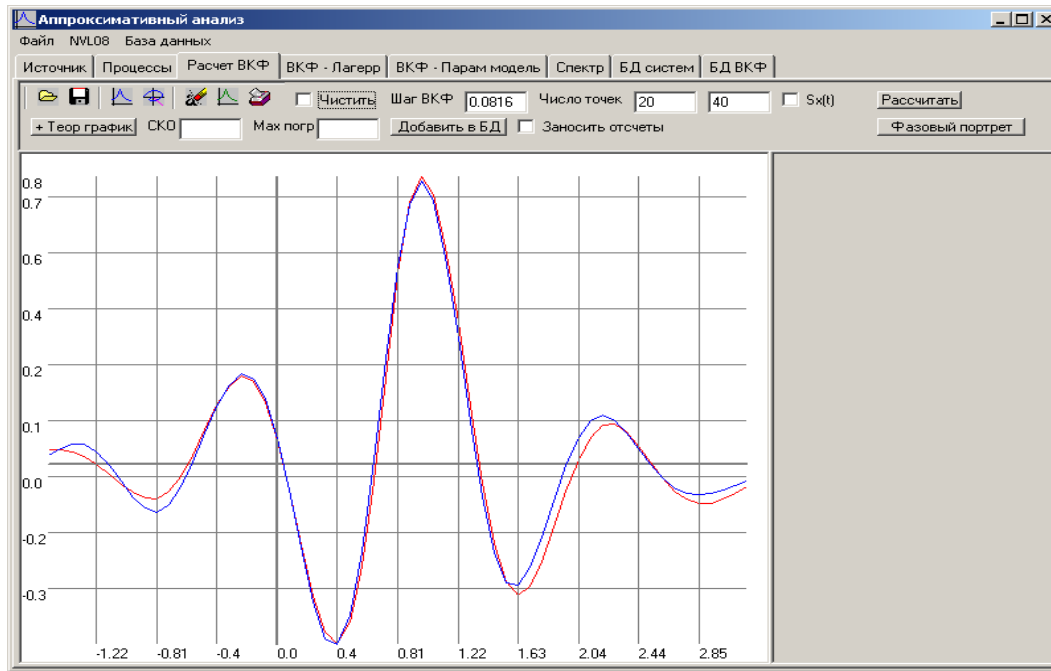


Рисунок 4.38 – Оценка ВКФ и ВКФ, полученная по аппроксимирующему спектр выражению

4.10.4. Оценка спектральной плотности мощности по параметрам ортогональной модели структурной функции

Для вычисления спектральной плотности мощности $S_a(\omega)$ по известной структурной функции $S_a(\tau)$ случайного процесса обычно пользуются выражением [1]:

$$S_a(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{\infty} \sin \omega\tau S'_x(\tau) d\tau, \quad (4.165)$$

где $S'_x(\tau) = \frac{dS_x(\tau)}{d\tau}$. (4.166)

Воспользовавшись ортогональной моделью структурной функции (4.119) определим

$$S'_a(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{\partial \psi(\tau, \alpha)}{\partial \tau}. \quad (4.167)$$

Выражения, определяющие $\frac{\partial \psi(\tau, \alpha)}{\partial \tau}$ для базисов Лежандра и Дирихле, представлены в таблице 4.37.

Производные ортогональных функций

Таблица 4.37

Базис	$\frac{\partial \psi(\tau, \alpha)}{\partial \tau}$	$A_{k,s}(\alpha)$
Лежандра	$\sum_{s=0}^k A_{k,s}(\alpha) e^{-(2s+1)\alpha\tau}$	$(-1)^{s+1} (2s+1) \alpha \frac{(k+s)!}{(k-s)!(s!)^2}$
Дирихле	$\sum_{s=0}^k A_{k,s}(\alpha) e^{-(s+1)\alpha\tau}$	$(-1)^{k-s+1} (s+1) \alpha \frac{(k+s+1)!}{(k-s)!(s+1)!s!}$

С учетом формулы Эйлера [3]:

$$\int_0^{\infty} \sin \omega \tau \frac{\partial \psi_k(\tau, \alpha)}{\partial \tau} d\tau = \sum_{s=0}^k A_{k,s}(\alpha) B_s(\alpha, \omega), \quad (4.168)$$

где $B_s(\alpha, \omega)$ – коэффициенты, которые определяются выражениями, представленными в таблице 4.38

Выражения для определения коэффициентов

Таблица 4.38

Базис	$B_s(\alpha, \omega)$
Лежандра	$\frac{\omega}{(2s+1)^2 \alpha^2 + \omega^2}$
Дирихле	$\frac{\omega}{(s+1)^2 \alpha^2 + \omega^2}$

Окончательно, выражение (4.165) будет иметь вид:

$$S_a(\omega) = \frac{1}{\pi \omega} \sum_{k=0}^m \beta_k \sum_{s=0}^k A_{k,s}(\alpha) B_s(\alpha, \omega). \quad (4.169)$$

На рис. 4.39 результаты оценивания спектральной плотности мощности для структурной функции $S_x(\tau) = 2[1 - e^{-|\tau|} \cos 5\tau]$ в ортогональном базисе Лежандра и вычисленной по её модели.

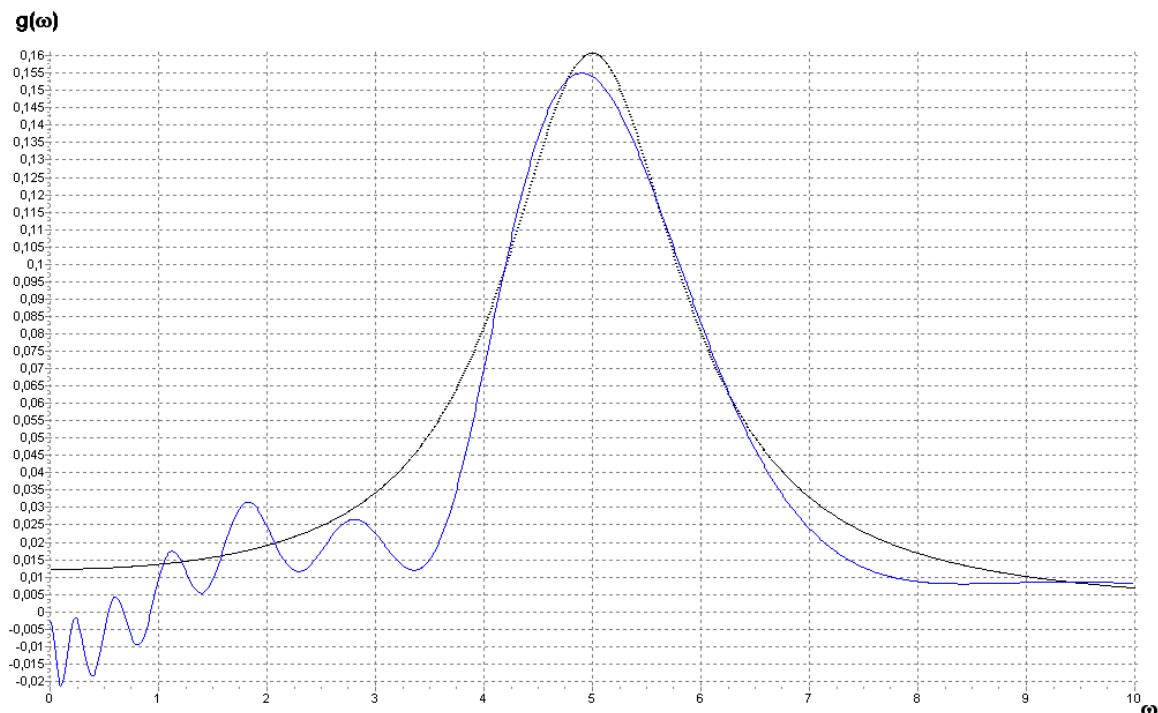


Рисунок 4.39 – СПМ при аппроксимации СФ функциями Лежандра (методическая погрешность аппроксимации 0,002, среднеквадратическая – 0,12)

4.11. Оценка корреляционной функции по параметрам модели спектральной плотности мощности

При решении задач аппроксимативного взаимного корреляционно-спектрального анализа часто возникает необходимость определения взаимной корреляционной функции на основании данных о спектральной плотности мощности случайного процесса. Решение этой проблемы с использованием обратного преобразования Фурье связано с существенными вычислительными затратами, которых можно избежать в случае, если функции вещественной и мнимой частей спектра были аппроксимированы ортогональными функциями.

Метод определения спектральных плотностей мощности, основанный на аппроксимации взаимных корреляционных функций с последующим определением взаимных спектров по параметрам аппроксимирующих выражений может быть аналогично применен и при определении взаимных корреляционных функций [111].

Обозначим

$$S_{xy}(j\omega) = \text{Re}S_{xy}(j\omega) - j\text{Im}S_{xy}(j\omega). \quad (4.170)$$

Отсюда очевидно, что

$$S_{xy}(j\omega) = \text{Re}S_{xy}(j\omega) + j\text{Im}S_{xy}(j\omega). \quad (4.171)$$

Запишем синфазную и квадратурную составляющие спектра:

$$C_{xy}(\omega) = 2\text{Re}S_{xy}(j\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau)] \cos \omega\tau d\tau, \quad (4.172)$$

$$Q_{xy}(\omega) = 2\text{Im}S_{xy}(j\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [K_{yx}(\tau) - K_{xy}(\tau)] \sin \omega\tau d\tau. \quad (4.173)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, получим:

$$K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^\infty C_{xy}(\omega) \cos \omega\tau d\omega; \quad (4.174)$$

$$K_{yx}(\tau) - K_{xy}(\tau) = 2 \int_0^\infty Q_{xy}(\omega) \sin \omega\tau d\omega. \quad (4.175)$$

Из (4.174), (4.175) следует, что

$$K_{xy}(\tau) = \int_0^\infty C_{xy}(\omega) \cos \omega\tau d\omega - \int_0^\infty Q_{xy}(\omega) \sin \omega\tau d\omega, \quad (4.176)$$

$$K_{xy}(\tau) = 2 \int_0^\infty \text{Re}S_{xy}(\omega) \cos \omega\tau d\omega - 2 \int_0^\infty \text{Im}S_{xy}(\omega) \sin \omega\tau d\omega. \quad (4.177)$$

Учитывая тот факт, что спектральная плотность мощности – функция комплексной переменной, будем аппроксимировать вещественную и мнимую части отдельно. При использовании в качестве аппроксимирующих функций ортогональные функции получим:

$$\text{Re}S_{axy}(\omega) = \sum_{k=0}^{m_{\text{Re}}} \beta_{k\text{Re}} \psi_{k\text{Re}}(\omega, \alpha_{\text{Re}}); \quad (4.178)$$

$$\text{Im}S_{axy}(\omega) = \sum_{k=0}^{m_{\text{Im}}} \beta_{k\text{Im}} \psi_{k\text{Im}}(\omega, \alpha_{\text{Im}}), \quad (4.179)$$

где

$$\begin{cases} \beta_{kRe} = \frac{1}{\|\psi_{kRe}\|^2} \int_0^\infty \text{Re} S_{xy}(u) \psi_{kRe}(u, \alpha_{Re}) du, \\ \beta_{kIm} = \frac{1}{\|\psi_{kIm}\|^2} \int_0^\infty \text{Im} S_{xy}(u) \psi_{kIm}(u, \alpha_{Im}) du. \end{cases} \quad (4.180)$$

Представим взаимную корреляционную функцию в виде:

$$\begin{aligned} K_{axy}(\tau) = & 2 \int_0^\infty \sum_{k=0}^{m_{Re}} \beta_{kRe} \psi_{kRe}(\omega, \alpha_{Re}) \cos \omega \tau d\omega - \\ & - 2 \int_0^\infty \sum_{k=0}^{m_{Im}} \beta_{kIm} \psi_{kIm}(\omega, \alpha_{Im}) \sin \omega \tau d\omega \end{aligned} \quad (4.181)$$

Воспользовавшись формулами Эйлера, выражение (4.181) приведем к виду:

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^{m_{Re}} \beta_{kRe} (W_{kRe}(-j\tau) + W_{kRe}(j\tau)) - \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{m_{Im}} \beta_{kIm} (W_{kIm}(-j\tau) - W_{kIm}(j\tau)). \quad (4.182)$$

где $W_k(j\tau)$ – преобразование Фурье ортогональных функций (см. таблицу 4.2), в качестве аргумента которых используется $j\tau$.

Из выражения (4.182), выполнив преобразования, окончательно получим:

$$K_{axy}(\tau) = 2 \left(\sum_{k=0}^{m_{Re}} \beta_{kRe} \cdot \text{Re} W_{kRe}(\tau) + \sum_{k=0}^{m_{Im}} \beta_{kIm} \cdot \text{Im} W_{kIm}(\tau) \right), \quad (4.183)$$

Общие выражения для оценки $\text{Re} W_{kRe}(\tau)$ и $\text{Im} W_{kIm}(\tau)$ определяются соответственно формулами (4.27) и (4.28). В таблице 4.39 и 4.40 приведены выражения для определения $\text{Re} W_{kRe}(\tau)$ и $\text{Im} W_{kIm}(\tau)$ в различных ортогональных базисах.

Выражения для определения $\text{Re} W_{kRe}(\tau)$ и $\text{Im} W_{kIm}(\tau)$

Таблица 4.39

Орт. функции	$\text{Re} W_{kRe}(\tau)$	$\text{Im} W_{kIm}(\tau)$
Дирихле	$\frac{(-1)^k}{\alpha_{Re}(k+1)} \cos \varphi_{kRe} \cos \left(\varphi_{kRe} + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe} \right),$ $\varphi_{kRe} = \text{arctg} \frac{\tau}{(k+1)\alpha_{Re}}$	$-\frac{(-1)^k}{\alpha_{Im}(k+1)} \cos \varphi_{kIm} \sin \left(\varphi_{kIm} + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm} \right),$ $\varphi_{kIm} = \text{arctg} \frac{\tau}{(k+1)\alpha_{Im}}$
Лагерра	$\frac{2(-1)^k}{\alpha_{Re}} \cos \varphi_{kRe} \cos(2k+1)\varphi_{kRe},$ $\varphi_{kRe} = \text{arctg} \frac{2\tau}{\alpha_{Re}}$	$-\frac{2(-1)^k}{\alpha_{Im}} \cos \varphi_{kRe} \sin(2k+1)\varphi_{kRe},$ $\varphi_{kIm} = \text{arctg} \frac{2\tau}{\alpha_{Im}}$
Лежандра	$\frac{1}{\alpha_{Re}(2k+1)} \cos \varphi_{kRe} \cos \left(\varphi_{kRe} + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe} \right),$ $\varphi_{kRe} = \text{arctg} \frac{\tau}{(2k+1)\alpha_{Re}}$	$-\frac{1}{\alpha_{Im}(2k+1)} \cos \varphi_{kIm} \sin \left(\varphi_{kIm} + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm} \right),$ $\varphi_{kIm} = \text{arctg} \frac{\tau}{(2k+1)\alpha_{Im}}$

Выражения для определения $ReW_{kRe}(\tau)$ и $ImW_{kIm}(\tau)$

Таблица 4.40

Орт. функции	$ReW_{kRe}(\tau)$	$ImW_{kIm}(\tau)$
Якоби (-1/2, 0)	$\frac{2}{\alpha_{Re}(4k+1)} \cos \varphi_{kRe} \cos \left(\varphi_{kRe} + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe} \right),$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{2\tau}{(4k+1)\alpha_{Re}}$	$-\frac{2}{\alpha_{Im}(4k+1)} \cos \varphi_{kIm} \sin \left(\varphi_{kIm} + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm} \right),$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{2\tau}{(4k+1)\alpha_{Im}}$
Якоби (1/2, 0)	$\frac{2}{\alpha_{Re}(4k+3)} \cos \varphi_{kRe} \cos \left(\varphi_{kRe} + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe} \right),$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{2\tau}{(4k+3)\alpha_{Re}}$	$-\frac{2}{\alpha_{Im}(4k+3)} \cos \varphi_{kIm} \sin \left(\varphi_{kIm} + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm} \right),$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{2\tau}{(4k+3)\alpha_{Im}}$
Якоби (1, 0)	$\frac{1}{\alpha_{Re}(k+1)} \cos \varphi_{kRe} \cos \left(\varphi_{kRe} + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe} \right),$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{\tau}{(k+1)\alpha_{Re}}$	$-\frac{1}{\alpha_{Im}(k+1)} \cos \varphi_{kIm} \sin \left(\varphi_{kIm} + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm} \right),$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{\tau}{(k+1)\alpha_{Im}}$
Якоби (0, 0)	$\frac{1}{\alpha_{Re}(2k+1)} \cos \varphi_{kRe} \cos \left(\varphi_{kRe} + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe} \right),$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{\tau}{(2k+1)\alpha_{Re}}$	$-\frac{1}{\alpha_{Im}(2k+1)} \cos \varphi_{kIm} \sin \left(\varphi_{kIm} + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm} \right),$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{\tau}{(2k+1)\alpha_{Im}}$
Якоби (2, 0)	$\frac{1}{\alpha_{Re}(2k+3)} \cos \varphi_{kRe} \cos \left(\varphi_{kRe} + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe} \right),$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{\tau}{(2k+3)\alpha_{Re}}$	$-\frac{1}{\alpha_{Im}(2k+3)} \cos \varphi_{kIm} \sin \left(\varphi_{kIm} + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm} \right),$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{\tau}{(2k+3)\alpha_{Im}}$

На рисунке 4.40 показана аппроксимация вещественной и мнимой частей спектральной плотности мощности в ортогональном базисе Лежандра, на рисунке 4.41 представлена соответствующая данному спектру КФ с теоретическим графиком.

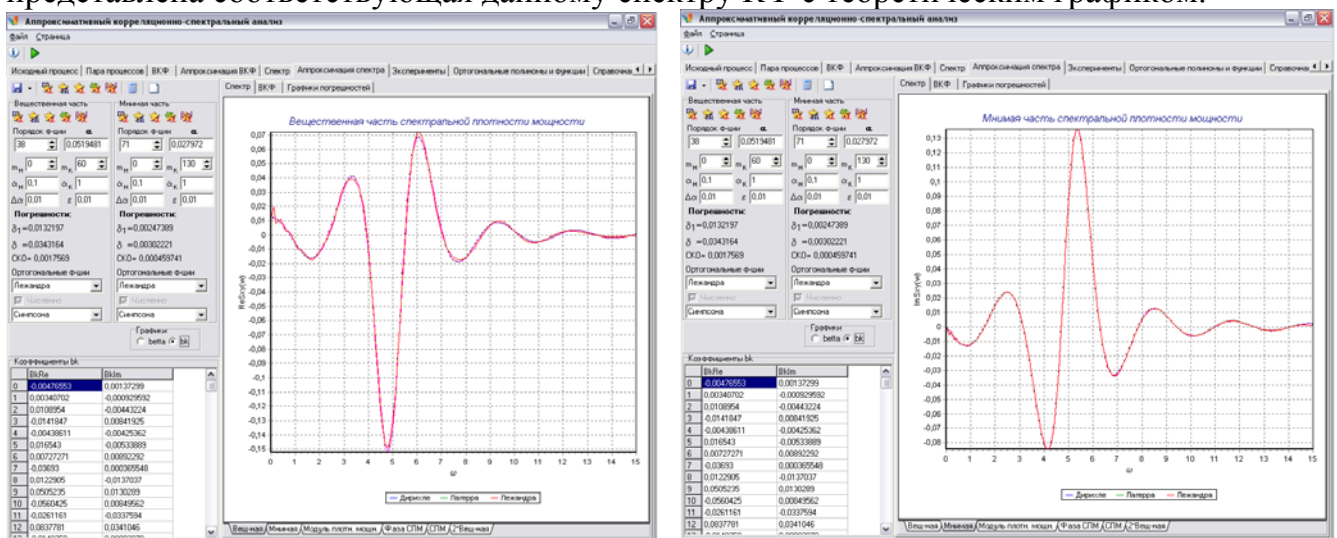


Рисунок 4.40 – Результаты аппроксимации вещественной и мнимой частей спектра

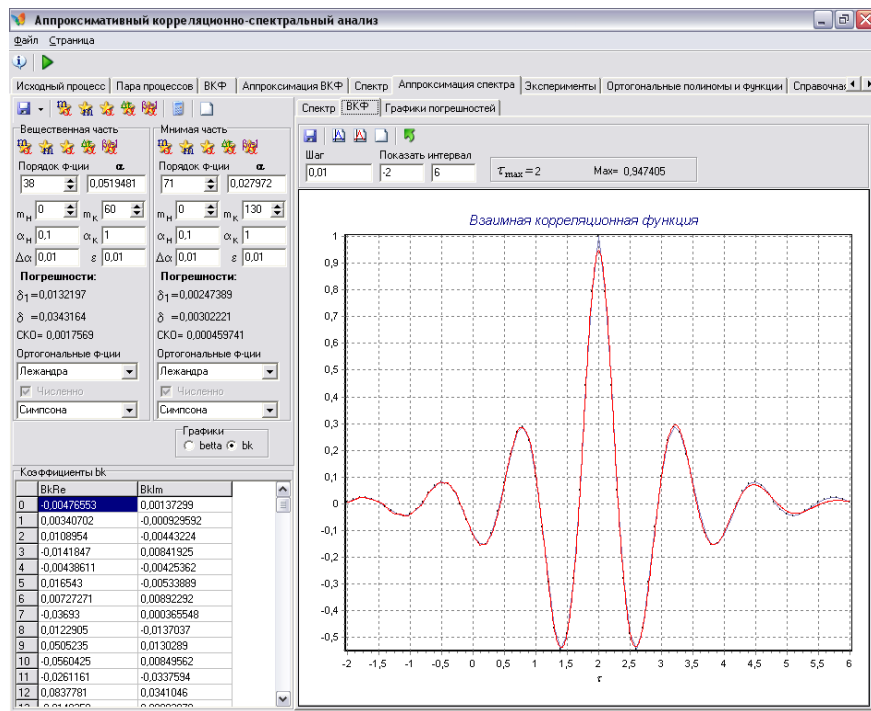


Рисунок 4.41 – Построение КФ по параметрам ортогональных моделей вещественной и мнимой частей спектра в сравнении с теоретическим графиком

На рисунке 4.42 представлена восстановленная корреляционная функция в ортогональном базисе Лагерра.

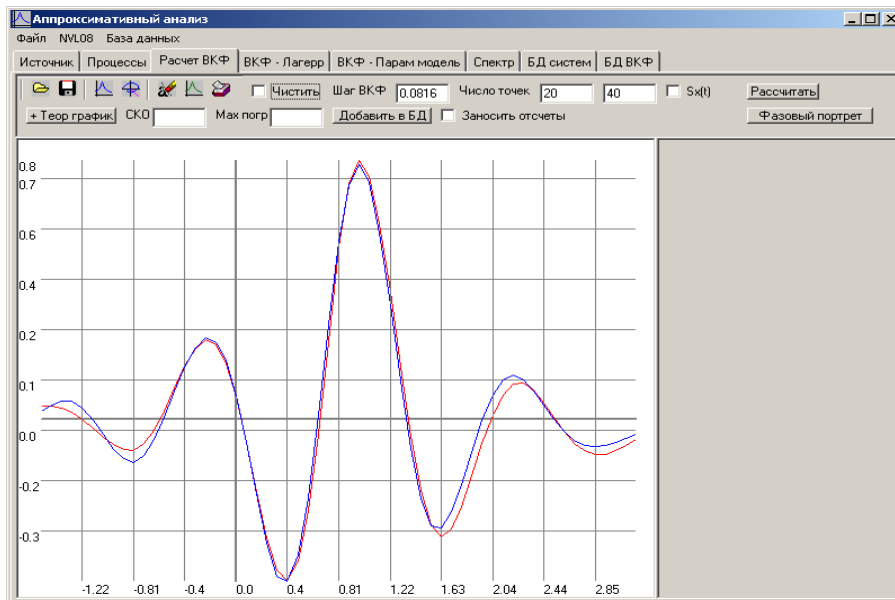


Рисунок 4.42 – Оценка ВКФ и ВКФ, полученная по аппроксимирующему спектр выражению

4.12. Спектральная функция

Определим спектральную функцию по аналогии с функцией распределения в виде

$$F_x(\omega) = \int_0^{\omega} S_x(\omega) d\omega. \quad (4.184)$$

Спектральная функция позволяет определить мощность процесса в заданном диапазоне частот $P(\omega_1, \omega_2) = F_x(\omega_2) - F_x(\omega_1)$.

Выражения для спектральной плотности мощности типовых моделей КФ, более удобные для нахождения спектральной функции, представлены в таблице 4.40.

Спектральные плотности мощности

Таблица 4.40

№ модели КФ	$S_x(\omega)$	φ
1	$\frac{\sigma_x^2}{\lambda\pi} \cos^2 \varphi$	$\arctg \frac{\omega}{\lambda}$
2, 3	$\frac{\sigma_x^2}{\lambda\pi} \cos^2 \varphi (1 \pm \cos 2\varphi)$	
4	$\frac{\sigma_x^2}{\lambda\pi} \left[\cos^2 \varphi (1 + \cos 2\varphi) + \frac{2}{3} \cos^3 \varphi \cos 3\varphi \right]$	
5	$\frac{\sigma_x^2}{2\lambda\pi} (\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2)$	$\varphi_1 = \arctg \frac{\omega + \omega_0}{\lambda}$
6, 7	$\frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left(\frac{\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2}{\lambda} \pm \frac{\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2}{2\omega_0} \right)$	$\varphi_2 = \arctg \frac{\omega - \omega_0}{\lambda}$

Спектральные функции для типовых моделей КФ с учетом принятых обозначений представлены в таблице 4.41.

Спектральные функции

Таблица 4.41

№ модели КФ	$F_x(\omega)$
1	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \varphi$
2, 3	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \left(\varphi \pm \frac{\sin 2\varphi}{2} \right)$
4	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \left(\varphi + \frac{2 \sin 2\varphi}{3} + \frac{\sin 4\varphi}{12} \right)$
5	$\frac{\sigma_x^2}{2\pi} (\varphi_1 + \varphi_2)$
6, 7	$\frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left(\varphi_1 + \varphi_2 \mp \frac{\lambda}{\omega_0} (\ln \cos \varphi_1 - \ln \cos \varphi_2) \right)$

Представив модель спектральной плотности в ортогональном базисе Лагерра в виде [111]

$$S_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2 \cos \varphi}{\alpha \pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \cos(2k+1)\varphi, \quad (4.185)$$

где $\sum_{k=0}^m b_k = 1$;

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\alpha}, \quad (4.186)$$

получим

$$F_x(\omega) = \int_0^{\omega} S_x(\omega) d\omega = \frac{2\sigma_x^2}{\alpha \pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \int_0^{\omega} \cos \varphi \cos(2k+1)\varphi d\omega. \quad (4.187)$$

Из выражения (4.186), следует, что

$$\omega = \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Отсюда

$$d\omega = \frac{\alpha}{2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Следовательно

$$F_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \int_0^{\varphi} \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos \varphi} d\varphi. \quad (4.188)$$

В соответствии с 2.539.7 [68]

$$J = \int_0^{\varphi} \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos \varphi} d\varphi = \begin{cases} \varphi, & \text{если } k = 0; \\ 2 \sum_{s=1}^k (-1)^{k-s} \frac{\sin 2s\varphi}{2s} + (-1)^k \varphi, & \text{если } k > 0. \end{cases} \quad (4.189)$$

Подставив (4.189) в (4.188), получим

$$F_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \left[\varphi + 2 \sum_{k=1}^m b_k \sum_{s=1}^k (-1)^s \frac{\sin 2s\varphi}{2s} \right]. \quad (4.190)$$

Отметим, что при $\varphi = 0$ $F_x(\omega) = 0$, а при $\varphi = \pi/2$ $F_x(\omega) = \sigma_x^2$.

Результаты определения функции спектра для различных моделей в ортогональном базисе Лагерра приведены на рис. 4.43.

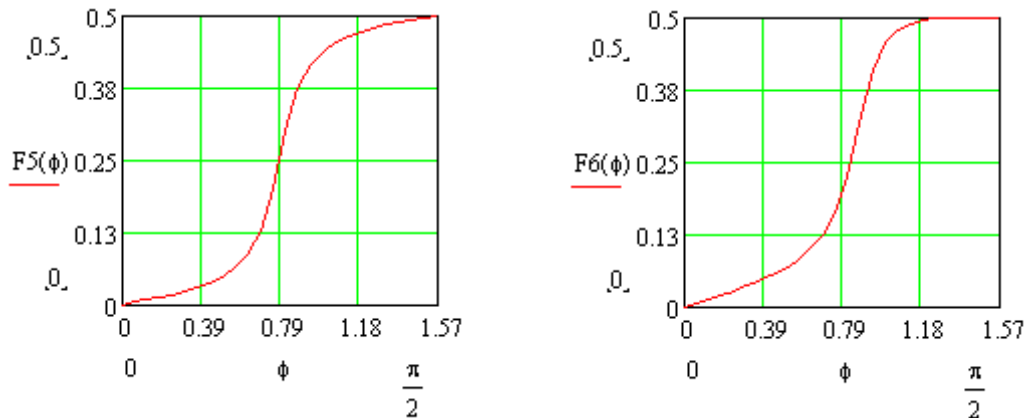


Рисунок 4.43 - Спектральные функции для различных моделей в ортогональном базисе Лагерра

Следует отметить, что спектральную функцию для других ортогональных базисов, воспользовавшись определением спектральной плотности мощности в виде (см. таблицу 4.40), определить невозможно. Это объясняется тем, что в отличие от ортогональных функций Лагерра у других ортогональных функций экспоненциального типа норма не постоянна, а зависит от порядка функции.

Для определения спектральной функции воспользуемся другим представлением спектральной плотности мощности (см. таблицу 4.42).

Спектральные плотности мощности

Таблица 4.42

№	$\psi_k(\tau, \alpha / \gamma)$	$S_x(\omega)$	ϕ_s
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{2}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s \cdot (-2)^s \cos^{s+1} \phi \cos(s+1)\phi$	$\arctg \frac{2\omega}{\alpha}$
2	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \phi_s}{(2s+1)}$	$\arctg \frac{\omega}{\alpha(2s+1)}$
3	$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \frac{\cos^2 \phi_s}{(s+1)}$	$\arctg \frac{\omega}{\alpha(s+1)}$
4	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{\cos^2 \phi_s}{(4s+1)}$	$\arctg \frac{2\omega}{\gamma(4s+1)}$
5	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{\cos^2 \phi_s}{(4s+3)}$	$\arctg \frac{2\omega}{\gamma(4s+3)}$
6	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{\cos^2 \phi_s}{(s+1)}$	$\arctg \frac{\omega}{\gamma(s+1)}$
7	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \phi_s}{(2s+1)}$	$\arctg \frac{\omega}{\gamma(2s+1)}$
8	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{\cos^2 \phi_s}{(2s+3)}$	$\arctg \frac{\omega}{\gamma(2s+3)}$

Недостатком такого представления, является то, что спектральную плотность мощности нельзя определить для большого числа членов разложения ряда m . Ниже приведены аналитические выражения спектральных функций для различных базисов экспоненциального типа.

Спектральные функции

Таблица 4.43

№	$\psi_k(\tau, \alpha / \gamma)$	$F_x(\omega)$	ϕ_s
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{\pi} \left[\phi + \sum_{k=1}^m b_k \sum_{s=1}^k C_k^s (-2)^s \frac{\cos^s \phi \sin s \phi}{s} \right]$	$\arctg \frac{2\omega}{\alpha}$
2	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \phi_s$	$\arctg \frac{\omega}{\alpha(2s+1)}$
3	$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \phi_s$	$\arctg \frac{\omega}{\alpha(s+1)}$

4	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \phi_s$	$\arctg \frac{2\omega}{\gamma(4s+1)}$
5	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \phi_s$	$\arctg \frac{2\omega}{\gamma(4s+3)}$
6	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \phi_s$	$\arctg \frac{\omega}{\gamma(s+1)}$
7	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \phi_s$	$\arctg \frac{\omega}{\gamma(2s+1)}$
8	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \phi_s$	$\arctg \frac{\omega}{\gamma(2s+3)}$

На рис. 4.44 - приведены результаты определения спектральной функции для $\rho_{x,5}(\tau)$ в ортогональных базисах Лежандра и Дирихле.

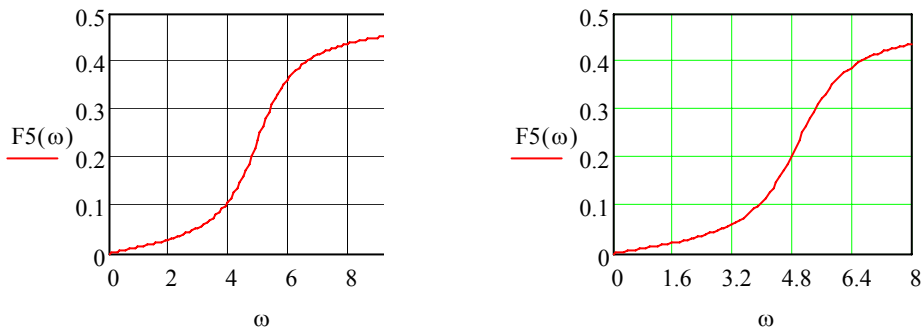


Рисунок 4.44 - Спектральные функции для $\rho_{x,5}(\tau)$ в ортогональных базисах Лежандра и Дирихле

4.13. Анализ обобщенных корреляционно-спектральных характеристик

По найденной корреляционной функции возможно определение обобщенных корреляционно-спектральных характеристик в ортогональных базисах.

4.13.1. Интервалы корреляции

Определив параметры модели корреляционной функции в ортогональном базисе в виде (4.32) и воспользовавшись определением корреляционных характеристик, можно найти их аналитические выражения, содержащие только параметры модели.

Так выражение для оценки $\tau_k^{(2)}$ примет вид:

$$\hat{\tau}_k^{(2)} \approx \sum_{k=0}^m \beta_k \int_0^\infty \psi_k(\tau, \alpha) d\tau = \sum_{k=0}^m \beta_k W_k(0) = 2 \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k. \quad (4.191)$$

Аналитические выражения $\tau_k^{(2)}$ для различных ортогональных базисов приведены в таблице 4.44.

№	Ортогональный базис	$\tau_k^{(2)}$
1	Лагерра	$\frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k b_k.$
2	Лежандра	$\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+1)}$
3	Дирихле	$\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m b_k \frac{(-1)^k}{(k+1)}$
4	Якоби (-1/2, 0)	$\frac{2}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(4k+1)}$
5	Якоби (1/2, 0)	$\frac{2}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(4k+3)}$
6	Якоби (1, 0)	$\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(k+1)}$
7	Якоби (2, 0)	$\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+3)}$

Конечное число членов разложения ряда (4.32) m приводит к погрешности от смещенности в определении интервала корреляции, которую оценим в соответствии с выражением:

$$\gamma_{см} = \frac{\tau_k^{(2)} - \tau_k^{(2)}}{\tau_k^{(2)}}. \quad (4.192)$$

Определим погрешность от смещенности, в качестве примера, для ортогонального базиса Лагерра.

Для НКФ $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda\tau}$ $\tau_k^{(2)} = \frac{1}{\lambda}$, а коэффициенты разложения (см. табл. 4.9).

$$\beta_k = \frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \left(\frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^k. \quad (4.193)$$

Подставив выражение (4.193) в (4.191), получим

$$\tau_k^{(2)} = \frac{2}{\alpha} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \cdot \left(\frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^k (-1)^k = \frac{1 - \left(\frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda} \right)^{m+1}}{\lambda}. \quad (4.194)$$

Погрешность от смещенности в соответствии с (4.120) примет вид:

$$\gamma_{см} = - \left(\frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda} \right)^{m+1}. \quad (4.195)$$

При произвольном значении α $\gamma_{см}$ может принимать достаточно большое значение.

Определим α в результате решения уравнения $\beta_0 = 1$. Отсюда

$$\alpha = 2\lambda. \quad (4.196)$$

Погрешность от смещенности в этом случае: $\gamma_{см} = 0$.

Таким образом, выбор параметра α дает возможность получить принципиально нулевую погрешность.

Аналогичным образом определяются погрешности оценки интервалов корреляции для других ортогональных базисов и моделей корреляционных функций.

4.13.2. Оценка моментов корреляционных функций

Определив начальный момент k -го порядка в виде:

$$\mu_k = \int_0^{\infty} \tau^k \rho_x(\tau) d\tau, \quad (4.197)$$

Можно показать, что при аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра [111]

$$\mu_n = \varphi_n(\alpha) \sum_{k=0}^m (-1)^k c_{nk} \beta_k. \quad (4.198)$$

Рекомендации по выбору параметров модели α , m и β_k аналогичны рекомендациям при определении интервала корреляции $\hat{\tau}_k^{(2)}$. Выражения для первых четырех моментов представлены в таблице 4.45.

К определению моментов корреляционной функции

Таблица 4.45

μ_n	$\varphi_n(\alpha)$	c_{nk}
μ_0	$2/\alpha$	1
μ_1	$4/\alpha^2$	$1+2k$
μ_2	$16\alpha^3$	$1+2k+2k^2$
μ_3	$32/\alpha^4$	$3+8k+6k^2+4k^3$

С учетом (4.197) выражения для корреляционных моментов в ортогональном базисе Лежандра и Дирихле равны

$$\mu_n = \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s \frac{(-1)^s}{(2s+1)^{n+1}}. \quad (4.199)$$

$$\mu_n = \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} \frac{(-1)^s}{(s+1)^{n+1}}. \quad (4.200)$$

4.13.3. Оценка эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса

Представив модель спектральной плотности в ортогональном базисе Лагерра в виде [111]

$$S_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2 \cos \varphi}{\alpha \pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \cos(2k+1)\varphi, \quad (4.201)$$

$$\text{где } \varphi = \arctg \frac{2\omega}{\alpha}, \quad (4.202)$$

определим эквивалентную ширину спектра мощности в соответствии с определением (1.85). С учетом выражений (4.201) и (4.202) определим

$$J = \int_{\omega_0}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{2\sigma_x^2}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \int_{\omega_0}^{\infty} \cos \varphi \cos(2k+1)\varphi d\omega. \quad (4.203)$$

Из выражения (4.202), следует, что

$$\omega = \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Отсюда

$$d\omega = \frac{\alpha}{2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Следовательно

$$J = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos \varphi} d\varphi. \quad (4.204)$$

$$\text{где } \varphi_0 = \arctg \frac{2\omega_0}{\alpha}.$$

В соответствии с 2.539.7 [68]

$$J1_k = \int \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos \varphi} d\varphi = \begin{cases} \varphi + c, \text{ если } k = 0; \\ 2 \sum_{s=1}^k (-1)^{k-s} \frac{\sin 2s\varphi}{2s} + (-1)^k \varphi + c, \text{ если } k > 0. \end{cases} \quad (4.205)$$

Подставив пределы интегрирования, получим

$$\begin{aligned} J2_k &= \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos \varphi} d\varphi = \\ &= \begin{cases} \pi/2 - \varphi_0, \text{ если } k = 0; \\ (-1)^k \pi/2 - 2 \sum_{s=1}^k (-1)^{k-s} \frac{\sin 2s\varphi_0}{2s} - (-1)^k \varphi_0, \text{ если } k > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.206)$$

Подставив $J2$ в J , получим

$$J = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \varphi_0 - 2 \sum_{k=1}^m b_k \sum_{s=1}^k (-1)^s \frac{\sin 2s\varphi_0}{2s} \right]. \quad (4.207)$$

Тогда выражение для определения эквивалентной ширины спектра мощности примет вид

$$\Delta\omega_0 = \omega_0 + \frac{\sigma_x^2}{\pi S_x(\omega_0)} \left[\frac{\pi}{2} - \varphi_0 - 2 \sum_{k=1}^m b_k \sum_{s=1}^k (-1)^s \frac{\sin 2s\varphi_0}{2s} \right]. \quad (4.208)$$

Для других ортогональных базисов, представив модель спектральной плотности мощности в виде (см. таблицу 4.31) и выполнив необходимые преобразования, выражение для оценки эквивалентной ширины спектра мощности представим в виде

$$\Delta\omega_s = \omega_s + \frac{\sigma_x^2}{S_x(\omega_s)} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m b_k \left[\psi_k(0, \alpha/\gamma)^k - \frac{2}{\pi} \sum_{s=0}^k A_{k,s} \arctg 2\omega_s \|\psi_s\|^2 \right] \right\}. \quad (4.209)$$

Принятые обозначения для выражения (4.209) представлены в таблице 4.46.

Принятые обозначения

Таблица 4.46

№	$\psi_k(\tau, \alpha/\gamma)$	$A_{k,s}$	$\arctg 2\omega_s \ \psi_s\ ^2$
2	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s$	$\arctg \frac{\omega_s}{\alpha(2s+1)}$
3	$D_k(\tau, \alpha)$	$C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s}$	$\arctg \frac{\omega_s}{\alpha(s+1)}$
4	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s$	$\arctg \frac{2\omega_s}{\gamma(4s+1)}$
5	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s$	$\arctg \frac{2\omega_s}{\gamma(4s+3)}$
6	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s$	$\arctg \frac{\omega_s}{\alpha(s+1)}$
7	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s$	$\arctg \frac{\omega_s}{\alpha(2s+1)}$
8	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s$	$\arctg \frac{\omega_s}{\alpha(2s+3)}$

Отметим, что для широкополосных процессов с учетом соотношения неопределенности

$$\Delta\omega_s \tau_k^{(2)} = \frac{\pi}{2} \quad (4.210)$$

и выражения для определения интервала корреляции

$$\tau_k^{(2)} = 2 \sum_{k=0}^m b_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k \quad (4.211)$$

можно получить более простое выражение для оценки эквивалентной ширины спектра мощности в различных ортогональных базисах

$$\Delta\omega_s = \frac{\pi}{4 \sum_{k=0}^m b_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k}. \quad (4.212)$$

Эквивалентную ширину спектра мощности случайного процесса можно получить, воспользовавшись аппроксимацией спектральной плотности мощности в ортогональных базисах в виде

$$S_x(\tau) = S_x(\omega_s) \left(\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} 1(\omega - \omega_s) \psi_k(\omega - \omega_s, \alpha_n) + \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,l} 1(\omega_s - \omega) \psi_k(\omega_s - \omega, \alpha_l) \right), \quad (4.213)$$

где ω_s - частота соответствующая последнему максимуму спектральной плотности мощности. По аналогии с определением интервала корреляции $\tau_k^{(2)}$, окончательно получим

$$\Delta\omega_s = \omega_s + 2 \sum_{k=0}^m b_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k. \quad (4.214)$$

На рис. 4.45, для примера, приведены результаты определения эквивалентной ширины спектра мощности для стационарного случайного процесса с НКФ $\rho_x(\tau) = e^{-\tau} \cos 5\tau$ в ортогональных базисах Дирихле и Лежандра.

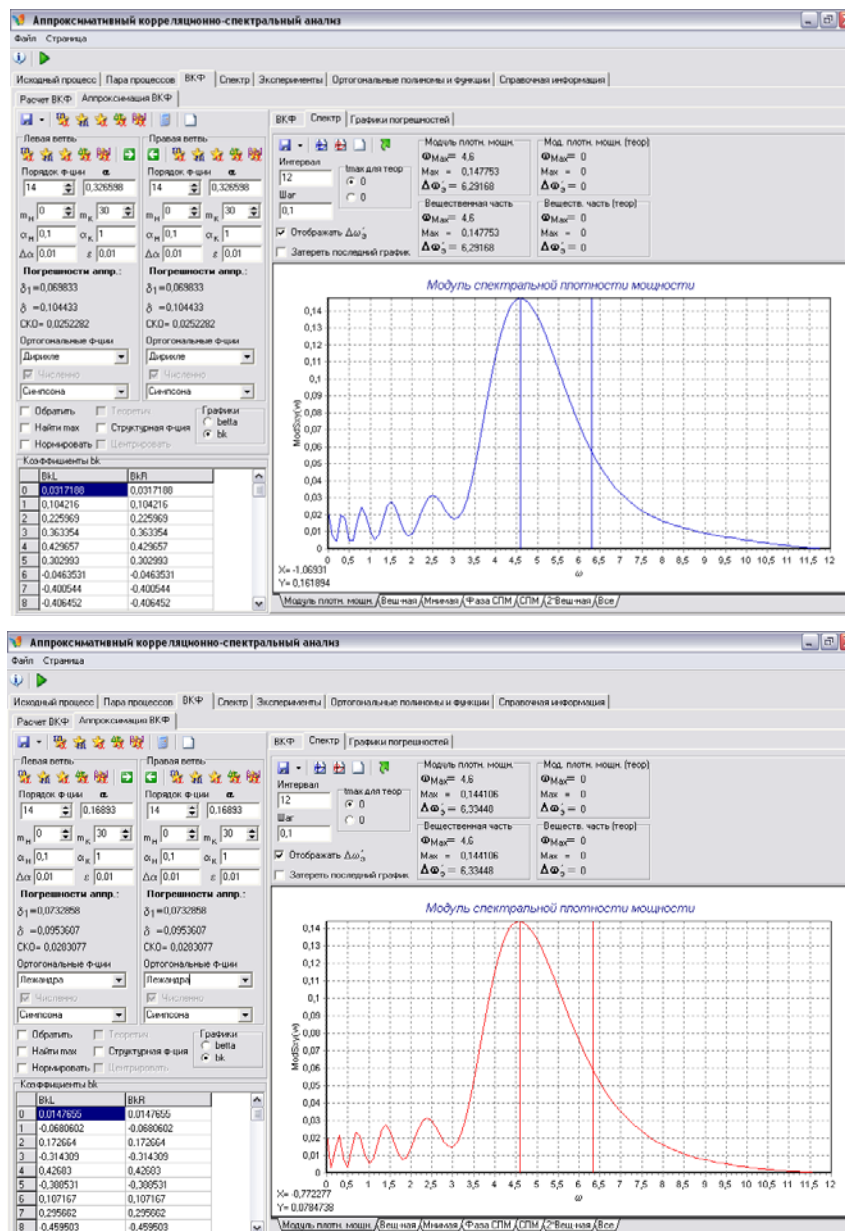


Рисунок 4.45 – Определение эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса в ортогональных базисах Дирихле и Лежандра

4.14. Аппроксимация законов распределения ортогональными полиномами

В том случае, когда закон распределения в виде функций определенного вида с неизвестными параметрами подобрать не удастся, единственным способом является применение ортогональных разложений в том или ином базисе. Отметим, что плотность распределения вероятности может находиться следующих диапазонах $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, a]$, $[b, \infty)$ (см. рис. 4.46):

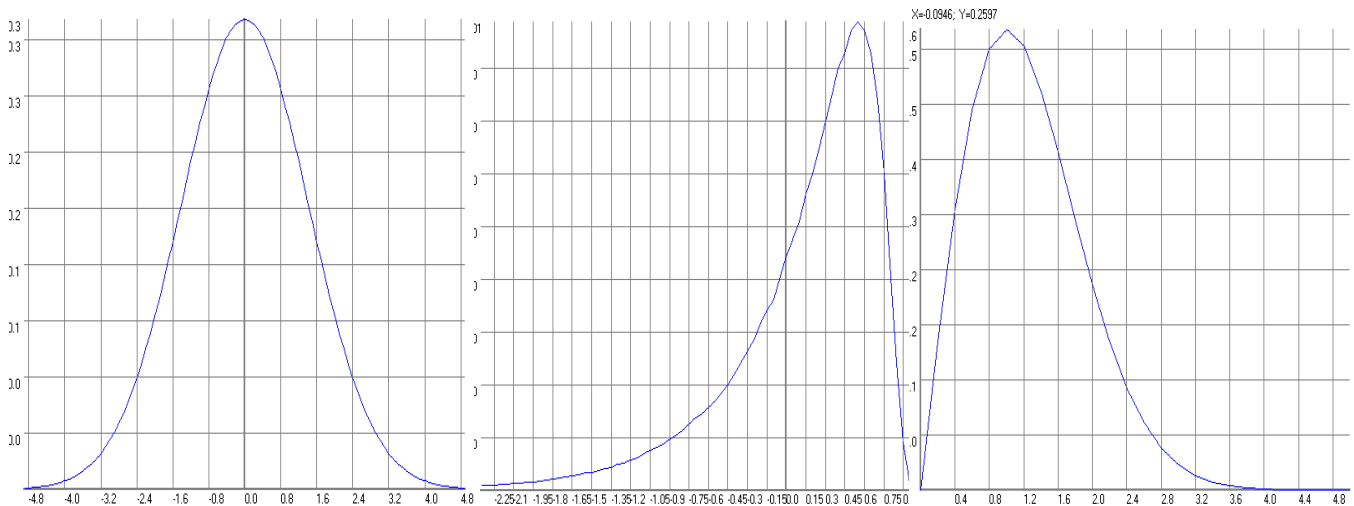


Рисунок 4.46 - Типовые законы распределения

Из рисунка видно, что при построении модели плотности распределения вероятности необходимы ортогональные функции или полиномы, ортогональные как на конечном, так и на бесконечном (полубесконечном) интервалах: Лежандра, Чебышева, Лагерра, Эрмита и т.д. [144].

Рассмотрим возможность аппроксимации плотности вероятности произвольного вида ортогональными полиномами. Дана функция вида $f(x)$, определенная на интервале $[L, R]$. Она может быть разложена в абсолютно сходящийся ряд вида:

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \cdot \psi_k(x), \quad (4.215)$$

где β_k – коэффициенты Фурье, $\psi_k(x)$ – семейство базисных функций, ортогональных на определенном интервале с весом $\mu(x)$.

Это семейство характеризуется интегралом:

$$\int_L^R \psi_k(x) \psi_n(x) \mu(x) dx = \begin{cases} \|\psi_n\|^2, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad (4.216)$$

где $[L, R]$ – интервал, на котором выполняется условие ортогональности указанных функций.

Следует подчеркнуть, что на практике приходится ограничиваться конечным числом членов ряда (4.215). Это приводит к появлению методической погрешности, значение которой зависит в немалой степени от способа оценки параметров модели.

Поэтому для модели аппроксимирующей функции

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(x), \quad (4.217)$$

имеющей ограниченное число параметров, коэффициенты разложения, обеспечивающие минимум среднеквадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \int_L^R \left[f(x) - \sum_{k=0}^n \beta_k \cdot \psi_k(x) \right]^2 \mu(x) dx = \min, \quad (4.218)$$

определяются формулой (4.8):

$$\beta_k = \int_L^R f(x) \psi_k(x) \mu(x) dx. \quad (4.219)$$

При таком способе определения коэффициентов разложения погрешность аппроксимации, с учетом свойств ортогональных полиномов, равна:

$$\Delta = \int_L^R f^2(x) \mu(x) dx - \sum_{k=0}^m \beta_k^2. \quad (4.220)$$

Так как выбранная система ортогональных полиномов определена на конкретном интервале, а интервал существования аппроксимируемой функции $[x_{\min}, x_{\max}]$ произволен, то они могут не совпадать. Поэтому приходится вводить коэффициенты линейного переноса, и формула (4.219) примет вид:

$$\beta_k = \frac{1}{a} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x) \psi_k((x-b)/a) \mu((x-b)/a) dx. \quad (4.221)$$

Примеры аппроксимации различными системами полиномов и значения коэффициентов линейного переноса a и b представлены в таблице 4.47.

При численном нахождении значения интеграла (4.221) в силу того, что на границах интервала аппроксимации трудно добиться хорошего приближения, имеет смысл предварительно преобразовать аппроксимируемую функцию так, чтобы ее значение на одном из концов интервала (или сразу на обоих) стало равно нулю. В таком случае удастся точнее посчитать коэффициенты и избежать на концах аппроксимируемой функции явления Гиббса [39].

Преобразование осуществляется по формуле:

$$f^{(0)}(x) = f(x) - d \cdot x - c. \quad (4.222)$$

Значения коэффициентов d и c рассчитывается в зависимости от того, сколько «концов» функции требуется свести к нулю. Если к нулю сводится левый «конец», то коэффициенты рассчитываются по следующим формулам:

$$\begin{cases} d = 0, \\ c = f(x_{\min}). \end{cases} \quad (4.223)$$

Если сводится только правый «конец», то

$$\begin{cases} d = 0, \\ c = f(x_{\max}). \end{cases} \quad (4.224)$$

В таблице 4.47 приведены основные соотношения для расчета коэффициентов разложения.

Для обоих «концов» сразу коэффициенты принимают значения:

$$\begin{cases} d = (f(x_{\max}) - f(x_{\min})) / (x_{\max} - x_{\min}), \\ c = f(x_{\min}) - d \cdot x_{\min}. \end{cases} \quad (4.225)$$

Примеры расчета коэффициентов

Таблица 4.47

Полиномы	Основные соотношения	Коэффициенты
Лежандра [−1,1]	$\mu(x) = 1;$ $P_k(x) = \sum_{s=0}^{k \div 2} a_s \cdot x^{k-2s},$ $a_s = (-1)^s \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot k + 1}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(2k-2s)!}{2k \cdot s! \cdot (k-s)! \cdot (k-2s)!}.$	$\beta_k = \frac{1}{a} \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x) P_k((x-b)/a) dx,$ $a = \frac{x_{max} - x_{min}}{2},$ $b = \frac{x_{max} + x_{min}}{2}.$
Чебышева [−1,1]	$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ $T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$ $T_k(x) = \sum_{s=0}^{k \div 2} a_s \cdot x^{k-2s};$ $a_s = (-1)^s \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{k-2s-1} \cdot \frac{k(k-s-1)!}{s! \cdot (k-2s)!}.$	$\beta_k = \frac{1}{a} \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x) T_k((x-b)/a) / \sqrt{1-((x-b)/a)^2} dx,$ $a = \frac{x_{max} - x_{min}}{2},$ $b = \frac{x_{max} + x_{min}}{2}.$
Лагерра [0; ∞)	$\mu(x) = e^{-x}$ $L_0(x) = 1,$ $L_k(x) = \sum_{s=0}^k a_s \cdot x^s;$ $a_s = (-1)^s \cdot \frac{k!}{(s!)^2 \cdot (k-s)!}.$	$\beta_k = \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x) L_k((x-b)/a) e^{-(x-b)/a} dx,$ $a = 1,$ $b = x_{min},$
Эрмита (−∞; +∞)	$H_k(x) = \sum_{s=0}^{k \div 2} a_s \cdot x^{k-2s},$ $a_s = (-1)^s \sqrt{\frac{k!}{2^k \cdot \sqrt{\pi}}} \cdot \frac{2^{k-2s}}{s! \cdot (k-2s)!}.$	$\beta_k = \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x) H_k((x-b)/a) e^{-((x-b)/a)^2} dx,$ $a = 1,$ $b = (x_{max} + x_{min})/2$

Далее вычисляются коэффициенты разложения для функции $f^{(0)}(x)$:

$$\beta_k^{(0)} = \frac{1}{a} \int_{x_{min}}^{x_{max}} f^{(0)}(x) \mu_k((x-b)/a) \mu((x-b)/a) dx. \quad (4.226)$$

Затем необходимо пересчитать их в β_k , которые используются в выражении (4.24). Массивы коэффициентов отличаются друг от друга только первыми двумя элементами. Примеры пересчета коэффициентов для различных ортогональных систем представлены в таблице 4.48.

Полиномы	Пересчет коэффициентов
Лежандра	$\beta_0 = \beta_0^{(0)} + (c + d \cdot b) \cdot \sqrt{2},$ $\beta_1 = \beta_1^{(0)} + d \cdot a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}},$ $\beta_k = \beta_k^{(0)}, k = \overline{2, m}.$
Чебышева	$\beta_0 = \beta_0^{(0)} + (c + d \cdot b) \cdot \sqrt{\pi},$ $\beta_1 = \beta_1^{(0)} + d \cdot a \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}},$ $\beta_k = \beta_k^{(0)}, k = \overline{2, m}.$
Лагерра	$\beta_0 = \beta_0^{(0)} + c + d \cdot (b + a),$ $\beta_1 = \beta_1^{(0)} - d \cdot c,$ $\beta_k = \beta_k^{(0)}, k = \overline{2, m}.$
Эрмита	$\beta_0 = \beta_0^{(0)} + (c + d \cdot b) \cdot \sqrt[4]{\pi},$ $\beta_1 = \beta_1^{(0)} + d \cdot a \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{2}},$ $\beta_k = \beta_k^{(0)}, k = \overline{2, m}.$

Следующим приемом аппроксимации плотности распределения вероятностей, позволяющим уменьшить погрешность, является двухсторонняя аппроксимация. Суть этого метода заключается в том, что какая-то определенная точка $\bar{x}$ (например, точка экстремума) разбивает интервал аппроксимации функции $[x_{min}, x_{max}]$ на два независимых интервала $[x_{min}, \bar{x}]$ и $[\bar{x}, x_{max}]$. На каждом из них функцию аппроксимируют отдельно, что в ряде случаев позволяет значительно улучшить результат, уменьшив погрешность и сократив количество членов в разложении функции $\hat{f}(x)$. Тогда функция $\hat{f}(x)$ записывается с использованием единичной функции:

$$1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (4.227)$$

Выражение (4.20) с учетом (4.30) представим в виде:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) = & \sum_{k=0}^{m_I} \beta_{k,I} \cdot \psi_{k,I}((x - b_I)/a_I) \cdot 1(\bar{x} - x) + \\ & + \sum_{i=0}^{m_{II}} \beta_{k,II} \cdot \psi_{k,II}((x - b_{II})/a_{II}) \cdot 1(x - \bar{x}) \end{aligned} \quad (4.228)$$

Так как границы интегрирования изменились, то коэффициенты теперь рассчитываются по модифицированным формулам.

Для левой ветви:

$$\beta_{k,\Pi} = \frac{1}{|a_{\Pi}|} \int_{x_{\min}}^{\bar{x}} f(x) \psi_{k,\Pi}((x-b_{\Pi})/a_{\Pi}) \mu_{\Pi}((x-b_{\Pi})/a_{\Pi}) dx. \quad (4.229)$$

Для правой ветви:

$$\beta_{k,\Pi} = \frac{1}{|a_{\Pi}|} \int_{\bar{x}}^{x_{\max}} f(x) \psi_{k,\Pi}((x-b_{\Pi})/a_{\Pi}) \mu_{\Pi}((x-b_{\Pi})/a_{\Pi}) dx. \quad (4.230)$$

Коэффициенты линейного переноса также изменяются соответственно изменению интервалов интегрирования.

Зачастую при двусторонней аппроксимации используют операцию совмещения максимумов. Смысл данной операции состоит в том, что после вычисления коэффициентов для выражения (4.228) их нормируют, то есть совмещают в точке $\bar{x}$ значения аппроксимирующих выражений для обеих ветвей со значением аппроксимируемой функции. Этот подход дает возможность использовать комбинированные модели, т.е. применять для аппроксимации левой и правой ветвей различные ортогональные полиномы, соответствующие наилучшим образом области существования плотности распределения вероятностей.

Для этого требуется выполнение условий:

$$\begin{cases} \hat{f}(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{m_{\Pi}} \beta_{k,\Pi} \cdot \psi_{k,\Pi}((\bar{x}-b_{\Pi})/a_{\Pi}), \\ \hat{f}(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{m_{\Pi}} \beta_{k,\Pi} \cdot \psi_{k,\Pi}((\bar{x}-b_{\Pi})/a_{\Pi}). \end{cases} \quad (4.231)$$

Так как при конечных значениях m_{Π} и m_{Π} оно не выполняется, поэтому для его обеспечения можно искать аналитическое выражение для $\hat{f}(x)$ в виде:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) = & \sum_{k=0}^{m_{\Pi}} b_{k,\Pi} \cdot \psi_{k,\Pi}((x-b_{\Pi})/a_{\Pi}) \cdot 1(x-\bar{x}) + \\ & + \sum_{k=0}^{m_{\Pi}} b_{k,\Pi} \cdot \psi_{k,\Pi}((x-b_{\Pi})/a_{\Pi}) \cdot 1(\bar{x}-x) \end{aligned} \quad (4.232)$$

Для того чтобы квадратическая погрешность аппроксимации была минимальной при дополнительных условиях (4.231), необходимо минимизировать Δ_{Π} и Δ_{Π} по $b_{n,\Pi}$ и $b_{n,\Pi}$ соответственно:

$$\begin{cases} \Delta_{\Pi} = \int_{x_{\min}}^{\bar{x}} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{m_{\Pi}} b_{k,\Pi} \cdot \psi_{k,\Pi}((x-b_{\Pi})/a_{\Pi}) \right]^2 dx + \\ + \lambda_{\Pi} \sum_{k=0}^{m_{\Pi}} b_{k,\Pi} \cdot \psi_{k,\Pi}((\bar{x}-b_{\Pi})/a_{\Pi}), \\ \Delta_{\Pi} = \int_{\bar{x}}^{x_{\max}} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{m_{\Pi}} b_{k,\Pi} \cdot \psi_{k,\Pi}((x-b_{\Pi})/a_{\Pi}) \right]^2 dx + \\ + \lambda_{\Pi} \sum_{k=0}^{m_{\Pi}} b_{k,\Pi} \cdot \psi_{k,\Pi}((\bar{x}-b_{\Pi})/a_{\Pi}). \end{cases} \quad (4.233)$$

Найдем частные производные $\frac{\partial \Delta_{\Pi}}{\partial b_{n,\Pi}}, \frac{\partial \Delta_{\Pi}}{\partial b_{n,\Pi}}$ и приравняем их к нулю:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Delta_{\text{Л}}}{\partial b_{n,\text{Л}}} &= -2 \int_{x_{\min}}^{\bar{x}} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{m_{\text{Л}}} b_{k,\text{Л}} \cdot \psi_{k,\text{Л}}((x-b_{\text{Л}})/a_{\text{Л}}) \right] \psi_{n,\text{Л}}((x-b_{\text{Л}})/a_{\text{Л}}) dx + \\ &+ \lambda_{\text{Л}} \cdot \psi_{n,\text{Л}}((\bar{x}-b_{\text{Л}})/a_{\text{Л}}) = 0, \\ \frac{\partial \Delta_{\text{П}}}{\partial b_{n,\text{П}}} &= -2 \int_{\bar{x}}^{x_{\max}} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{m_{\text{П}}} b_{k,\text{П}} \cdot \psi_{k,\text{П}}((x-b_{\text{П}})/a_{\text{П}}) \right] \psi_{n,\text{П}}((x-b_{\text{П}})/a_{\text{П}}) dx + \\ &+ \lambda_{\text{П}} \cdot \psi_{n,\text{П}}((\bar{x}-b_{\text{П}})/a_{\text{П}}) = 0. \end{aligned} \right. \quad (4.234)$$

Выполнив промежуточные преобразования, получим:

$$\left\{ \begin{aligned} b_{n,\text{Л}} &= \beta_{n,\text{Л}} - \frac{\lambda_{\text{Л}}}{2} \psi_{n,\text{Л}}((\bar{x}-b_{\text{Л}})/a_{\text{Л}}), \\ b_{n,\text{П}} &= \beta_{n,\text{П}} - \frac{\lambda_{\text{П}}}{2} \psi_{n,\text{П}}((\bar{x}-b_{\text{П}})/a_{\text{П}}). \end{aligned} \right. \quad (4.235)$$

С учетом (4.231) определим:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_{\text{Л}} &= \frac{2 \left(\sum_{k=0}^{m_{\text{Л}}} \beta_{k,\text{Л}} \cdot \psi_{k,\text{Л}}((\bar{x}-b_{\text{Л}})/a_{\text{Л}}) - f(\bar{x}) \right)}{\sum_{k=0}^{m_{\text{Л}}} \psi_{k,\text{Л}}^2((\bar{x}-b_{\text{Л}})/a_{\text{Л}})}, \\ \lambda_{\text{П}} &= \frac{2 \left(\sum_{k=0}^{m_{\text{П}}} \beta_{k,\text{П}} \cdot \psi_{k,\text{П}}((\bar{x}-b_{\text{П}})/a_{\text{П}}) - f(\bar{x}) \right)}{\sum_{k=0}^{m_{\text{П}}} \psi_{k,\text{П}}^2((\bar{x}-b_{\text{П}})/a_{\text{П}})}. \end{aligned} \right. \quad (4.236)$$

Подставив это выражение в выражение для оценки коэффициентов разложения, окончательно получим:

$$\left\{ \begin{aligned} b_{n,\text{Л}} &= \beta_{n,\text{Л}} + \frac{f(\bar{x}) - \sum_{k=0}^{m_{\text{Л}}} \beta_{k,\text{Л}} \cdot \psi_{k,\text{Л}}((\bar{x}-b_{\text{Л}})/a_{\text{Л}})}{\sum_{k=0}^{m_{\text{Л}}} \psi_{k,\text{Л}}^2((\bar{x}-b_{\text{Л}})/a_{\text{Л}})} \psi_{n,\text{Л}}((\bar{x}-b_{\text{Л}})/a_{\text{Л}}), \\ b_{n,\text{П}} &= \beta_{n,\text{П}} + \frac{f(\bar{x}) - \sum_{k=0}^{m_{\text{П}}} \beta_{k,\text{П}} \cdot \psi_{k,\text{П}}((\bar{x}-b_{\text{П}})/a_{\text{П}})}{\sum_{k=0}^{m_{\text{П}}} \psi_{k,\text{П}}^2((\bar{x}-b_{\text{П}})/a_{\text{П}})} \psi_{n,\text{П}}((\bar{x}-b_{\text{П}})/a_{\text{П}}). \end{aligned} \right. \quad (4.237)$$

В таблице 4.49 приведены значения коэффициентов $b_{n,\text{Л}}$ и $b_{n,\text{П}}$ для различных систем ортогональных полиномов.

Так как полиномы являются степенными функциями, от представления (4.217) можно перейти к степенному представлению аппроксимирующей функции, пересчитав коэффициенты. В таком случае общий вид аппроксимирующей функции выглядит так:

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=0}^m \beta_{k,f} \cdot ((x-b)/a)^k, \quad x \in [x_{\min}, x_{\max}]. \quad (4.238)$$

Коэффициенты разложения при двусторонней аппроксимации

Таблица 4.49

Полиномы	Коэффициенты
Лежандра	$b_{n,\Pi} = \beta_{n,\Pi} + \frac{f(\bar{x}) - \sum_{k=0}^{m_{\Pi}} \beta_{k,\Pi} \cdot P_k(1)}{\sum_{k=0}^{m_{\Pi}} P_k^2(1)} P_n(1),$ $b_{n,\Pi} = \beta_{n,\Pi} + \frac{f(\bar{x}) - \sum_{k=0}^{m_{\Pi}} \beta_{k,\Pi} \cdot P_k(-1)}{\sum_{k=0}^{m_{\Pi}} P_k^2(-1)} P_n(-1)$
Чебышева	$b_{n,\Pi} = \beta_{n,\Pi} + \frac{f(\bar{x}) - \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \beta_{0,\Pi} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{m_{\Pi}} \beta_{k,\Pi} \right)}{\frac{1+2 \cdot m_{\Pi}}{\pi}} T_n(1),$ $b_{n,\Pi} = \beta_{n,\Pi} + \frac{f(\bar{x}) - \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \beta_{0,\Pi} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{m_{\Pi}} (-1)^k \cdot \beta_{k,\Pi} \right)}{\frac{1+2 \cdot m_{\Pi}}{\pi}} T_n(-1)$
Лагеррра	$b_{n,\Pi} = \beta_{n,\Pi} + \frac{f(\bar{x}) - \sum_{k=0}^{m_{\Pi}} \beta_{k,\Pi}}{m_{\Pi} + 1},$ $b_{n,\Pi} = \beta_{n,\Pi} + \frac{f(\bar{x}) - \sum_{k=0}^{m_{\Pi}} \beta_{k,\Pi}}{m_{\Pi} + 1}$

В таблице 4.50 приведены формулы расчета коэффициентов $\beta_{k,f}$ в формуле (4.237) для различных систем полиномов. Применяемые в таблице обозначения $a_{s,s+2m}$ – это коэффициенты a_s полинома степени $s+2m$, используемые в таблице 4.47

Пересчет в степенные ряды

Таблица 4.47

Полиномы	Коэффициенты
Лежандра, Чебышева, Эрмита	$\beta_{k,f} = \sum_{s=0}^{(m-k) \div 2} \beta_{k+2s} \cdot a_{s,k+2s}, k = \overline{0, m}$
Лагеррра	$\beta_{k,f} = \sum_{s=k}^n \beta_s \cdot a_{k,s}, k = \overline{0, m}$

Заметим, что по полученному аналитическому выражению плотности распределения вероятностей легко находится аналитическое выражение и функции распределения:

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{\min}, \\ \int_{x_{\min}}^x \hat{f}((x-b)/a) dx, & x_{\min} < x < x_{\max}, \\ 1, & x \geq x_{\max}. \end{cases} \quad (4.239)$$

Заметим, что коэффициенты восстановленной функции распределения $\beta_{i,F}$ определяются следующим образом:

$$\begin{cases} \beta_{i,F} = \beta_{i-1,F} \cdot a / i, & i = 1, n+1, \\ \beta_{0,F} = -\sum_{i=1}^{n+1} \beta_{i,F} \cdot ((x_{\min} - b) / a)^i \end{cases} \quad (4.240)$$

Соответственно выражение для функции распределения с учетом (4.240) запишется в виде:

$$\hat{F}(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \beta_{i,F} ((x-b)/a)^i. \quad (4.241)$$

Для иллюстрации на рис. 4.47 приведены результаты аппроксимации плотностей распределения вероятностей при испытании газотурбинных двигателей.

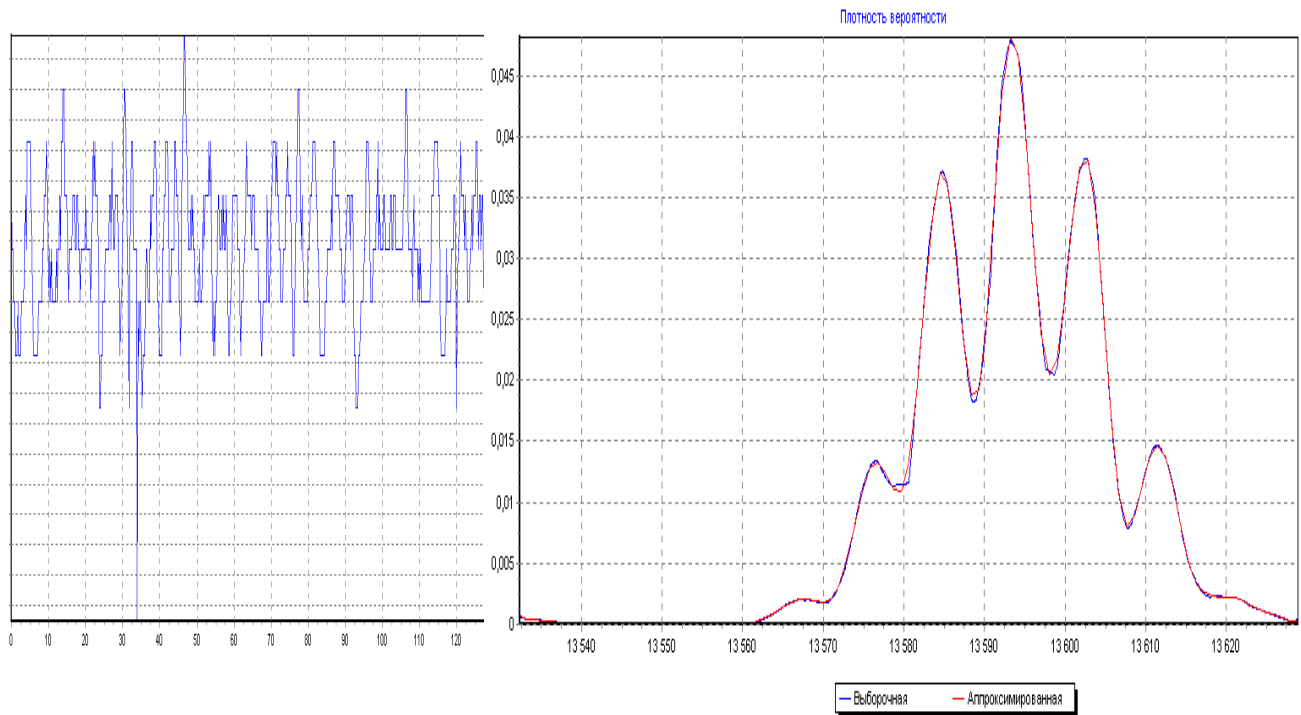


Рисунок 4.47 - Результаты аппроксимации плотности распределения вероятностей

4.15. Аппроксимация плотности распределения вероятностей ортогональными функциями

Представив модель односторонней плотности распределения вероятностей ($x \in [0, \infty)$) в виде

$$f_a(x) = \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(x, \alpha) \quad (4.242)$$

и определив численные значения коэффициентов разложения $\beta_0, \dots, \beta_m$, необходимо гарантировать выполнения условия нормировки:

$$\int_0^{\infty} f_a(x) dx = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(x, \alpha) dx = 2 \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k = 1. \quad (4.243)$$

Однако, в общем случае условие (4.243) не выполняется.

Для выполнения свойства (4.243), представим модель в виде

$$f_a(x) = \sum_{k=0}^m c_k \psi_k(x, \alpha). \quad (4.244)$$

при условии, что

$$2 \sum_{k=0}^m c_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k = 1. \quad (4.245)$$

Запишем выражение для оценки погрешности с учетом условия (4.245)

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[f_x(x) - \sum_{k=0}^m c_k \psi_k(x, \alpha) \right]^2 dx + 2\lambda \sum_{k=0}^m c_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k = \min. \quad (4.246)$$

Для определения значения параметров c_n найдем

$$\frac{\partial \Delta}{\partial c_n} = -2 \int_0^{\infty} \left[f_x(x) - \sum_{k=0}^m c_k \psi_k(x, \alpha) \right] \psi_n(x, \alpha) dx + 2\lambda \|\psi_n\|^2 [-\psi_n(0, \alpha)]^n = 0. \quad (4.247)$$

С учетом свойств ортогональных функций Лагерра выражение (4.247) приведем к виду

$$-2 \|\psi_n\|^2 \beta_n + 2 \|\psi_n\|^2 c_n + 2\lambda \|\psi_n\|^2 [-\psi_n(0, \alpha)]^n = 0. \quad (4.248)$$

Отсюда

$$c_n = \beta_n - \lambda [-\psi_n(0, \alpha)]^n. \quad (4.249)$$

Определим λ из условия (4.245)

$$\lambda = \frac{\sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k - 1/2}{\sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2}. \quad (4.250)$$

Подставив выражение (4.250) в выражение (4.249), окончательно получим

$$\begin{aligned} c_n &= \beta_n + \left[\frac{1/2 - \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k}{\sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2} \right] [-\psi_k(0, \alpha)]^n = \\ &= \beta_n + \zeta_n. \end{aligned} \quad (4.251)$$

Выражения для оценки коэффициентов разложения ζ_n для ортогональных базисов представлены в таблице 4.51.

Выражение для поправочного коэффициента

Таблица 4.51

Ортогональный базис	ζ_n
Лагерра	$\left[\frac{\alpha / 2 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k}{m+1} \right] (-1)^n$
Лежандра	$\frac{\alpha - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{2k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+1}}$
Дирихле	$\left[\frac{\alpha - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k (-1)^k}{k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1}} \right] (-1)^n$

Рассмотрим примеры уточнения коэффициентов разложения по предлагаемому алгоритму. На рис. 4.48 приведены результаты аппроксимации в ортогональном базисе Лагерра плотности распределения вероятностей для закона Релея.

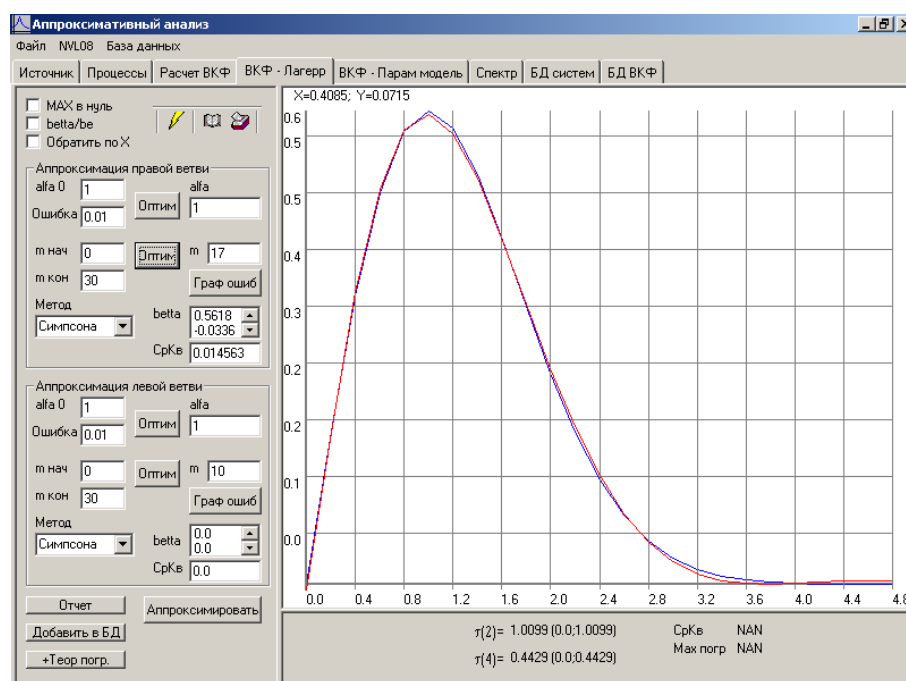


Рисунок 4.48 - Результаты аппроксимации плотности распределения вероятностей для закона Релея

В таблице 4.52 приведены аналитические выражения для оценки $\|P_k^{(\alpha,\beta)}\|^2$ и ς_n для различных функций Якоби $P_k^{(\alpha,\beta)}(\tau, \gamma)$. Отметим, что для рассматриваемых ортогональных функций Якоби $P_k^{(\alpha,\beta)}(0, \gamma) = (-1)^k$.

Коэффициенты разложения КФ в ортогональных базисах Якоби (α, β)

$$C_n = \beta_n + \left[\frac{1/2 - \sum_{k=0}^m \beta_k \|P_k^{(\alpha,\beta)}\|^2}{\sum_{k=0}^m \|P_k^{(\alpha,\beta)}\|^2} \right] = \beta_n + \varsigma_n. \quad (4.252)$$

Поправочные коэффициенты для ортогональных функций Якоби

Таблица 4.52

№	(α, β)	Аналитическое выражение	Норма функций	ς_n
1	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^s (-1)^s e^{-\frac{(4s+1)\gamma\tau}{2}}$	$\frac{1}{\gamma(4k+1)}$	$\frac{\gamma/2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{4k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{4k+1}}$
2	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^s (-1)^s e^{-\frac{(4s+3)\gamma\tau}{2}}$	$\frac{1}{\gamma(4k+3)}$	$\frac{\gamma/2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{4k+3}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{4k+3}}$
3	$(1, 0)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s e^{-(s+1)\gamma\tau}$	$\frac{1}{2\gamma(k+1)}$	$\frac{\gamma - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1}}$
4	$(0, 0)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s e^{-(2s+1)\gamma\tau}$	$\frac{1}{2\gamma(2k+1)}$	$\frac{\gamma - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{2k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+1}}$
5	$(2, 0)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s e^{-(2s+3)\gamma\tau}$	$\frac{1}{2\gamma(2k+3)}$	$\frac{\gamma - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{2k+3}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+3}}$

Определим погрешность аппроксимации Δ_1

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \int_0^\infty \left[f_x(x) - \sum_{k=0}^m c_k \cdot \psi_k(x, \alpha) \right]^2 dx = \\ &= \int_0^\infty f_x^2(x) dx - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m \varsigma_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \quad (4.253)$$

Представим погрешности аппроксимации ПРВ в виде:

$$\Delta_1 = \Delta + \Delta_2, \quad (4.254)$$

где Δ_2 составляющая методической погрешности аппроксимации, вызванная дополнительным условием (4.245).

Тогда

$$\begin{cases} \Delta = \int_0^\infty f_x^2(x) dx - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2; \\ \Delta_2 = \sum_{k=0}^m \zeta_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{cases} \quad (4.255)$$

Вторую составляющую погрешности, вызванную необходимостью выполнения условия (4.245), с учетом (4.251) удобнее представить в виде:

$$\Delta_2 = \frac{\left[1/2 - \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k \right]^2}{\sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2}. \quad (4.256)$$

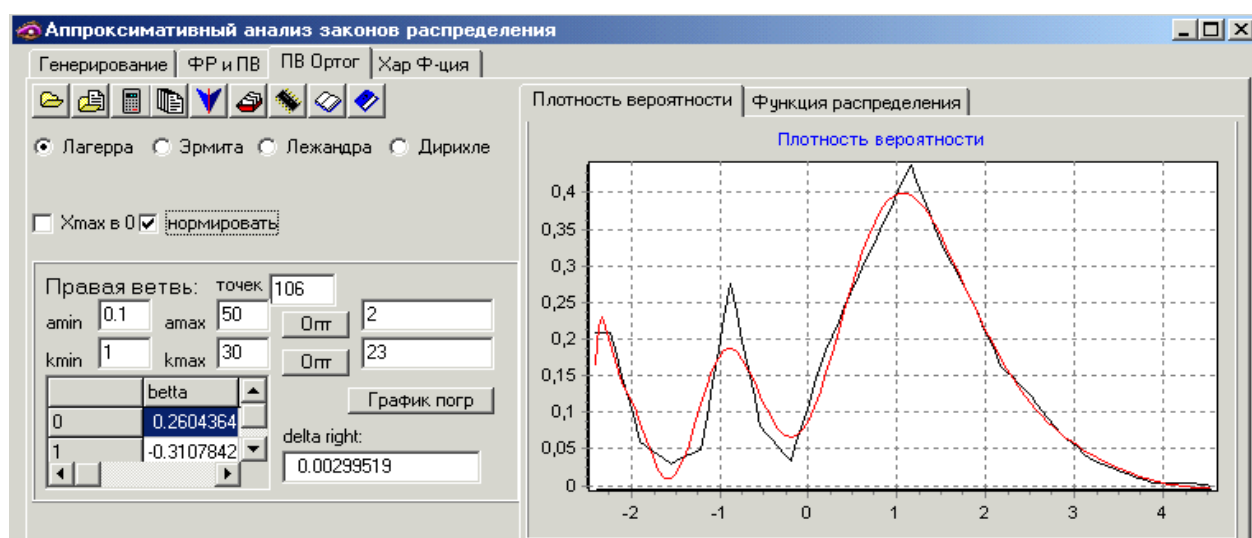
В таблице 4.53 приведены выражения для оценки Δ_2 для различных базисов. Составляющие методической погрешности аппроксимации нормированной спектральной плотности мощности ортогональными функциями

Таблица 4.53

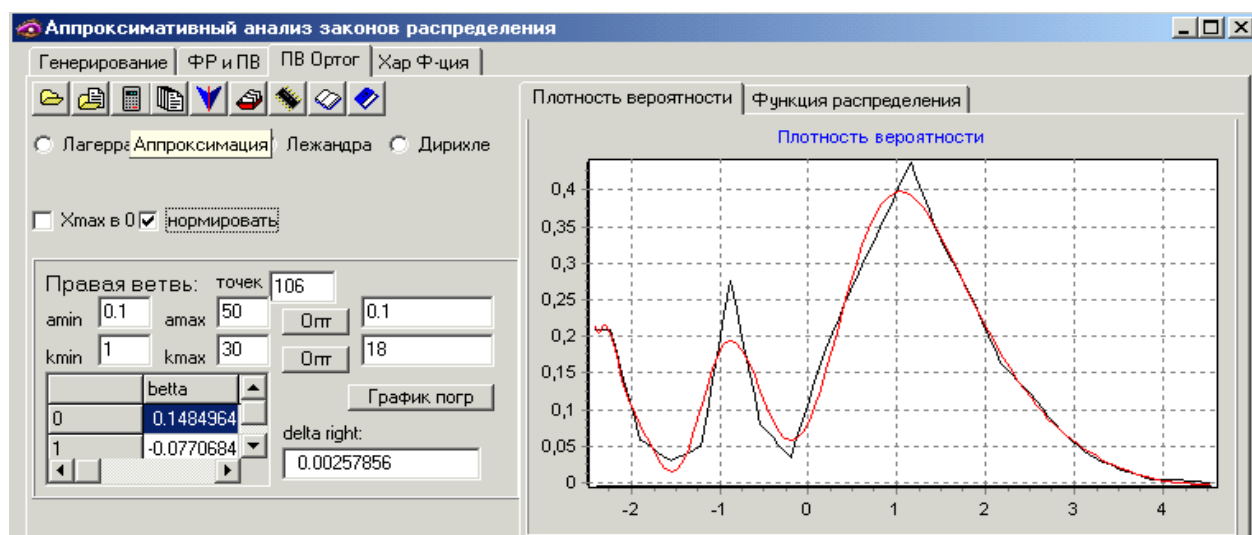
Ортогональный базис	Δ_2
Лагерра	$\frac{\left[1/2 - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \right]^2}{\frac{m+1}{\alpha}}$
Лежандра	$\frac{\left[1/2 - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(2k+1)} \right]^2}{\frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(2k+1)}}$
Дирихле	$\frac{\left[1/2 - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{(-1)^k}{(k+1)} \right]^2}{\frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(k+1)}}$
Якоби $\left(-\frac{1}{2}, 0 \right)$	$\frac{\left[1/2 - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(4k+1)} \right]^2}{\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(4k+1)}}$
Якоби $\left(\frac{1}{2}, 0 \right)$	$\frac{\left[1/2 - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(4k+3)} \right]^2}{\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(4k+3)}}$

Якоби (1,0)	$\frac{\left[1/2 - \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(k+1)}\right]^2}{\frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(k+1)}}$
Якоби (2,0)	$\frac{\left[1/2 - \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(2k+3)}\right]^2}{\frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(2k+3)}}$

На рис. 4.49 приведены примеры аппроксимации многомодального распределения ортогональными функциями.



а) аппроксимация функциями Лагерра



б) аппроксимация функциями Лежандра

Рисунок 4.49 – Результаты аппроксимации

4.16. Аппроксимация плотностей распределения вероятностей ортогональными функциями на бесконечном интервале

При аппроксимации ортогональными функциями Лагерра, Лежандра или Дирихле применяется разделение плотности распределения на две ветви относительно точки x_0 , в которой $f_X(x_0) = C_0 \neq 0$.

В этом случае разложение плотности распределения $f_X(x)$ в ряд по базису $\psi_k(x, \alpha)$ будет иметь вид:

$$f_a(x) = \sum_{k=0}^m \beta_{k,n} \psi_k(x-x_0, \alpha_n) l(x-x_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k,l} \psi_k(x_0-x, \alpha_l) l(x_0-x). \quad (4.257)$$

Условие (4.243) представим в виде:

$$\int_{x_0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k,n} \psi_k(x-x_0, \alpha_n) dx + \int_{-\infty}^{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k,l} \psi_k(x_0-x, \alpha_l) dx = 1, \quad (4.258)$$

или с учетом (4.191):

$$2 \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} [-\psi_k(0, \alpha)]^k \|\psi_k\|^2 + 2 \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} [-\psi_k(0, \alpha)]^k \|\psi_k\|^2 = 1. \quad (4.259)$$

С помощью метода множителей Лагранжа найдем выражения для коэффициентов $b_{k,n}$, $b_{k,l}$, которые минимизируют квадратическую погрешность и обеспечивают выполнение свойства (4.243), а также соблюдение ограничения в форме равенства (4.259). Для этого составим функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} = & \int_{x_0}^{+\infty} \left[f_X(x) - \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \psi_k(x-x_0, \alpha_n) \right]^2 dx + \int_{-\infty}^{x_0} \left[f_X(x) - \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \psi_k(x-x_0, \alpha_l) \right]^2 dx + \\ & + \lambda \left(2 \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} [-\psi_k(0, \alpha)]^k \|\psi_k\|^2 + 2 \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} [-\psi_k(0, \alpha)]^k \|\psi_k\|^2 - 1 \right) \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (4.260)$$

Запишем систему необходимых условий экстремума функции $\tilde{\Delta}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial b_{i,n}} = -2 \int_{x_0}^{+\infty} \left[f_X(x) - \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \psi_k(x-x_0, \alpha_n) \right] \psi_i(x-x_0, \alpha_n) dx + 2\lambda [-\psi_i(0, \alpha)]^i \|\psi_i\|^2 = 0; \\ \frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial b_{i,l}} = -2 \int_{-\infty}^{x_0} \left[f_X(x) - \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \psi_k(x_0-x, \alpha_l) \right] \psi_i(x_0-x, \alpha_l) dx + 2\lambda [-\psi_i(0, \alpha)]^i \|\psi_i\|^2 = 0. \end{cases} \quad (4.261)$$

Преобразуем:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial b_{i,n}} = -2 \int_0^{+\infty} f_X(x+x_0) \psi_i(x, \alpha_n) dx + 2 \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \psi_k(x, \alpha_n) \psi_i(x, \alpha_n) dx + 2\lambda [-\psi_i(0, \alpha)]^i \|\psi_i\|^2 = 0; \\ \frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial b_{i,l}} = -2 \int_0^{+\infty} f_X(x_0-x) \psi_i(x, \alpha_l) dx + 2 \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \psi_k(x, \alpha_l) \psi_i(x, \alpha_l) dx + 2\lambda [-\psi_i(0, \alpha)]^i \|\psi_i\|^2 = 0; \\ 2 \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} [-\psi_k(0, \alpha)]^k \|\psi_k\|^2 + 2 \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} [-\psi_k(0, \alpha)]^k \|\psi_k\|^2 = 1. \end{cases} \quad (4.262)$$

Или:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial b_{i,n}} = -2 \|\psi_i\|^2 \beta_{i,n} + 2 \|\psi_i\|^2 b_{i,n} + 2 \|\psi_i\|^2 [-\psi_i(0, \alpha)]^i \|\psi_i\|^2 = 0; \\ \frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial b_{i,l}} = -2 \|\psi_i\|^2 \beta_{i,l} + 2 \|\psi_i\|^2 b_{i,l} + 2 \|\psi_i\|^2 [-\psi_i(0, \alpha)]^i \|\psi_i\|^2 = 0. \end{cases} \quad (4.263)$$

Откуда:

$$\begin{cases} b_{i,n} = \beta_{i,n} - \lambda \cdot [-\psi_i(0, \alpha)]^i; \\ b_{i,l} = \beta_{i,l} - \lambda \cdot [-\psi_i(0, \alpha)]^i. \end{cases} \quad (4.264)$$

Подставим (4.264) в (4.259):

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{m_n} \beta_{i,n} [-\psi_i(0, \alpha)]^i \|\psi_i\|^2 + \sum_{i=0}^{m_l} \beta_{i,l} [-\psi_i(0, \alpha)]^i \|\psi_i\|^2 - \\ - \lambda \left[\sum_{i=0}^{m_n} \|\psi_i\|^2 + \sum_{i=0}^{m_l} \|\psi_i\|^2 \right] = 1/2. \end{cases} \quad (4.265)$$

Тогда из (4.265) выразим λ :

$$\lambda = \frac{\sum_{i=0}^{m_n} \beta_{i,n} [-\psi_i(0, \alpha)]^i \|\psi_i\|^2 + \sum_{i=0}^{m_l} \beta_{i,l} [-\psi_i(0, \alpha)]^i \|\psi_i\|^2 - 1/2}{\sum_{i=0}^{m_n} \|\psi_i\|^2 + \sum_{i=0}^{m_l} \|\psi_i\|^2}. \quad (4.266)$$

Подставив выражение (4.266) в (4.264), получим формулу для коэффициентов $b_{k,n(l)}$:

$$b_{k,n(l)} = \beta_{k,n(l)} - \frac{\sum_{i=0}^{m_n} \beta_{i,n} [-\psi_i(0, \alpha)]^i \|\psi_i\|^2 + \sum_{i=0}^{m_l} \beta_{i,l} [-\psi_i(0, \alpha)]^i \|\psi_i\|^2 - 1/2}{\sum_{i=0}^{m_n} \|\psi_i\|^2 + \sum_{i=0}^{m_l} \|\psi_i\|^2} [-\psi_k(0, \alpha)]^k. \quad (4.267)$$

Запишем конкретные выражения для коэффициентов $b_{k,n}$, $b_{k,l}$:

для функций Лагерра

$$b_{k,n(l)} = \beta_{k,n(l)} - \frac{\frac{2}{\alpha_n} \sum_{i=0}^{m_n} \beta_{i,n} (-1)^i + \frac{2}{\alpha_l} \sum_{i=0}^{m_l} \beta_{i,l} (-1)^i - 1}{\frac{2}{\alpha_n} (m_n + 1) + \frac{2}{\alpha_l} (m_l + 1)} (-1)^k; \quad (4.268)$$

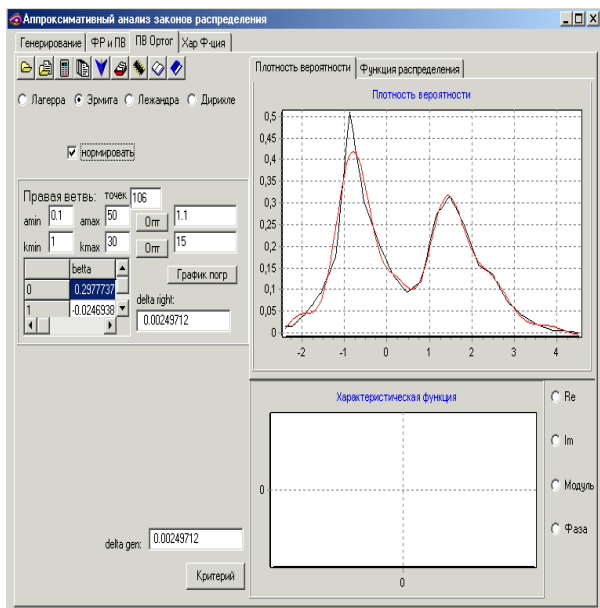
для функций Лежандра:

$$b_{k,n(l)} = \beta_{k,n(l)} - \frac{\frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=0}^{m_n} \frac{\beta_{i,n}}{2i+1} + \frac{1}{\alpha_l} \sum_{i=0}^{m_l} \frac{\beta_{i,l}}{2i+1} - 1}{\frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=0}^{m_n} \frac{1}{2i+1} + \frac{1}{\alpha_l} \sum_{i=0}^{m_l} \frac{1}{2i+1}}; \quad (4.269)$$

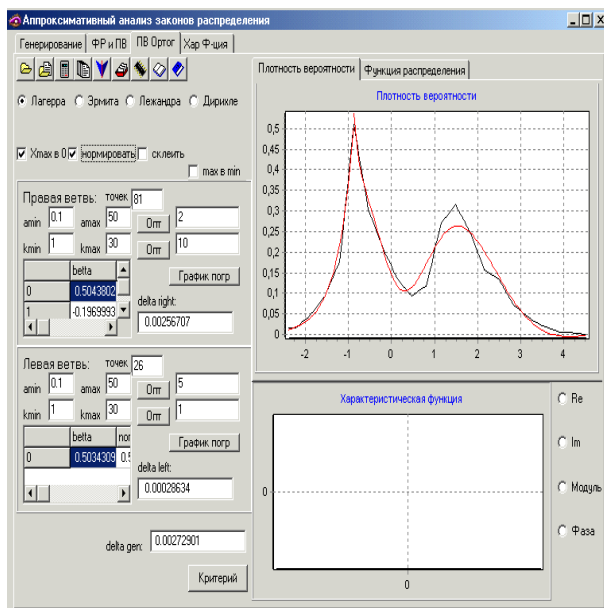
для функций Дирихле:

$$b_{k,n(l)} = \beta_{k,n(l)} - \frac{\frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=0}^{m_n} \frac{\beta_{i,n} (-1)^i}{i+1} + \frac{1}{\alpha_l} \sum_{i=0}^{m_l} \frac{\beta_{i,l} (-1)^i}{i+1} - 1}{\frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=0}^{m_n} \frac{1}{2i+1} + \frac{1}{\alpha_l} \sum_{i=0}^{m_l} \frac{1}{2i+1}} (-1)^k. \quad (4.270)$$

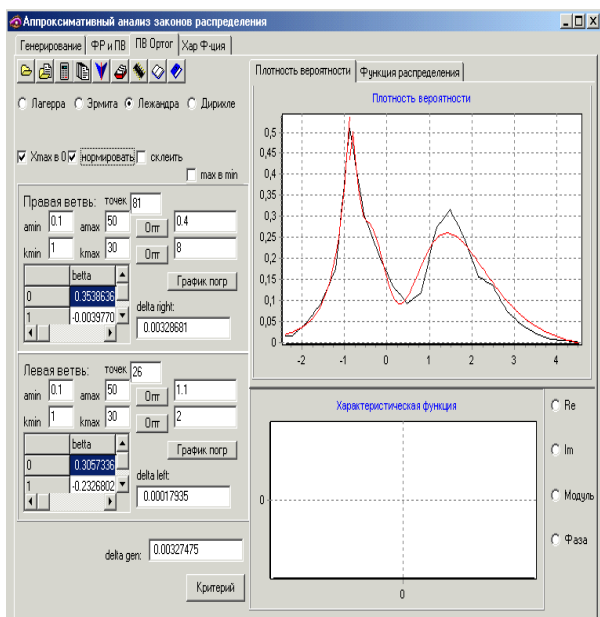
На рисунках 4.50 представлены примеры аппроксимации плотностей вероятности ортогональными функциями Эрмита, Лагерра, Лежандра и Дирихле при обеспечении условия нормировки (4.243). При аппроксимации функциями Лагерра, Лежандра и Дирихле применяется метод разделения плотности вероятности на ветви относительно точки максимума.



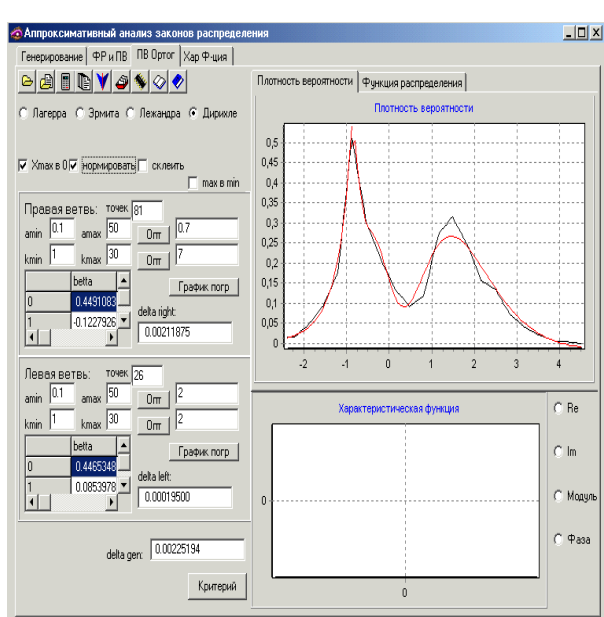
а) функциями Эрмита



б) функциями Лагерра



в) функциями Лежандра



г) функциями Дирихле

Рисунок 4.50 - Аппроксимация многомодальной плотности вероятности с учетом основного свойства

4.17. Ортогональные модели характеристических функций

Определив параметры модели плотности распределения вероятностей M_0 , $\{b_{k,n}\}_{k=0}^{m1}$, x_m , α_1 , $\{b_{k,n}\}_{k=0}^{m2}$, α_2 в ортогональном базисе экспоненциального типа $\psi_k(x)$

$$f_x(x) = M_0 \left\{ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} \psi_k(x - x_m, \alpha_1) l(x - x_m) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,n} \psi_k(x_m - x, \alpha_2) l(x_m - x) \right\}, \quad (4.271)$$

оценим характеристическую функцию случайного процесса.

Для этого, подставив модель (4.271) в выражение для определения характеристической функции

$$\varphi_x(ju) = \int_{-\infty}^{\infty} M_0 \left\{ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} \psi_k(x - x_m, \alpha_1) l(x - x_m) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,n} \psi_k(x_m - x, \alpha_2) l(x_m - x) \right\} \exp(jux) dx$$

с учётом определения ортогональных функций (см. подраздел 4.2), получим:

$$\varphi_x(ju) = M_0 \exp(jux_m) \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} (-1)^k W_k(-ju, \alpha_1) + M_0 \exp(jux_m) \sum_{k=0}^{m2} b_{k,n} (-1)^k W_k(ju, \alpha_2). \quad (4.272)$$

Так как характеристическая функция комплексная, её можно представить в виде

$$\varphi_x(ju) = \operatorname{Re} \varphi_x(ju) + j \operatorname{Im} \varphi_x(ju). \quad (4.273)$$

С учетом выражения (4.272) определим

$$\operatorname{Re} \varphi_x(ju) = M_0 \cos ux_m \left[\sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} (-1)^k \operatorname{Re} W_k(ju, \alpha_1) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,n} (-1)^k \operatorname{Re} W_k(ju, \alpha_2) \right] +$$

$$+ M_0 \sin ux_m \left[\sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} (-1)^k \operatorname{Im} W_k(ju, \alpha_1) - \sum_{k=0}^{m2} b_{k,n} (-1)^k \operatorname{Im} W_k(ju, \alpha_2) \right].$$

$$\operatorname{Im} \varphi_x(ju) = M_0 \cos ux_m \left[\sum_{k=0}^{m2} b_{k,n} (-1)^k \operatorname{Im} W_k(ju, \alpha_2) - \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} (-1)^k \operatorname{Im} W_k(ju, \alpha_1) \right] +$$

$$+ M_0 \sin ux_m \left[\sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} (-1)^k \operatorname{Re} W_k(ju, \alpha_1) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,n} (-1)^k \operatorname{Re} W_k(ju, \alpha_2) \right]. \quad (4.275)$$

Заметим, что $\operatorname{Re} W_k(ju)$ и $\operatorname{Im} W_k(ju)$ определяются выражениями (4.27), (4.28).

4.18. Ортогональные модели нестационарных случайных процессов по математическому ожиданию и дисперсии

В большинстве случаев для описания нестационарных случайных процессов можно использовать аддитивно-мультипликативную модель (см. подраздел 1.5):

$$Y(t) = \varphi(t) + \sigma^2(t) \cdot \overset{\circ}{X}(t), \quad (4.276)$$

где

$\varphi(t)$ – математическое ожидание нестационарного случайного процесса;

$\sigma^2(t)$ – дисперсия нестационарного случайного процесса;

$\overset{\circ}{X}(t)$ – случайный процесс с нулевым математическим ожиданием $M\left[\overset{\circ}{X}(t)\right] = 0$

и единичной дисперсией $D\left[\overset{\circ}{X}(t)\right] = 1$.

В соответствии с моделью необходимо:

- 1) определить модель тренда $\varphi(t)$ реализации случайного процесса $Y(t)$;
- 2) найти центрированную реализацию случайного процесса;
- 3) определить модель дисперсии $\sigma^2(t)$ центрированной реализации случайного процесса;
- 4) нормировать центрированную реализацию случайного процесса с использованием полученной модели дисперсии.

Аддитивный тренд представляет собой разложение выборки нестационарного случайного процесса в выбранном ортогональном базисе $\psi_k(x)$ с ограниченным числом коэффициентов разложения β_k :

$$\overset{\wedge}{\varphi}(t) = \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(t). \quad (4.277)$$

В соответствии с выражением (4.9)

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|_a^2} \int_a^b Y(t) \psi_k(t) \mu(t) dt. \quad (4.278)$$

Операция центрирования случайного процесса с использованием полученной модели будет иметь вид:

$$\overset{\circ}{Y}(t) = Y(t) - \overset{\wedge}{\varphi}(t). \quad (4.279)$$

Пример выделения тренда и центрирования реализации случайного процесса показан на рис. 4.57.

Построение модели мультипликативного тренда производится аналогичным образом с той разницей, что в подынтегральном выражении вместо исходной реализации случайного процесса стоит квадрат центрированной реализации. Полученные коэффициенты разложения представляют собой коэффициенты модели дисперсии случайного процесса, т.к.

$$D[Y(t)] = M\left\{\left[Y(t) - \overset{\wedge}{\varphi}(t)\right]^2\right\}. \quad (4.280)$$

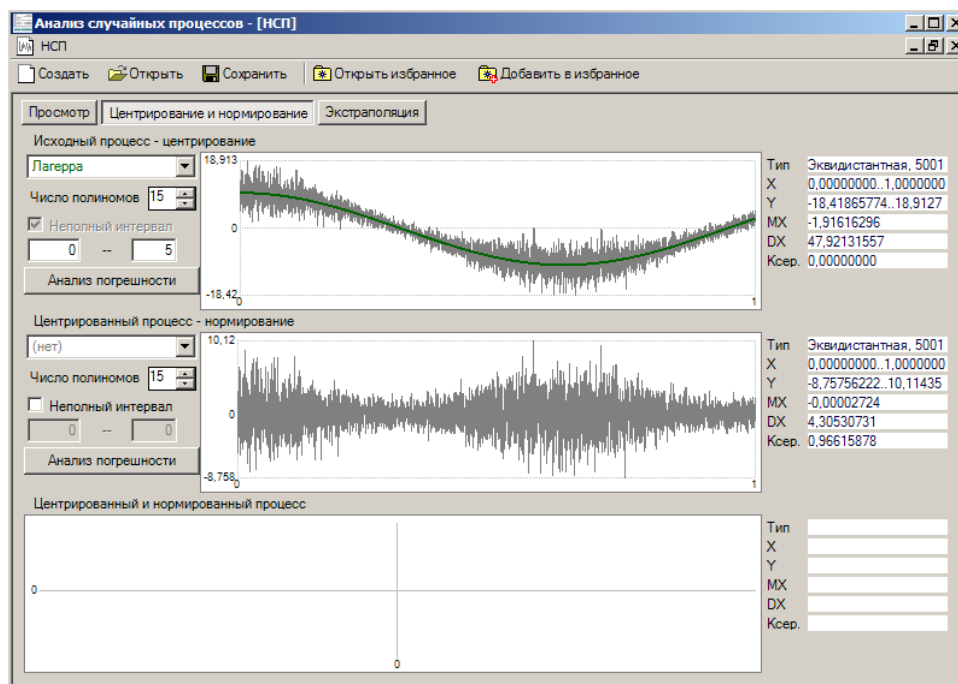


Рисунок 4.57 – Центрирование случайного процесса

Пример центрирования и нормирования при нормировании случайного процесса показан на рисунке 4.58.

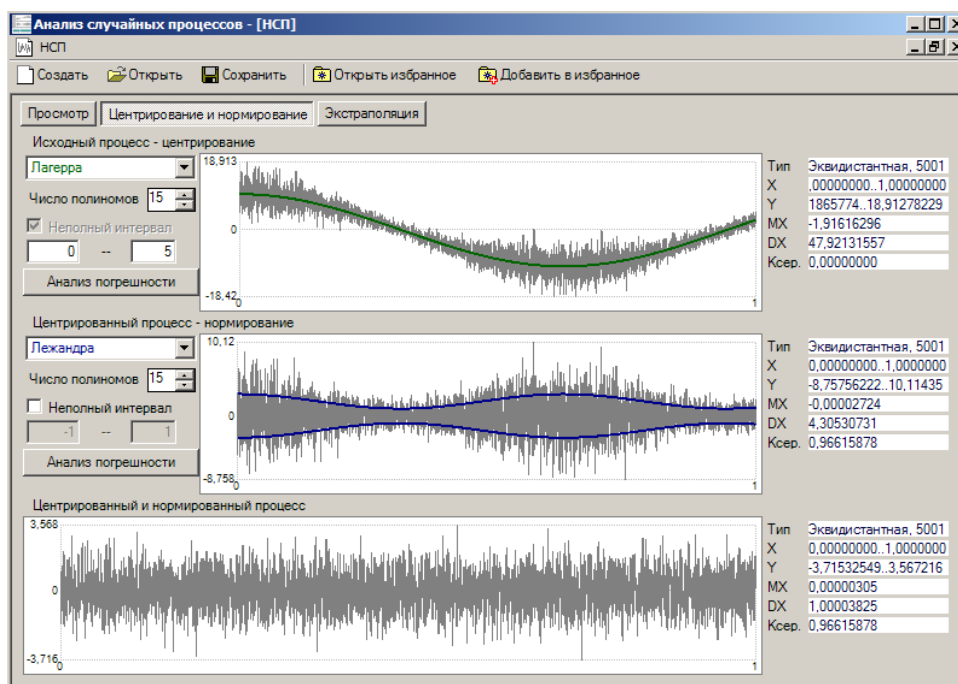


Рисунок 4.58 – Нормирование случайного процесса

Для вычисления коэффициентов разложения применяется метод, основанный на представлении аппроксимируемой функции в кусочно-линейном виде

$$f(x) = \begin{cases} a_0x + b_0, x_0 \leq x < x_1; \\ \dots \\ a_jx + b_j, x_j \leq x < x_{j+1}; \\ \dots \\ a_{n-1}x + b_{n-1}, x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (4.281)$$

и использовании первообразной известного вида для постоянной и пропорциональной частей подынтегральной функции:

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \sum_{j=0}^{n-1} \left(a_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} x \psi_k(x) \mu(x) dx + b_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} \psi_k(x) \mu(x) dx \right).$$

Такой способ вычисления коэффициентов позволяет значительно снизить методическую погрешность, возникающую при применении традиционных численных методов интегрирования. Для иллюстрации этого утверждения на рисунке 4.59 приведен график зависимости относительной погрешности аппроксимации от числа членов разложения в ортогональном базисе Лежандра функции $y(t) = \cos(33t)$, заданной 101 точкой, равноотстоящей на интервале $[0;1]$. Вычисление интеграла для определения коэффициентов разложения точно-заданной функции производилось методом трапеций, методом Симпсона и вышеприведенным методом первообразных.

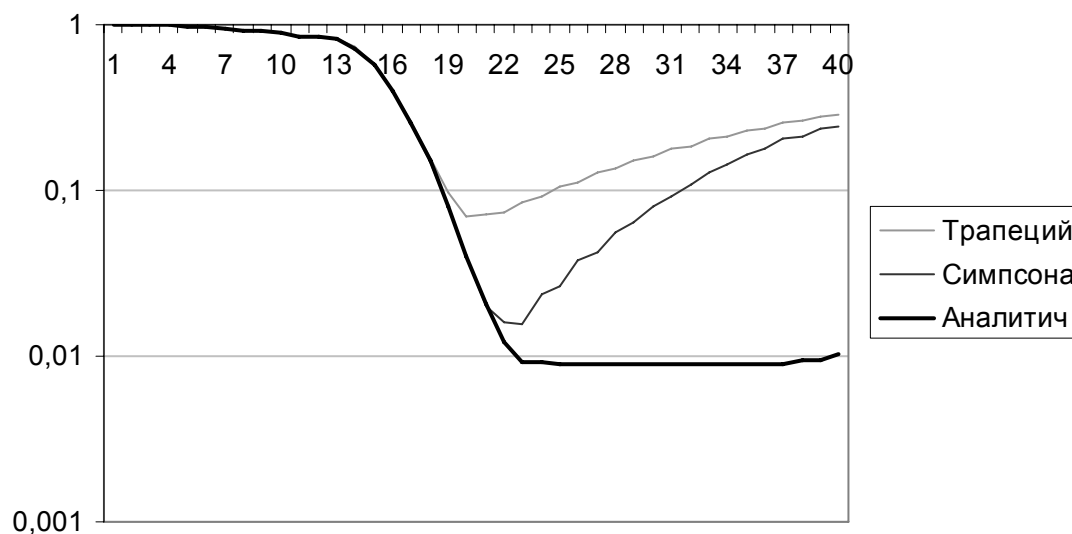


Рисунок 4.59 – Относительная погрешность аппроксимации

Из графика видно, что использованный метод интегрирования позволяет не только повысить точность вычисления коэффициентов, но и сохранить ее с увеличением числа членов разложения, а следовательно – с усложнением вычислений.

Важным свойством применяемого метода вычисления коэффициентов является то, что он работает не с интервалом дискретизации, а с конкретными временными отсчетами, то есть может быть в равной степени применен как к эквидистантным, так и к неэквидистантным временным рядам [117].

5. АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ АППРОКСИМАТИВНОГО АНАЛИЗА ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

5.1. Принципы проектирования автоматизированных систем аппроксимативного анализа вероятностных характеристик случайных процессов

Целью разработки семейства автоматизированных систем для аппроксимативного анализа вероятностных характеристик случайных процессов является создание комплекса программ по обработке экспериментальных данных и исследованию свойств алгоритмов аппроксимативного анализа. Для этого в автоматизированных системах реализована основная функциональность по анализу случайных процессов и аппроксимации полученных результатов с использованием функций заданного вида – параметрических моделей и ортогональных функций и полиномов.

В настоящий момент существует большое число современных математических систем обработки статистической информации, в составе которых имеются как стандартные функции численной обработки данных, так и средства получения аналитических выражений для функциональных характеристик.

Навигация в пространстве современных математических систем достаточно тяжела, если с такими системами, как Mathcad, Matlab, Mathematica знакомы практически все, то специализированные статистические системы отечественного производства часто неизвестны широкому кругу исследователей. Однако именно такие системы бывают наиболее удобными для решения узко специализированных задач; кроме этого, они разработаны для решения конкретных проблем, например из области прикладной физики, с учетом апробированных методик проведения всего цикла исследований, поэтому с потерей универсальности происходит улучшение качества обработки, в том числе и повышение ее эффективности.

Статистические пакеты общего назначения отличаются отсутствием прямой ориентации на специфическую предметную область, широким диапазоном статистических методов, дружелюбным интерфейсом пользователя. Специализированные пакеты обычно реализуют методы, используемые в конкретной предметной области; они содержат достаточно полный набор традиционных методов, а также оригинальные методы и алгоритмы, созданные разработчиками. Их использование целесообразно, когда требуется систематическое решение задач узкой предметной области.

Выбор статистического пакета зависит от характера решаемых задач, объема и специфики обрабатываемых данных, квалификации пользователей и т.д. С помощью стандартных пакетов можно обработать данные небольших объемов стандартными статистическими методами. Ряд пакетов (STATISTICA, SPSS) обладают возможностью настройки на узкоспециализированную задачу, которая решается регулярно по мере обновления данных, например, существуют пакеты, специализированные именно на обработке временных рядов. В некоторых из них производится автоматический подбор модели временного ряда из заданного класса моделей, однако может привести к излишне усложненным моделям или к ошибкам. Другие пакеты содержат алгоритмы подбора оптимальных моделей, причем имеется широкий набор инструментов предварительного и окончательного анализа данных и возможность их пошагового применения. При этом пользователь сам задает стратегию ряда.

Итак, наиболее распространенные математические системы могут быть разделены на следующие группы:

- универсальные математические системы (Mathcad, MatLab, Mathematica);
- системы символьной математики (Derive, Mathematica, Maple, MuPAD);
- статистические системы (STATISTICA, SPSS, NCSS (Number Cruncher Statistical System) and PASS, Statgraphics, SYSTAT, SAS);
- специализированные инструментальные средства (Stadia, Эвриста).

Отметим, что все рассмотренные системы являются в разной степени мощными средствами статистического анализа, позволяют представлять результаты в численной форме и имеют эффективные средства аппроксимации функциональных характеристик. Однако все эти системы могут рассматриваться лишь как инструмент для реализации дополнительных алгоритмов и методов, необходимость которых определяется новыми подходами аппроксимативного анализа вероятностных характеристик случайных процессов. В частности, во многих математических системах существуют библиотеки специальных функций, в том числе ортогональных. Однако следует отметить отсутствие реализованных алгоритмов аппроксимации функциональных характеристик ортогональными функциями.

Практически все статистические системы позволяют производить корреляционно-спектральный анализ, поддерживают дискретное преобразование Фурье, причем в таких системах как MatLab имеется достаточно мощный инструмент выполнения быстрого преобразования Фурье. Однако задача определения спектральной плотности мощности в общем случае решается в численном виде и, в связи с этим, вопрос быстрого действия при обработке больших массивов данных остается актуальным.

Различные подзадачи аппроксимативного анализа вероятностных характеристик случайных процессов могут быть решены с помощью универсальных и специализированных систем, однако в полном объеме подобную задачу решить нельзя. Именно универсальность известных систем требует дополнительной доработки, реализации оригинальных алгоритмов для решения сложных научных и исследовательских задач. Поэтому необходимо либо дописывать подпрограммы для известной математической системы (такие пакеты как Matlab или SPSS это позволяют), либо реализовать свою автоматизированную систему с помощью любого языка высокого уровня.

В связи с этим, весьма велика актуальность разработки автоматизированных систем, которые могли бы во многом дополнить существующие известные универсальные математические и статистические системы.

Выделим основные требования, которым должны удовлетворять автоматизированные системы анализа случайных процессов. Отметим, что они предъявляются в равной степени и ко всем универсальным системам. Итак, современные автоматизированные системы должны сочетать в себе следующие качества:

- обеспечение возможности применения для обработки результатов широкого круга экспериментов:
 - простота планирования и реализации вычислительного эксперимента;
 - возможность экспериментального анализа совокупности случайных процессов (обобщения результатов нескольких экспериментов и выделение закономерностей);
 - возможность обработки временных рядов с различными характеристиками, в том числе неэквидистантных;
 - ясность получаемых результатов и однозначность трактовки;

- возможность исследования различных алгоритмов статистического анализа:
 - поддержка имитационного моделирования (включающего построение модели и обработку результатов моделирования);
 - автоматизированное определение погрешностей полученных результатов при обработке экспериментальных данных и данных, полученных в ходе имитационного моделирования;
 - легкость сравнения результатов, в том числе, возможность наложения различных графиков разных форматов;
 - возможность сохранения результатов как во внутренней базе данных, так и в файлах разной структуры;
- удобство использования (при условии, что статистическая обработка данных обычно производится специалистом предметной области, не знакомым с нюансами методов анализа случайных процессов):
 - простота интерфейса, отсутствие необходимости длительного изучения;
 - сокращение (отсутствие) стадии подготовки системы к проведению эксперимента;
 - возможность комбинирования разных алгоритмов и систем в рамках одного эксперимента;
 - обеспечение универсального импорта и экспорта данных.

Кроме этого, автоматизация статистического анализа случайных процессов должна предоставлять исследователю возможность сочетать различные методы, используемые при анализе информационных массивов, которые можно условно разделить на две группы: цифровые, связанные с численным получением решения и аналитические, основанные на построении зависимостей, формул или рядов.

Аналитические решения обладают рядом преимуществ, включающих возможность исследования влияния физических параметров, начальных и конечных условий на характер решения. Результаты аналитических решений способствуют разработке адекватных математических моделей, они более информативны, устойчивы, обладают возможностью вычисления значения в любой точке с заданной точностью, не прибегая к вычислениям в других точках. Недостатки подобных решений заключаются в том, что на практике обрабатываемые данные принимаются в виде рядов, особенно это касается случайных процессов, поэтому получение аналитических выражений для данных или их характеристик связано с вычислительными и материальными затратами. Численные решения универсальны, применяются тогда, когда аналитическое решение невозможно, а высокая производительность современных вычислительных комплексов нивелирует их низкое быстроедействие. Однако появление различных неустойчивостей, сложность использования результатов расчета, накопление ошибок округления существенно снижает ценность численных выражений.

Комбинирование указанных методов является очевидным и результативным шагом при анализе больших информационных массивов, включая случайные процессы. Оно позволяет повысить оперативность и объединить достоинства обоих методов, ликвидировав часть недостатков. Существуют подходы, основанные на аналитическом описании цифровых массивов с их последующей обработкой. При этом на подобное решение накладываются следующие требования: обеспечение заданной точности описания более простым аналитическим выражением, адаптивность аналитического описания к особенностям каждого сигнала, унифицированность структуры описания независимо от природы и особенностей сигнала, возможность реализации метода в отсутствие априорной информации о сигнале.

Преимущественным представляется подход, основанный на численном анализе информационных массивов, случайных процессов, заключающемся в определении функциональных характеристик, с их дальнейшей аналитической обработкой. Таким образом, удастся избежать существенных ошибок при выборе модели выражения, метода и алгоритма аппроксимации, получить априорную информацию об исследуемых процессах и в конечном итоге снять или уменьшить важность соблюдения указанных выше ограничений.

Задача аппроксимативного анализа функциональных характеристик случайных процессов сводится к их численному определению и получению аналитического выражения характеристики. Отметим, что численное решение задачи важно при отсутствии информации об исследуемых процессах. В случае, когда известны какие-либо характеристики, и точность аналитического выражения удовлетворяет исследователя, возможно построение других аналитических характеристик на базе имеющейся информации, например, определение спектральной плотности мощности по корреляционной функции с использованием преобразования Фурье.

В соответствии с указанными требованиями архитектура современных систем аппроксимативного анализа должна быть основана на блочном принципе, когда несколько взаимосвязанных модулей, реализующих единый интерфейс обмена данными, могут быть настроены для решения любой задачи. В разработанных системах можно выделить следующие блоки:

- моделирования временных рядов с заданными характеристиками;
- расчета корреляционно-спектральных характеристик, структурных функций, законов распределения;
- аппроксимации корреляционно-спектральных характеристик, структурных функций, законов распределения;
- импорта/экспорта данных;
- ведения базы знаний об экспериментах и результатах корреляционно-спектрального, структурного анализа, анализа законов распределения.

Эти модули объединены в следующие подсистемы:

- имитационного моделирования (генерирования временных рядов с заданными статистическими свойствами: законами распределения, корреляционными и взаимными корреляционными функциями);
- аппроксимативного анализа, в которой реализованы алгоритмы аппроксимации законов распределения, корреляционно-спектральных характеристик, структурных функций как функциями заданного вида, так и ортогональными функциями и полиномами.

Основная функциональность, которая предоставляется исследователю, отражена на рисунке 5.1. Здесь изображен общий случай исследования пары временных рядов, при котором необходимо определить как статистические характеристики каждого ряда, так и, например, взаимные корреляционно-спектральные характеристики.

В соответствии с проведенным разделением на подсистемы опишем функциональность подсистемы моделирования временных рядов (см. рисунок 5.2) и аппроксимативного анализа (см. рисунки 5.3, 5.4).

Приведенная выше архитектура позволяет организовать комбинированный подход, при котором производится декомпозиция исследуемой системы и обеспечить требуемый уровень адекватности модели. Исследователь имеет возможность построить концептуальную модель, определить основные блоки, руководствуясь принципом

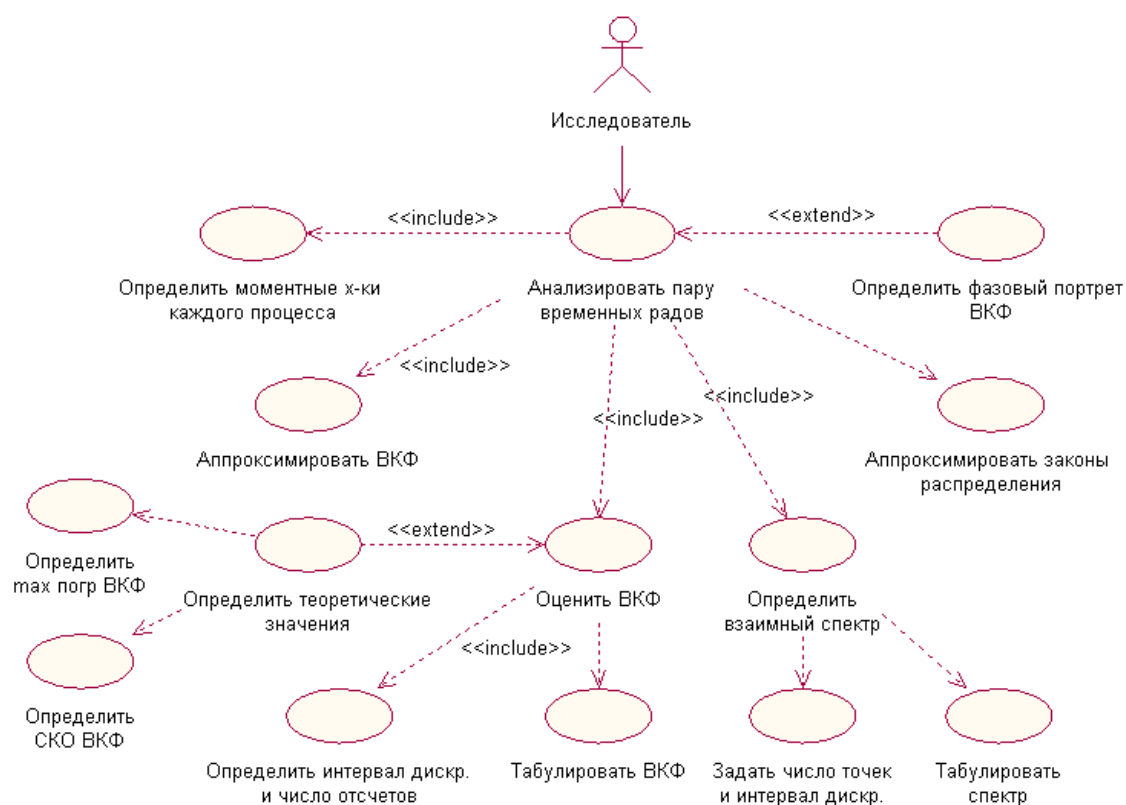


Рисунок 5.1 – Анализ временных рядов

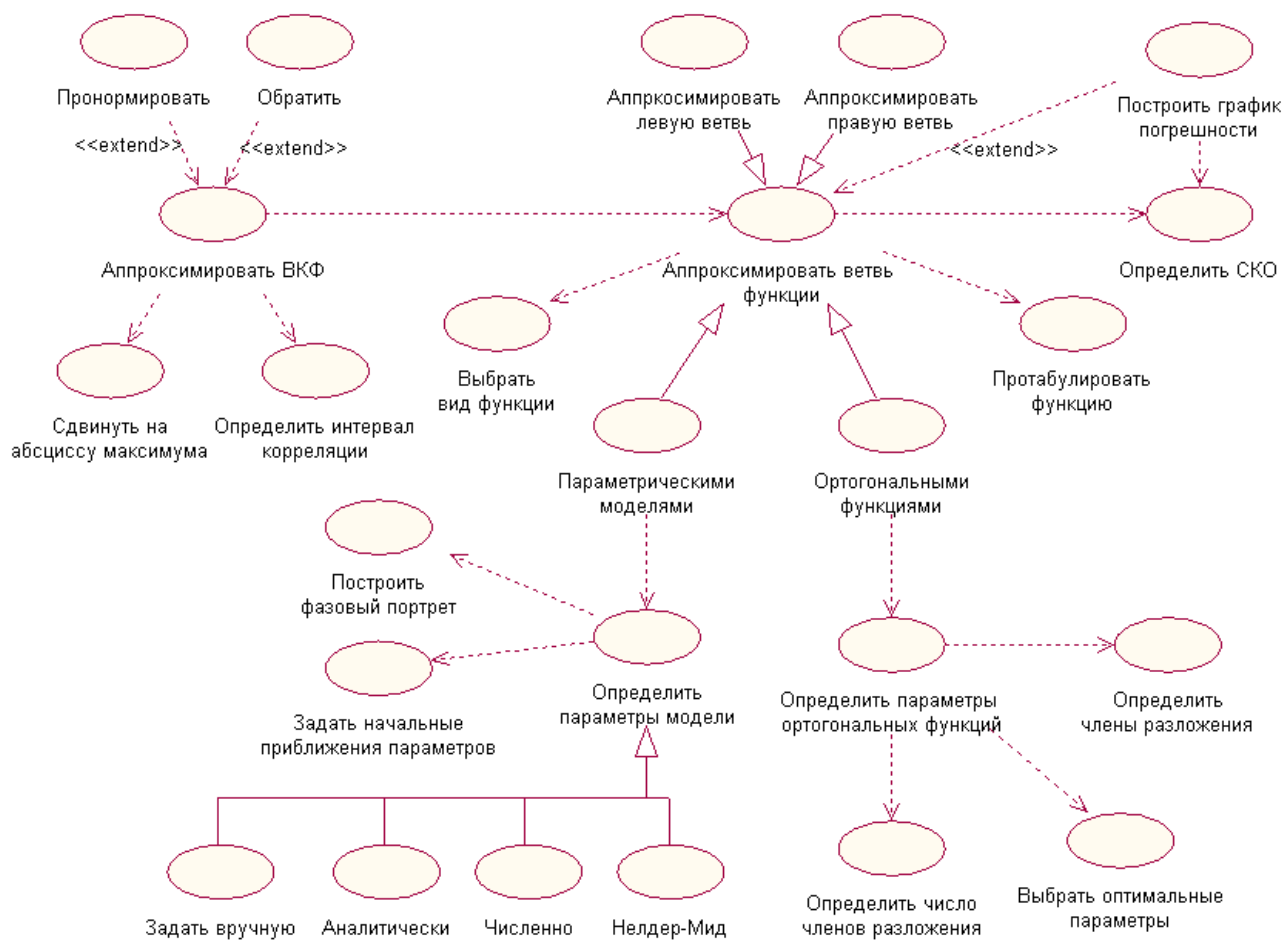


Рисунок 5.2 – Аппроксимация ВКФ

агрегатного проектирования, задать входные и выходные потоки информации, а также взаимодействия между блоками. Таким образом, возможно, как воспроизведение структуры системы, так и представление системы в виде черного ящика с известными входными и выходными потоками информации.

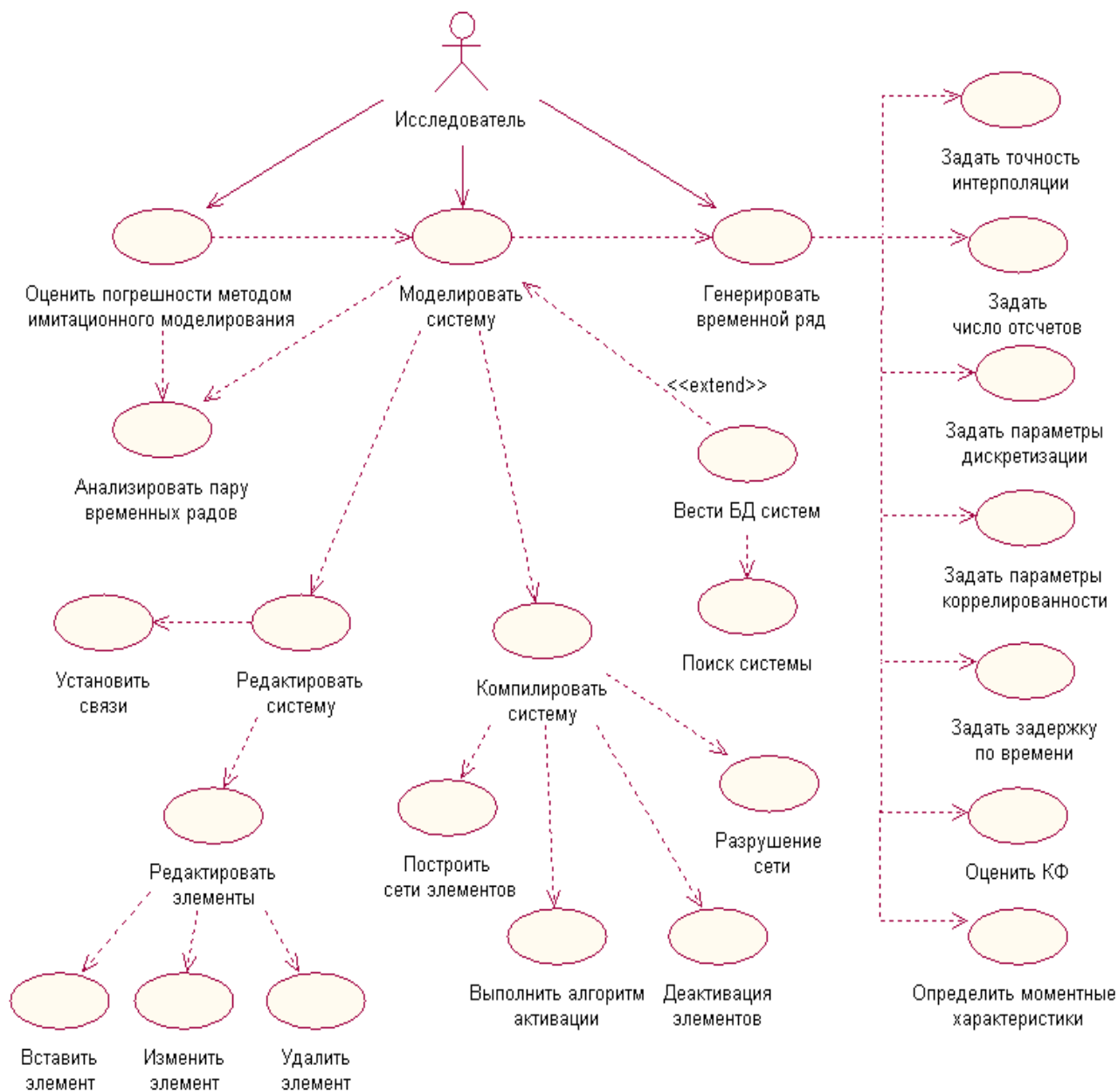


Рисунок 5.3 – Моделирование временных рядов

В качестве примера можно привести реализацию оригинальных алгоритмов аппроксимативного анализа, которые основаны на предварительной обработке характеристики для улучшения результатов ее аппроксимации ортогональными функциями и полиномами. Примером такого похода может служить случай аппроксимации взаимной спектральной плотности мощности ортогональными функциями, изображенный на рисунке 5.5, где разбиение спектральной плотности мощности на действительную и мнимую части позволяет использовать функции, ортогональные на полубесконеч-

ном интервале для аппроксимации взаимных спектральных плотностей, определенных на интервале $(-\infty, +\infty)$.

В данной части не приводится описание алгоритмов в виде диаграмм UML, так как реализованные в автоматизированных системах алгоритмы аппроксимативного анализа случайных процессов могут быть описаны математически, что, несомненно, является их достоинством. Подробное описание алгоритмов изложено в предыдущих разделах данной работы.

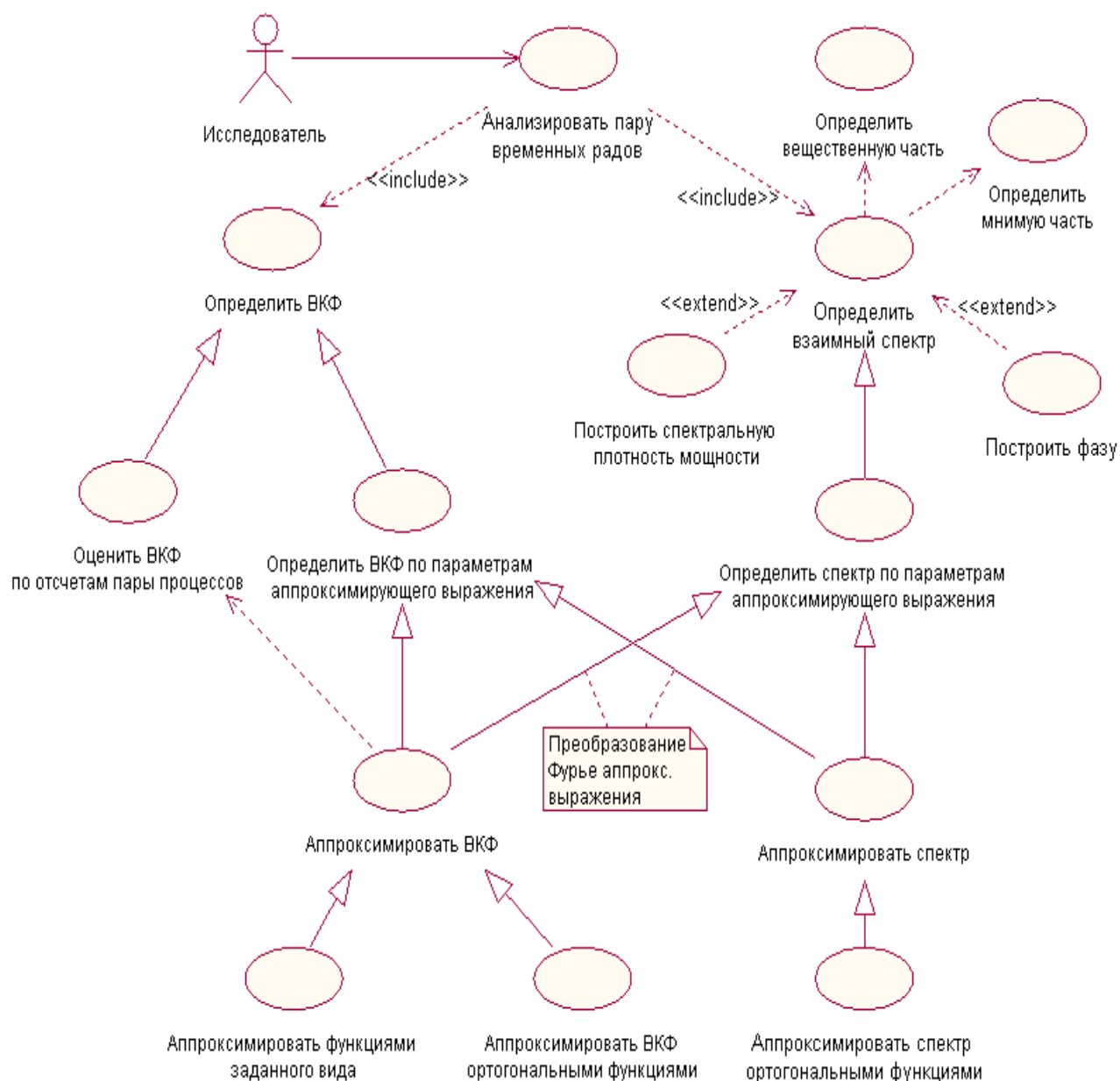


Рисунок 5.4 – Преобразования моделей

Выбранная архитектура не накладывает ограничений на средства реализации автоматизированных систем. Требования к реализации могут быть различными и большей частью основываются на условиях применения. Так, использование языка

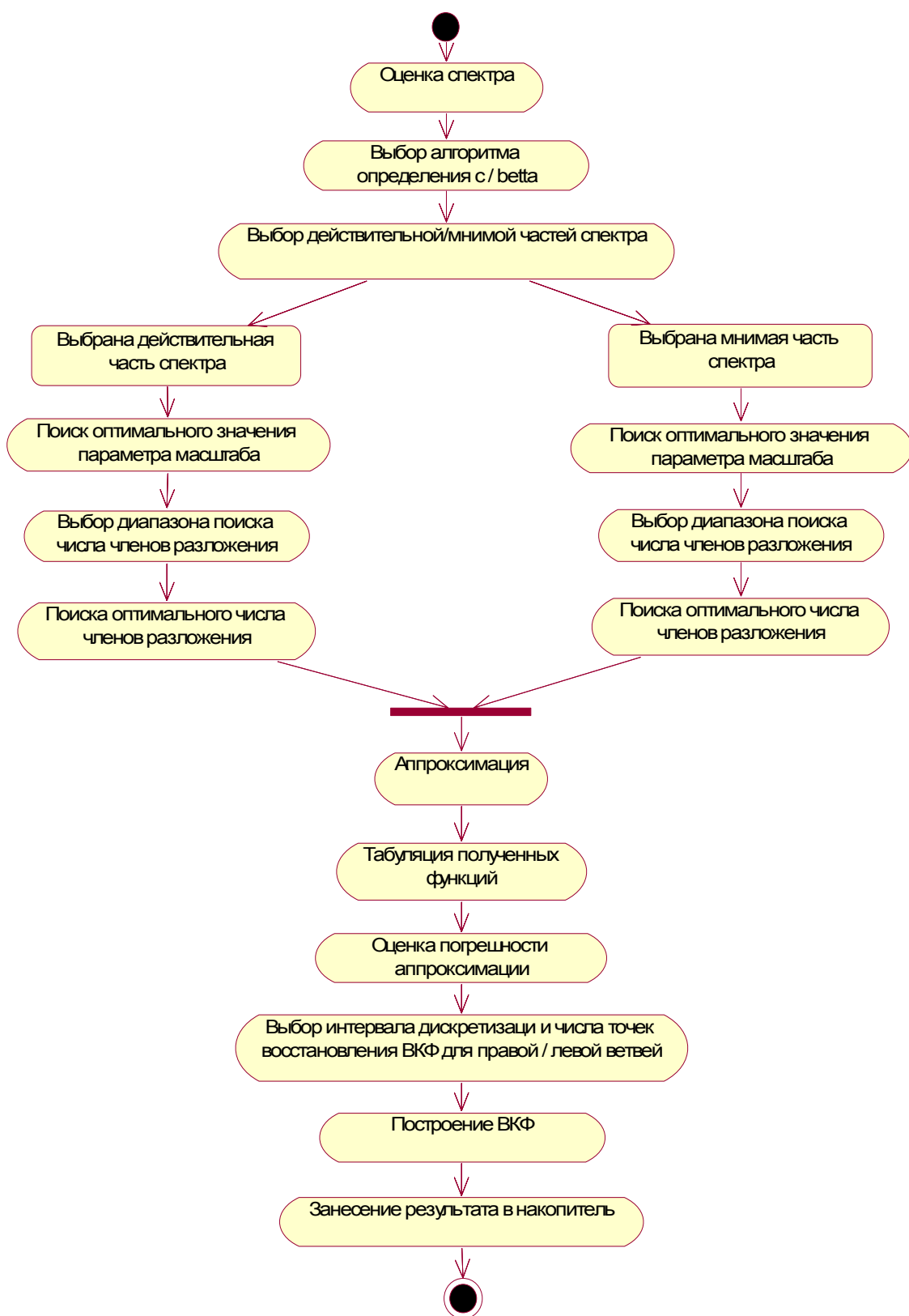


Рисунок 5.5 – Аппроксимация спектральной плотности мощности и восстановление ВКФ

Java позволяет применять ядро системы в универсальных системах статистической обработки данных, реализовать Web-интерфейс, обеспечить интеграцию с Matlab или Web-приложениями на уровне библиотек функций. Использование языка Delphi более эффективно при построении учебно-исследовательских приложений, не требует больших усилий при разработке удобного пользовательского интерфейса. В целом, современные средства разработки информационных систем позволяют обеспечить гибкость настройки автоматизированной системы для решения широкого круга задач, простоту интерфейса и наглядность получаемых результатов.

Однако использование различных средств реализации приводит к возникновению вопросов интеграции семейства разработанных автоматизированных систем. Эти вопросы решаются путем введения единых стандартов обмена информацией (с применением файлов обмена и базы данных). Отметим, что база данных позволяет упростить работу с результатами экспериментов и автоматизировать их обработку согласно методике проведения эксперимента РТМ 25139-74 [95].

Пользовательскому интерфейсу автоматизированных систем уделено особое внимание, так как эти системы предназначены не только для обработки экспериментальных данных и исследования свойств алгоритмов, но и для обучения приемам аппроксимативного анализа. Разработанный пользовательский интерфейс имеет следующие особенности:

- возможны пошаговая настройка работы алгоритмов и просмотр результатов изменения каждого параметра при проведении серии моделирующих экспериментов для иллюстрации различий;
- для проведения имитационного моделирования возможно создание наглядной сети объектов (генераторов случайных процессов, фильтров, линий задержки, и т.д.) с настройкой элементов и анализом результатов;
- предусмотрена автоматизированная аппроксимация функции при пошаговом изменении алгоритма для отслеживания динамики изменения погрешности;
- пользователь имеет возможность сравнения полученных результатов, представленных в табличной и графической форме;
- все подсистемы и блоки сгруппированы по разным вкладкам (экранным формам), что позволяет проследить этапы аппроксимативного анализа и проиллюстрировать возможность итеративного повторения некоторых этапов для корректировки параметров аппроксимирующего выражения;
- вместе с тем, не накладывается ограничений на порядок работы с системой: исследователь имеет достаточно широкие возможности по планированию эксперимента.

Описанные принципы проектирования автоматизированных систем аппроксимативного анализа обеспечивают возможность создания вычислительной модели, достаточной для применения метода имитационного моделирования физических процессов, который является одним из самых мощных и универсальных методов исследования сложных систем.

5.2. Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа случайных процессов

Автоматизированная система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа случайных процессов, используемая как при подготовке специалистов в области обработки информации и управления, так и при проведении научных исследований, позволяет моделировать равномерные и неэквидистантные временные ряды с шестью видами корреляционных функций, производить идентификацию вида корреляционной функции СП, аппроксимировать корреляционные функции функциями заданного вида (методом Ньютона и методом деформируемого многогранника) и ортогональными функциями Лагерра, а также решать задачу оценки спектральной плотности мощности СП [138, 139].

На рис. 5.6 представлена структурная схема автоматизированной учебно-исследовательской системы, включающей в себя следующие подсистемы:

- задания входных воздействий;
- генерирования неэквидистантных временных рядов;
- первичной и вторичной статистической обработки;
- идентификации корреляционных функций (КФ);
- аппроксимативного анализа;
- спектрального анализа;
- работы с базой данных.

Подсистема задания входных воздействий состоит из двух частей: генерирования псевдослучайной последовательности с заданным видом КФ и ввода данных из файла.

Генерирование псевдослучайной последовательности с заданным видом КФ осуществляется методом рекурсивной фильтрации. Для этого генерируется псевдослучайная последовательность с равномерным законом распределения в интервале $[0,1]$. Затем определяется выходной сигнал фильтра, импульсная характеристика и значения параметров которого зависят от требуемого вида и параметров КФ. Данные могут генерироваться в самой программе, а также могут быть введены извне как результат эксперимента или сгенерированы в другой программе и переданы в систему через файл.

Подсистема генерирования НВР включает в себя следующие способы получения неэквидистантных временных рядов: метод p -преобразования, дискретизация с "дрожанием", дискретизация с "дрожанием" и пропусками наблюдений, аддитивная случайная дискретизация, аддитивная случайная дискретизация с пропусками наблюдений, аддитивная случайная дискретизация с "дрожанием" и пропусками наблюдений, адаптивно-временная дискретизация [2, 3].

Подсистема первичной статистической обработки включает в себя оценку числовых характеристик, центрирование и нормирование СП и оценку КФ. В данную подсистему передаются массивы меток времени и соответствующих им отсчетов СП, объем выборки N и интервал дискретизации Δt_0 . В ходе работы данной подсистемы производится оценка математического ожидания и дисперсии, далее входной СП центрируется и нормируется, а затем производится оценка КФ с помощью интервальной корреляционной функции [117].

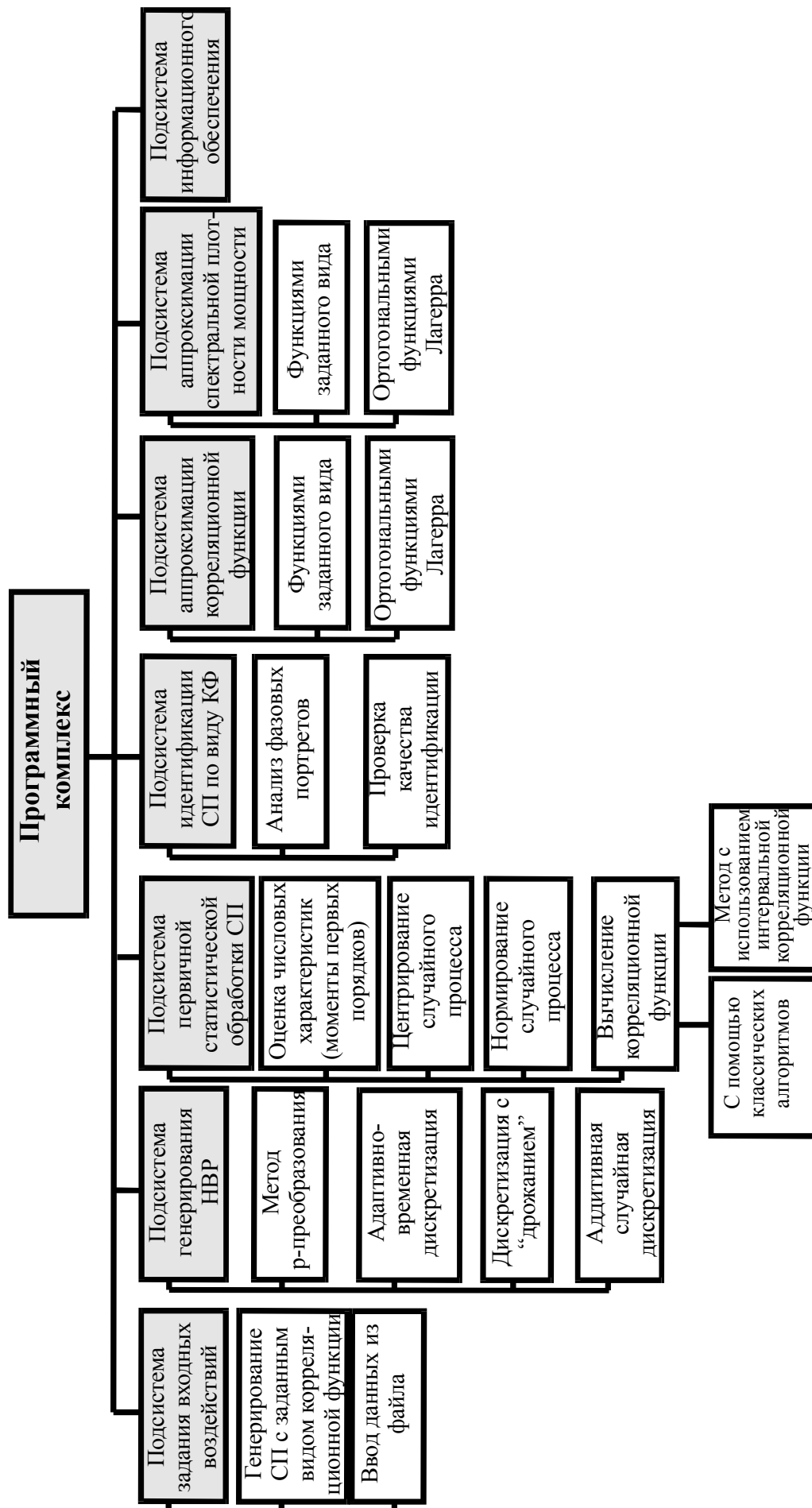


Рисунок 5.6 - Структурная схема программного комплекса

Подсистема идентификации КФ состоит из двух частей: построения и анализа фазовых портретов и проверки качества идентификации.

В данной подсистеме производится построение фазового портрета КФ, а затем его последовательное сравнение с фазовыми портретами типовых КФ, используемых в системе. На основании результатов сравнения выбирается одна из типовых моделей КФ, при помощи которой в следующей подсистеме производится аппроксимация исходной КФ. Проверка качества идентификации производится на основании расчета квадратической погрешности фазового портрета.

Подсистема аппроксимативного анализа состоит из двух частей: аппроксимации КФ функциями заданного вида и ортогональными функциями Лагерра.

В данной подсистеме вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующих выражений и среднеквадратическая погрешность аппроксимации. Найденные численные значения параметров моделей корреляционных функций позволяют по известным формулам находить интервалы корреляции, моментные характеристики, спектральную плотность мощности.

В **подсистеме спектрального анализа** производится оценка спектральной плотности мощности СП по результатам аппроксимации корреляционной функции СП, а также оценка обобщающих спектральных характеристик СП, таких как эквивалентная ширина спектра мощности процесса, частота, соответствующая максимуму спектральной плотности мощности.

Подсистема работы с базой данных предназначена для автоматизированного моделирования и обработки СП и занесения параметров СП в базу данных для последующего вычисления усредненных результатов моделирования и аппроксимации.

Благодаря такому блочному построению структуры программы в систему можно добавлять новые модули, не изменяя ее принципиально.

Рассмотрим программную реализацию.

Генерирование СП с заданным видом КФ. Основной формой работы автоматизированной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа является форма генерирования СП с заданным видом КФ (рис. 5.7).

Главное меню данной формы содержит следующие пункты:

- *Модель* – выбор вида КФ моделируемого СП, работа с файлами, завершение работы с программой.
- *Идентификация* – выбор способа идентификации (автоматическая позволяет строить фазовые портреты КФ и на основании их схожести с фазовыми портретами стандартных КФ выбирать вид аппроксимирующей модели, аналитическая позволяет выбирать вид КФ на основании визуальных представлений стандартных КФ).
- *Аппроксимация* – выбор способа аппроксимации (функциями заданного вида при схожести исследуемой КФ с одним из стандартных ее видов; функциями Лагерра в случае, когда КФ не похожа ни на один из предложенных ее видов).
- *Спектральный анализ* позволяет производить оценку спектральной плотности мощности СП по результатам параметрической аппроксимации.
- *База данных* – открытие и работа с базой данных.
- *Справка* – предоставление справки о программе.

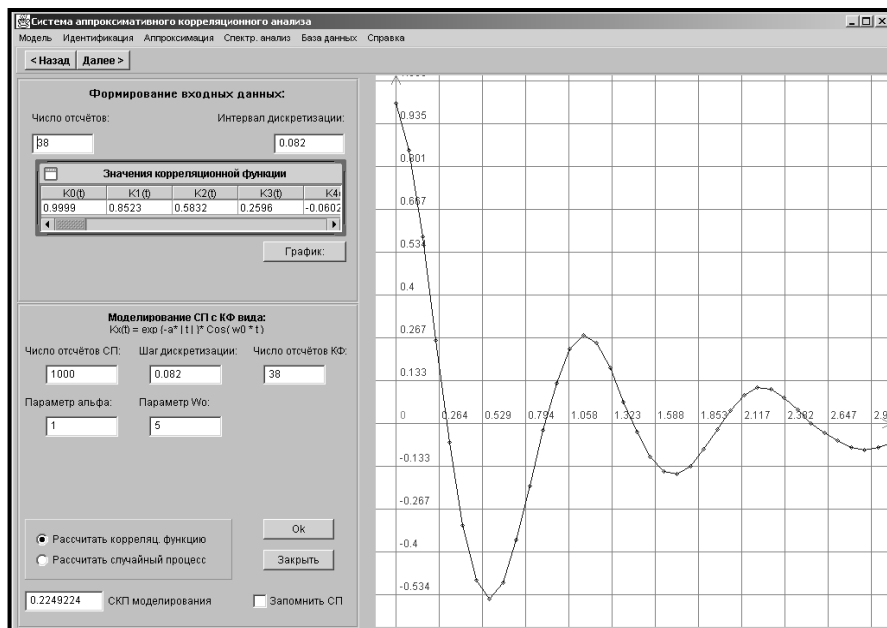


Рисунок 5.7 - Вид формы генерирования СП

Идентификация вида КФ. Общий вид формы идентификации КФ на основе анализа фазовых портретов представлен на рис. 5.8 (под фазовым портретом здесь понимается график КФ, построенный в координатах $[K_X(\tau); K'_X(\tau)]$).

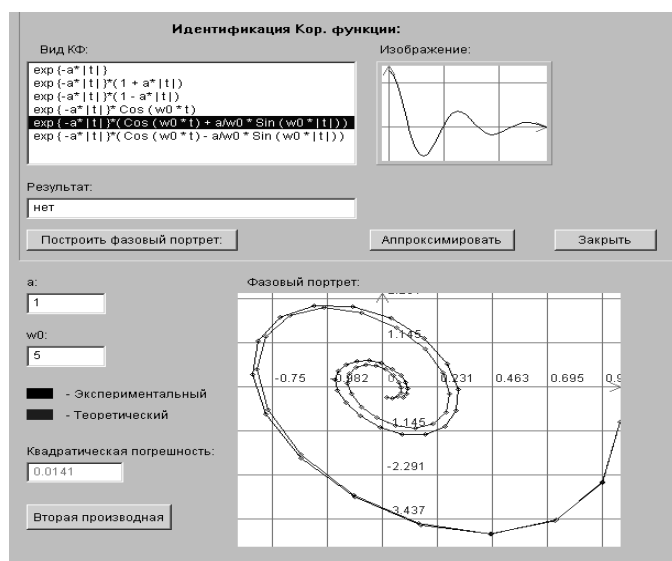


Рисунок 5.8 - Окно идентификации КФ при помощи анализа фазовых портретов

Для идентификации КФ необходимо сравнивать ее фазовый портрет с типовыми фазовыми портретами из списка. Если результаты идентификации удовлетворительны и вид КФ определен, можно переходить в форму аппроксимации КФ функциями заданного вида, где будет проводиться аппроксимация КФ моделью, выбранной при идентификации. В случае, если идентифицировать КФ не удалось, необходимо производить аппроксимацию КФ ортогональными функциями Лагерра.

Аппроксимация КФ функциями заданного вида. В случае если вид КФ известен, или его удалось идентифицировать, следует аппроксимировать КФ функциями заданного вида.

го вида.

При выбранной аналитической модели задача сводится к определению неизвестных параметров, удовлетворяющих минимуму квадратической погрешности аппроксимации (см. подраздел 3.2).

Общий вид формы аппроксимации КФ функциями заданного вида представлен на рис. 5.9.

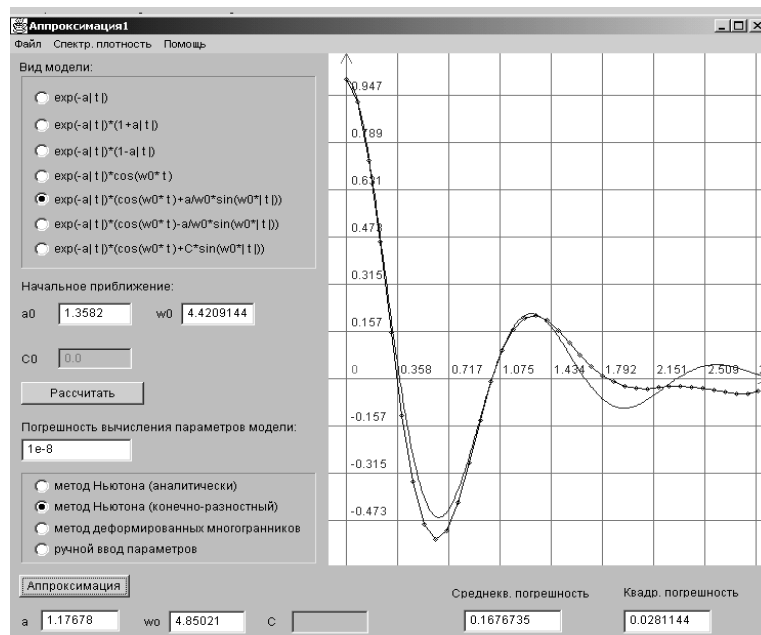


Рисунок 5.9 - Вид формы аппроксимации КФ функциями заданного вида

Для проведения аппроксимации КФ функциями заданного вида в автоматизированной системе реализованы три метода:

- метод Ньютона (с аналитическим взятием производных);
- метод Ньютона (с конечно-разностным взятием производных);
- метод деформируемого многогранника.

Аппроксимация КФ ортогональными функциями Лагерра. В тех случаях, когда вид КФ не известен или не может быть идентифицирован, можно произвести аппроксимацию КФ ортогональными функциями Лагерра (см. раздел 4).

Выбор параметра масштаба α , необходимого для вычисления коэффициентов b и β , в данной системе осуществляется путем решения уравнения $\beta_0 = \sigma_x^2$ методом Ньютона. Обоснование метода определения значения параметра α приведено в [111].

Общий вид формы аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра представлен на рис. 5.10.

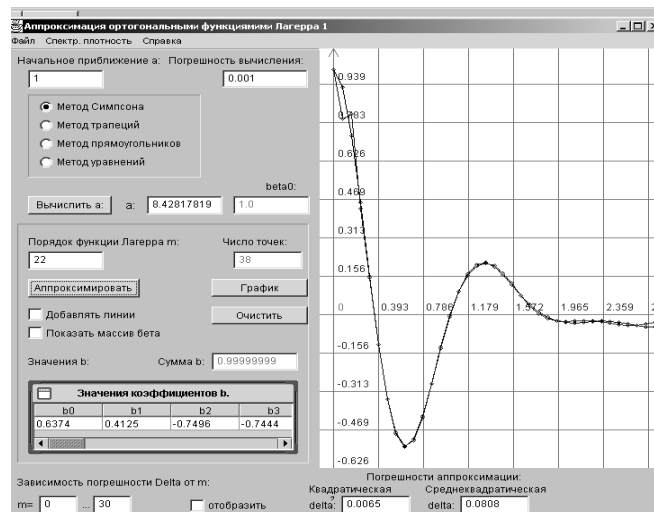


Рисунок 5.10 - Вид формы аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра

Спектральный анализ. Процесс вычисления спектральной плотности мощности можно значительно облегчить, предварительно аппроксимировав КФ функциями заданного вида или ортогональными функциями Лагерра. В этом случае спектральная плотность мощности может быть вычислена при помощи заранее известных аналитических выражений, в которые подставляются параметры КФ, найденные при аппроксимации (см. подразделы 1.8, 4.10).

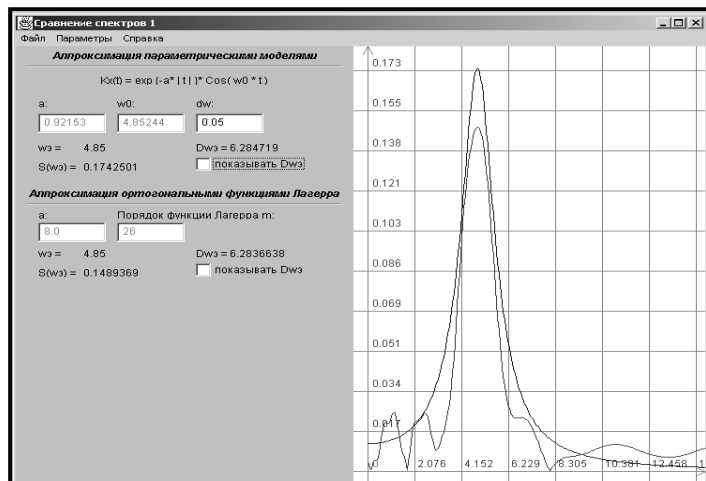


Рисунок 5.11 - Вид формы спектрального анализа

Автоматизированная обработка данных. Для удобства работы с большим количеством однотипных данных была разработана подсистема автоматизированной обработки данных. Так, например, при проведении исследований оценки погрешности КФ необходимо смоделировать 29 реализаций СП с одними и теми же параметрами для получения результатов с доверительной вероятностью 0,95 [95].

На рис. 5.12 представлен общий вид формы для работы с базой данных. В данной форме находятся две вкладки: "Моделирование СП" и "Аппроксимация КФ".

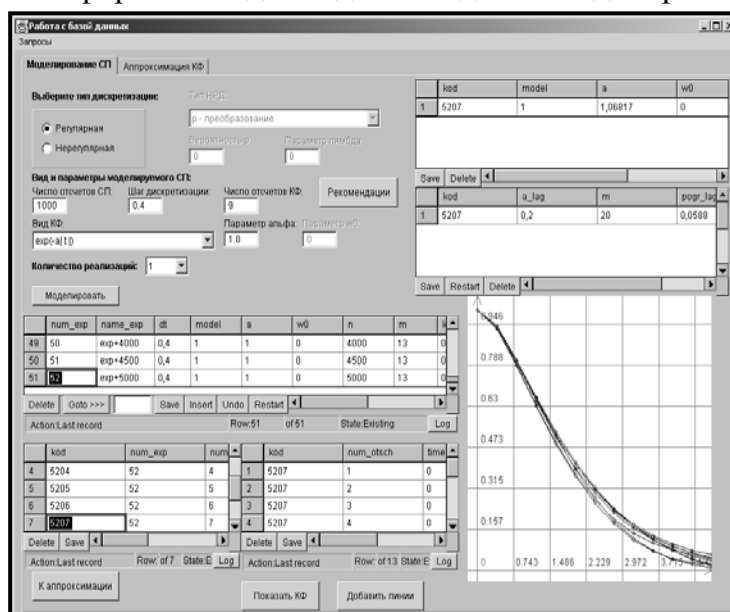


Рисунок 5.12 - Вид формы для работы с базой данных

Вид формы спектрального анализа представлен на рис. 5.11, где w_3 – частота, соответствующая максимуму спектральной плотности мощности;

$S(w_3)$ – значение максимума спектральной плотности мощности;

Dw_3 – эквивалентная ширина спектра мощности.

Вкладка "Моделирование СП" предназначена для хранения экспериментальных данных (параметров случайных процессов, отсчетов корреляционных функций и результатов аппроксимации), автоматического моделирования случайных процессов с заданным видом корреляционной функции и статистической обработки результатов моделирования. При работе в данной вкладке формы также предусмотрена возможность визуального отображения коридора корреляционных функций случайных процессов в рамках отдельного эксперимента.

5.3 Автоматизированная система взаимного корреляционно-спектрального анализа случайных процессов

Структура автоматизированной системы взаимного корреляционно-спектрального анализа случайных процессов, включая неэквидистантные временные ряды, и исследования алгоритмов аппроксимации взаимных корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Лагерра приведена на рис. 5.13 – 5.14 [133, 134, 118].

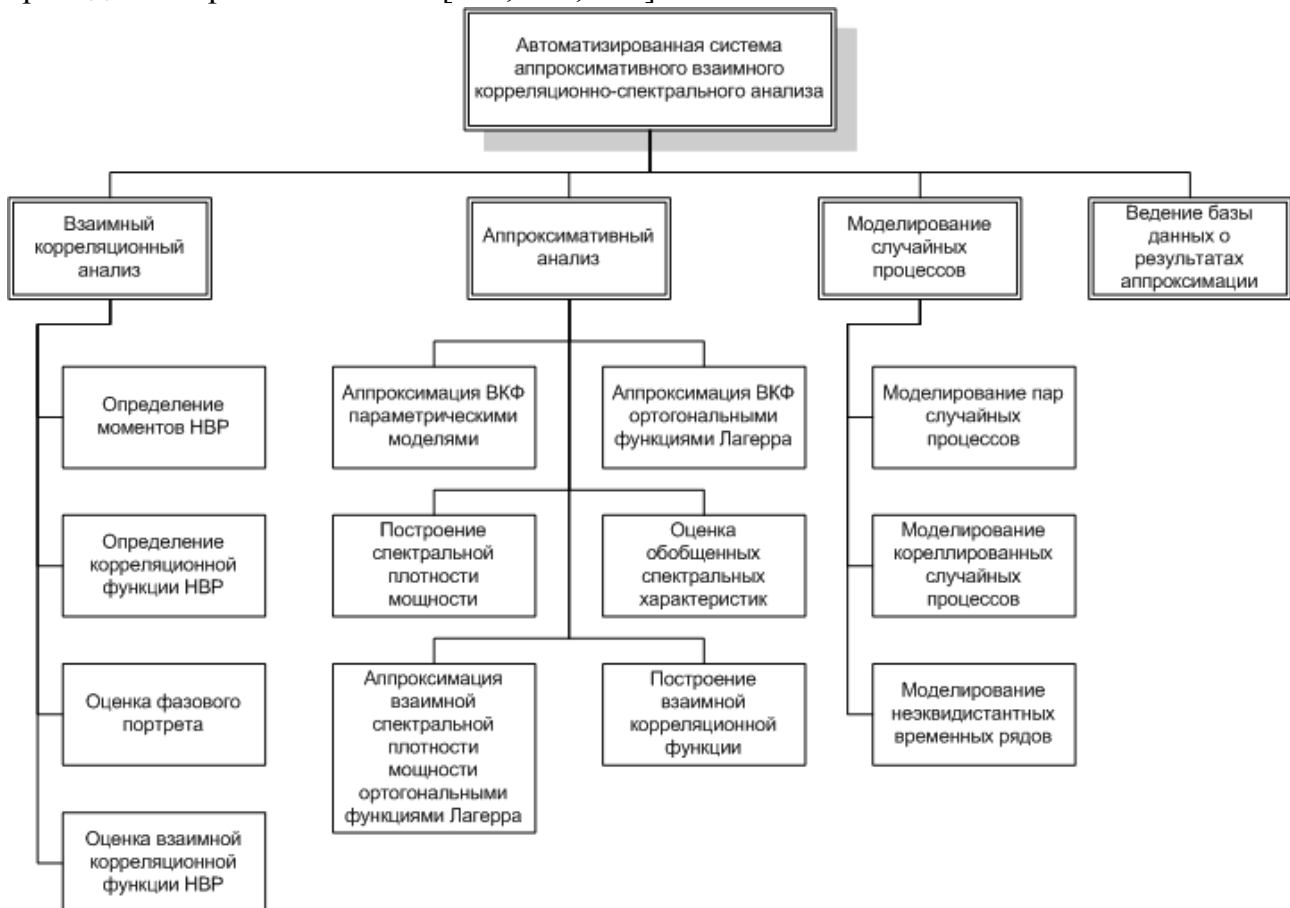


Рисунок 5.13 – Функции автоматизированной системы

Система содержит три подсистемы:

- аппроксимативного анализа взаимных корреляционных функций;
- аппроксимативного анализа взаимных спектральных плотностей мощности;
- моделирования коррелированных случайных процессов, включая неэквидистантные временные ряды.

Первая часть подсистемы обеспечивает генерирование случайных процессов, объединение их в пары и оценку взаимных корреляционных функций пар процессов. Целью работы с этой частью является имитационное моделирование случайных процессов с равномерной дискретизацией и неэквидистантных временных рядов. Данные функции реализованы в системе для анализа алгоритмов аппроксимации с использованием метода имитационного моделирования.

Возможна генерация исходного процесса с заданным количеством отсчетов и интервалом дискретизации (белого шума или процесса с известной автокорреляционной функцией и нормальным законом распределения), подача его на вход двух формирующих фильтров с возможностью задания задержки на

определенное время, и изменения дискретизации каждого из двух получаемых процессов.

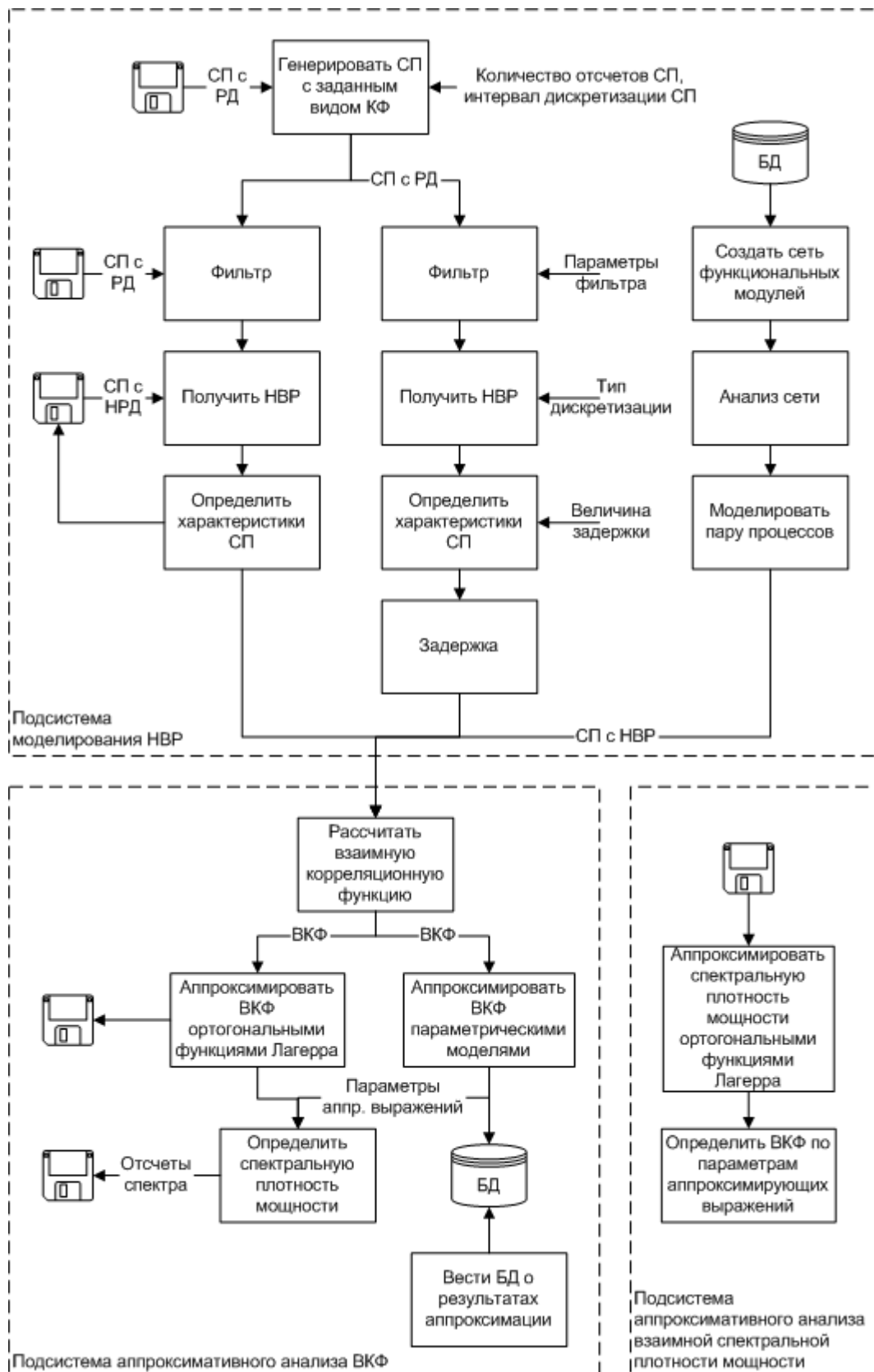


Рисунок 5.14 – Структурная схема автоматизированной системы корреляционно-спектрального анализа случайных процессов

В случае, когда пара процессов получается при подаче на вход двух формирующих фильтров одной генерации белого шума, возможно определение теоретической взаимной корреляционной функции. Таким образом, предусмотрен анализ ошибки оценивания ВКФ с использованием интервальной корреляционной функции.

Далее производится оценка взаимной корреляционной функции с возможностью получения фазового портрета. В системе предусмотрено два варианта решения задачи аппроксимации ВКФ: с помощью параметрических моделей и с использованием ортогональных функций Лагерра. Первый способ предусматривает наличие априорной информации о виде корреляционной функции и может быть решен с использованием аналитического, конечно-разностного методов взятия производных и с использованием метода Нелдера-Мида.

Аппроксимация предусматривает подбор оптимальных параметров выражений исходя из известных приближенных значений при минимуме среднеквадратической погрешности аппроксимации. В подсистемах аппроксимации предоставляется возможность занесения полученных выражений в базу данных. Значения параметров аппроксимирующих выражений поступают на вход подсистемы расчета взаимной спектральной плотности мощности.

Завершающая подсистема предоставляет пользователю доступ к базе данных аппроксимирующих выражений. Они отображаются отдельно для каждой созданной системы в виде таблиц. Предусмотрена возможность построения графиков по аппроксимирующим выражениям с их наложением.

Работа может производиться как последовательно по схеме, описанной выше, так и непосредственно в каждой конкретной подсистеме, с использованием информации из файлов. Ниже приведено более подробное описание упомянутых подсистем.

На первой странице автоматизированной системы осуществляется генерация случайного процесса с равномерной дискретизацией. При этом задается интервал дискретизации, количество отсчетов и вид корреляционной функции (может быть сгенерирован также белый шум). В системе предусмотрено автоматическое определение интервала дискретизации и числа отсчетов корреляционной функции для выбранного вида функции и параметров. При генерации рассчитываются некоторые вероятностные характеристики процесса, а именно: математическое ожидание, дисперсия, коэффициенты асимметрии и эксцесса и корреляционная функция.

Для получения двух процессов, используемых для дальнейшего анализа, необходимо случайный процесс, сгенерированный на первой странице, передать на вход второй подсистемы, состоящей из двух модулей (см. рисунок 5.15). Первый модуль имеет в своем составе фильтр и блок дискретизации. Второй – фильтр, блок дискретизации и линию задержки. Задав параметры модулей, можно получить два процесса, взаимная корреляционная функция которых рассчитывается при дальнейшей работе с системой.

Генерирование пары неэквидистантных временных рядов осуществляется с помощью прореживания исходной пары временных рядов с учетом модели потока событий. При этом поток может генерироваться как независимо, так и с учетом особенностей регулярного временного ряда. При генерации осуществляется определение моментов каждого процесса, расчет и отображение корреляционных функций.

Для генерации процессов необходимо задать параметры модулей на соответствующих панелях второй страницы системы. Для фильтра требуется указать вид

фильтра и два параметра (λ и ω_0). Можно выбрать один из 5 типов дискретизации для каждого процесса (равномерная, с дрожанием, аддитивная, адаптивная и р-преобразование). Для р-преобразования и адаптивной дискретизации необходимо задать вероятность того, что отсчет останется в процессе и величину коридора соответственно. Для аддитивной дискретизации и дискретизации с дрожанием нужно задать поток (равномерный или нормальный).

Для второго процесса необходимо задать величину задержки и количество задержек. Если величина задержки равна интервалу дискретизации первого процесса, то количеством задержек можно задавать суммарную задержку, кратную интервалу дискретизации первого процесса.

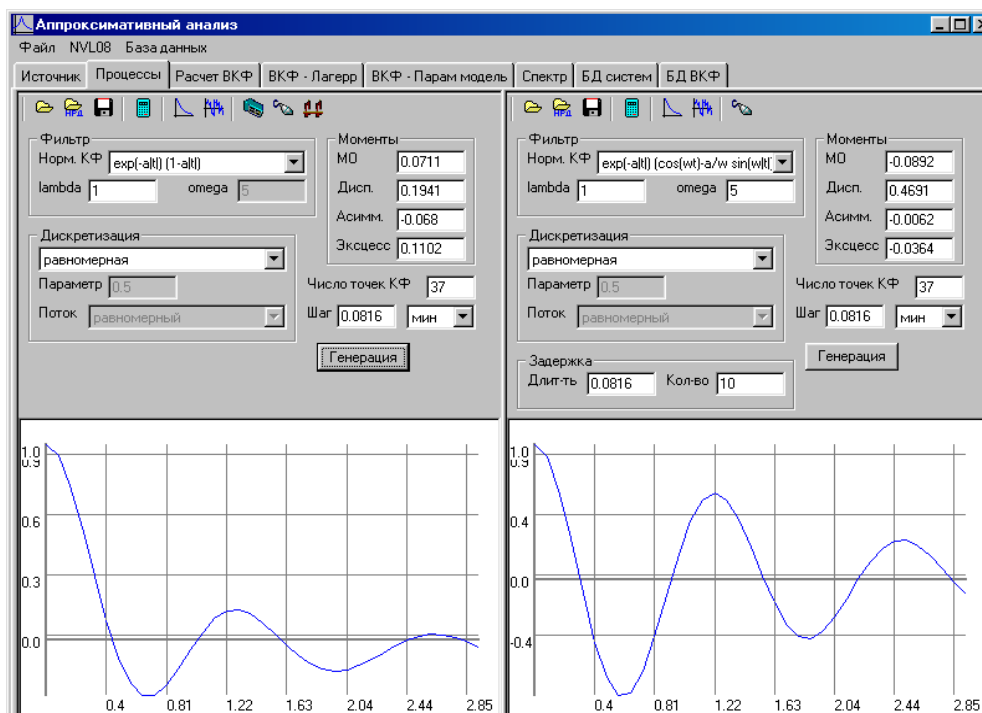


Рисунок 5.15 – Страница генерации двух случайных процессов

Шаг КФ в первом и втором процессах автоматически определяется при генерации как минимальный шаг в процессе. Предусмотрено определение шага КФ как среднего среди интервалов в процессе. Число отсчетов КФ определяется автоматически, но также может быть изменено при установке ручного режима. При генерации пары процессов минимальный шаг из двух шагов КФ рекомендуется в качестве интервала дискретизации взаимной корреляционной функции.

Расчет ВКФ (для заданного интервала дискретизации и количества отсчетов левой и правой ветвей) и фазового портрета происходит на следующей странице. Для случая, когда система состоит из двух фильтров и источника белого шума, определены аналитические выражения, что позволяет определить методическую погрешность оценки взаимной корреляционной функции методом имитационного моделирования. Также возможно занесение результатов расчетов в базу данных.

Страница 5 предназначена для аппроксимации ВКФ параметрическими моделями. Аппроксимация производится отдельно для правой и левой ветви, причем разбиение на ветви возможно, как относительно начала координат, так и относительно максимума или минимума. Для каждой ветви нужно указать вид аппроксимирующей

функции и начальные приближения для параметров λ и ω_0 . Затем необходимо задать один из методов аппроксимации (аналитически, численно, Нелдера-Мида или ввод параметров вручную). Результаты аппроксимации отображаются на экранной форме в виде значений параметров моделей и совмещенных графиков исходной функции и аппроксимирующего выражения.

Для каждой ветви предусмотрена возможность определения фазового портрета, также с наложением фазового портрета аппроксимирующей модели. Таким образом, возможно сравнение фазовых портретов, необходимое при идентификации функции.

Круг взаимных корреляционных функций, для которых аппроксимация параметрическими моделями удовлетворительна, достаточно ограничен. Однако этот вид аппроксимации позволяет сгладить погрешности, возникающие при анализе НВР за счет неравномерной дискретизации или потери отсчетов.

Аппроксимация ортогональными функциями Лагерра производится на странице 4, приведенной на рисунке 5.16. Аппроксимация производится отдельно для левой и правой ветвей относительно начала координат, максимума или минимума функции. При этом производится нормировка функции с учетом основного свойства корреляционной функции, что учитывается при использовании вместо параметров аппроксимирующего выражения β , исправленных параметров b .

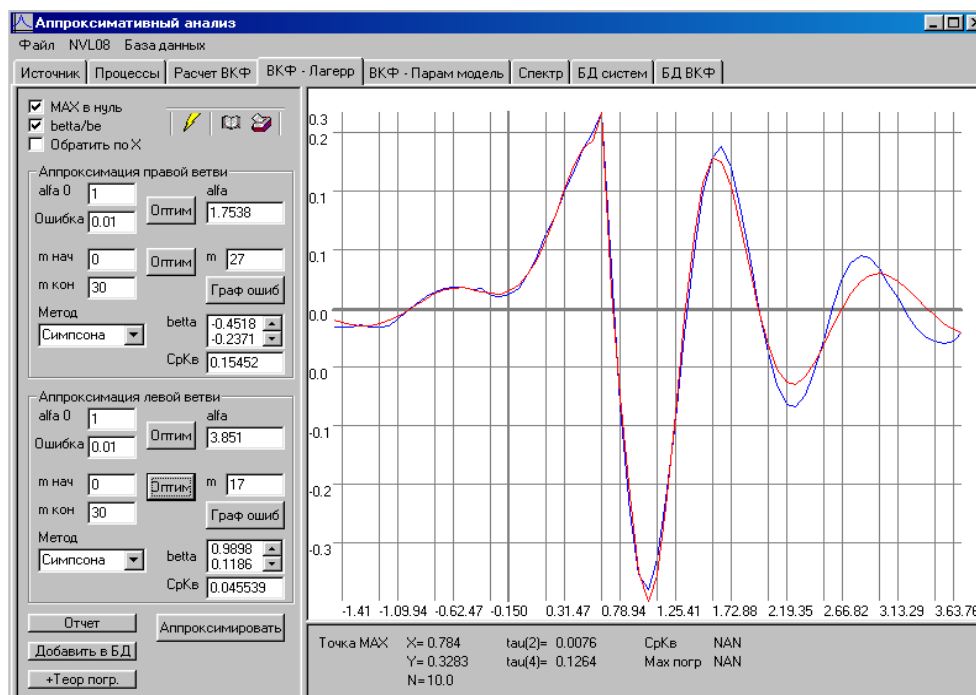


Рисунок 5.16 – Аппроксимация ВКФ функциями Лагерра

Определение оптимальных значений параметров функции Лагерра для каждой ветви производится по следующему алгоритму: выбор метода численного интегрирования, указание начального приближения α_0 и погрешности определения α , получение значения параметра α , выбор диапазона поиска числа членов разложения, собственно аппроксимация и построение, в случае необходимости, зависимости погрешности аппроксимации от числа членов разложения.

На экранной форме выводятся погрешности аппроксимации (среднеквадратическое отклонение и максимальные погрешности аппроксимации для каждой ветви), интервалы корреляции, рассчитанные по параметрам аппроксимирующих выражений, и совмещенные графики исходной функции и аппроксимирующего выражения. Воз-

можно формирования отчета по результатам аппроксимации и сохранение результатов в базу данных.

Определению спектральной плотности мощности в автоматизированной системе посвящена страница 6. В системе предусмотрено построение спектра по параметрам аппроксимирующих выражений – параметрических моделей и ортогональных функций Лагерра (по параметрам, полученным в результате аппроксимации взаимных корреляционных функций). Для этого следует установить значение интервала дискретизации спектральной плотности мощности и количества отсчетов спектра, исходя из требования к точности определения спектральной плотности мощности.

Поскольку спектральная плотность мощности – величина комплексная, кроме графика спектральной плотности мощности предусмотрено представление графиков модуля спектральной плотности, вещественной части, мнимой части и фазы. На графике модуля спектральной плотности мощности также возможно отображение эквивалентной ширины спектра мощности.

На рисунках 5.17 – 5.18 приведены результаты построения взаимной спектральной плотности мощности по результатам аппроксимации взаимной корреляционной функции ортогональными функциями Лагерра в сравнении с результатами аппроксимации функциями заданного вида.

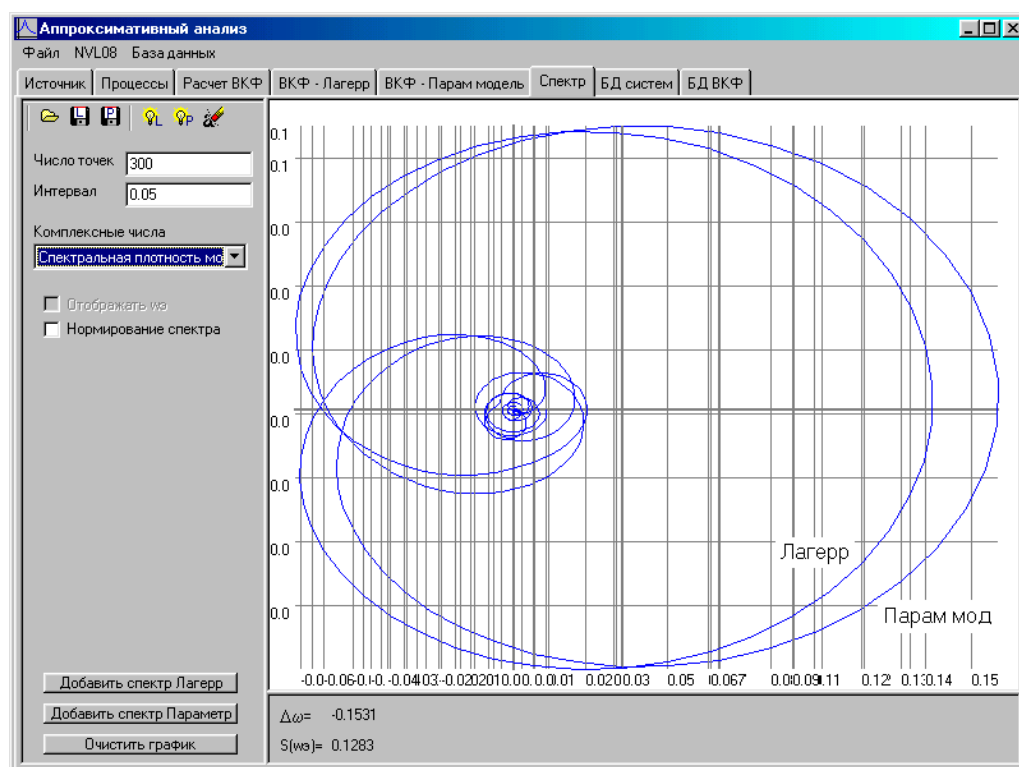


Рисунок 5.17 – Спектральная плотность мощности

В системе также возможно решение обратной задачи – аппроксимации взаимного спектра и получение взаимной корреляционной функции по параметрам аппроксимирующего выражения.

Аппроксимации взаимной спектральной плотности мощности ортогональными функциями Лагерра посвящена страница 9. Здесь необходимо ввести вещественную и мнимую части спектральной плотности мощности, установить начальное приближение для параметра α , диапазон изменения числа членов разложения, выбрать метод интегрирования и, определив значения α и числа членов разложения, произвести ап-

проксимацию. Операции по заданию функции и аппроксимации следует произвести отдельно для вещественной и мнимой частей спектральной плотности мощности. После аппроксимации необходимо перейти на вкладку «Расчет ВКФ», где производится расчет взаимной корреляционной функции.

Для более глубокого анализа алгоритмов аппроксимации взаимных корреляционных функций в автоматизированной системе подсистема имитационного моделирования расширена дополнительным функционалом, позволяющим реализовать синтез блочной модели. Для этого необходимо сделать выбор элементов-модулей с известными характеристиками из некоторого множества и произвести их взаимную стыковку с целью получения необходимых характеристик всей системы в целом.

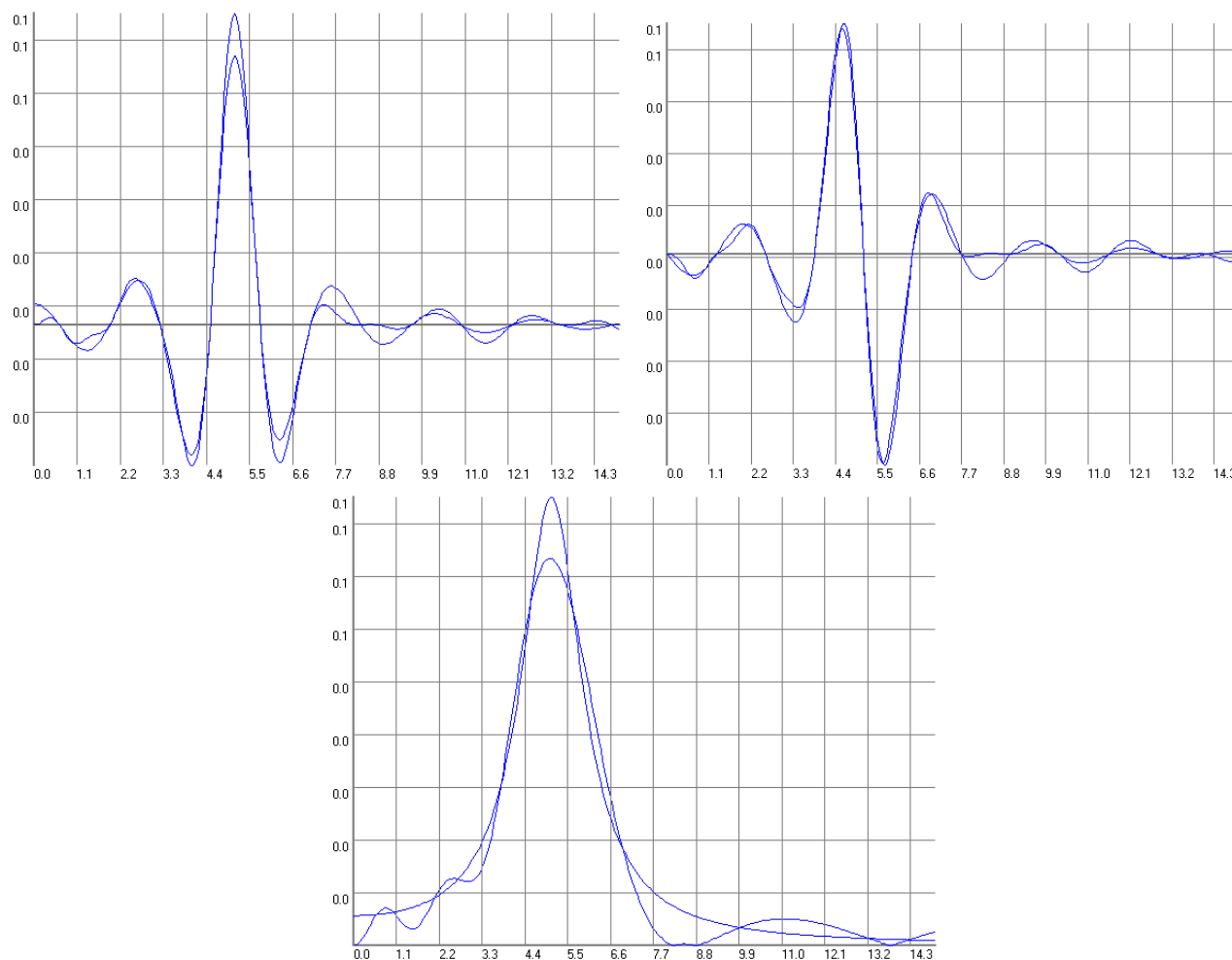


Рисунок 5.18 – Вещественная, мнимая части и модуль спектральной плотности мощности

При получении пары процессов с заданной взаимной корреляционной функцией возникает проблема классификации взаимных корреляционных функций и выбора модулей системы генерации. Пара процессов, полученная из единого источника первичного сигнала, например, белого шума с помощью системы фильтров с известными частотными характеристиками имеет известную взаимно корреляционную функцию. Однако при определении зависимости вида взаимной корреляционной функции пары процессов от импульсных характеристик формирующих фильтров возникает необходимость в накоплении информации о сгенерированных процессах и использованных при этом фильтрах.

Использование базы данных о фильтрах и полученных в результате генерации процессах позволяет решить эту задачу, а именно, позволить:

- определение методических погрешностей аппроксимации методом имитационного моделирования;
- накопление информации об алгоритмах получения пар процессов с заданными взаимными корреляционными функциями посредством синтеза системы формирующих фильтров с заданными переходными характеристиками;
- облегчение идентификации взаимных корреляционных функций получаемых пар процессов;
- решение задачи синтеза системы получения процессов с использованием экспертных алгоритмов.

При этом нет необходимости в хранении большого объема информации, а именно, самих процессов и взаимных корреляционных функций. Достаточно вести базу данных об использованных фильтрах и хранить параметры аппроксимирующих выражений с указанием погрешностей аппроксимации.

Для выполнения приведенных выше функций информационной среды необходимо иметь средства, обеспечивающие ведение базы знаний по модулям, их параметрам и настройкам, а также синтезированным системам, и алгоритм синтеза с использованием базы знаний, представленной в виде сети модулей.

В качестве узлов сети будут выступать модули, составляющие системы. Дугами, соединяющими узлы сети, будем обозначать связи между модулями, по которым передается информация. Дуги имеют направление, показывающее связь выхода предыдущего модуля с входом следующего.

При составлении сети модулей можно выделить следующие семантические группы: источник белого шума, фильтр, линия задержки, блок дискретизации, файл, АЦП, нелинейный преобразователь. Кроме этого, в любую систему вводится единственный обязательный модуль, обеспечивающий прием двух процессов для их последующего анализа. На связи модулей наложены следующие ограничения: источник белого шума, файл и АЦП могут служить лишь источниками информации, они не имеют входа; у модуля может быть только один источник и несколько приемников информации. Единицей передаваемой информации считается случайный процесс.

Алгоритм синтеза определяется как последовательность шагов по активации модулей системы, начиная с обязательного последнего. Возбуждение передается от модуля анализа, назад до модулей генерации. В случае если процесс в модуле генерации уже создан, а этот модуль был возбужден, повторная генерация не производится. Таким образом, один процесс, получаемый на выходе модуля, используется для всех, присоединенных к нему модулей. При этом активизируемый модуль вызывает активацию источника информации, в случае, если этот источник – генератор белого шума, происходит его генерация, файл – его открытие (чтение), АЦП – переход в подсистему ввода-вывода. Если активизируемый элемент уже активен и имеет случайный процесс на выходе, активизация его не производится, а случайный процесс используется в следующих модулях. Таким образом, реализуется возможность подключения нескольких модулей к единственному источнику случайного процесса для генерирования пар процессов с заданными взаимными корреляционными характеристиками.

Во время работы сети случайный процесс проходит ряд преобразований, представленных на рисунке 5.19. Для получения исследуемой в аппроксимативном корреляционно-спектральном анализе пары процессов предусмотрено использование фильтров с известными частотными характеристиками. Результаты аппроксимации

получаемых взаимных корреляционных функций параметрическими моделями и ортогональными функциями Лагерра заносятся в базу данных на этапах аппроксимации. В качестве СУБД выбрана Microsoft SQL Server.

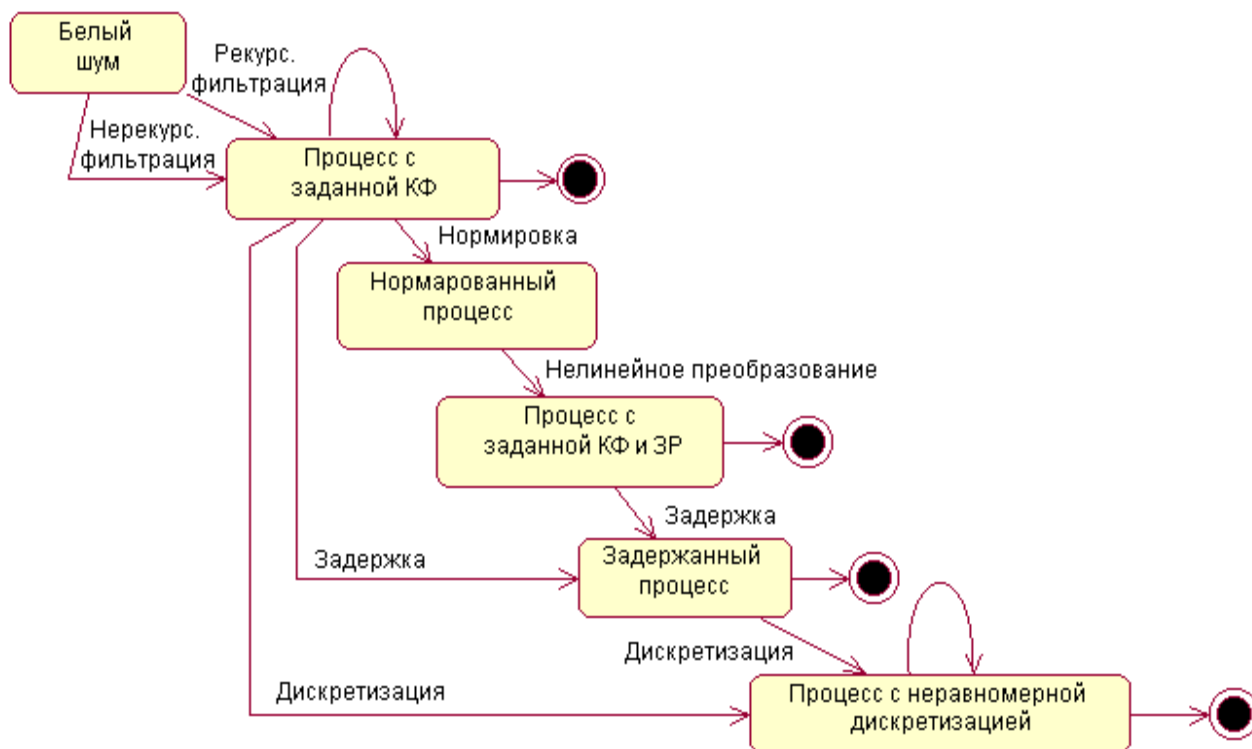


Рисунок 5.19 – Преобразования случайного процесса при моделировании

В автоматизированной системе проектирование системы происходит наглядно, путем добавления новых модулей, отображаемых на рабочей области экрана условными пиктограммами. На рабочей области экрана в этом случае формируется граф, в узлах которого находятся указанные выше модули. Между модулями устанавливаются связи, соответствующие каналам передачи случайных процессов от одного модуля к другому. Завершающим (обязательным и единственным в системе) является модуль корреляционного анализа пары случайных процессов. Получаемая в результате система может быть занесена в базу данных, в которой ведется учет построенных систем и полученных взаимных корреляционных функций. Пример сети приведен на рисунке 5.20.

Кроме источника белого шума, фильтра, линии задержки или файла, возможно использование фильтра Лагерра, позволяющего производить аппроксимацию импульсной переходной характеристики фильтра ортогональными функциями Лагерра, и нелинейного преобразователя.

Выбрав вид нелинейного преобразования, можно получить случайный процесс с требуемыми характеристиками. Вообще, при решении задач возникает необходимость в анализе нелинейных систем при случайном входном воздействии. Аналитическое решение этой задачи возможно в некоторых случаях только для нормальных входных процессов, и даже в этом случае, как правило, применяют приближенные методы и оценивают погрешность приближения. Эта процедура достаточно сложна и громоздка. Если же входной процесс отличен от нормального, аналитическое решение задачи практически невозможно. Тем не менее, успешное исследование подобных систем возможно методами имитационного моделирования на ЭВМ.

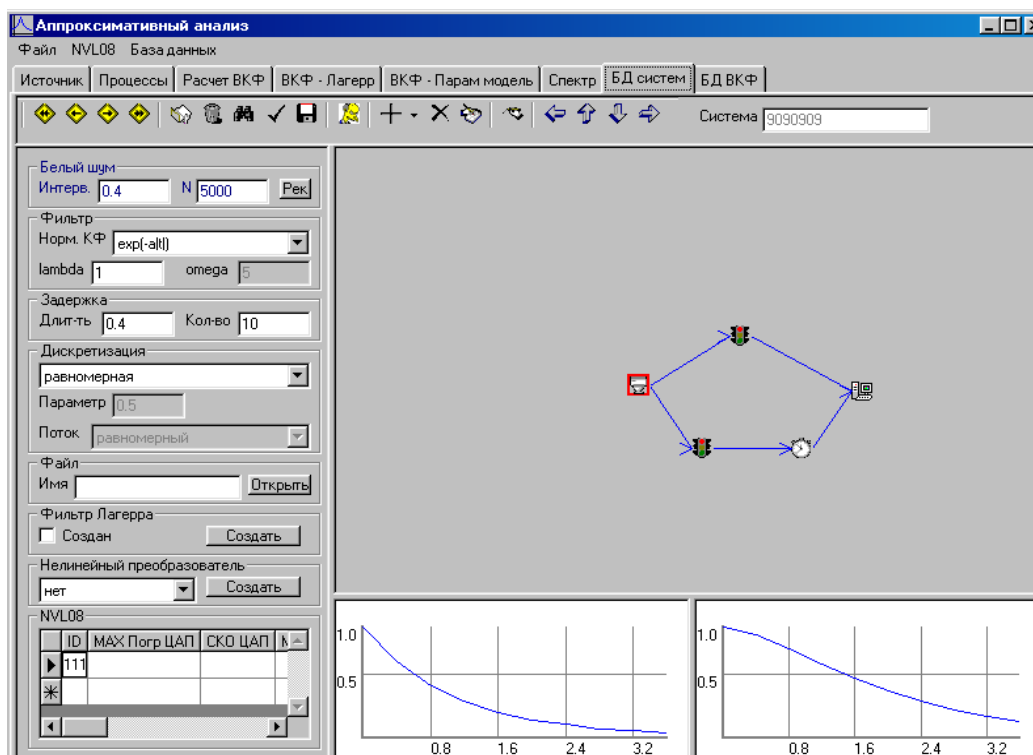


Рисунок 5.20 – БД систем

Для этого необходимо получить случайный процесс с заданным видом корреляционной функции и закона распределения. Нелинейное преобразование меняет вид корреляционной функции, однако, иногда удастся найти приемлемое решение этой задачи. Нелинейный преобразователь с интегрированным нормирующим преобразователем на входе можно включить в проектируемую систему и настроить, задав необходимые параметры.

В случае отсутствия аналитического представления возможна линейная интерполяция функции преобразования, которая вводится вручную (с помощью мыши), или задается отсчетами в файле.

Линейная интерполяция позволяет задать преобразование любого вида, однако имеет погрешность определения функции. Иногда удастся получить лучший результат, используя аппроксимирующие выражения, например, ортогональные функции Лагерра. Для этого необходимо настроить нелинейный преобразователь так же, как производилась настройка фильтра, основанного на функциях Лагерра.

Следует особо отметить тот факт, что после нормировки значения процесса лежат в диапазоне $(0,1)$. Поэтому интервал дискретизации и число отсчетов нужно подбирать так, чтобы функция преобразования была определена на этом промежутке. Иногда лучшим решением может стать определение этой функции на интервале, большем $(0,1)$.

Ведение базы данных параметров аппроксимирующих выражений для каждой системы происходит на последней странице. Здесь в трех таблицах (оценок ВКФ, аппроксимирующих функций Лагерра и параметрических моделей) отображается информация об имеющихся аппроксимирующих выражениях, заносимых в базу данных со страниц расчета ВКФ, аппроксимации ортогональными функциями Лагерра и параметрическими моделями.

На этой странице также производится построение графиков взаимных корреляционных функций и спектральных плотностей мощности по параметрам выражений, выделенным в каждой таблице (см. рис. 5.21 – 5.22). При построении взаимных кор-

реляционных функций с помощью параметрических моделей и функций Лагерра необходимо установить интервал дискретизации и количество отсчетов правой и левой ветвей. При построении взаимных спектральных плотностей мощности нужно определить интервал дискретизации и количество отсчетов функции. Кроме графика взаимной спектральной плотности мощности возможно построение вещественной, мнимой частей, модуля и фазы спектральной плотности мощности.

В случае, когда отображены два графика взаимной корреляционной функции, у которых количество отсчетов правой и левой ветвей и интервалы дискретизации равны, возможно сравнение функций, заключающееся в определении среднеквадратического и максимального отклонений. При использовании метода имитационного моделирования для оценки методических погрешностей возможно построение отчета по накопленным данным.

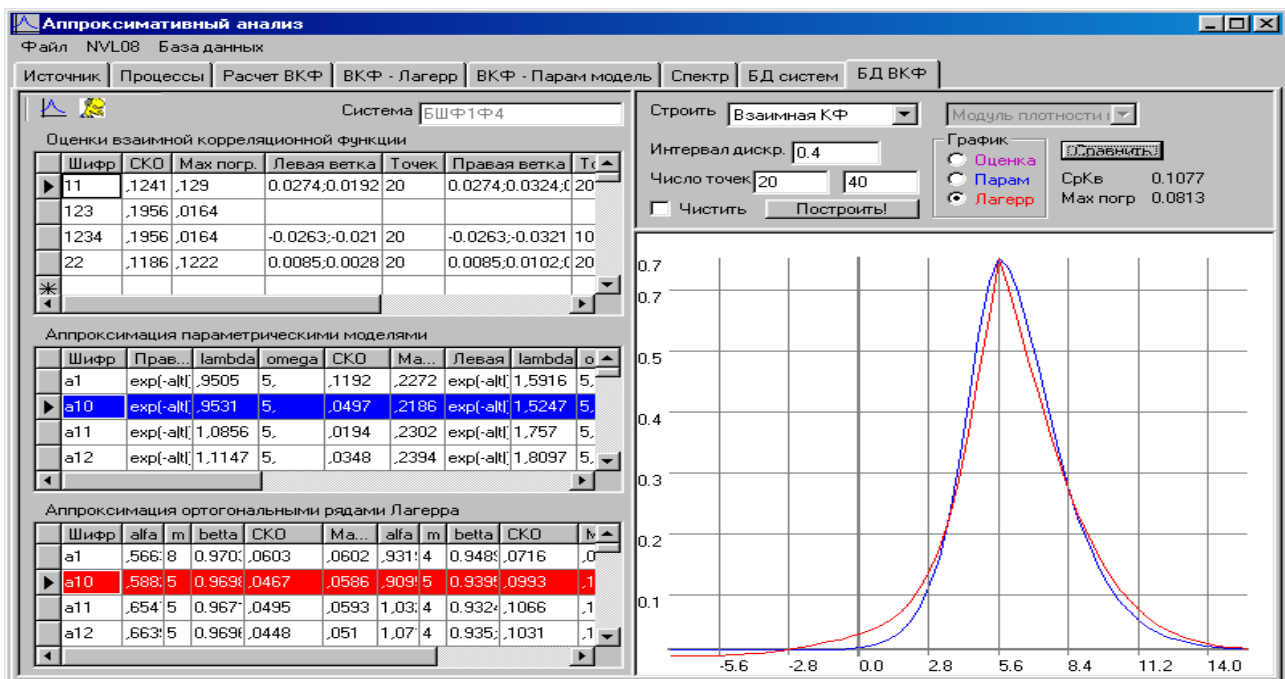


Рисунок 5.21 – Страница БД ВКФ

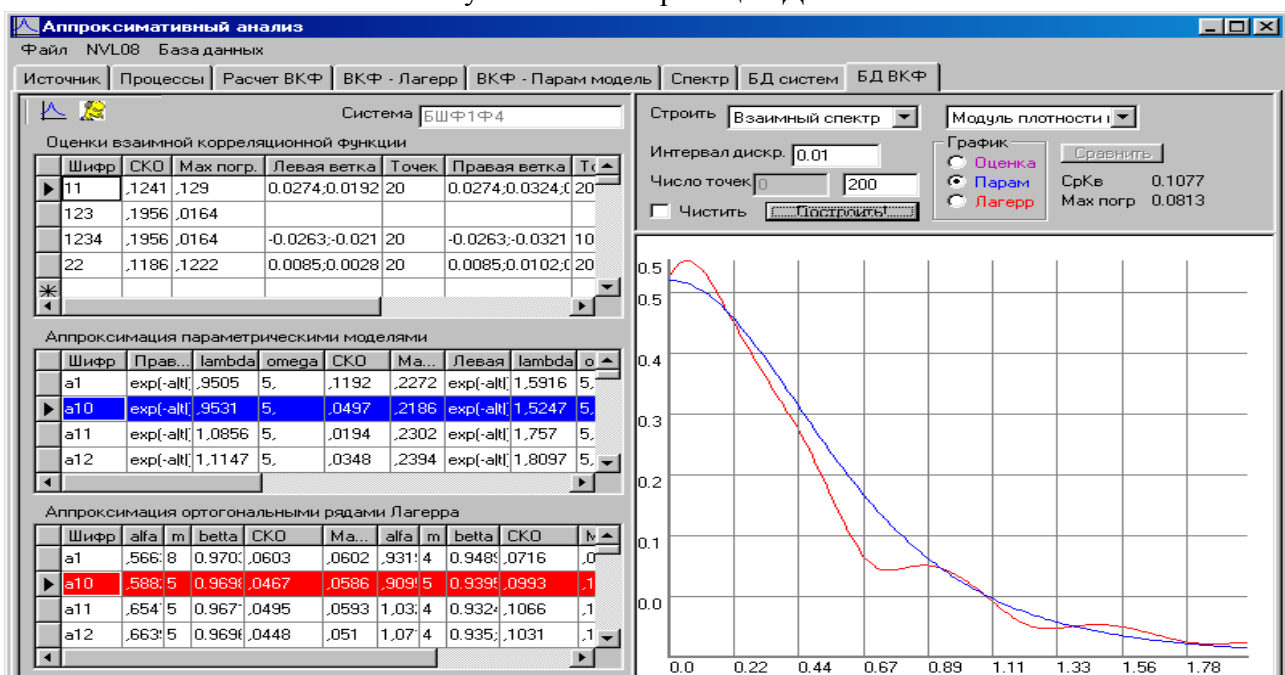


Рисунок 5.22 – Построение спектральной плотности мощности

5.4. Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах Лагерра, Лежандра, Дирихле

Отличие рассматриваемого программного комплекса от известных заключается в наличии базы знаний, в качестве которой используется семантическая сеть [118].

Семантические сети получили свое развитие в рамках научного направления, связанного с представлением знаний для моделирования рассуждений человека. Эта область научных исследований возникла в рамках общей проблематики искусственного интеллекта и была ориентирована на разработку специальных языков и графических средств, для представления знаний о предметной области.

В общем случае под *семантической сетью* понимают некоторый граф, в котором множество вершин и ребер разделены на отдельные типы, обладающие специальной семантикой, характерной для той или иной предметной области. В данном случае множество вершин может соответствовать объектам или сущностям рассматриваемой предметной области и иметь соответствующие явные имена этих сущностей. Подобные имена должны позволять однозначно идентифицировать соответствующие объекты.

Множество ребер делится на различные типы, которые соответствуют различным видам связей между сущностями рассматриваемой предметной области. В нашем случае вид связи определяется типом данных, передаваемых между вершинами.

Рассмотрим возможность применения семантических сетей на примере программного комплекса аппроксимативного взаимного корреляционно-спектрального анализа [118, 120], позволяющего моделировать автоматизированные системы научных исследований.

Структурная схема программного комплекса приведена на рисунке 5.23.



Рисунок 5.23 - Структурная схема программного комплекса

За основу программного комплекса был взят принцип блочного моделирования [114], суть которого сводится к декомпозиции автоматизированных систем научных исследований (АСНИ), созданию библиотеки моделей стандартных блоков, на основе которых конструируется модель системы в соответствии с ее структурой. Блочная модель обеспечивает простоту изменения конфигурации, возможность анализа промежуточных результатов, соответствие математической модели, возможность унификации процедур моделирования, единообразие и простоту построения моделей различных структур, возможность использования сетевых алгоритмов при анализе системы и простоту ведения базы данных созданных моделей и составляющих блоков. Семантическая сеть обеспечивает ведение базы знаний по модулям, их параметрам и настройкам, а также синтезированным системам и алгоритмам синтеза.

В качестве узлов сети выступают функциональные модули, составляющие моделируемую систему. Для отображения связи и направления передачи информации между модулями используются интерфейсы (дуги).

Рассмотрим более подробно основные составляющие семантической сети:

Функциональный модуль – это независимый элемент сети, скрывающий свою реализацию и взаимодействующий с внешним миром через интерфейсы. По реализуемым функциям модули объединяются в группы называемые семантическими (функциональный модуль можно рассматривать как экземпляр семантической группы). При этом модуль может быть использован в различных моделях независимо от окружения. Реализуемые в модуле функции описываются на уровне поведенческой модели.

Поведенческая модель функциональных модулей – это специфический взгляд на поведение модуля, основанный на понятиях *состояние, переход, действие*. Каждому из перечисленных понятий в методологии UML соответствуют одноименные диаграммы [92].

Для просмотра параметров семантической группы, к которой относится интересующий функциональный модуль, достаточно дважды щелкнуть кнопкой мыши на функциональном модуле. В появившемся окне (см. рис. 5.24) отображается название семантической группы, информация о динамической библиотеке (*.dll), в которой она реализована, приводится описание группы, а

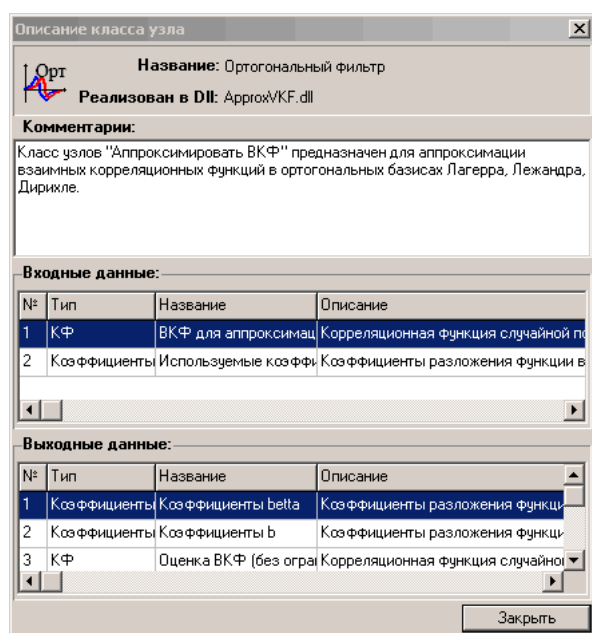


Рисунок 5.24 – Описание семантической группы

также описание входных и выходных терминалов функционального модуля данной семантической группы.

Интерфейсы позволяют связать функциональные модули по передаваемым между ними данным с помощью терминалов. При этом выходной терминал может моделировать множественное подключение. То есть одному терминалу может быть подключено несколько интерфейсов. На входной терминал могут подаваться данные только от одного выходного терминала. Интерфейс может быть подключен к разным терминалам одного и того же или разных функциональных модулей.

Терминал – это носитель конкретного соединения со стороны содержащего его модуля. Терминал реализован как указатель на второго участника взаимодействия и содержит данные, поступающие по интерфейсу для обработки. Эти элементы являются членами модуля, который содержит терминал.

Интерфейс описывает взаимодействие двух функциональных модулей семантической сети. При этом обеспечивается взаимодействие между связанными терминалами семантических групп, участвующих во взаимодействии функциональных модулей, типы данных которых должны совпадать.

На рисунке 5.25 показаны два модуля «Источник СП» и «Фильтр СП», терминалы которых соединены интерфейсом. При соединении модулей в автоматическом режиме контролируется выполнение правила соединения модулей.

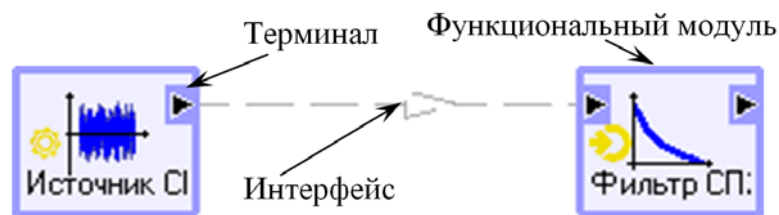


Рисунок 5.25 - Функциональные модули, соединенные интерфейсом

Интерфейс – это описание типа данных, передаваемых между двумя функциональными модулями. Интерфейс соединяет модули через терминалы и описывает правила взаимодействия двух объектов, которые его поддерживают. Он содержит: набор атрибутов; набор методов для чтения и изменения атрибутов; протокол связи с

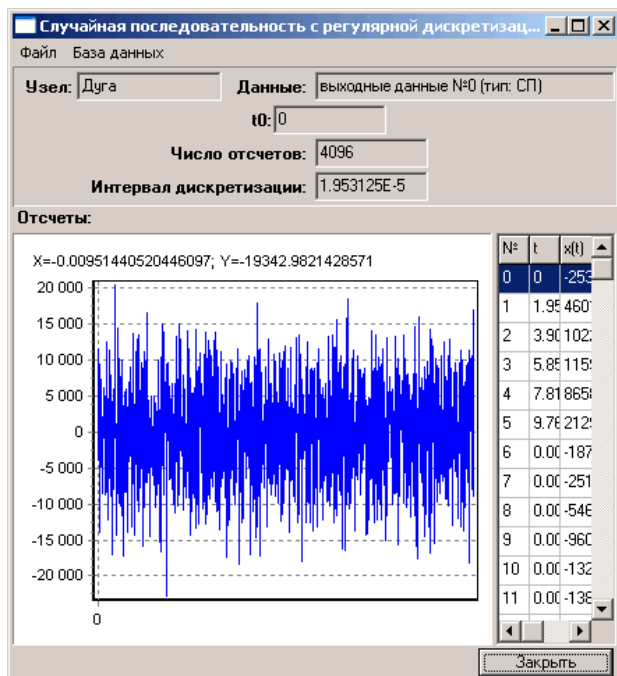


Рисунок 5.26 - Параметры интерфейса «Случайная последовательность»

функциональным модулем, описанный при помощи диаграмм взаимодействий UML [92]. Интерфейс подключается к терминалу объекта семантической группы функционального модуля на стадии ее разработки. В программном комплексе предусмотрена возможность отображения данных передаваемых через интерфейс, для их просмотра достаточно произвести двойной щелчок мыши на интересующем интерфейсе. На рис. 5.26 приведен пример окна, отображающие данные интерфейса «Случайная последовательность».

Задача синтеза системы является достаточно трудоемкой. В основе ее лежит выбор элементов модулей с известными характеристиками из некоторого множества (списка доступных семантических групп) и их взаимная стыковка с целью получения необходимых характеристик

всей системы в целом. Для решения задач аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик, в зависимости от решаемых задач, семантические группы программного комплекса разделены на множества:

- определения вероятностных характеристик временных рядов;

- генерации тестовых последовательностей временных рядов с известными вероятностными характеристиками;
- взаимодействия с накопителями (файл, база данных), что помимо прочего упрощает процедуру имитационного моделирования;
- регистрация физических сигналов с помощью измерительных устройств согласования с ПЭВМ, таких как НВЛ-08, звуковая карта ПЭВМ и модуля E14-440 фирмы L-Card.

При составлении сети модулей доступны следующие семантические группы: «Источник СП» , «Тренд СП» , «Фильтр» , «Линия задержки» , «Формирователь ВКФ» , «Ортогональный фильтр» , «Формирователь спектра» , «Звуковая карта» , «НВЛ-08» , «Файл» , «База данных» . Диаграмма классов получаемой семантической сети приведена на рисунке 5.27.

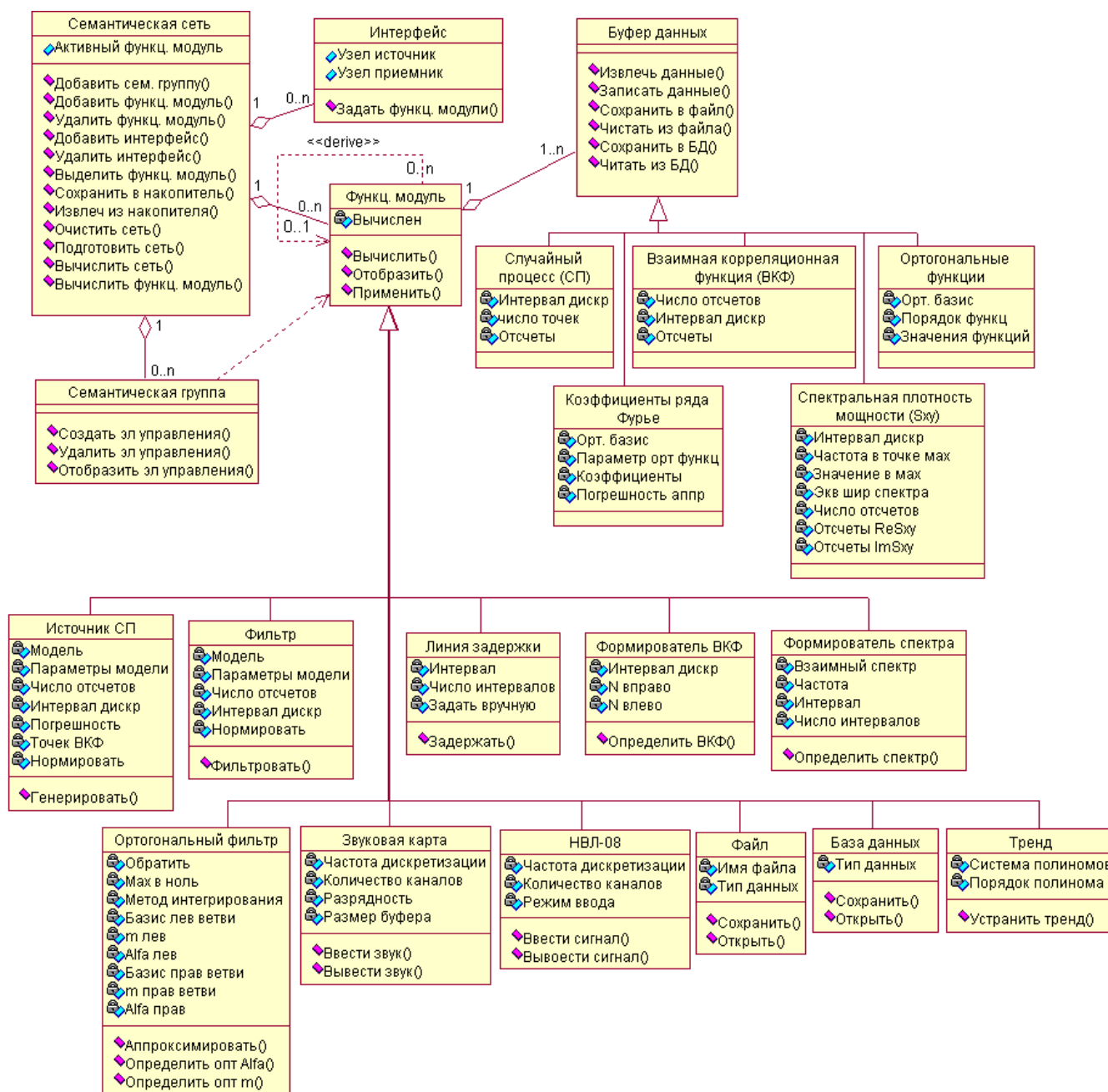


Рисунок 5.27 - Диаграмма классов семантической сети (методология UML)

Источник СП – позволяет генерировать СП с заданным видом КФ или «белый шум».

Тренд СП – позволяет выделить и устранить тренд из исходной СП, поступающей на вход функционального модуля.

Фильтр – СП, поступающего на вход узла, подвергается цифровой фильтрации. Если на вход фильтра поступает «белый шум», на выходе – СП с выбранным видом КФ.

Линия задержки – поступающий на вход узла СП задерживается на заданное число временных интервалов.

Формирователь ВКФ – на основании двух СП, поступающих на вход узла, формируется их ВКФ, имеющая заданное число отсчетов в правой и левой ветви.

Ортогональный фильтр – позволяет аппроксимировать ВКФ ортогональными функциями Лежандра, Лагерра, Дирихле. Параметры ортогональных функций определяются в автоматизированном режиме.

Формирователь спектра – определяется спектральная плотность мощности, вещественная и мнимая части спектра, модуль, фаза спектральной плотности мощности.

Звуковая карта, НВЛ-08, модуль E14-440 фирмы L-Card – позволяют регистрировать и генерировать аналоговые сигналы с помощью устройств сбора и обработки.

Накопитель – используется для автоматизации операций обеспечивающих взаимодействие с накопителями (файл или база данных).

Важной особенностью семантических сетей является разработка специальных графических обозначений для представления отдельных семантических групп и интерфейсов. Функциональные модули (вершины графа семантической сети), рассматриваемого программного комплекса, изображаются в виде прямоугольника, вид которого приведен на рис. 5.28

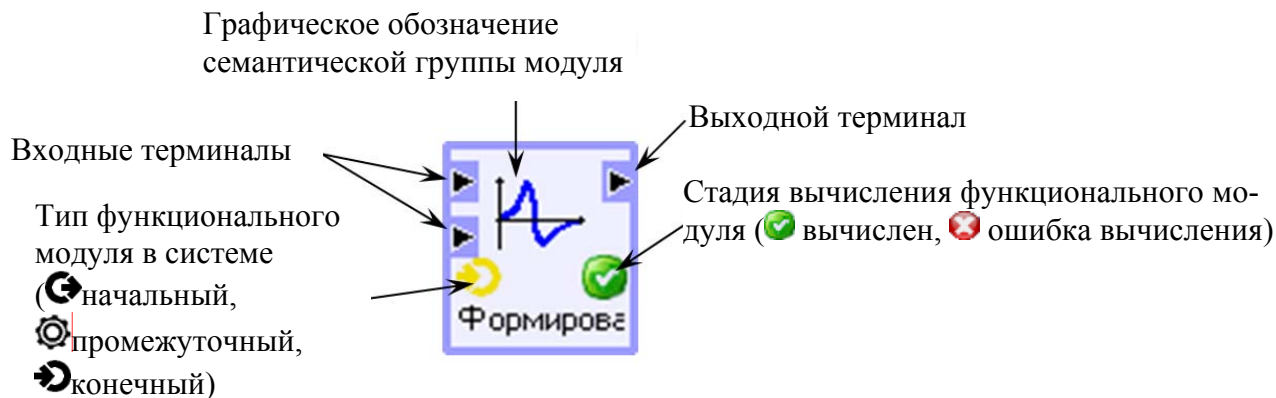


Рисунок 5.28 - Вид вершины в программном комплексе

На вершине указываются входные и выходные терминалы, название функционального модуля, стадия вычисления, тип модуля, а также графическое обозначение семантической группы, которой принадлежит данный модуль. Если название модуля не умещается на модуле сети, то для его просмотра необходимо навести курсор мыши на модуль. При этом название модуля будет отображаться в режиме «бегущей» строки.

Интерфейсы (ребра графа семантической сети) отображаются в виде линий со стрелками, пунктирная линия показывает отсутствие данных, сплошная – сигнализирует о наличии передаваемых по нему данных.

Система рассмотренных графических обозначений, предназначенная для представления информации об отдельных аспектах моделируемой предметной области, получила название *графической нотации*. Следует отметить, что моделируемая в программном комплексе система в общем случае является специальным классом семантических сетей с достаточно развитой семантикой используемых условных обозначений. Унифицированный характер этих обозначений определяет конструктивность их использования для моделирования широкого круга имитационных систем.

Программный комплекс позволяет осуществлять исследование (моделирование) сложных систем. Ввод параметров систем производится в интерактивном режиме, путем графической сборки схемы соединений функциональных модулей, в результате чего получается модель исследуемой системы.

Используя библиотеку семантических групп, представляющую собой набор динамически подключаемых библиотек (*.dll) в которых реализованы алгоритмы функциональных модулей, можно собирать произвольные системы.

Следует заметить, что функциональные модули настраиваются индивидуально.

При конструировании программного комплекса использовался принцип блочного моделирования, суть которого сводится к декомпозиции моделируемой системы, созданию библиотеки стандартных модулей, на основе которых конструируется модель системы в соответствии с ее структурой. Принцип блочного моделирования позволяет разрабатывать каждый блок независимо, реализовывать блоки так, чтобы они могли работать в распределенной среде, модифицировать один из блоков модели системы, оставляя неизменными все остальные. При выделении блоков могут доминировать различные мотивации, однако наиболее часто встречается функциональная замкнутость подзадачи.

Построение программного комплекса с использованием принципа блочного моделирования начинается с изучения предметной области, в которой будет осуществляться моделирование [114].

Под предметной областью рассматриваемого в статье программного комплекса в дальнейшем понимается среда программирования, состоящая из библиотеки типов данных (словарь межмодульных интерфейсов) и библиотеки базовых модулей (словарь функциональных модулей). В словарь данных входят типы данных доступные для передачи информации от одного модуля к другому.

Компонентная структура программного комплекса реализующего принципы блочного моделирования представлена на рис. 5.29.

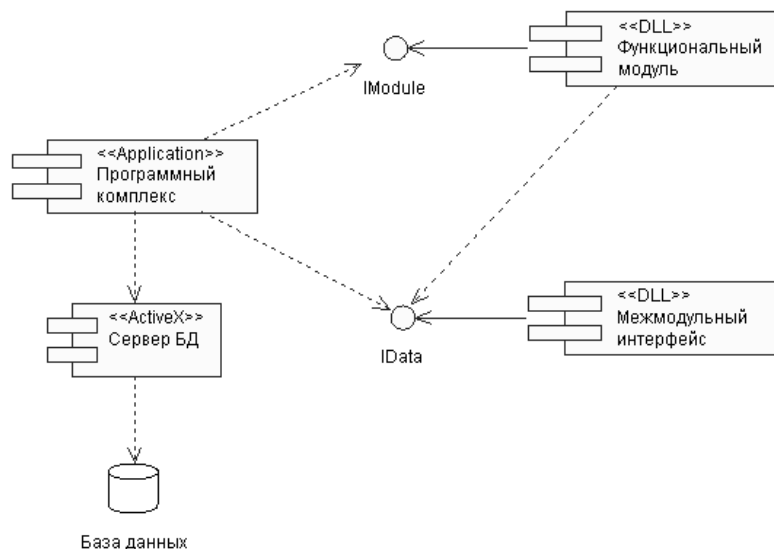


Рисунок 5.29 - Компонентная структура программного комплекса

В этой структуре можно выделить пять компонент. Интерфейс программного комплекса, где осуществляется создание и моделирование семантической сети, реализован в компоненте «Программный комплекс», который для работы с базой данных использует компоненту «Сервер БД». Сама БД обозначена компонентой «База данных». Функциональные модули в комплексе реализованы в виде отдельных динамически подключаемых библиотек (*.dll), которые для связи с программным комплексом используют интерфейс «IModule». Обмен информацией между функциональными модулями моделируемой системы осуществляется через «Межмодульный интерфейс», который для доступа к атрибутам и методам имеет интерфейс «IData». Отношения зависимости между компонентами отображаются пунктирной стрелкой. Стрелка указывает направление от компонента-клиента (зависимого элемента) к источнику (независимому элементу). Наличие такой стрелки означает, что компонент-клиент не реализует соответствующий интерфейс, а использует его в процессе своего выполнения. Следует заметить, что реализация того или иного интерфейса осуществляется компонентой связанной с ним отношением реализации (сплошной стрелкой). Из приведенной ранее структуры видно, что интерфейс «IModule» реализуется в компоненте «Функциональный модуль», а интерфейс «IData» реализуется в компоненте «Межмодульный интерфейс».

Достоинствами блочной модели является гибкость, простота изменения конфигурации, возможность отслеживания промежуточных результатов, соответствие математической модели, возможность унификации процедур моделирования, единообразие и простота построения моделей различных структур, возможность автоматизации процедуры построения моделей систем, возможность использования сетевых алгоритмов при анализе системы и простота ведения базы данных созданных моделей и составляющих блоков. Недостатками блочного моделирования является увеличение времени моделирования и необходимость большого объема памяти для хранения библиотеки моделей. Однако, эти недостатки устранимы при использовании СУБД.

Создание имитационной модели, согласно компонентной структуре изображенной на рис. 5.29, состоит из этапов, представленных на рис. 5.30.



Рисунок 5.30 - Этапы создания имитационной модели сети

На первом этапе создается библиотека межмодульных интерфейсов. Здесь проектируются новые типы и структуры данных, а также происходит накопление словаря данных, где хранится информация обо всех типах данных, доступных для использования функциональными модулями определенной семантической группы в рамках программного комплекса. Данный этап реализуется программистом в соответствии с выделенными в предметной области структурами данных.

Второй этап характеризуется разработкой библиотек, доступных в комплексе семантических групп. Это этап традиционного текстового программирования, на котором программист взаимодействует с исходными текстами программ, учитывая требования, предъявляемые к структуре функционального модуля: разрабатываются методы реализующие интерфейс с программным комплексом, производится привязка типов данных к функциональному модулю.

После того как создана библиотека межмодульных интерфейсов и базовых модулей, пользователь может создать образ моделируемой системы. Разработанный и отлаженный функциональный модуль, используется в качестве исходного материала, при этом функциональные модули могут объединяться в подсистемы. Следовательно, в общем случае моделируемая система имеет иерархическую структуру. Следует заметить, что эффективность моделирования в программном комплексе возрастает по мере развития библиотеки базовых модулей.

При организации вычислений в моделируемой системе используются элементы теории параллельных вычислений, а именно, модель функционально-поточковых параллельных вычислений.

Модель функционально-поточковых вычислений, имеет следующие основные характеристики:

- в основе модели лежит управление вычислениями по готовности данных. Сами вычисления протекают внутри бесконечных ресурсов, что позволяет неявно задавать параллелизм без анализа ресурсных конфликтов;
- выбор операций и аксиом, определяющих базовый набор функций, ориентирован на наглядное представление информационного графа программы при его описании.

Развитие вычислительного процесса в системе происходит путем передачи управления из одного функционального модуля в другой, начиная с модулей, являющихся источниками данных. Этот процесс завершается, когда достигнута конечная вершина. Концевой вершиной системы является та вершина, в которую есть маршрут из любой другой вершины, и которая не имеет интерфейсов подключенных к исходящим терминалам данного функционального модуля. Концевых вершин на графе может быть несколько, если все они удовлетворяют поставленным условиям.

Алгоритм синтеза определяется как последовательность шагов по активации модулей системы, начиная с обязательного конечного. При этом активизируемый модуль перед выполнением вычислений, предусмотренных в нем семантикой, вызывает активацию источника информации. Если активизируемый элемент уже активен и имеет данные на выходе, его активизация не производится, а данные используются в следующих модулях.

В качестве примера рассмотрим систему, позволяющую моделировать случайные последовательности с произвольной взаимной корреляционной функцией, аппроксимировать полученную корреляционную функцию и по результатам аппроксимации оценивать спектральную плотность мощности с автоматическим сохранением ее в файл (см. рис. 5.31).

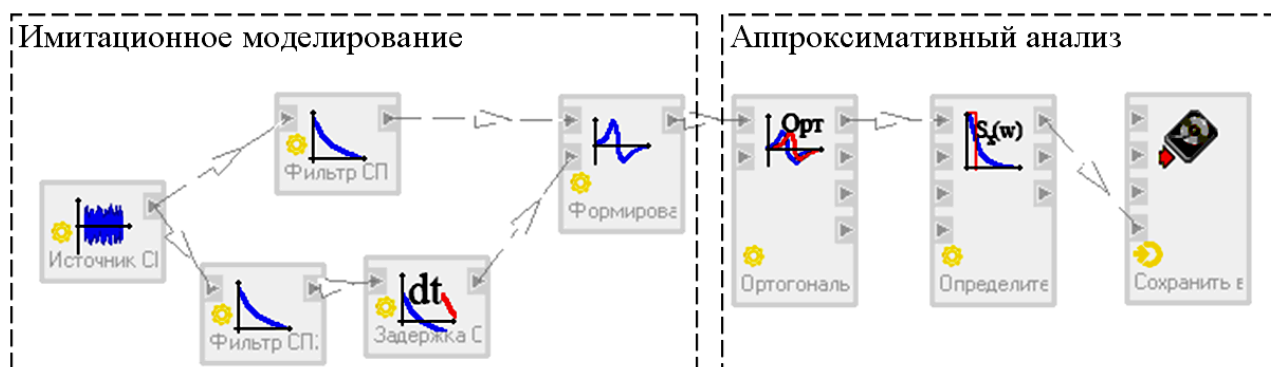


Рисунок 5.31 - Семантическая сеть программного комплекса для анализа корреляционно-спектральных характеристик СП

На данном рисунке отдельные вершины семантической сети изображаются в виде прямоугольников отражающих их тип и служат для условного обозначения семантических групп функциональных модулей данной предметной области. Соединяющие вершины ребра имеют вполне определенный смысл или семантику. А именно, они явно указывают тип передаваемых данных и терминалы источника/приемники этих данных. В смоделированной системе можно выделить две группы функциональных модулей: имитационного моделирования и аппроксимативного анализа. В группе имитационного моделирования осуществляется генерация СП (модуль «Источник СП»), фильтрация полученной случайной последовательности в фильтрах (модули «Фильтр СП1» и «Фильтр СП2»), задержка одной из последовательностей относительно другой (модуль «Задержка СП») и формирование на основе полученных СП взаимной корреляционной функции (модуль «Формирователь ВКФ»). Функциональные модули, выделенные в группу аппроксимативного анализа, позволяют аппроксимировать взаимную корреляционную функцию (модуль «Ортогональный фильтр»), по результатам аппроксимации определить аналитическую модель спектральной плотности мощности (модуль «Определитель S_{xy} »), после чего занести действительную часть СПМ в файл (модуль «Сохранить в накопитель»).

В результате вычисления семантической сети, изображенной на рисунке 5.9, сгенерированный в источнике «белый шум» подается на вход двух формирующих фильтров на выходе которых получается пара процессов, по которым возможно определение теоретической взаимной корреляционной функции. Таким образом, предусмотрен анализ ошибки оценивания ВКФ, определение которой, производится в подсистеме статистической обработки. Генерация ПСП с заданным видом корреляционной функции и задержкой на заданный временной интервал рассмотрена в работе [114].

Подсистема аппроксимативного анализа предоставляет возможность аппроксимации КФ и спектральной плотности мощности ортогональными функциями экспоненциального типа. Подсистема информационного обеспечения предоставляет пользователю доступ к базе данных семантических сетей и результатов вычислений. Также, для идентификации КФ предусмотрена возможность анализа фазовых портретов.

Приведенный на рисунке 5.31 фрагмент семантической сети может быть изменен различным образом, что определяется спецификой решаемой задачи корреляционно-спектрального анализа и имитационного моделирования. С одной стороны, можно ввести дополнительные источники СП, функциональные характеристики которых будут анализироваться, с другой – добавить возможность обработки СП от-

крываемых из файла или базы данных. Для редактирования семантической сети программный комплекс, включает в себя набор стандартных функций редактирования графов.

Программный комплекс функционирует под управлением операционной системы Windows. В соответствии с основным принципом комплекса, вершины графа расположены на некоторой абстрактной плоскости, а каждый функциональный модуль семантической сети имеет окна параметров, входных и выходных данных (см. рисунок 5.32).

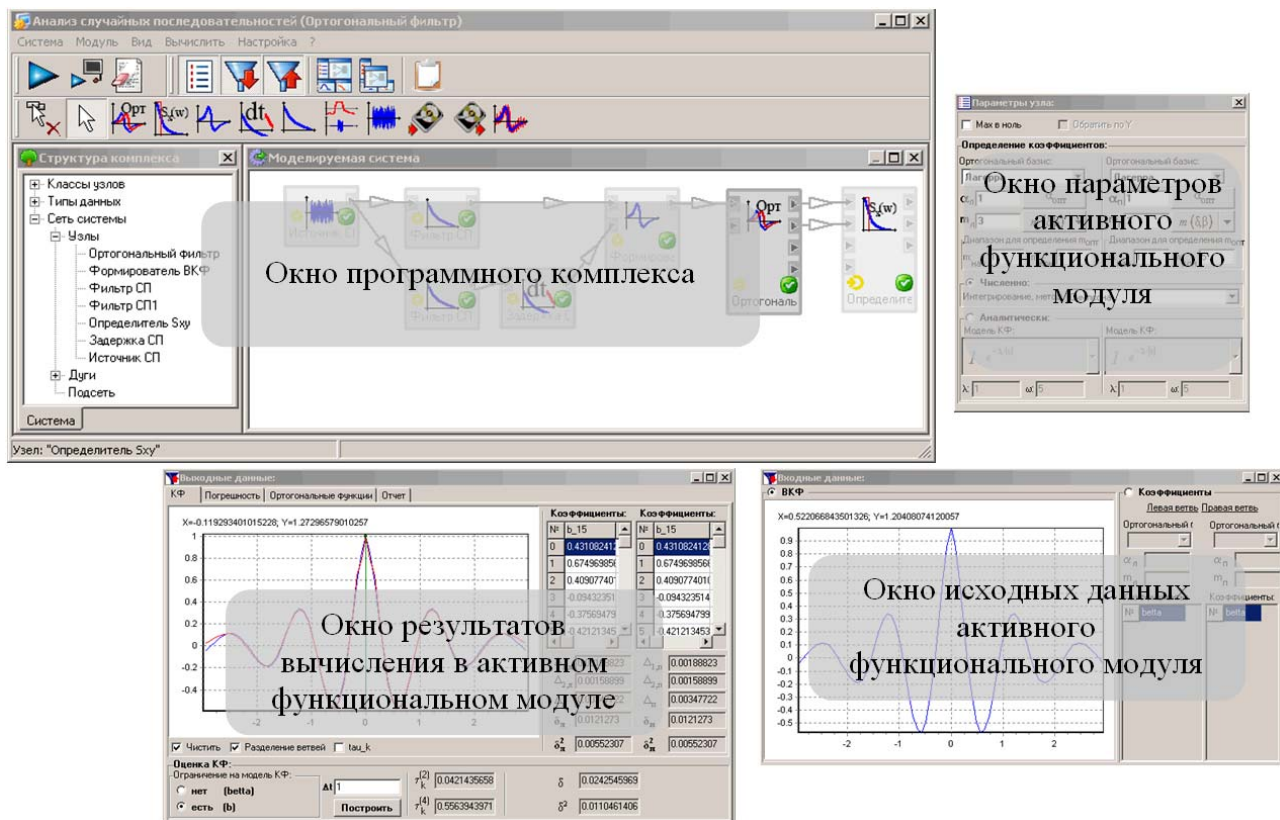


Рисунок 5.32 - Интерфейс программного комплекса с окнами параметров активного модуля

Основное окно программного комплекса состоит из четырех частей: панели инструментов, окна отображения структуры комплекса, окна моделируемой системы (семантической сети) и строки статуса. В окне «Структура комплекса» отображаются доступные функциональные модули и интерфейсы семантической сети. Вся информация представлена в виде древовидной структуры. При выборе элемента в структуре программного комплекса отображаются его параметры. В окне «Моделируемая система» производится синтез семантической сети соответствующей моделируемой системе. При этом редактирование самого графа происходит в нескольких режимах, переключение между которыми осуществляется с помощью меню или специальных сочетаний клавиш (рисунок 5.33).

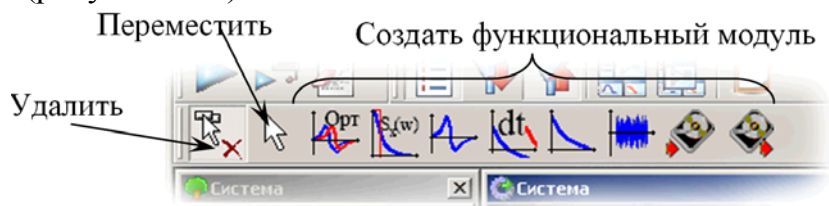


Рисунок 5.33 - Панель инструментов редактирования сети

Существуют следующие режимы редактирования: добавление функционального модуля заданной семантической группы; удаление интерфейса или функционального модуля вместе со связанными с ним интерфейсами; перемещение функционального модуля.

Предусмотрена возможность открытия и сохранения случайной последовательности в файле. Для того чтобы сохранить данные, сформированные в том или ином функциональном модуле, необходимо дважды щелкнуть на изображении терминала функционального модуля, после чего в меню открывшегося окна выбрать пункт «Сохранить в файл...». Аналогичным образом производится запись вычисленных результатов в базу данных.

Расчет ВКФ происходит в функциональном модуле семантического класса «Формирователь ВКФ». В окне параметров нужно указать интервал дискретизации ВКФ и количество отсчетов левой и правой ветвей (окно для отсчетов левой ветви находится слева). Расчет производится после активации модуля.

Возможны добавления и наложения любого числа графиков ВКФ. Эта опция доступна при снятом флажке «Чистить» и позволяет наглядно представить себе соотношение корреляционных функций.

Для случая, когда система состоит из двух фильтров и источника белого шума, определены аналитические выражения. ВКФ, полученная по ним, может быть добавлена выбором пункта «Теоретическая ВКФ» и определением моделей КФ процессов после активации модуля. При этом рассчитывается среднеквадратическое отклонение и максимальная погрешность, что позволяет определить методическую погрешность оценки взаимной корреляционной функции методом имитационного моделирования. Интерфейс модуля «Формирователь ВКФ» приведен на рис. 5.34.

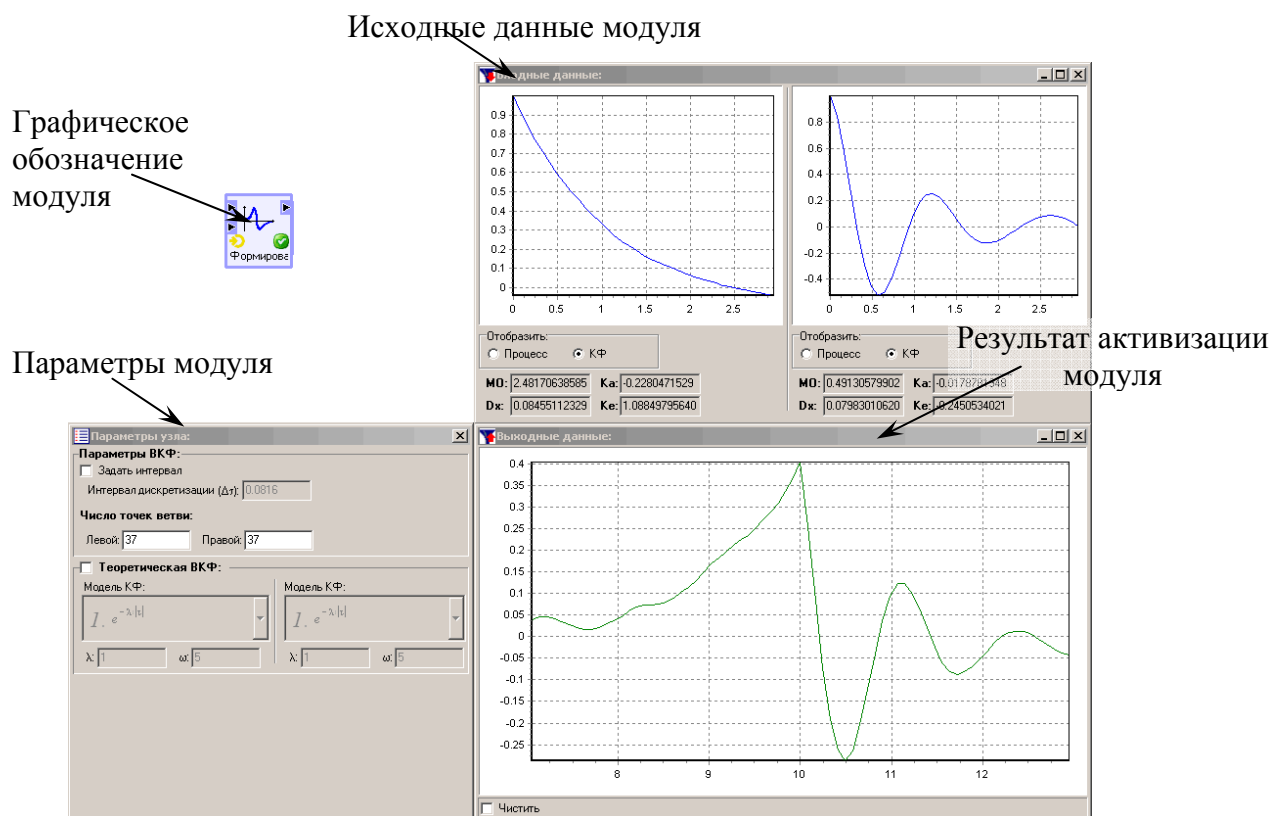


Рисунок 5.34 - Интерфейс функционального модуля «Формирователь ВКФ»

Аппроксимация ортогональными функциями экспоненциального типа (Лагерра, Лежандра, Дирихле) производится в функциональном модуле «Ортогональный фильтр», интерфейс которого приведен на рисунке 5.35.

Сначала нужно установить флажки в верхнем левом углу окна параметров. Флажок «Мах в ноль» означает, что будет найден максимум на графике ВКФ (справа или слева от оси ординат), затем график сдвинется вдоль оси X на величину абсциссы точки максимума. Таким образом, максимум графика будет находиться в точке с абсциссой 0. Затем все ординаты графика будут разделены на ординату максимума. После аппроксимации функциями экспоненциального типа (Лагерра, Лежандра, Дирихле) ВКФ будет приведена в исходное состояние, а при вычислении ВКФ и спектра по параметрам аппроксимирующего выражения будут учтены произведенные изменения.

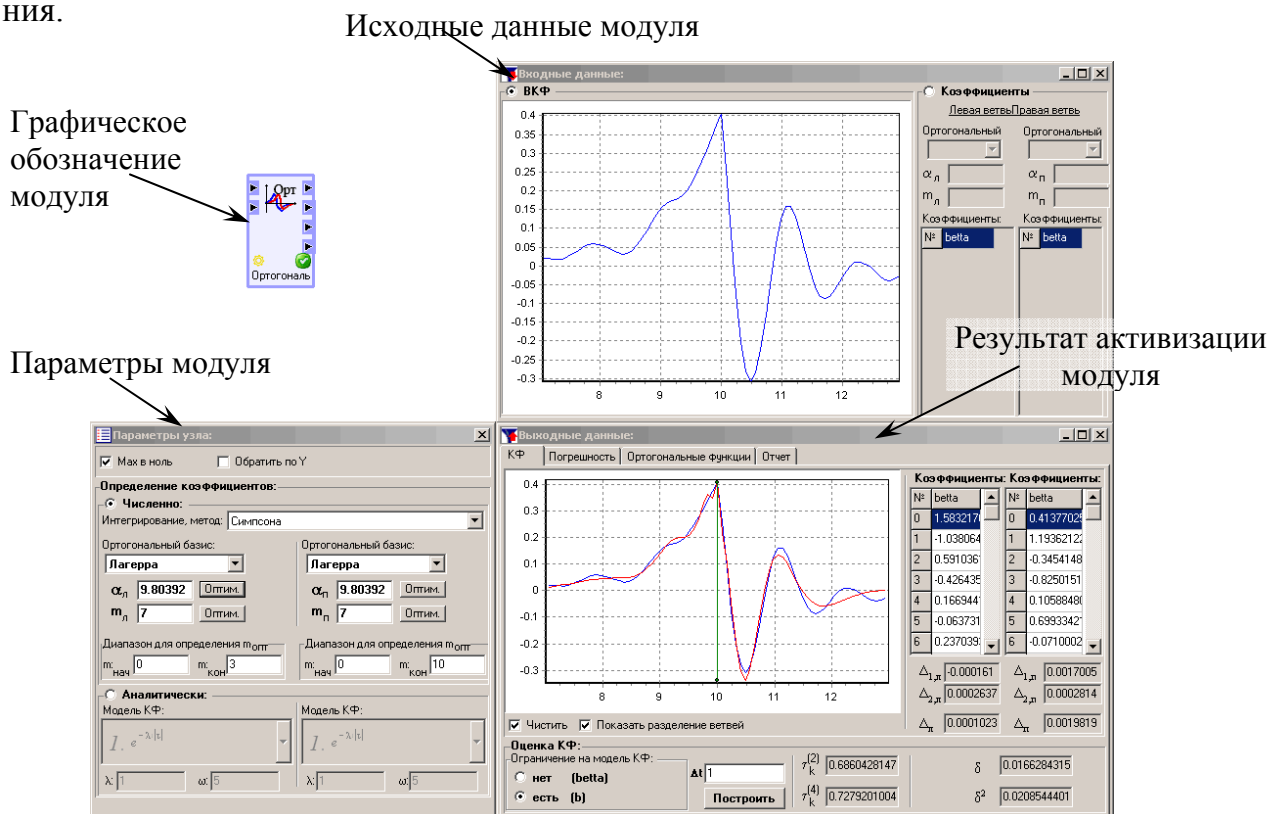


Рисунок 5.35 - Интерфейс функционального модуля «Ортогональный фильтр»

В разделе «Ограничение на модель КФ» окна «Выходные данные» можно задать коэффициенты ряда Фурье, используемые при аппроксимации (β или b).

Флажок «Обратить по Y» устанавливается, когда у графика есть ярко выраженный минимум в отрицательной области. Тогда график будет инвертирован относительно Y и это будет учтено при построении аппроксимирующего выражения.

После установления флажков необходимо определить оптимальные значения параметров ортогональных функций α и $\beta_0, \dots, \beta_m$ для каждой ветви. Для этого необходимо:

- выбрать метод численного интегрирования в поле «Интегрирование, метод»,
- задать ортогональный базис левой и правой ветви в поле «Ортогональный базис» (базис левой ветви задается слева),
- нажать на кнопку «Оптим» рядом с полем « α_n » и « α_n »,

- выбрать диапазон, в котором будет рассчитано число членов разложения m , в полях « $m_{нач}$ » и « $m_{кон}$ »,
- нажать на кнопку «Оптим» рядом с полем « m »,
- в случае необходимости на вкладке «Погрешность» окна «Выходные данные» можно увидеть зависимости погрешности аппроксимации от числа членов разложения,
- определив α и число членов разложения для обеих ветвей, необходимо активировать модуль  или систему .

После этого в поле «Коэффициенты» появится массив членов разложения β , а в поле « δ » будет отображена среднеквадратическая ошибка аппроксимации. Будет также построен график исходной ВКФ (синим цветом) и аппроксимирующего выражения (красным цветом).

Параметр α и число членов разложения m могут быть введены вручную в полях «alfa» и « m » соответственно.

По параметрам аппроксимирующих выражений рассчитываются интервалы корреляции, отображаемые внизу страницы.

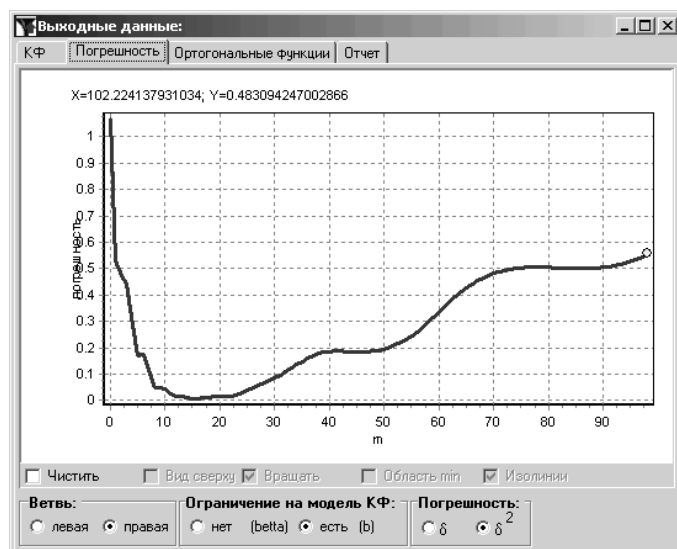


Рисунок 5.36 - График погрешности аппроксимации

Для сохранения результатов аппроксимации в файл необходимо нажать на кнопку «Отчет» в левом нижнем углу страницы.

Погрешности рассчитываются для каждой ветви отдельно. Пример графика погрешности приведен на рис. 5.36.

Определению спектральной плотности мощности в программном комплексе посвящен функциональный модуль «Определитель Sxy». При настройке этого модуля следует установить значение интервала дискретизации спектральной плотности мощности и количества отсчетов спектра, исходя из требования к точности

определения спектральной плотности мощности.

Поскольку спектральная плотность мощности – величина комплексная, кроме графика спектральной плотности мощности предусмотрено представление графиков модуля спектральной плотности, вещественной части, мнимой части и фазы. Вид графика устанавливается в поле «Отобразить» (см. рис. 5.37).

После активации модуля происходит вычисление спектра по параметрам аппроксимирующего ВКФ выражения ортогональной функции, полученной в модуле «Ортогональный фильтр». При установленном флажке «Отображать w_z » будет отображена эквивалентная ширина спектра мощности. Интерфейс данного модуля приведен на рисунке 5.37. Очистка графика происходит при активации модуля при снятом флажке «Чистить».

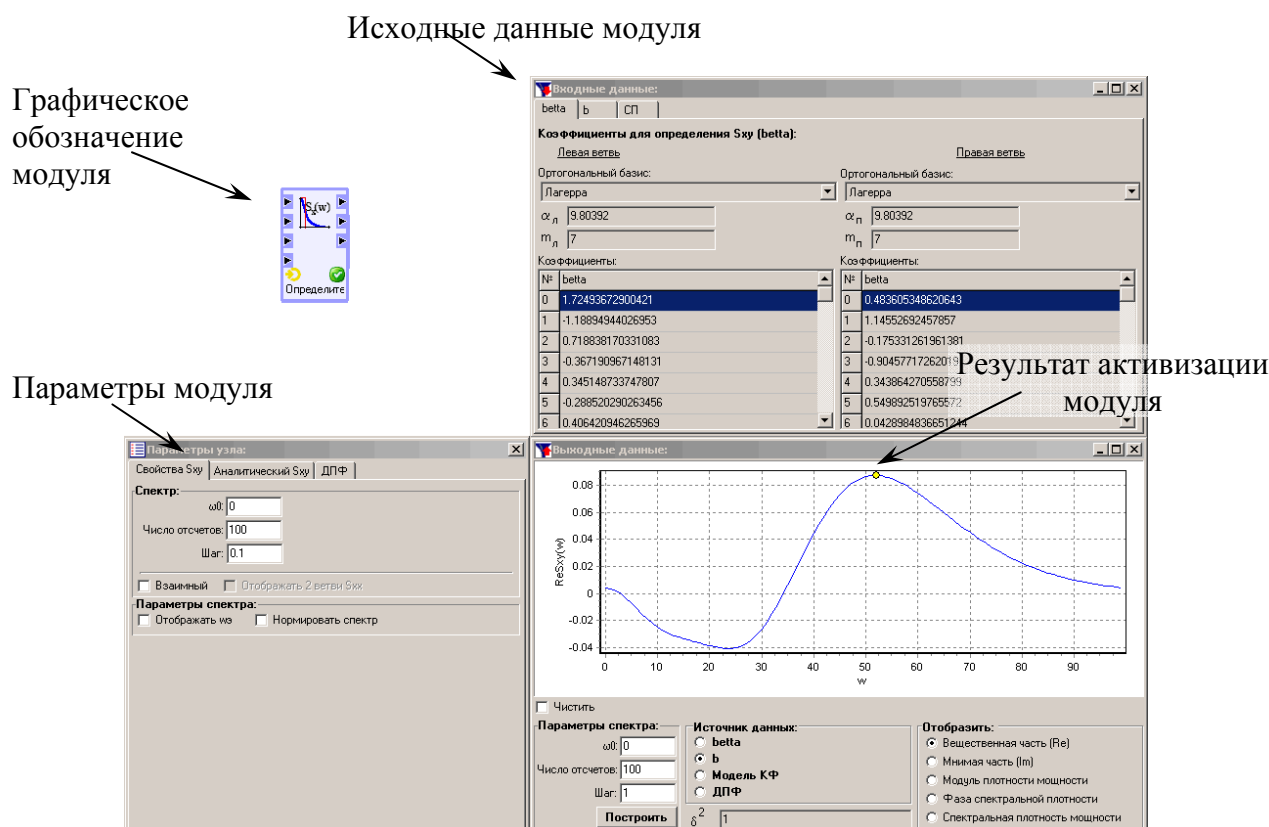


Рисунок 5.37 - Интерфейс функционального модуля «Определитель Sxy»

Подсистема реализована в виде ряда функциональных модулей («Источник СП», «Фильтр СП», и «Линия задержки»), позволяющих генерировать и менять характеристики сгенерированных СП. Перечисленные модули позволяют формировать произвольное количество СП с КФ, которые получают путем последовательной фильтрации в фильтрах. В модуле «Источник СП» происходит генерация исходной псевдослучайной последовательности, корреляционная функция которой задана. Далее, в зависимости от вида имитационной модели, полученный СП подвергается фильтрации и задержкам, чтобы получить требуемый вид СП.

Интерфейс функционального модуля «Источник СП» представлен на рис. 5.38.

В функциональном модуле «Источник СП» осуществляется генерирование исходного процесса. Для этого необходимо ввести:

- число отсчетов СП;
- шаг дискретизации;
- вид КФ;
- параметры КФ α , ω_0 ;
- погрешность моделирования;
- число отсчетов КФ.

При активации модуля данного класса («Источник СП») СП будет смоделирован. Сразу же будут рассчитаны и отображены в окне «Выходные данные» математическое ожидание, дисперсия, коэффициенты асимметрии и эксцесса, КФ процесса, а также среднее квадратическое отклонение и погрешность сгенерированной КФ от модельной корреляционной функции. Предусмотрена возможность отображения КФ и самого СП. Для этого нужно выбрать «Процесс» или «КФ» в разделе «Отобразить».

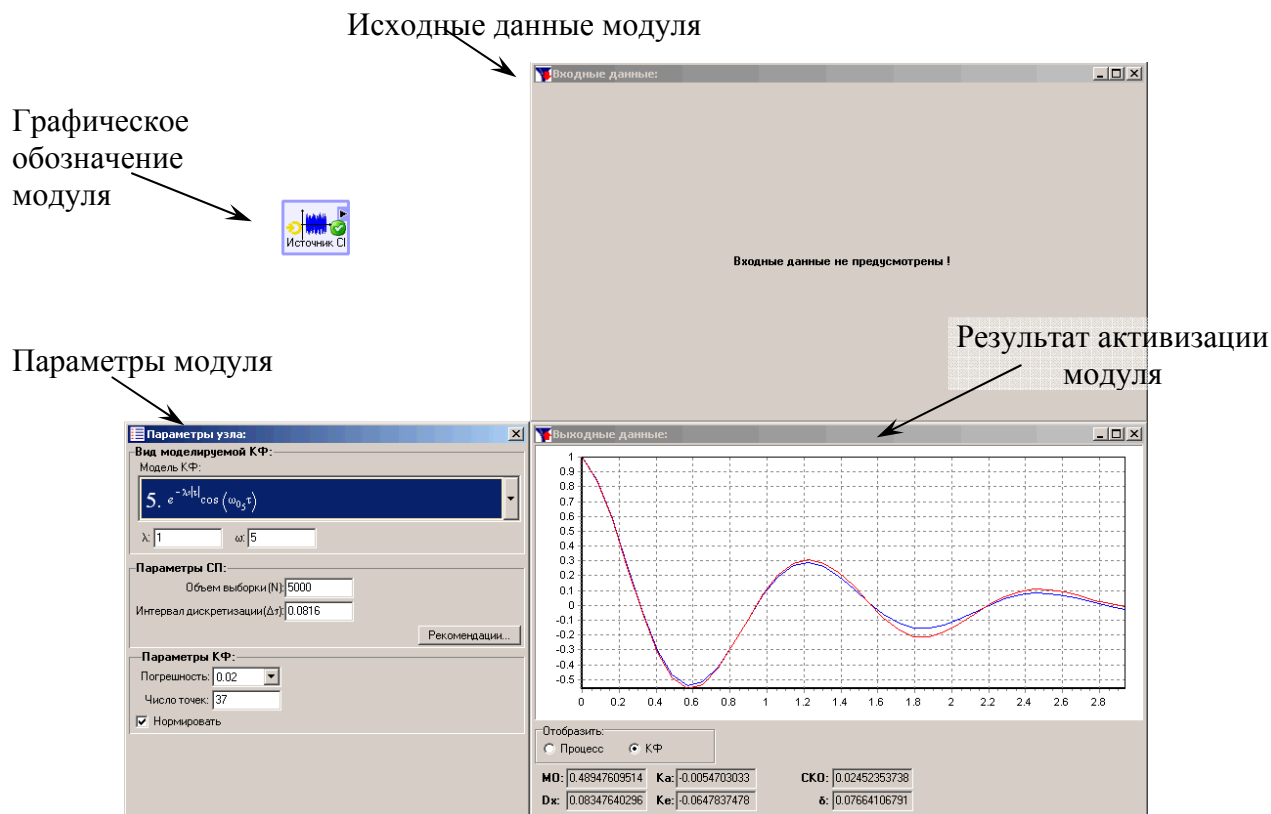


Рисунок 5.38 - Интерфейс функционального модуля «Источник СП»

Для определения интервала дискретизации можно воспользоваться формой, вызываемой нажатием кнопки «рекомендация» и приведенной на рисунке 5.39.

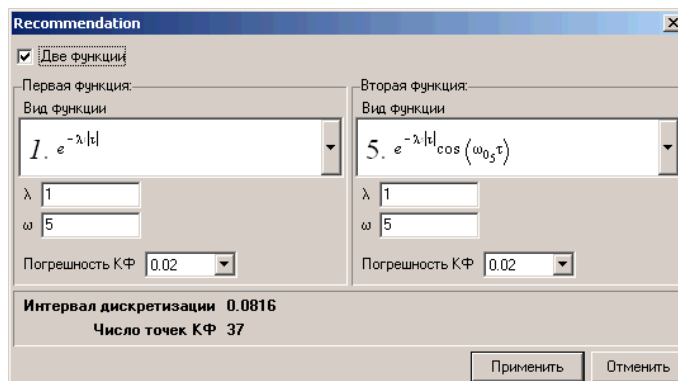


Рисунок 5.39 - Определение интервала дискретизации

Здесь необходимо выбрать вид функции, ее параметры, а также задать требуемую погрешность восстановления корреляционной функции. В нижней части окна будут вычислены интервал дискретизации и число отсчетов корреляционной функции. В случае выбора интервала дискретизации для процесса, используемого при фильтрации несколькими фильтрами, нужно установить флажок «Две функции». После нажатия «Применить» интервал дискретизации будет задан на первой странице.

При генерировании временных рядов с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функций применяется метод фильтрации с использованием единственного источника первичного сигнала (см. рисунок 5.40) [114].

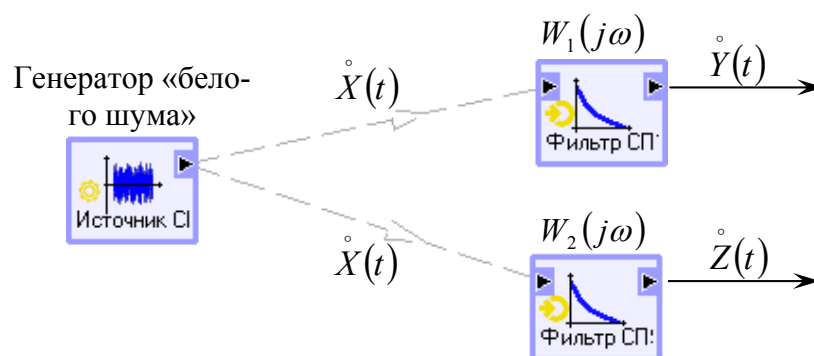


Рисунок 5.40 - Генерирование пары коррелированных случайных процессов

Причем, возможна последовательная комбинация любого числа формирующих фильтров, что позволяет генерировать разнообразные пары процессов. Полученная структура может быть дополнена также линиями задержки.

Таким образом, для генерации двух процессов необходимо создать систему, состоящую из модуля «Источник СП», двух модулей «Фильтр СП» и «Линия задержки». Псевдослучайную последовательность, сгенерированную в модуле «Источник СП», передать на вход формирующих фильтров. Задав параметры модулей, можно получить два процесса, взаимная корреляционная функция которых рассчитывается при активации моделируемой системы.

Функциональный модуль «Фильтр СП» осуществляет фильтрацию поступающего на его входной порт СП. Интерфейс модуля «Фильтр СП» представлен на рис. 5.41.

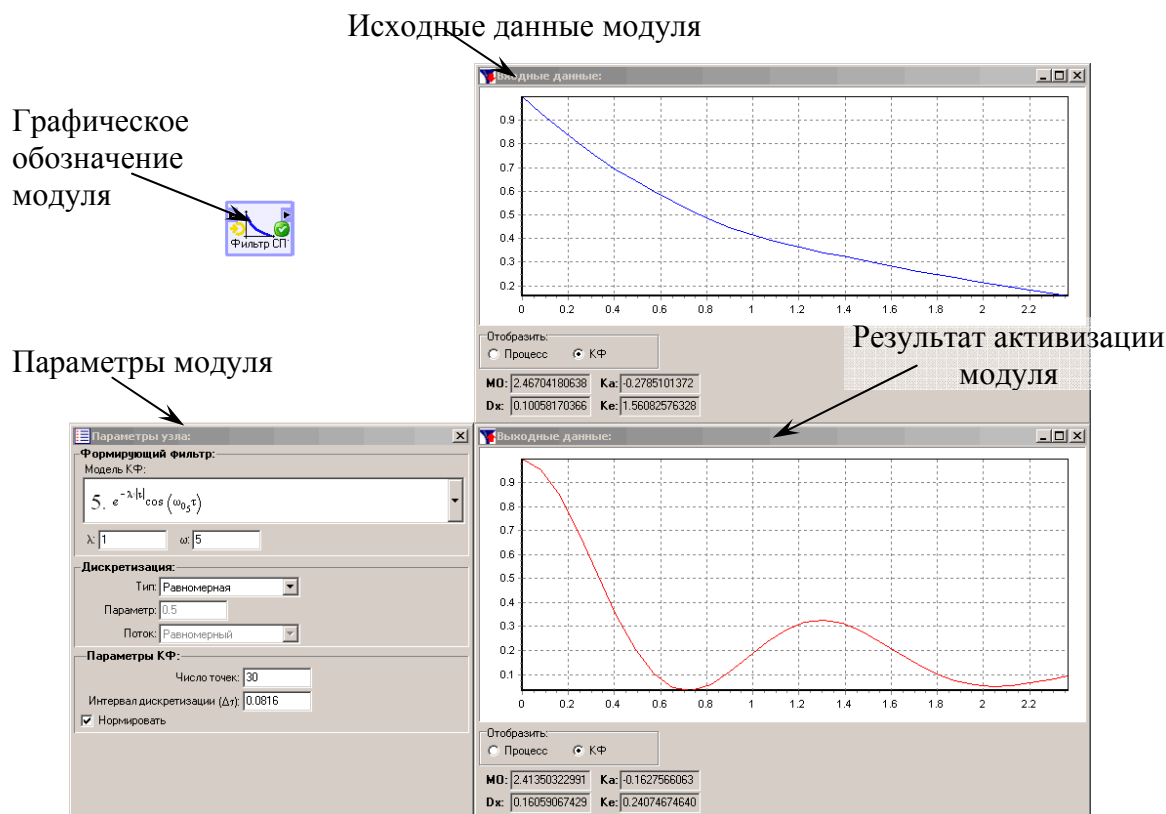


Рисунок 5.41 - Интерфейс функционального модуля «Фильтр СП»

Для фильтров требуется указать вид фильтра и два параметра (λ и ω_0), для модуля «Задержка СП» задать величину задержки и количество задержек (см. рис. 5.42). Если величина задержки равна интервалу дискретизации первого процесса, то количеством задержек можно задавать суммарную задержку, кратную интервалу дискретизации первого процесса.

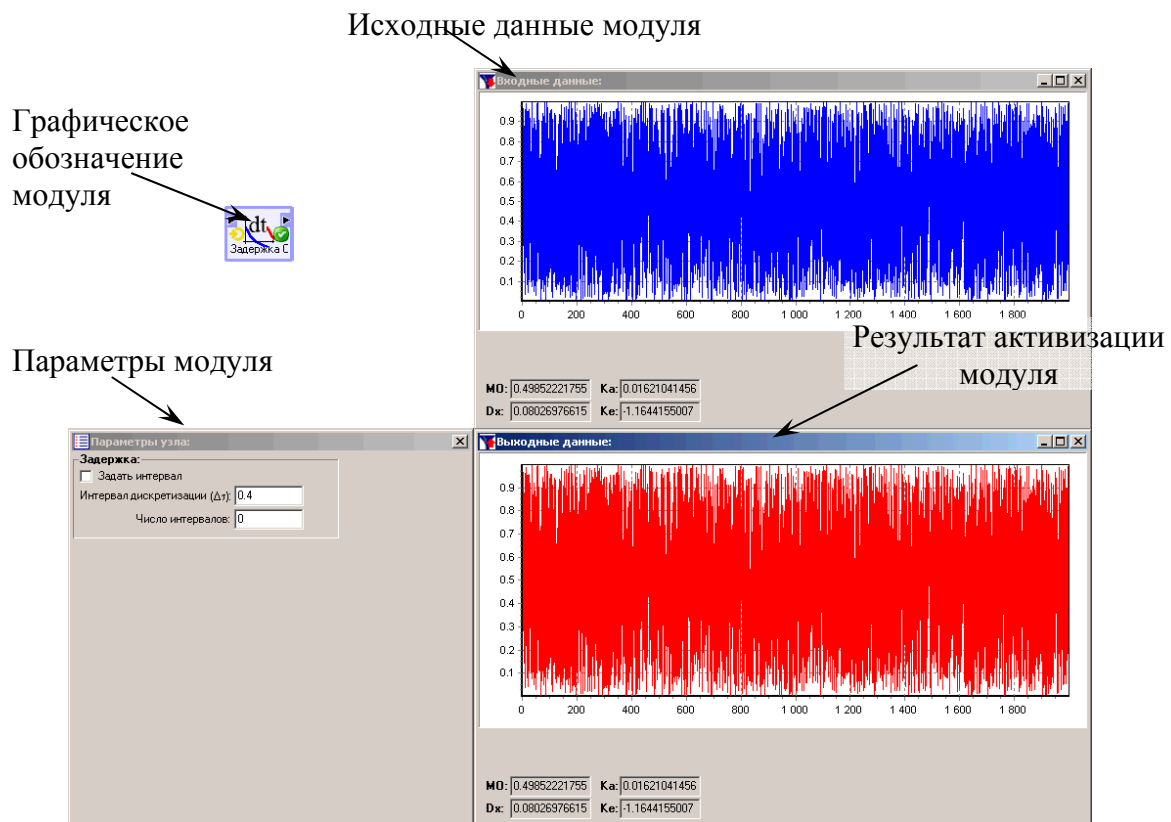


Рисунок 5.42 - Интерфейс функционального модуля «Задержка СП»

Фильтра может и не быть (установить «нет» в окне «фильтр»). Задержка может равняться 0 (установить «кол-во» в 0). Шаг КФ в первом и втором процессах автоматически определяется при генерации как шаг первого процесса. В качестве величины задержки, автоматически рекомендуется шаг первого процесса.

При генерации осуществляется расчет моментов каждого процесса, расчет и отображение корреляционных функций.

Процесс, полученный в одном фильтре можно «пропустить» через второй или задержать. Таким образом, можно реализовать использование неограниченного числа фильтров для получения СП. Важное условие при этом: фильтрации подвергаются только процессы с равномерной дискретизацией.

При использовании семантических сетей база данных может быть реализована с помощью известных СУБД [118]. Наиболее оптимальной в случае представления семантической сети можно считать сетевую модель базы данных [118]. Однако большинство распространенных коммерческих СУБД используют реляционную модель данных, которая с точки зрения представления данных равнозначна сетевой модели. Преобразование одной модели в другую, тем не менее, необходимо ввиду использования алгоритма возбуждения на семантической сети [118]. При реализации автоматизированной системы с помощью объектно-ориентированного языка в сочетании с реляционной СУБД использования сетевой модели базы данных можно избежать, заменив ее последовательным преобразованием реляционной базы данных (или ее

фрагментов) в семантическую сеть объектов классов, соответствующих описанным семантическим группам. При этом возможны различные схемы преобразования [118]. Это преобразование всех записей в базе данных с помощью СУБД в сеть объектов на этапе инициализации программы с возможностью изменения семантической сети и внесения изменений (частично или полностью) в базу данных при завершении работы с программой; это ведение базы данных одновременно с модификацией семантической сети; это создание семантической сети в начале выполнения алгоритмов с помощью СУБД по реляционной базе данных и разрушение сети при завершении синтеза. Все описанные подходы имеют свои достоинства и недостатки. Первый подход не позволяет использовать все преимущества реляционной модели и может приводить к ошибкам при работе нескольких пользователей с одной базой данных (клиент-серверная схема). Второй требует аккуратного обращения с базой данных и резко увеличивает объем работ по ее модификации, связанный с дублированием всех операций по удалению, добавлению или редактированию. Третий подход связан со значительными временными затратами при осуществлении синтеза системы. Кроме этого, следует обеспечить использование системы в случае отсутствия соединения с базой данных, когда нет необходимости в накоплении информации о модели или сервер СУБД недоступен.

Поэтому выбрана следующая схема взаимодействия с СУБД. При загрузке базы данных на основе информации о текущей системе создается семантическая сеть. Текущие изменения сети фиксируются в базе данных. Результаты вычислений в моделях заносятся в базу данных по желанию пользователя. Результаты аппроксимации взаимных корреляционных функций ортогональными функциями (Лагерра, Лежандра, Дирихле) заносятся в базу данных на этапах аппроксимации. При этом совокупности параметров аппроксимирующих выражений присваивается уникальный шифр, который обеспечивает идентификацию результатов аппроксимации внутри системы.

Контроль за соответствием модели системы и результатов аппроксимации взаимных корреляционных функций, получаемых на выходе, ведет пользователь. ER-модель базы данных приведена на рис. 5.43, при этом в качестве СУБД выбрана Microsoft SQL Server [118]. Она обеспечивает один из наиболее распространенных методов, реализующих интерфейс пользователя с БД – это SQL (язык структурированных запросов). Преимущество языка SQL в том, что он позволяет непосредственно работать с БД верхнего уровня. Кроме того, он предоставляет возможность в краткой форме описать достаточно сложные многокритериальные запросы. Сервисы автоматизированному комплексу предоставляются через механизм ODBC (Open DataBase Connectivity).

Разработанная автоматизированная система позволяет решить задачи:

1. автоматизации аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов, полученных либо при проведении экспериментальных исследований, либо - имитационного моделирования;
2. исследования алгоритмов аппроксимации взаимных корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Лагерра, Лежандра, Дирихле.

Для обеспечения использования алгоритмов в современных математических пакетах, облегчения интерфейса и использования автоматизированная система реализована на языке Object Pascal (Borland Delphi 7).

5.5. Автоматизированная учебно-исследовательская система аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик

Отличительными особенностями разработанной автоматизированной системы по сравнению с системами, рассмотренными в подразделах 5.2-5.4, являются [146-147]:

- выделение тренда и центрирование нестационарного СП регулярной дискретизацией с помощью ортогональных полиномов Лагерра, Лежандра, Чебышева, Эрмита;
- выделение части нестационарного СП для дальнейшего анализа;
- аппроксимация вещественной и мнимой составляющих спектра ортогональными функциями Дирихле, Лагерра, Лежандра с последующим построением по параметрам моделей аналитического выражения ВКФ;
- наличие подсистемы имитационного моделирования для изучения точностных характеристик генераторов ПСП с заданными корреляционными свойствами и алгоритмов аппроксимативного анализа различных вероятностных функциональных характеристик;
- наличие подсистемы для изучения свойств ортогональных полиномов и функций.

Структура автоматизированной учебно-исследовательской системы представлена на рис. 5.44.

Система разделена на следующие подсистемы, некоторые из которых в свою очередь состоят из нескольких частей:

- 1 определения исходного процесса:
 - 1.1 выделение тренда и центрирование СП;
 - 1.2 выделение части СП;
- 2 создания пары процессов:
 - 2.1 создание первого процесса;
 - 2.2 создание второго процесса;
- 3 расчета ВКФ;
- 4 аппроксимации ВКФ:
 - 4.1 построение ортогональной модели ВКФ;
 - 4.2 оценка спектра по параметрам ортогональной модели ВКФ;
- 5 расчета спектральной плотности мощности;
- 6 аппроксимации спектральной плотности мощности:
 - 6.1 построение ортогональных моделей вещественной и мнимой частей спектра;
 - 6.2 оценка ВКФ по параметрам ортогональных моделей вещественной и мнимой частей спектра;
- 7 экспериментов:
 - 7.1 проведение экспериментов по моделированию СП с заданным видом КФ;
 - 7.2 проведение экспериментов по аппроксимации оценок КФ смоделированных СП;
- 8 построения графиков ортогональных функций;
- 9 ввода-вывода:
 - 9.1 открытие данных из файла;
 - 9.2 сохранение результатов в файл.

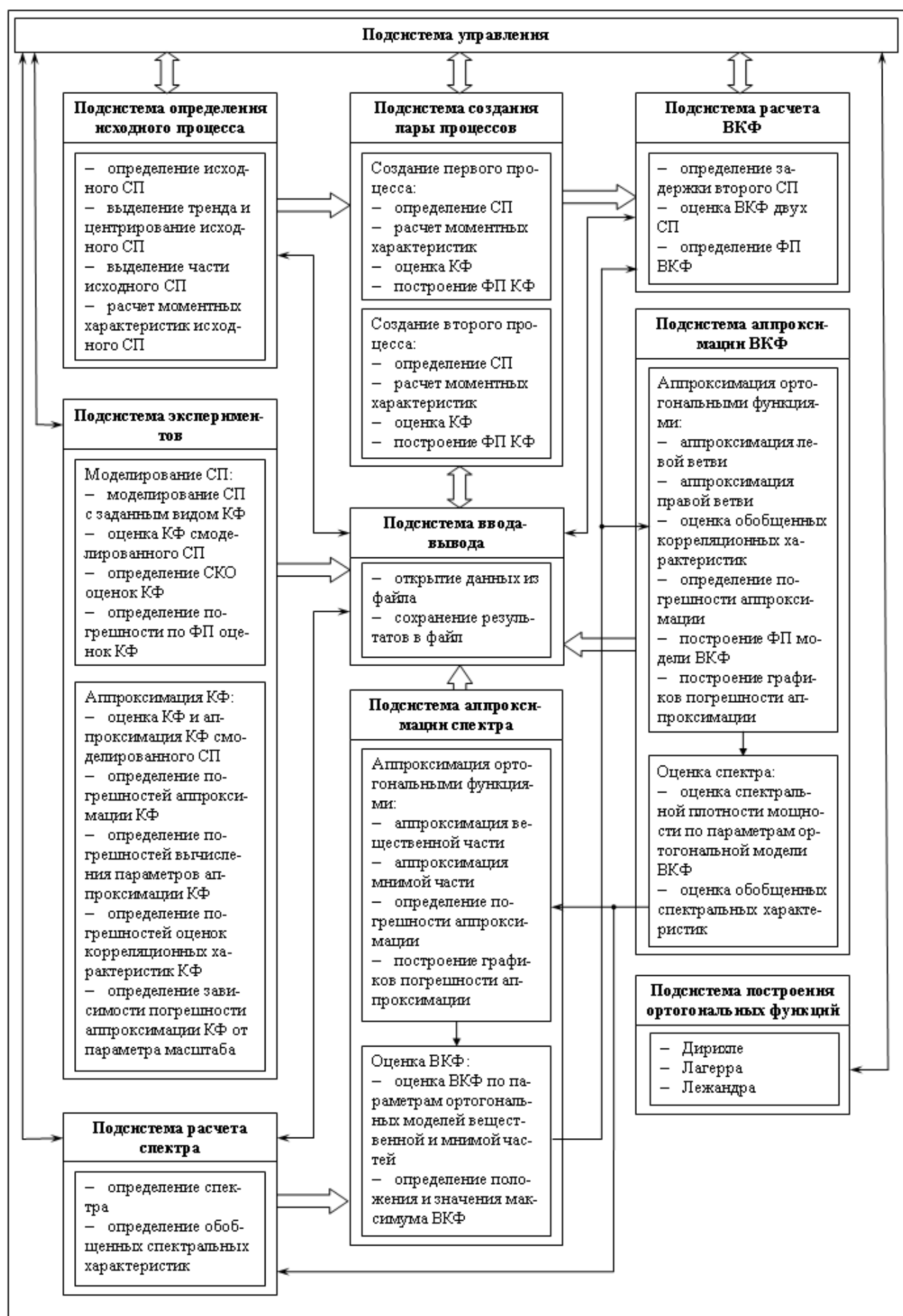


Рисунок 5.44 - Структура автоматизированной учебно-исследовательской системы

Функции, реализуемые системой, представлены на рисунке 5.45.

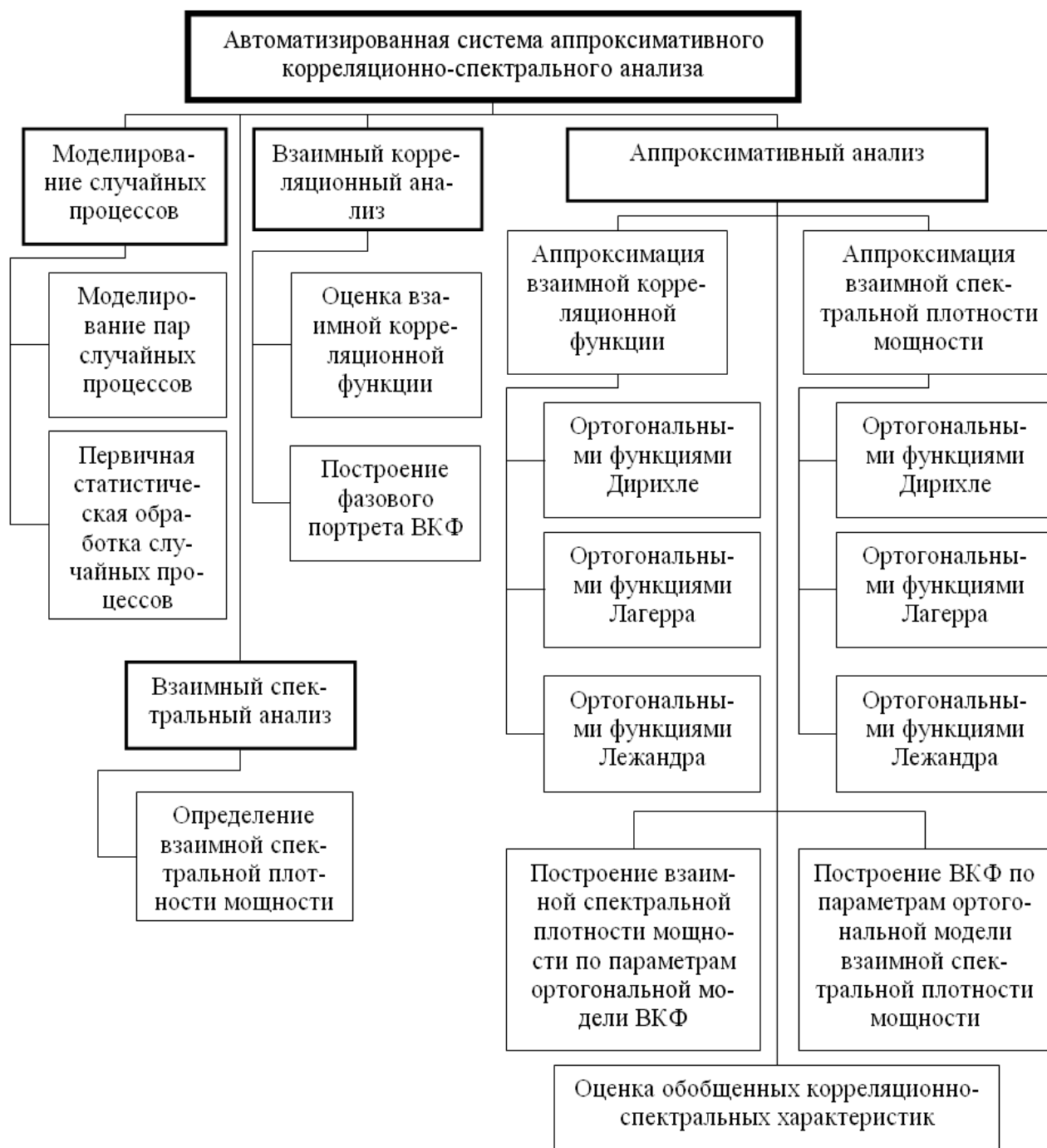


Рисунок 5.45 - Функции автоматизированной системы

Начало работы

Для начала работы программы необходимо запустить файл DLL.exe. На экране появится форма, изображенная на рис. 5.46.

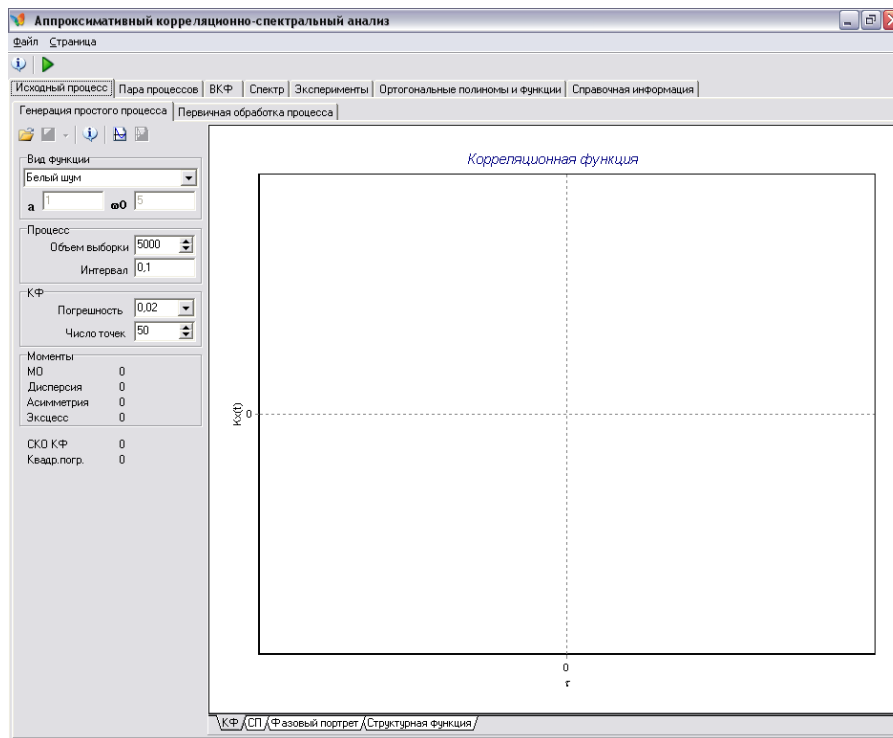


Рисунок 5.46 – Вид формы начала работы в системе

Исходный процесс может быть открыт из файла или сгенерирован. Если требуется центрировать СП или выделить его часть, необходимо перейти на страницу «Первичная обработка процесса».

Генерация исходного процесса

Для генерации исходного процесса методом рекурсивной фильтрации необходимо ввести:

- 1 вид КФ;
- 2 параметры КФ a , ω_0 ;
- 3 объем выборки (число отсчетов СП);
- 4 интервал дискретизации;
- 5 погрешность моделирования;
- 6 число отсчетов КФ.

Число отсчетов и шаг КФ могут быть заданы вручную или определены автоматически. Для этого необходимо нажать на кнопку  («Рекомендации»). На экране появится форма, представленная на рис. 5.47.

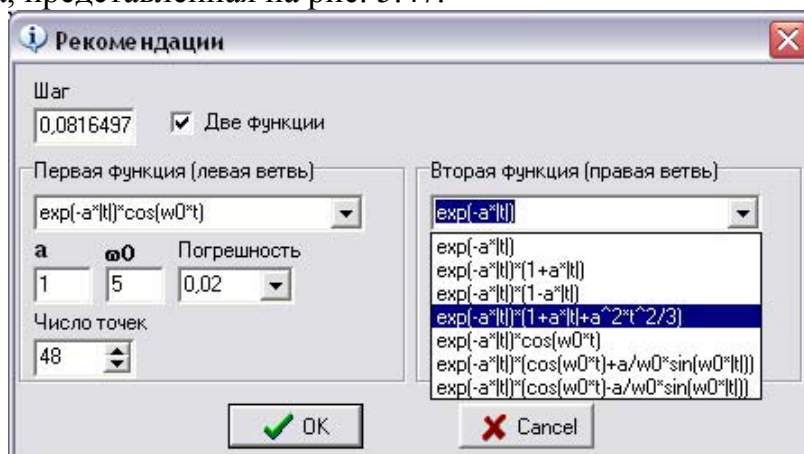


Рисунок 5.47 - Определение оптимальных параметров КФ

Здесь необходимо указать количество функций (одна или две) и задать параметры этих функций: вид КФ, значения a , ω_0 , погрешности приближения КФ. Автоматически будут предложены количество отсчетов КФ («Число точек») и интервал дискретизации («Шаг»). При нажатии кнопки «ОК» все указанные параметры будут автоматически переданы в подсистемы «Генерация исходного процесса» и «Создание пары процессов». Если нажать кнопку «Cancel», перечисленные параметры в указанных подсистемах останутся без изменений.

После нажатия на кнопку  («Сгенерировать СП и рассчитать его характеристики») СП будет смоделирован (рис. 5.48). Сразу же будут рассчитаны и отображены математическое ожидание, дисперсия, коэффициенты асимметрии и эксцесса и КФ процесса. Кроме того, будут рассчитаны среднеквадратическое отклонение смоделированной КФ от идеальной и квадратическая погрешность по фазовому портрету. Предусмотрена возможность отображения КФ, самого СП, фазового портрета или структурной функции. Для этого нужно выбрать закладку с соответствующим названием внизу графика.

Исходный процесс может быть открыт из файла (кнопка ).

После генерации или открытия из файла исходный процесс автоматически передается во вторую часть подсистемы – в «Первичную обработку процесса».

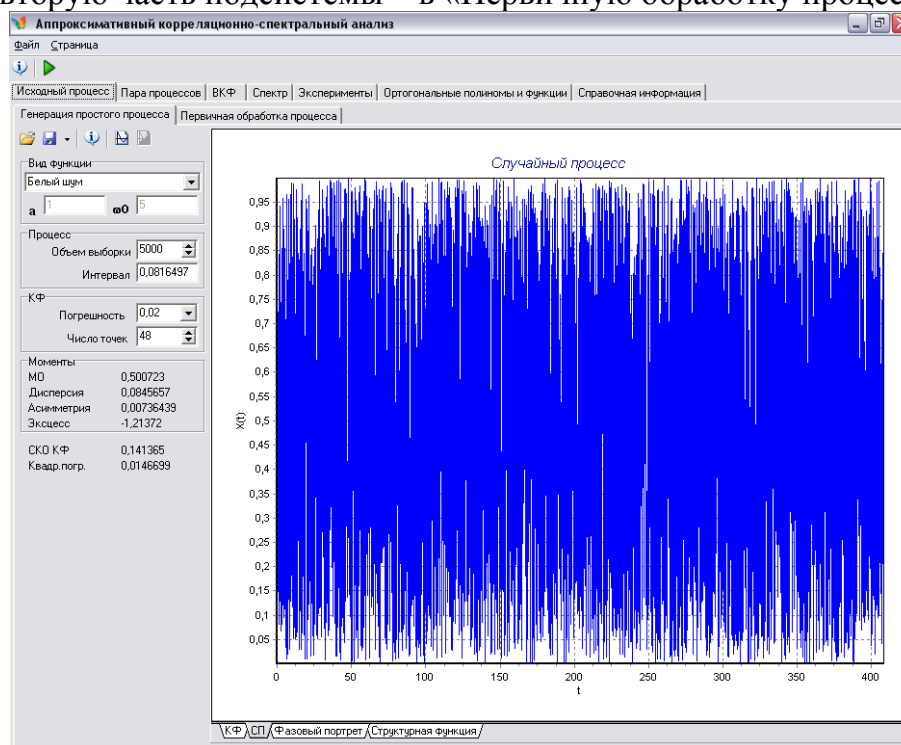


Рисунок 5.48 – Генерация процесса

Первичная обработка процесса

Если требуется обработать часть СП, надо перейти на страницу «Первичная обработка процесса». Здесь также можно открыть СП из файла (рис. 5.49), выбрав соответствующий пункт меню («СП с равномерной дискретизацией» или «СП с неравномерной дискретизацией»).

Если СП является нестационарным по математическому ожиданию, чтобы его центрировать, необходимо сначала выделить его тренд. Для этого надо перейти на страницу «Первичная обработка процесса». Здесь также можно открыть СП из файла (рис. 5.50), выбрав соответствующий пункт меню («СП с равномерной дискретизацией» или «СП с неравномерной дискретизацией»).

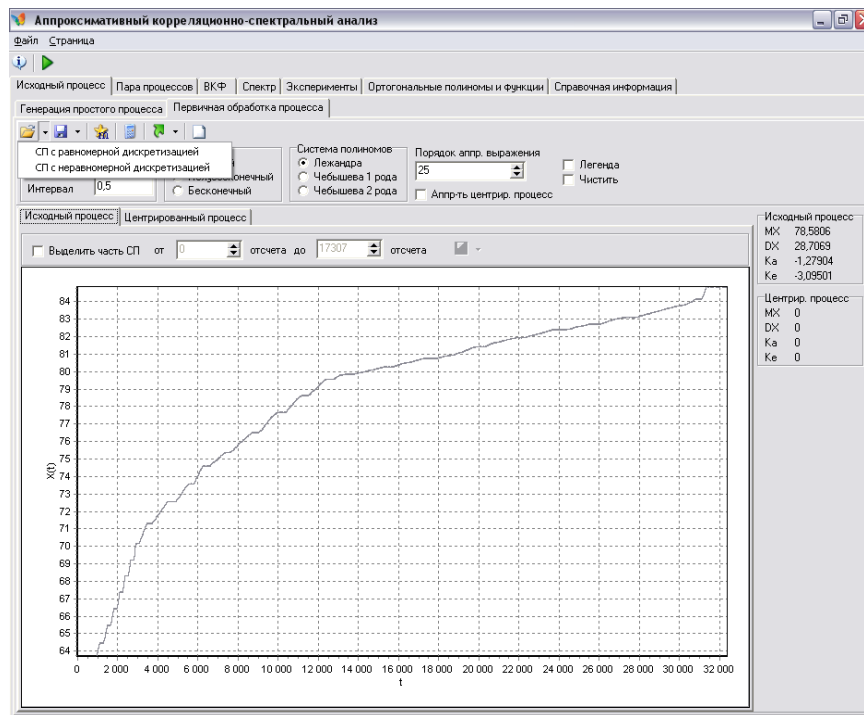


Рисунок 5.49 – Открытие процесса для выделения части и/или центрирования

Далее необходимо выбрать интервал ортогональности системы полиномов и непосредственно систему полиномов, с помощью которых будет производиться выделение тренда и центрирование СП, задать порядок аппроксимирующего выражения и нажать на кнопку («Центрировать СП процесс с регулярной/нерегулярной дискретизацией»). На графике появится линия тренда, цвет которой соответствует определенному ортогональному базису (это соответствие можно посмотреть, установив галочку «Легенда»), справа от графика будут отображены числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсия, коэффициент асимметрии, коэффициент эксцесса) исходного и центрированного СП, а на странице «Центрированный процесс» будет отображен график центрированного СП.

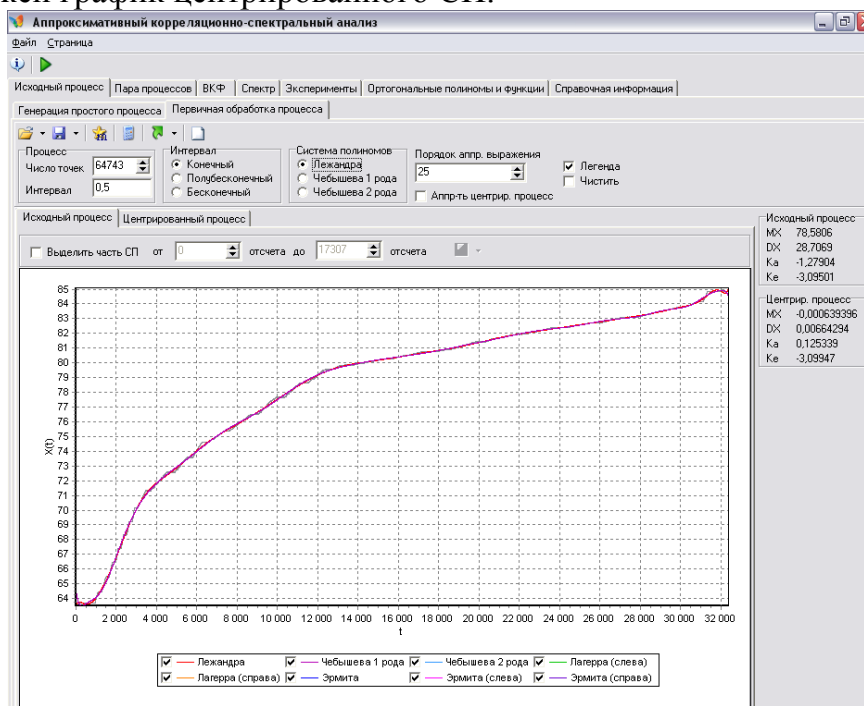


Рисунок 5.50 – Выделение тренда и центрирование исходного СП

На рис. 5.51 показан пример выделения части СП для дальнейшего анализа. Для того, чтобы выделить часть СП, необходимо установить флажок «Выделить часть СП» и, нажав левую кнопку мыши на графике СП, выделить нужную область. Границы выделяемой части можно ввести вручную, задав номера начального и конечного отсчетов СП. Выделенную часть СП можно сохранить в файл, выбрав соответствующий пункт выпадающего меню кнопки .

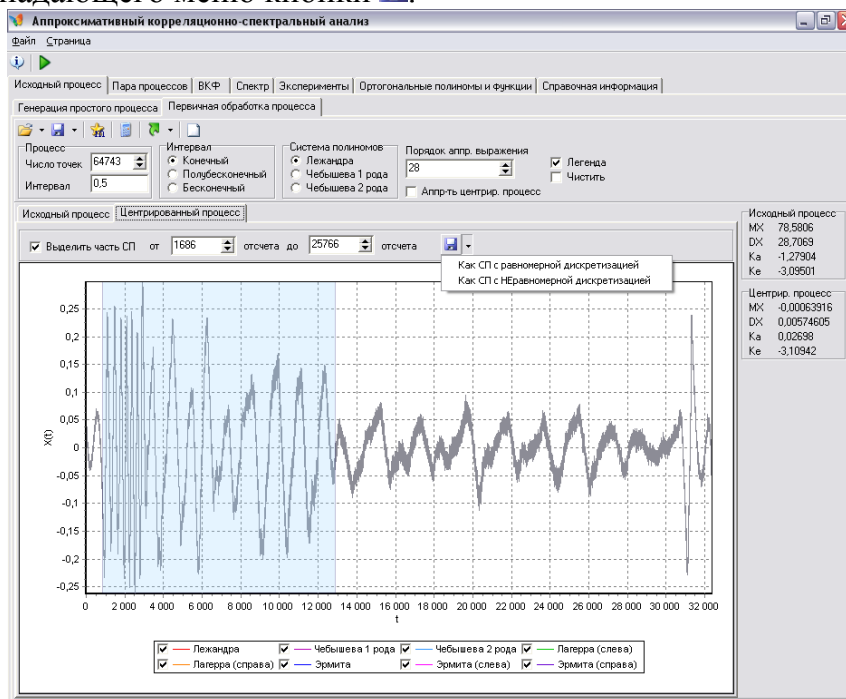


Рисунок 5.51 – Выделение части централизованного СП

Процесс или его часть могут быть переданы в подсистему «Создания пары процессов» в качестве исходных процессов для левой и/или правой ветвей. Для этого необходимо выбрать соответствующий пункт выпадающего меню кнопки  («Передать процесс») или соответствующий пункт меню, появляющегося при нажатии правой кнопки мыши на графике СП (см. рис.5.52).

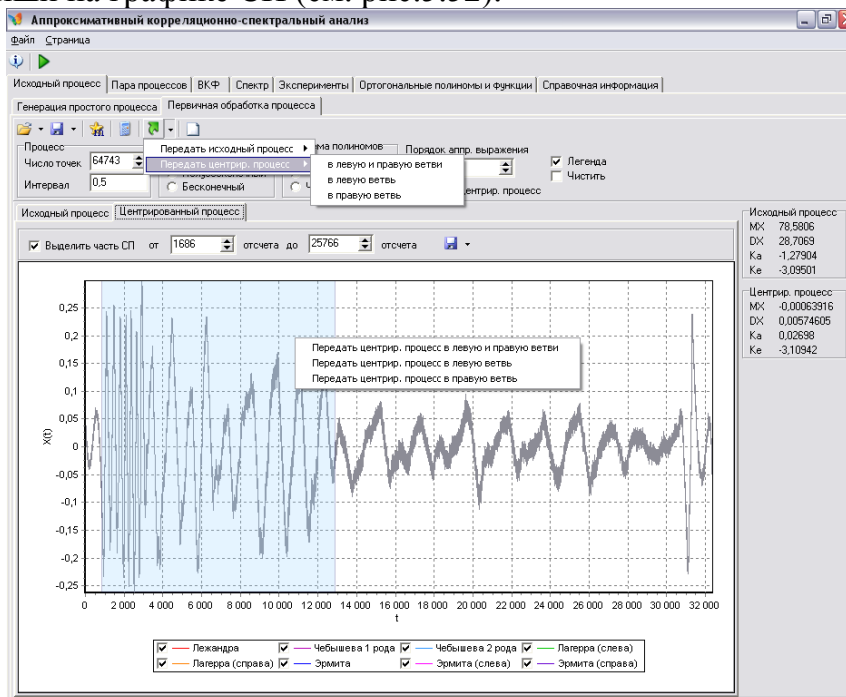


Рисунок 5.52 – Передача части СП для дальнейшего анализа

Здесь и далее, нажав на кнопку  («Очистить графики»/ «Очистить»), можно очистить все графики на текущей странице, а также некоторые значения и таблицы. Если установлен флажок «Чистить», то на графике новая линия будет затирать все остальные, а не добавляться к уже построенным.

Создание пары процессов

Для создания пары процессов необходимо перейти на следующую страницу «Пара процессов» (рис. 5.53), задать параметры фильтров: вид фильтра, a и ω_0 , и нажать кнопку .

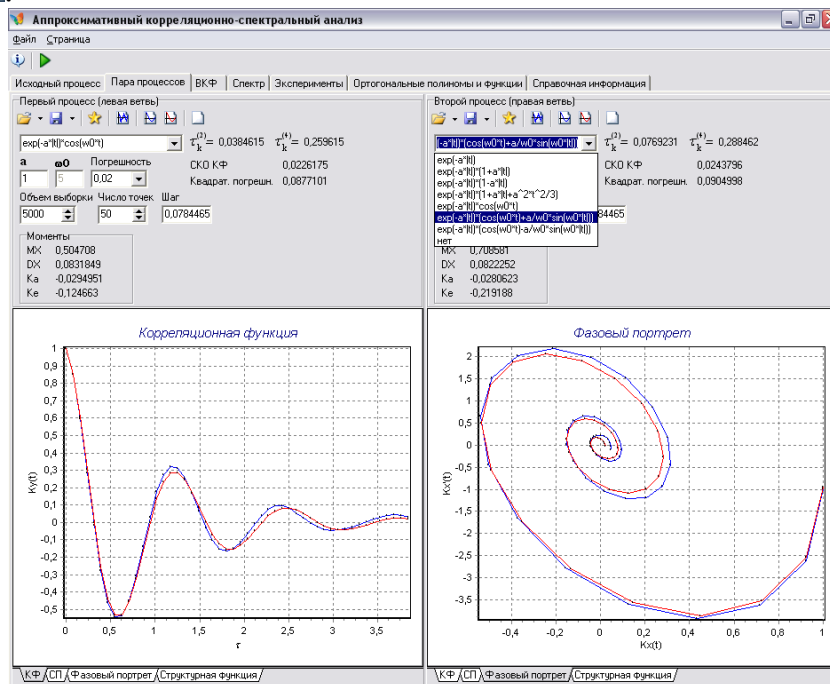


Рисунок 5.53 – Создание пары процессов

Для построения графика КФ необходимо задать число точек КФ и нажать кнопку . Фильтра может и не быть (установить "нет" в окне "КФ"), если, например, СП был передан из подсистемы «Первичная обработка процесса».

Если при этом шаг первой КФ отличается от шага второй КФ, автоматически выбирается минимальный и пересчитывается количество отсчетов КФ с большим шагом таким образом, чтобы сохранить интервал отображения КФ на графике прежним. При этом минимальный шаг рекомендуется в качестве интервала дискретизации ВКФ.

При генерации осуществляется расчет моментов каждого процесса, расчет и отображение корреляционных и структурных функций, фазовых портретов. Эти графики можно посмотреть, выбрав внизу страницы закладки с соответствующими названиями.

Если исходным процессом является «белый шум» и выбраны фильтры с известным видом КФ, можно определить оптимальные значения шага дискретизации и числа точек (кнопка  («Определить оптимальные шаг и число точек»)) – аналог кнопки  («Рекомендации»)), построить теоретические графики и рассчитать СКО смоделированной КФ от теоретической и квадратическую погрешность по фазовому портрету, а также теоретические значения интервалов корреляции КФ $\tau_k^{(2)}$ и $\tau_k^{(4)}$, нажав кнопку .

Процессы могут быть открыты из файлов (кнопка ) и сохранены в файл (кнопка )

Построение ВКФ

На странице «ВКФ» на закладке «Расчет ВКФ» (рис. 5.54) можно рассчитать взаимную корреляционную функцию.

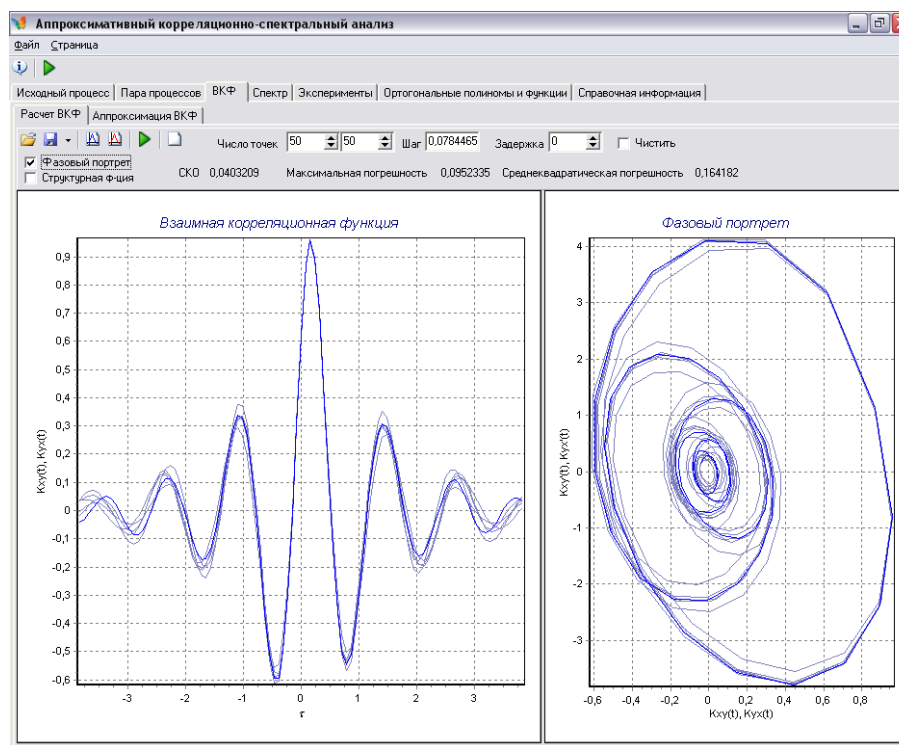


Рисунок 5.54 – Расчет ВКФ

Для этого надо указать интервал дискретизации ВКФ (как правило, минимальный из двух интервалов со страницы «Пара процессов»), количество отсчетов левой и правой ветвей, задать задержку (в виде количества интервалов, равных шагу дискретизации) второго процесса относительно первого и нажать кнопку  («Построить ВКФ»). Автоматически ВКФ передается в аппроксимацию ВКФ. Можно посмотреть графики фазового портрета и структурной функций, установив соответствующие флажки. Если флажок «Чистить» не установлен, то предыдущие графики ВКФ будут отображаться серым цветом, а новый график – синим цветом.

Если исходным процессом является «белый шум» и выбраны фильтры с известным видом КФ, можно построить теоретические графики и рассчитать СКО смоделированной ВКФ от теоретической и среднеквадратическую погрешность по фазовому портрету, нажав кнопку  (см. рис.5.55).

ВКФ можно открыть из файла (кнопка ) . В текстовый файл можно сохранить ВКФ или структурную функцию (кнопка ) .

Действия, происходящие при нажатии на кнопку  рассмотрены ниже в «Аппроксимации ВКФ».

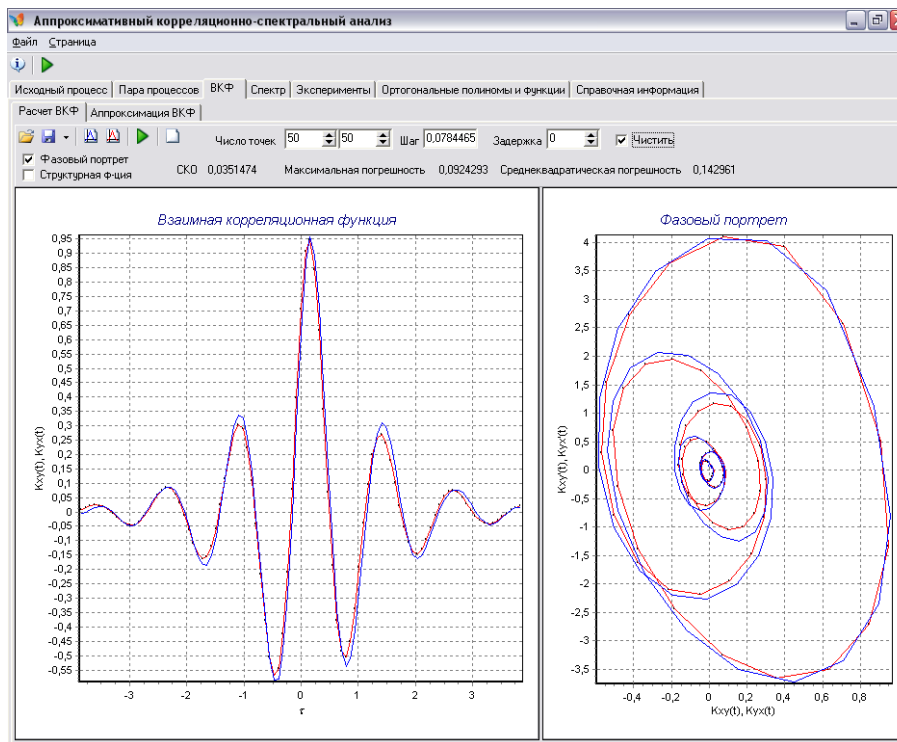


Рисунок 5.55 – Построение теоретических графиков

Аппроксимация ортогональными рядами производится на закладке «Аппроксимация ВКФ», приведенной на рис. 5.56.

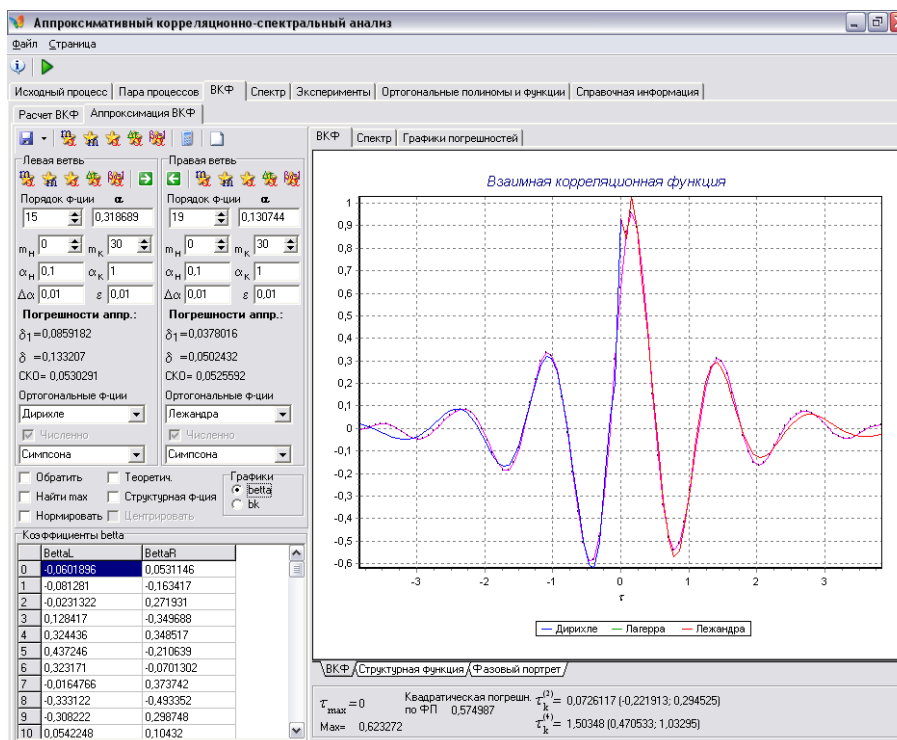


Рисунок 5.56 – Аппроксимация ВКФ

Для аппроксимации необходимо выбрать (для правой и левой ветвей отдельно) метод численного интегрирования (Симпсона, трапеций, правых прямоугольников, левых прямоугольников), ортогональный базис (Дирихле, Лагерра, Лежандра), задать

порядок аппроксимирующего выражения и значение параметра α и нажать кнопку  («Аппроксимировать»).

Кнопка  () переносит значения параметров левой (правой) ветви в значения параметров правой (левой) ветви. Эти кнопки имеет смысл применять, когда левая и правая ветви симметричны и аппроксимации ветвей предполагается использовать одни и те же значения параметров (в том числе ортогональный базис и метод интегрирования). Тогда можно задать (найти оптимальные) значения только для одной ветви и автоматически перенести их в значения для другой ветви.

Для нахождения параметров аппроксимации, удовлетворяющих минимуму квадратической погрешности аппроксимации, предусмотрены различные варианты поиска:

 («Вычислить оптимальные значения порядка и параметра масштаба») – необходимо задать диапазон порядка функции (m_n и m_k), в котором будет производиться поиск, и нажать на кнопку эту для левой и правой ветвей по отдельности (нижние кнопки) или вместе (верхняя кнопка). При этом виде поиска оптимальных значений параметров для каждого значения порядка вычисляется значение параметра масштаба в зависимости от порядка и интервала дискретизации, для полученной таким образом пары значений вычисляется погрешность аппроксимации. Путем перебора всех таких пар в заданном диапазоне порядка выбирается пара с наименьшим значением погрешности аппроксимации. Найденные значения рекомендуются в качестве оптимальных.

 («Вычислить оптимальные значения порядка при фиксированном значении параметра масштаба») – необходимо задать диапазон порядка функции (m_n и m_k), в котором будет производиться поиск, и значение параметра масштаба (α). Для каждого значения порядка из заданного диапазона будет вычислена погрешность аппроксимации. Значение порядка, соответствующее наименьшей погрешности аппроксимации, будет рекомендовано в качестве оптимального.

 («Вычислить оптимальные значения параметра масштаба при фиксированном значении порядка») – необходимо задать диапазон параметра масштаба (α_n и α_k), в котором будет производиться поиск, значение шага $\Delta\alpha$, с которым будут перебираться значения параметра масштаба, и значение порядка функции, для которого необходимо найти оптимальное значение параметра масштаба. Для каждого значения параметра масштаба (с заданным шагом) из указанного диапазона будет вычислена погрешность аппроксимации. Значение параметра масштаба, соответствующее наименьшей погрешности аппроксимации, будет рекомендовано в качестве оптимального.

 («Вычислить оптимальное значение параметра масштаба в зависимости от интервала дискретизации ВКФ») – если требуется найти оптимальное значение параметра масштаба для указанного порядка аппроксимирующей функции в зависимости от интервала дискретизации КФ.

 («Вычислить значение параметра масштаба, при котором $\beta_0 = K_x(0)$ ($\beta_0 = 1$ для нормированной КФ)») – необходимо задать начальное приближения параметра масштаба и погрешность ε приближения β_0 к значению КФ в нуле. Поиск осуществляется методом итераций. Если значение параметра масштаба не удастся найти за ограниченное число шагов или в результате получается отрицательное число, пользователю рекомендуется задать другое начальное приближение параметра масштаба.

При нажатии на кнопки , ,  строятся графики погрешностей (рис. 5.57), а оптимизация осуществляется в зависимости от того, в каком положении находится «переключатель» «Графики»: beta или bk.

Коэффициенты bk – это коэффициенты аппроксимирующего выражения, пересчитанные через beta с учетом основного свойства ВКФ. Как видно из рис. 5.58 коэффициенты bk обеспечивают «склеивание» левой и правой ветвей аппроксимирующей функции.

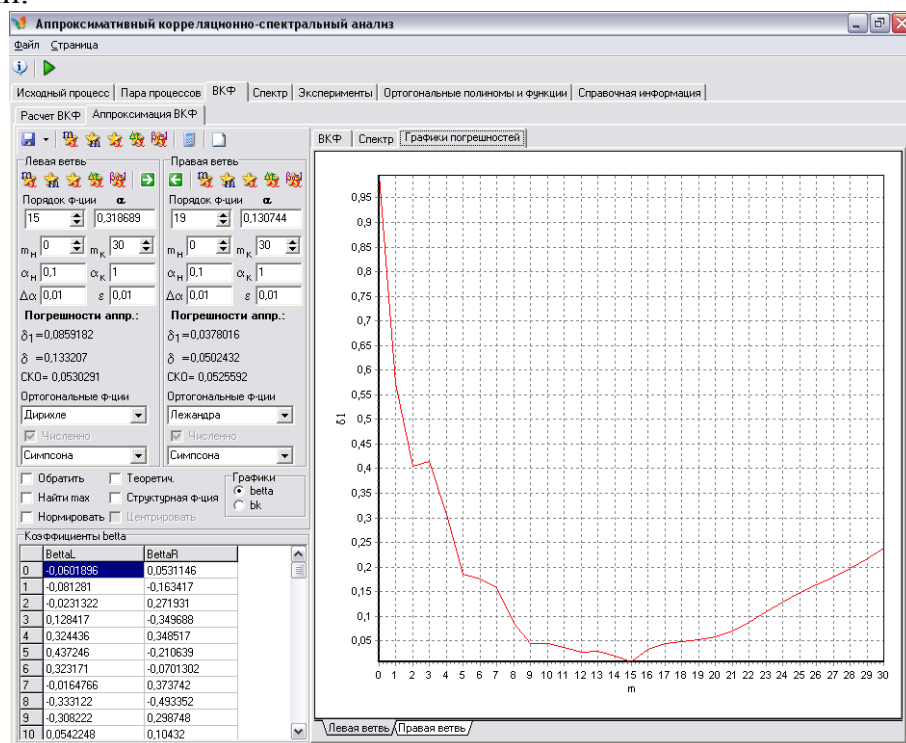


Рисунок 5.57 – График квадратической погрешности аппроксимации

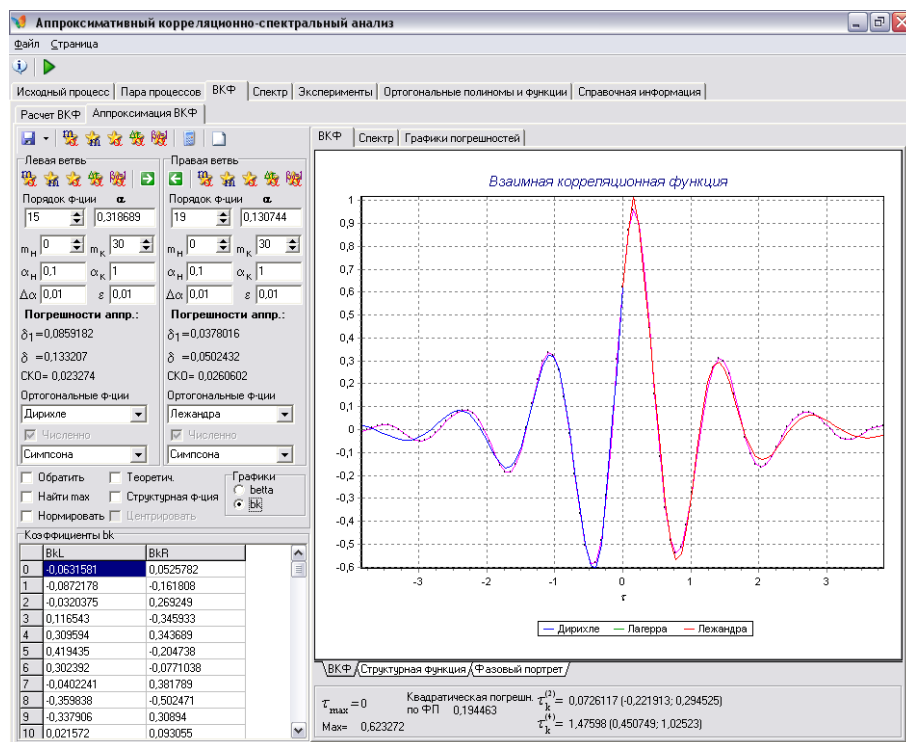


Рисунок 5.58 – Аппроксимация ВКФ с применением пересчитанных коэффициентов разложения

Если ВКФ имеет смещенный относительно задержки максимум, то для получения лучших результатов необходимо установить флажок «Найти max». В этом случае левая и правая ветви будут пересчитаны и аппроксимированы относительно максимального значения ВКФ (рис. 5.59).

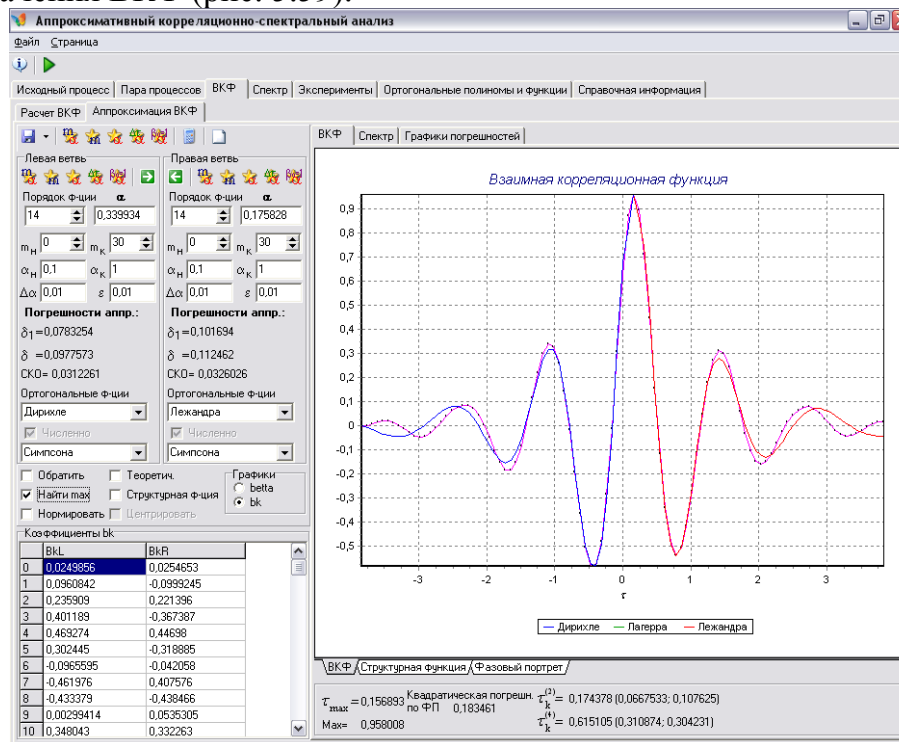


Рисунок 5.59– Аппроксимация ВКФ с поиском максимума

Если функция имеет ярко выраженный минимум, то для получения лучших результатов необходимо установить флажок «Обратить». В этом случае левая и правая ветви будут пересчитаны и аппроксимированы относительно минимального значения ВКФ, а затем результаты аппроксимации будут скорректированы.

Если значения ВКФ близки к 0, то для получения коэффициентов разложения с меньшей погрешностью надо поставить флажок «Нормировать». При этом значения ВКФ будут разделены на значение максимума, затем по нормированной ВКФ будут найдены коэффициенты beta, а для получения аналитического выражения необходимо дописать множитель, равный максимуму ненормированной ВКФ.

При аппроксимации рассчитываются значение и смещение по оси абсцисс максимума ВКФ, интервалы корреляции $\tau_k^{(2)}$ и $\tau_k^{(4)}$ для правой и левой ветвей в отдельности (указаны в скобках через точку с запятой) и сумма, фазовый портрет и квадратическая погрешность по фазовому портрету (рис. 5.60).

Если исходным процессом является «белый шум» и выбраны фильтры с известным видом КФ, можно найти коэффициенты разложения, используя теоретические значения ВКФ. Для этого надо установить флажок «Теоретич.» Если при этом были выбраны одинаковые фильтры с одинаковыми параметрами, то можно построить аппроксимирующую функцию, используя аналитические выражения для коэффициентов разложения. Для этого надо отключить флажок «Численно» для каждой ветви отдельно. На рис. 5.61 представлен пример: коэффициенты разложения вычисляются по теоретическим значениям ВКФ для правой ветви и по аналитическим формулам для левой ветви. Это бывает полезно для сравнения теории и практики.

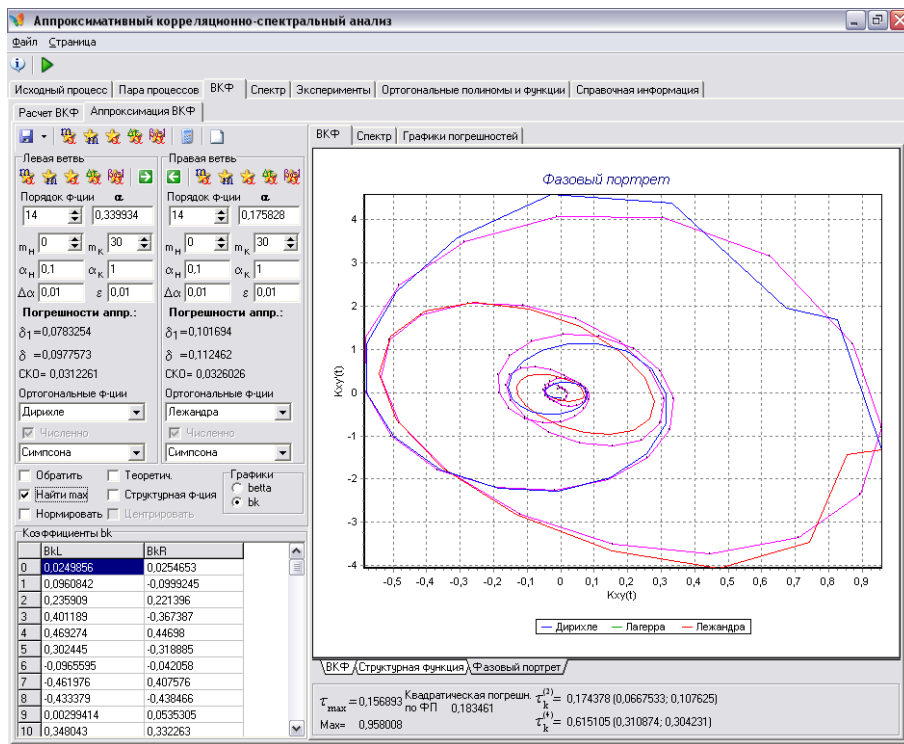


Рисунок 5.60 – Фазовые портреты исходной ВКФ и ортогональной модели ВКФ

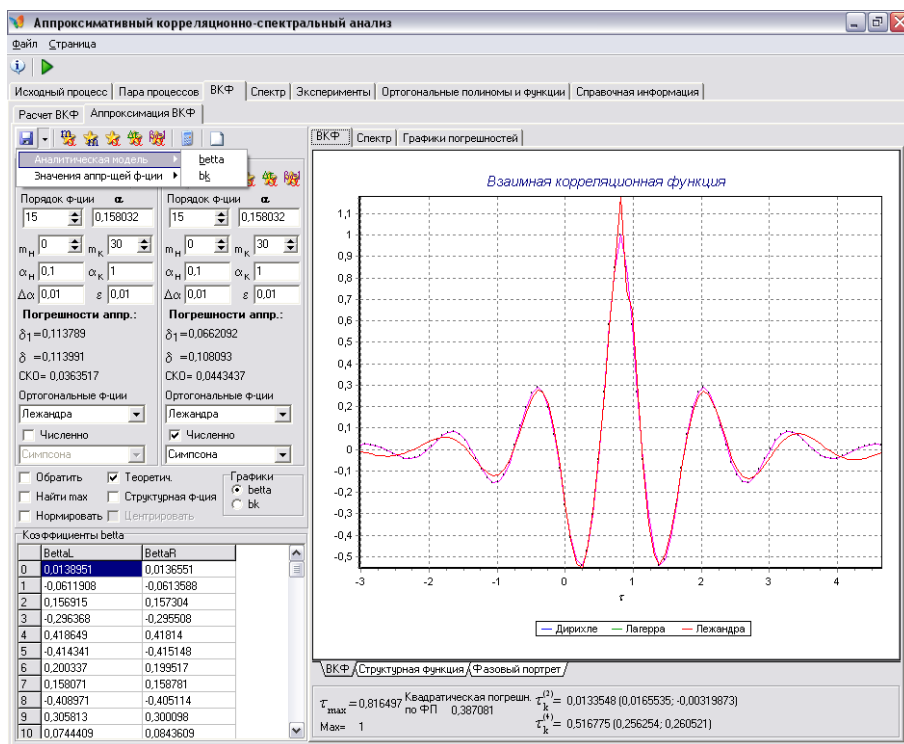


Рисунок 5.61 – Аппроксимация КФ с использованием аналитических формул вычисления коэффициентов разложения (для левой ветви)

Если флажок «Теоретич.» недоступен, возможно, теоретическая ВКФ не рассчитана на странице «ВКФ». Если флажок «Численно» недоступен, то в программе для данной функции коэффициенты разложения можно найти, только используя численное интегрирование.

Результаты аппроксимации выводятся на экран в виде графиков и таблиц значений полученных коэффициентов аппроксимирующего выражения. Возможно со-

хранение в файл аналитической модели ВКФ или значений аппроксимирующей функции.

Определение взаимной спектральной плотности мощности

Чтобы вычислить взаимный спектр по параметрам аппроксимирующего ВКФ выражения необходимо перейти к закладке «Спектр» на странице «Аппроксимация ВКФ», задать шаг и интервал и нажать кнопку  («Построить спектр»). После этого можно просматривать интересные графики, выбирая соответствующие закладки внизу графика. На закладке «Все» можно отобразить одновременно все графики СПМ, отметив соответствующие галочки. При построении спектра рассчитываются некоторые его характеристики для модуля и вещественной части спектральной плотности мощности: значение и смещение по оси абсцисс максимума, значение эквивалентной ширины пропускания. Установив флажок «Отображать $\Delta\omega_3$ », можно увидеть эти значения на графиках. На рис. 5.62 показан расчет спектра для аппроксимации ВКФ.

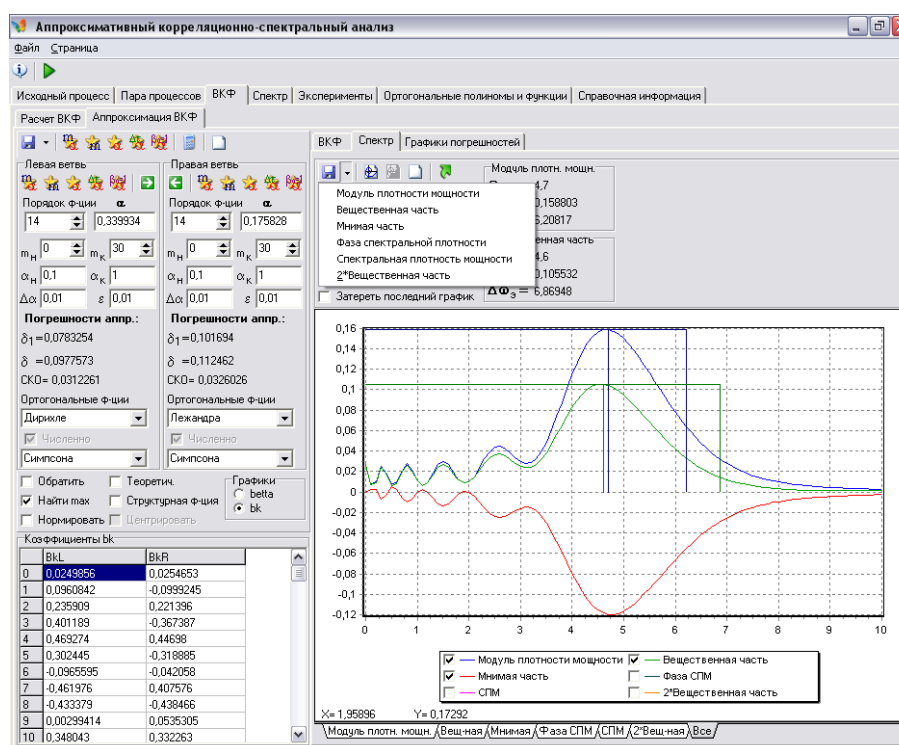


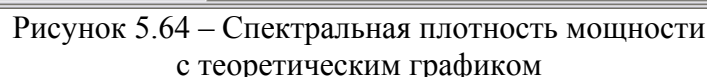
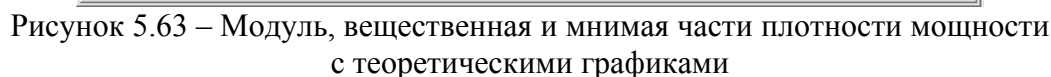
Рисунок 5.62– Вещественная, мнимая части и модуль плотности мощности

Если флажок «Затереть последний график» не установлен, то при нажатии на кнопку  («Построить спектр») новые графики спектра будут добавляться к построенным ранее, в противном случае, новый график будет построен «на месте» предыдущего, кроме закладки «Все» – на ней новые графики всегда затирают предыдущие.

Возможно сохранение в файл всех построенных графиков спектра (см рис. 5.63).

Взаимный спектр вычисляется как при одинаковых ортогональных базисах аппроксимации ВКФ, так и при их различных сочетаниях (см. рис. 5.64).

При аппроксимации симметричных относительно максимума ВКФ, полученных на основании типовых корреляционных функций, можно построить теоретический спектр, нажав на кнопку  («Добавить теоретический спектр»). При этом будут рассчитаны теоретические значения описанных выше характеристик спектра (рис. 5.63).



При нажатии на кнопку  («Сгенерировать СП, пересчитать и аппроксимировать ВКФ, оценить спектр») происходят следующие действия: генерируется «белый шум», создается пара процессов с указанными на странице «Пара процессов» пара-

метрами, рассчитываются соответствующие характеристики этих процессов, рассчитывается их ВКФ реальная и теоретическая, находятся оптимальные значения параметра масштаба и порядка аппроксимирующей функции, производится аппроксимация ВКФ, вычисляется взаимный спектр по параметрам аппроксимирующего ВКФ выражения, т.е. можно представить нажатие на эту кнопку как последовательность нажатий на кнопки:  («Сгенерировать процесс и рассчитать его характеристики») →  («Построить КФ») для левой ветви →  («Построить КФ») для правой ветви →  («Добавить теоретические графики») для левой ветви →  («Добавить теоретические графики») для правой ветви →  («Построить ВКФ») →  («Добавить теоретические графики») →  («Вычислить оптимальные значения порядка и параметра масштаба») →  («Аппроксимировать») →  («Построить спектр»).

Расчет спектра

На странице «Спектр» на закладке «Расчет спектра» (рис. 5.65) можно построить спектр, соответствующий заданному виду КФ. На верхней панели нужно указать интервал дискретизации и интервал спектра, параметры КФ, задать задержку (точку максимума соответствующей КФ в единицах времени).

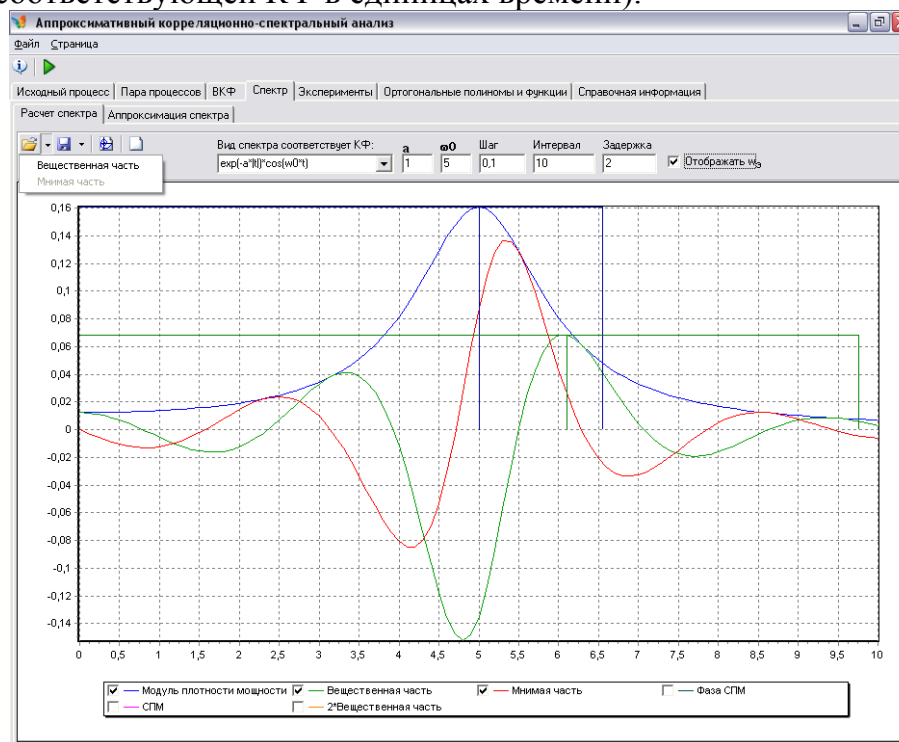


Рисунок 5.65 – Расчет спектра

Можно прочитать спектр из файлов, последовательно открыв сначала вещественную, затем мнимую части. Если не открыть из файла мнимую часть, она считается тождественно равной нулю. Спектр может быть передан на данную страницу из подсистемы аппроксимации ВКФ.

Далее можно переходить к аппроксимации спектра.

Аппроксимации спектральной плотности мощности ортогональными функциями

Аппроксимация спектра ортогональными рядами производится на закладке «Аппроксимация спектра». Аппроксимацию спектра следует проводить аналогично

аппроксимации левой и правой ветвей ВКФ, только здесь надо аппроксимировать вещественную (рис. 5.66) и мнимую части (рис. 5.67) спектра, а по ним можно построить остальные графики.

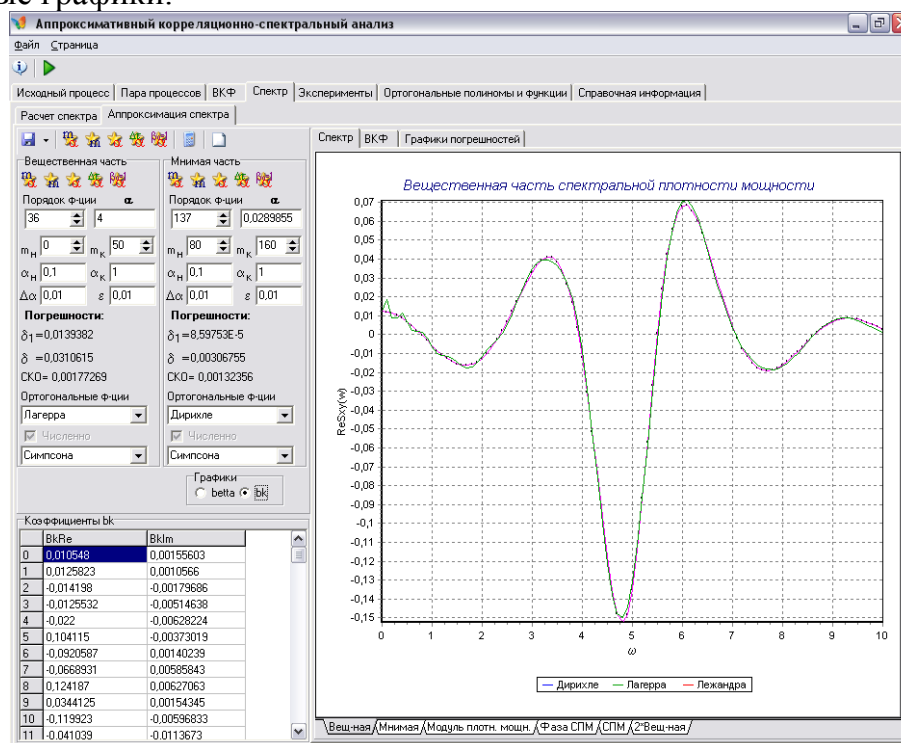


Рисунок 5.66 – Аппроксимация вещественной части спектра

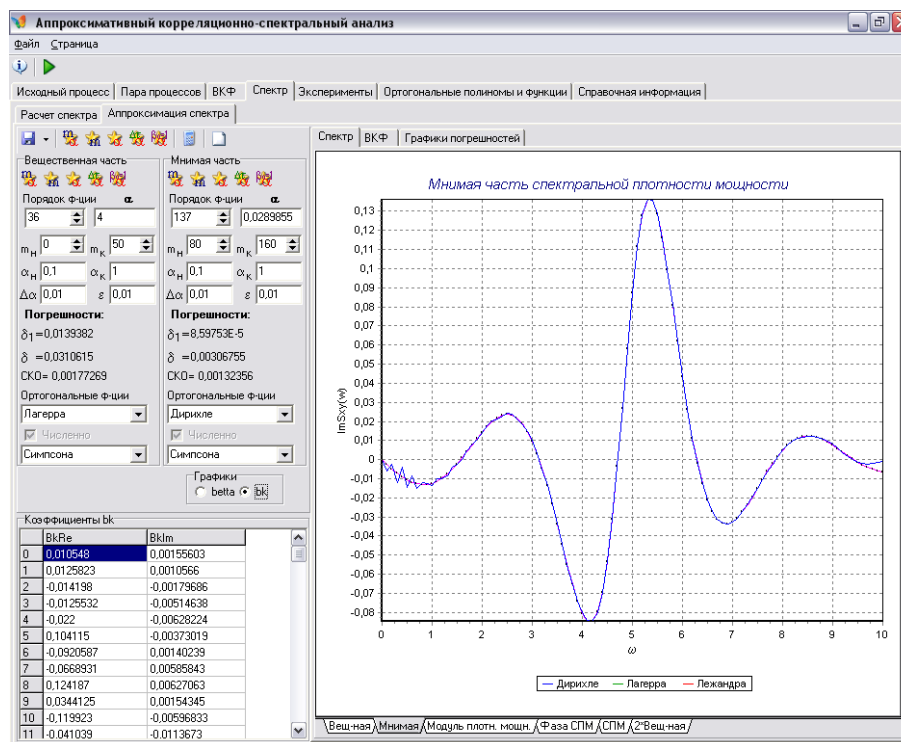


Рисунок 5.67 – Аппроксимация мнимой части спектра

Для аппроксимации необходимо выбрать (для вещественной и мнимой частей отдельно) метод численного интегрирования (Симпсона, трапеций, правых прямоугольников, левых прямоугольников), ортогональный базис (Дирихле, Лагерра, Лежандра), задать порядок аппроксимирующего выражения и значение параметра масштаба α и нажать кнопку («Аппроксимировать спектр») (см. рис. 5.68).

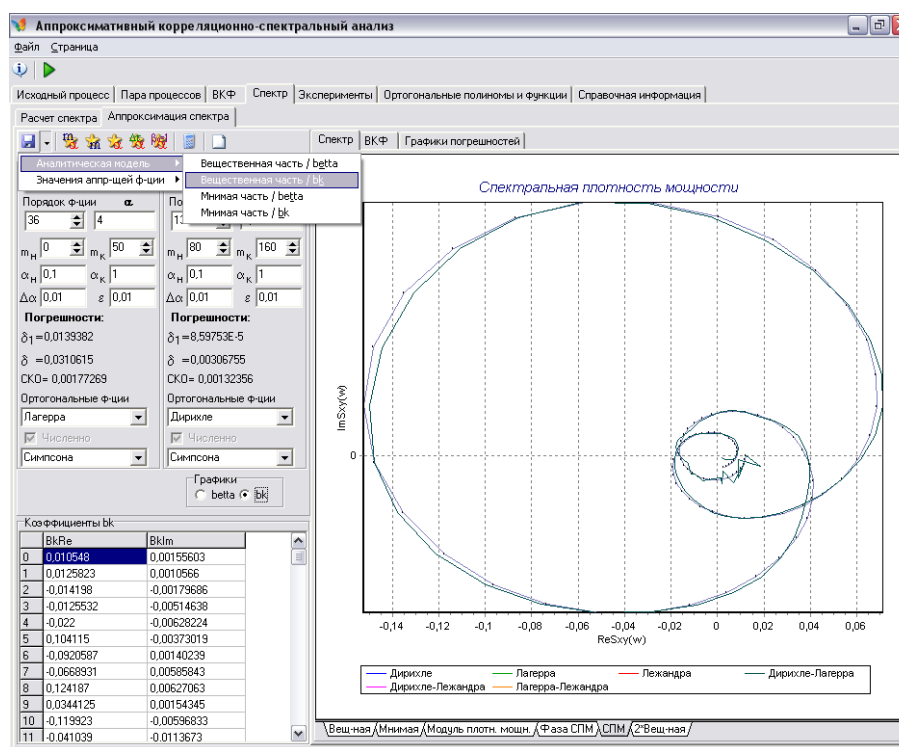


Рисунок 5.68 - Построение спектральной плотности мощности по аппроксимации вещественной и мнимой частей

Кнопки  – аналогичны по своему действию таким же кнопкам со страницы «Аппроксимация ВКФ».

Результаты аппроксимации выводятся на экран в виде графиков и таблиц значений полученных коэффициентов аппроксимирующего выражения и могут быть сохранены в файл посредством выбора соответствующего пункта выпадающего меню кнопки .

Определение взаимной корреляционной функции

На закладке «Аппроксимация спектра» на закладке «ВКФ» можно вычислить ВКФ по параметрам аппроксимирующего спектр выражения (рис. 5.69). Для этого необходимо задать шаг и интересующий интервал в единицах времени и нажать кнопку  («Построить график ВКФ»). При этом будет найдено значение и смещение по оси абсцисс максимума ВКФ.

При аппроксимации типовых видов спектра, можно построить теоретическую ВКФ (рис. 5.70).

Возможно сохранение отсчетов полученной ВКФ в файл, при этом учитывается положение переключателя «Графики».

При нажатии на кнопку  («Передать ВКФ в подсистему расчета ВКФ для дальнейшей аппроксимации») полученная ВКФ будет передана на страницы расчета и аппроксимации ВКФ.

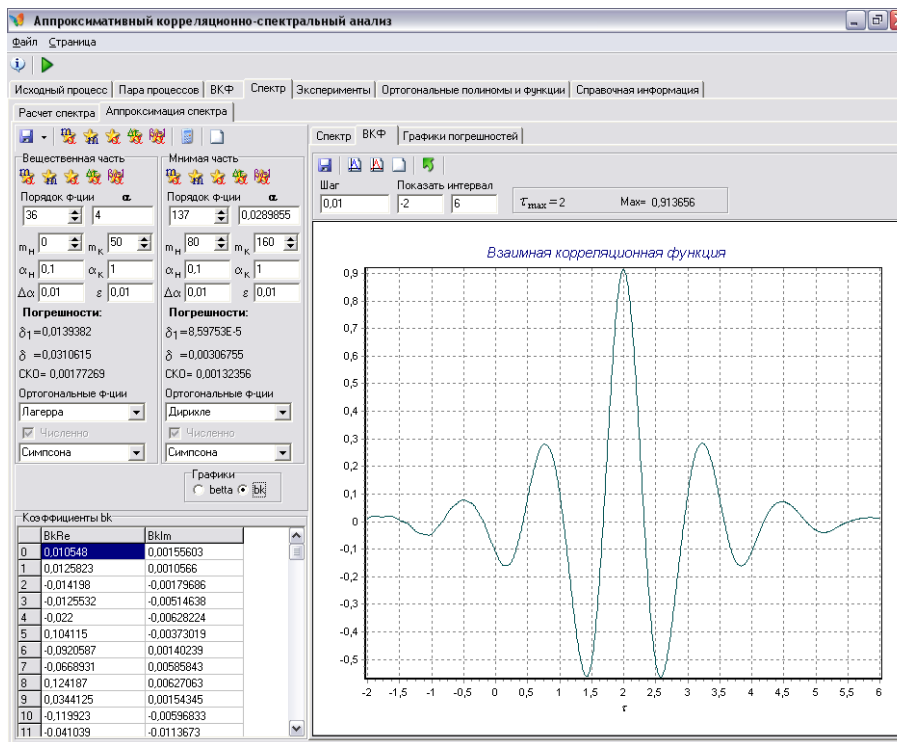


Рисунок 5.69 – Определение взаимной КФ по результатам аппроксимации спектра

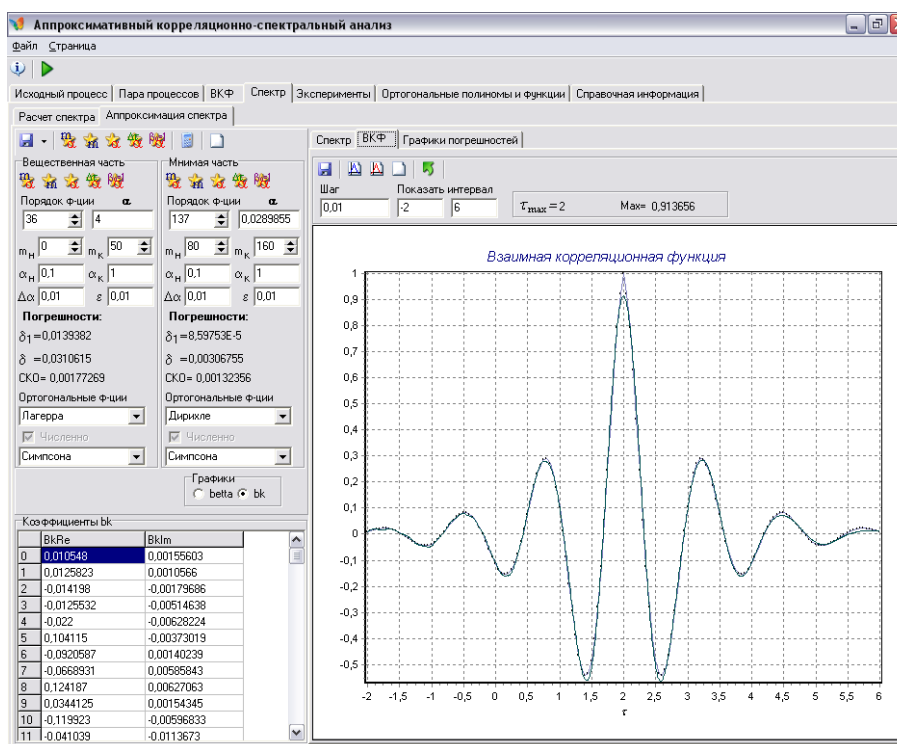


Рисунок 5.70 – Построение теоретической ВКФ

Эксперименты

Страница «Эксперименты» предназначена для автоматизации процесса проведения экспериментов по моделированию и аппроксимации автокорреляционных функций с целью оценки возникающих погрешностей [151].

Моделирование

Целью экспериментов по моделированию является построение зависимости максимума модуля погрешности от объема выборки.

По одному нажатию кнопки  («Добавить графики») происходят следующие действия:

- 1 max:=0;
- 2 Повторяем столько раз, сколько задано число экспериментов:
 - 2.1 С заданным объемом выборки генерируем «белый шум»;
 - 2.2 Методом рекурсивной фильтрации получаем СП с заданным видом КФ;
 - 2.3 Рассчитываем КФ и ее фазовый портрет, добавляем их графики;
 - 2.4 Сравниваем смоделированную КФ с теоретической посредством вычисления среднеквадратической погрешности по фазовому портрету. Добавляем соответствующую точку в график «Погрешность от № эксперимента». Если полученная погрешность больше максимума, то она становится максимумом.
- 3 Добавляем точку с координатами (объем выборки; максимум погрешности) в график зависимости максимума погрешности от объема выборки.

На рис. 5.71 и 5.72 показаны примеры графиков КФ и фазовых портретов, получаемые в результате нажатия кнопки  («Добавить графики») при объеме выборки равном 10000.

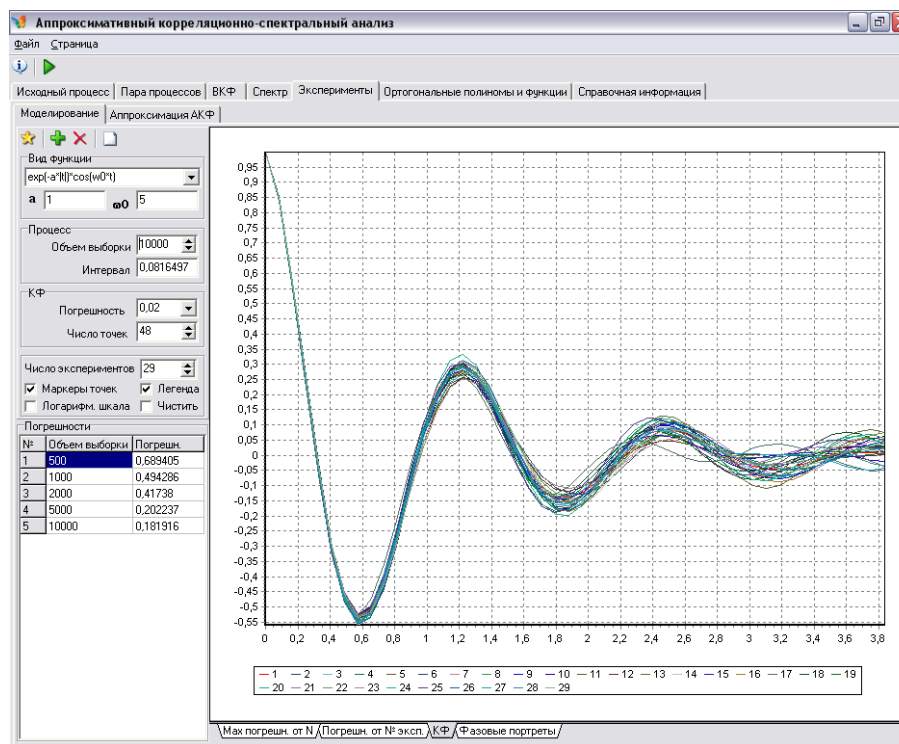


Рисунок 5.71 – Графики КФ

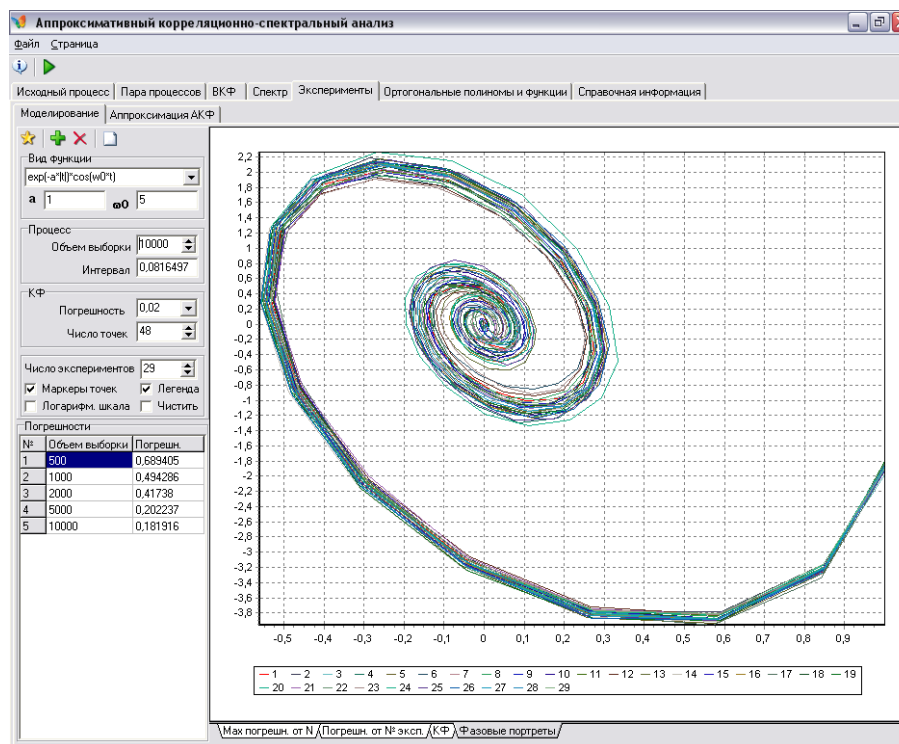


Рисунок 5.72 – Графики фазовых портретов

На рисунке 5.71 одна линия соответствует одному нажатию кнопки («Добавить графики»).

В связи с этим последовательность действий может быть следующей:

- 1 Выбираем вид КФ;
- 2 Задаем значение погрешности приближения КФ;
- 3 Задаем значения параметров a , ω_0 ;
- 4 Вычисляем оптимальные значения интервала дискретизации и числа точек, нажав кнопку («Оптимальные значения параметров»);
- 5 Задаем число экспериментов, как правило, оно равно 29;
- 6 Задаем объем выборки;
- 7 Нажимаем кнопку («Добавить графики»);
- 8 Повторяем п. 5-6 для всех интересующих объемов выборки. Получаем график зависимости максимума модуля погрешности от объема выборки.
- 9 Повторяем п. 3-8 для различных значений параметров a , ω_0 ;
- 10 Повторяем п. 1-9 для всех предусмотренных программой видов КФ;
- 11 Делаем соответствующие выводы.

На рисунках 5.73-5.74 показаны результаты повторения п. 5-6 для объемов выборки 500, 1000, 2000, 5000, 10000.

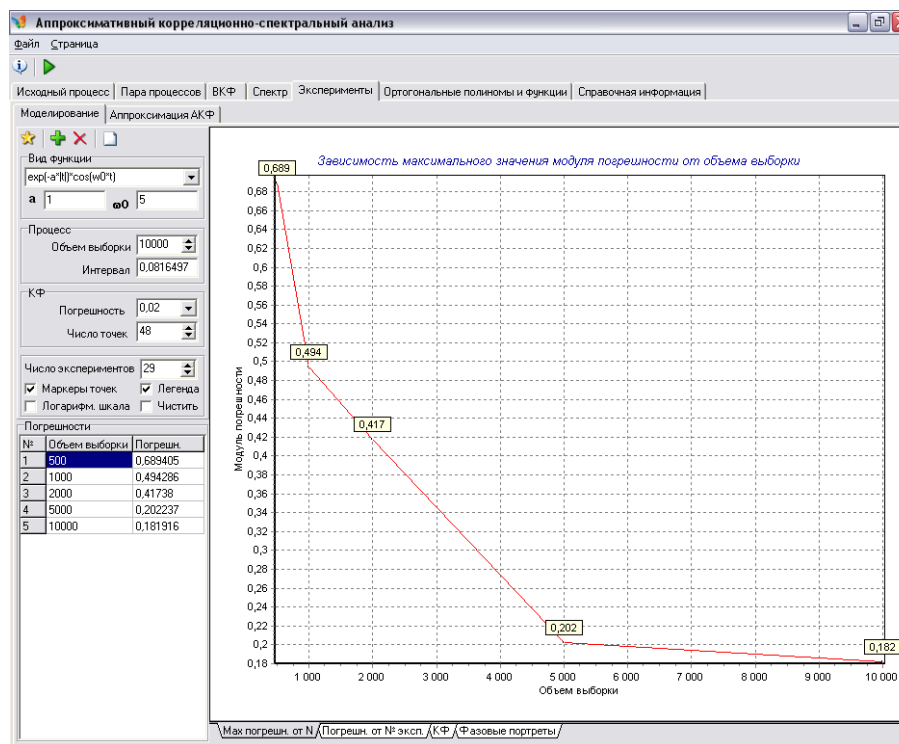


Рисунок 5.73– График зависимости максимума модуля погрешности от объема выборки

Флажок «Маркеры точек» отвечает за подписи значений ординат точек на первом графике (рис. 5.73).

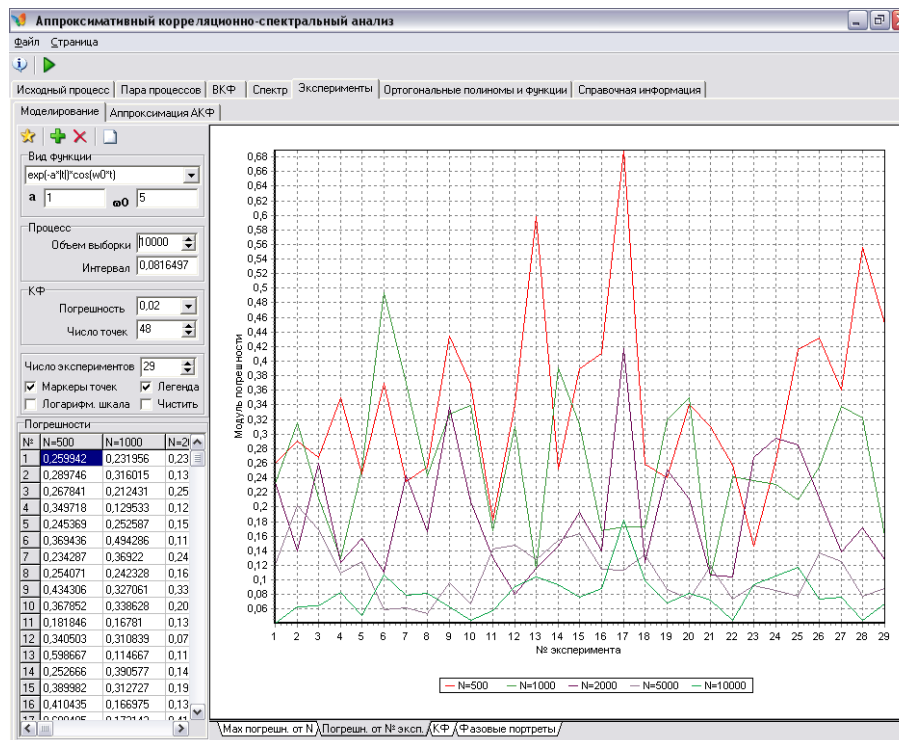


Рисунок 5.74 – Графики зависимости модуля погрешности от № эксперимента при разных объемах выборки

Здесь и далее при нажатии на кнопку  («Удалить последний график») будет удалена последняя добавленная линия, соответствующая одной серии экспериментов.

В данном случае будет удалена линия зависимости модуля погрешности от № эксперимента (рис. 5.74).

Флажок «Логарифм. шкала» отвечает за шкалу абсцисс на первом графике (рис. 5.74). Его следует включать, когда минимальное и максимальное значения по этой шкале отличаются более, чем в 1000 раз и/или на усмотрение пользователя.

Флажок «Легенда» отвечает отображение легенды на графиках (рис. 5.74).

Аппроксимация АКФ

Целями экспериментов по аппроксимации являются: сравнение оптимального значения параметра, найденного по формуле, со значением, найденным исходя из минимума квадратической погрешности аппроксимации, построение зависимости максимума погрешности вычисления и СКО коэффициентов разложения от номера при разных объемах выборки, а также сравнение максимума погрешности вычисления и СКО коэффициентов разложения от номера при аппроксимации разными ортогональными функциями.

Флажок «Теоретическая» отвечает за источник отсчетов КФ: если он установлен, то будут использоваться теоретические значения КФ, найденные по формуле, в противном случае – КФ будет смоделирована.

Смысл перечисленных ниже кнопок такой же, как и на других страницах:

★ («Определить оптимальные шаг и число точек») – определить оптимальные шаг и число точек КФ с заданной погрешностью приближения;

🔧 («Вычислить оптимальные значения порядка и параметра масштаба») – вычислить оптимальные значения порядка и параметра масштаба исходя из минимума квадратической погрешности аппроксимации;

🔧 («Вычислить оптимальное значение параметра масштаба») – вычислить оптимальное значение параметра масштаба при заданном порядке аппроксимирующей функции.

На рис. 5.75 показан пример построения графиков зависимостей погрешностей аппроксимации от параметра масштаба α .

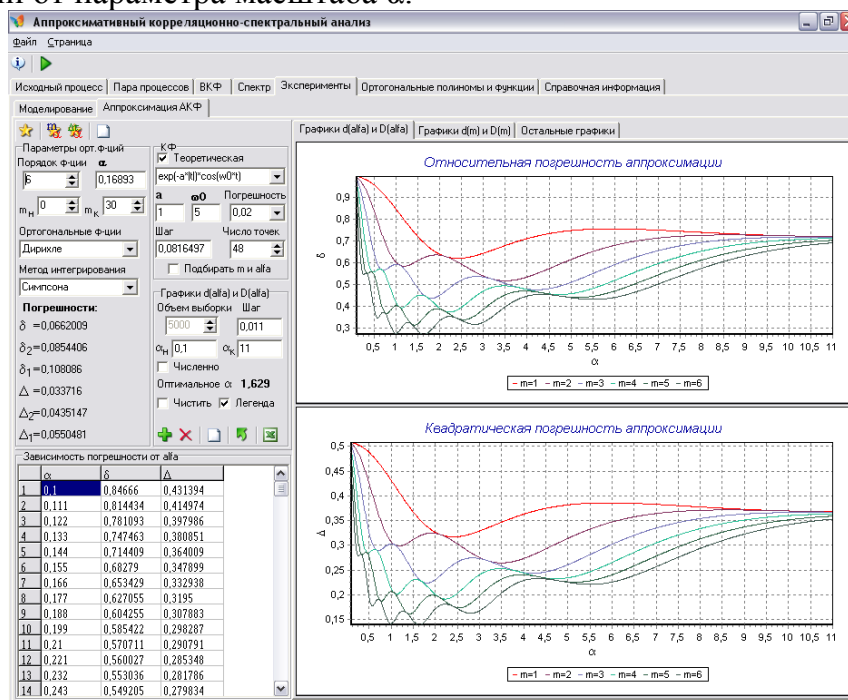


Рисунок 5.75 – Зависимости относительной (сверху) и абсолютной (снизу) погрешностей аппроксимации от параметра масштаба α

По одному нажатию кнопки  («Добавить графики») происходят следующие действия:

- 1 Вычисляем значения выбранной АКФ с заданными параметрами;
- 2 Задаем в параметрах орт. ф-ций порядок функции, ортогональный базис и метод интегрирования;
- 3 Задаем начальное α_n , конечное α_k значения α и шаг $\Delta\alpha$;
- 4 Вычисляем коэффициенты разложения и квадратическую погрешность аппроксимации при $\alpha = \alpha_n$, берем это значение в качестве $\min$, а $\alpha_{\min} = \alpha$;
- 5 $\alpha = \alpha + \Delta\alpha$
- 5.1 Если $\alpha \leq \alpha_k$, то вычисляем коэффициенты разложения и квадратическую погрешность аппроксимации при α , добавляем соответствующую точку в график «Погрешность от α », иначе п. 6;
- 5.2 Если полученное значение меньше минимума, оно становится новым минимумом, а $\alpha_{\min} = \alpha$;
- 5.3 $\alpha = \alpha + \Delta\alpha$, п. 5.1;
- 6 Нашли значение $\alpha_{\min}$, удовлетворяющее минимуму квадратической погрешности аппроксимации.

На рис. 5.75 показан пример графика, получаемого в результате нажатия кнопки  («Добавить графики») при теоретической КФ и вычислении коэффициентов разложения по аналитическим формулам.

По нажатию кнопки  («Перенести оптимальное значение alfa в параметры аппроксимации») найденное значение $\alpha_{\min}$ автоматически заносится в значение параметра масштаба и может быть использовано далее.

На рис. 5.75 показан пример графика, получаемого в результате нажатия кнопки  («Добавить графики») при теоретической КФ.

Здесь и далее при нажатии на кнопку  («Сохранить в Excel») создается новый файл приложения Microsoft Excel и результаты соответствующего эксперимента (серии экспериментов) экспортируются в него. Пример такого экспорта данных для рис. 5.75 представлен на рис. 5.76.

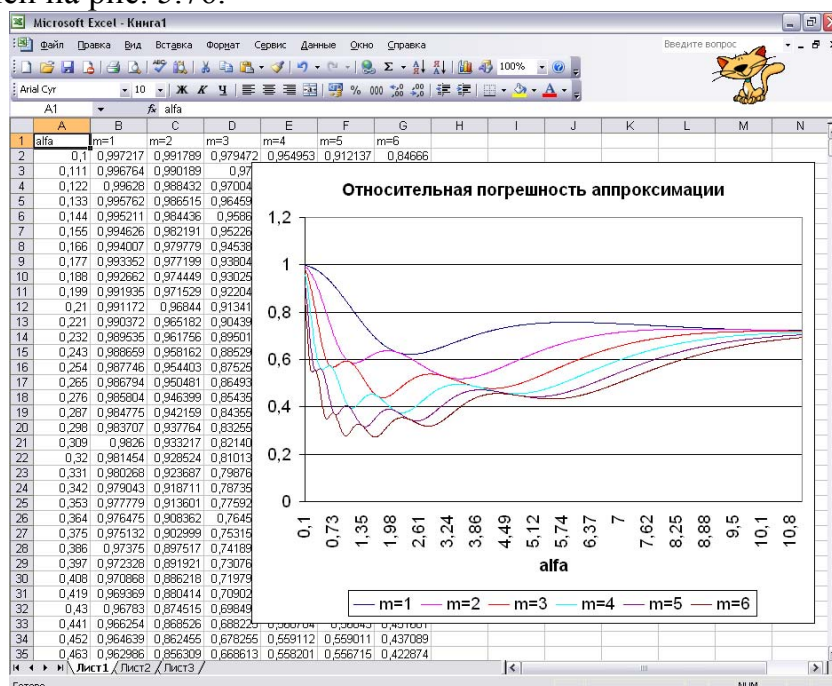


Рисунок 5.76 – Пример экспорта данных в Excel

По одному нажатию кнопки  («Добавить графики») (рис. 5.77) происходят следующие действия:

- 1 Вычисляем значения выбранной АКФ с заданными параметрами;
- 2 Задаем в «параметрах орт. ф-ций» порядок функции, ортогональный базис, способ вычисления коэффициентов разложения (аналитически или численно) и метод интегрирования;
- 3 Задаем начальное m_n , конечное m_k значения m , шаг автоматически присваивается равным 1;
- 4 Вычисляем коэффициенты разложения и квадратическую погрешность аппроксимации при $m = m_n$, берем это значение в качестве $\min$, а $m_{\min} = m$;
- 5 $m = m + 1$;
- 5.1 Если $m \leq m_k$, то вычисляем коэффициенты разложения и квадратическую погрешность аппроксимации при m , добавляем соответствующую точку в график «Погрешность от m », иначе п. 6;
- 5.2 Если полученное значение меньше минимума, оно становится новым минимумом, а $m_{\min} = m$;
- 5.3 $m = m + \Delta m$, п. 5.1;
- 6 Нашли значение $m_{\min}$, удовлетворяющее минимуму квадратической погрешности аппроксимации.

По нажатию кнопки  («Перенести оптимальное значение m в параметры аппроксимации») найденное значение $m_{\min}$ автоматически заносится в значение порядка m и может быть использовано далее.

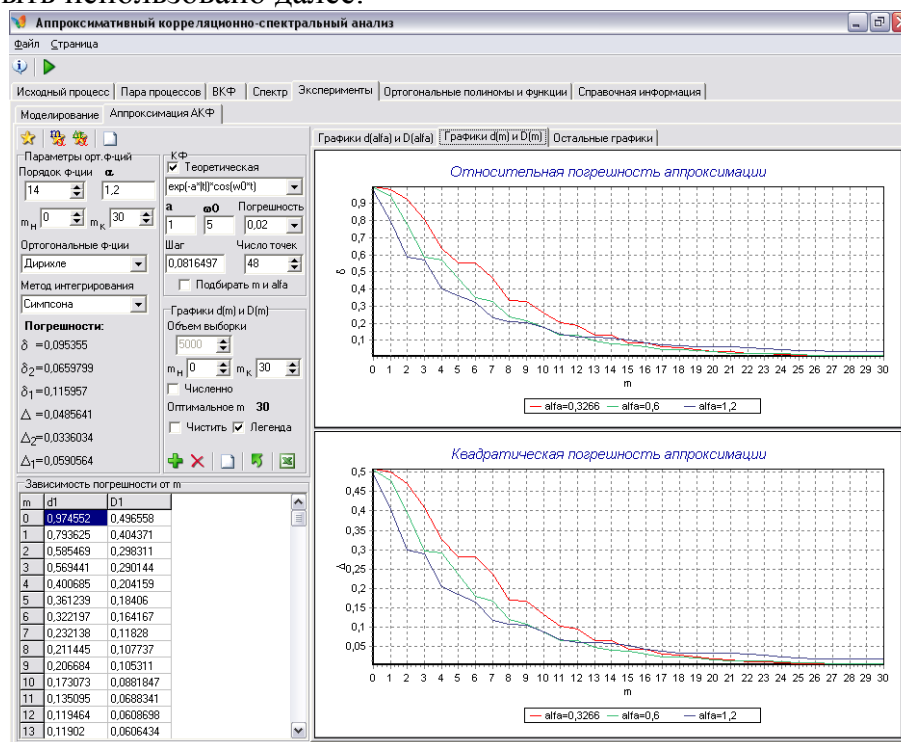


Рисунок 5.77 – Зависимости относительной (сверху) и абсолютной (снизу) погрешностей аппроксимации от порядка m

По одному нажатию кнопки  («Добавить графики») (рис. 5.78) происходят следующие действия:

- 1 Повторяем столько раз, сколько задано число экспериментов:
- 1.1 Рассчитываем КФ (по формуле или моделированием);

- 1.2 Аппроксимируем КФ с заданными параметрами;
- 1.3 Вычисляем модуль разности полученных коэффициентов разложения и соответствующих теоретических;
- 1.4 Вычисляем погрешности и СКО оценок интервалов корреляции ϵ_k^p и ϵ_k^d [151];
- 1.5 Вычисляем погрешности аппроксимации;
- 1.6 Находим оценку спектра по параметрам ортогональной модели КФ, вычисляем эквивалентную ширину спектра и погрешность, с которой она найдена (первым способом – через дисперсию КФ и Максимум спектральной плотности мощности);
- 1.7 Аппроксимируем оценку спектра с разбиением на левую и правую ветви, находим оценку ϵ_k^2 для правой ветви, вычисляем эквивалентную ширину спектра (второй способ – по аппроксимации и длительности правой ветви спектральной плотности мощности) и погрешность, с которой она найдена;
- 2 По каждому коэффициенту выбираем максимальное значение модуля разности – получаем зависимость погрешности вычисления коэффициентов от номера коэффициента;
- 3 По каждому коэффициенту вычисляем СКО – получаем зависимость СКО вычисления коэффициентов от номера коэффициента;
- 4 По каждому значению эквивалентной ширины спектра (значениям, найденным первым и вторым способом) выбираем максимальную погрешность – получаем значение погрешности при заданном объеме выборки;
- 5 Выбираем максимальную погрешность оценки для каждого интервала корреляции – получаем значение погрешности оценки интервалов корреляции при заданном объеме выборки;
- 6 По каждому интервалу корреляции вычисляем СКО – получаем значение СКО оценок интервалов корреляции при заданном объеме выборки;
- 7 Выбираем максимальные погрешности аппроксимации из всех экспериментов – получаем значения погрешностей аппроксимации при заданном объеме выборки.

В связи с этим последовательность действий может быть следующей:

- 1 Выбираем вид КФ;
- 2 Задаем значение погрешности приближения КФ;
- 3 Задаем значения параметров a , ω_0 ;
- 4 Задаем значения интервала дискретизации и числа точек (нажав кнопку ★ («Оптимальные значения параметров») или в ручном режиме);
- 5 Задаем значения параметров аппроксимации;
- 6 Задаем число экспериментов, как правило, оно равно 29;
- 7 Задаем объем выборки (если не выбрана теоретическая КФ);
- 8 Нажимаем кнопку + («Добавить графики»).

Повторяя п. 6-7 для всех интересующих объемов выборки, получаем графики зависимости максимума модуля погрешности от номера коэффициента при разных объемах выборки. На рис. 5.78 показаны результаты повторения п. 6-7 для объемов выборки 500, 1000, 2000, 5000, 10000. На рис. 5.79 – 5.81 показаны получаемые при этом зависимости для погрешностей от объема выборки для разных ортогональных базисов.

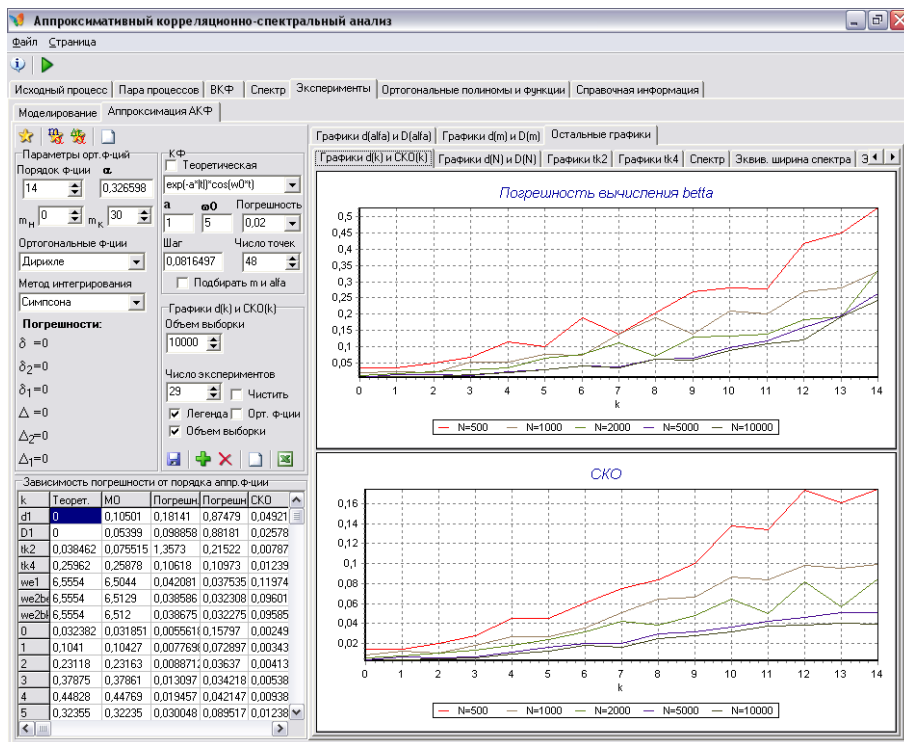


Рисунок 5.78 – Графики зависимости погрешности вычисления и СКО коэффициентов разложения при разных объемах выборки

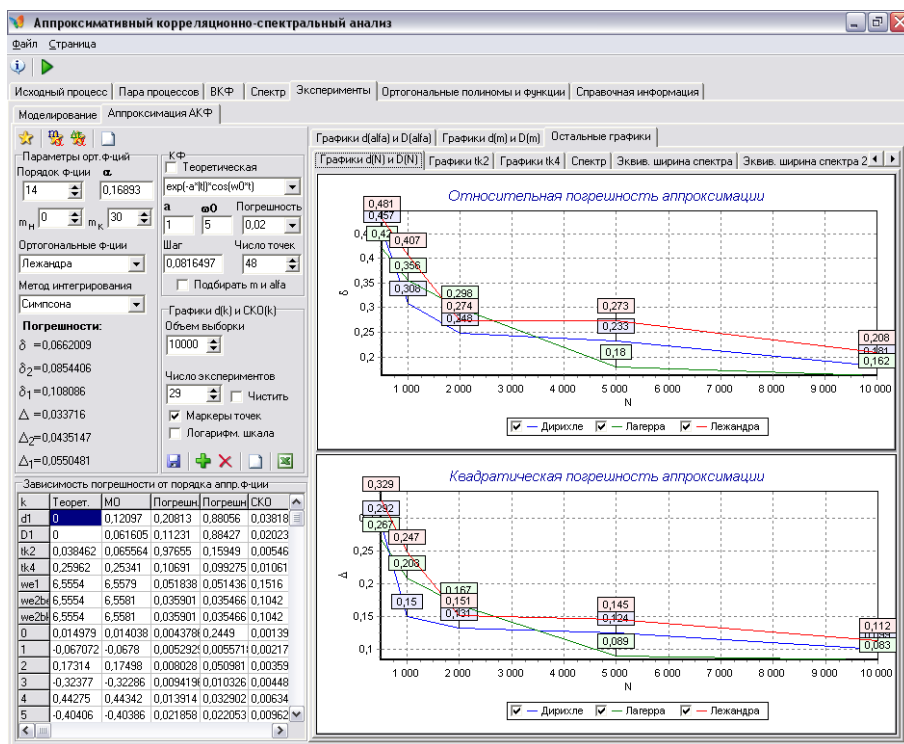


Рисунок 5.79– Графики зависимости погрешностей аппроксимации от объема выборки для разных базисов

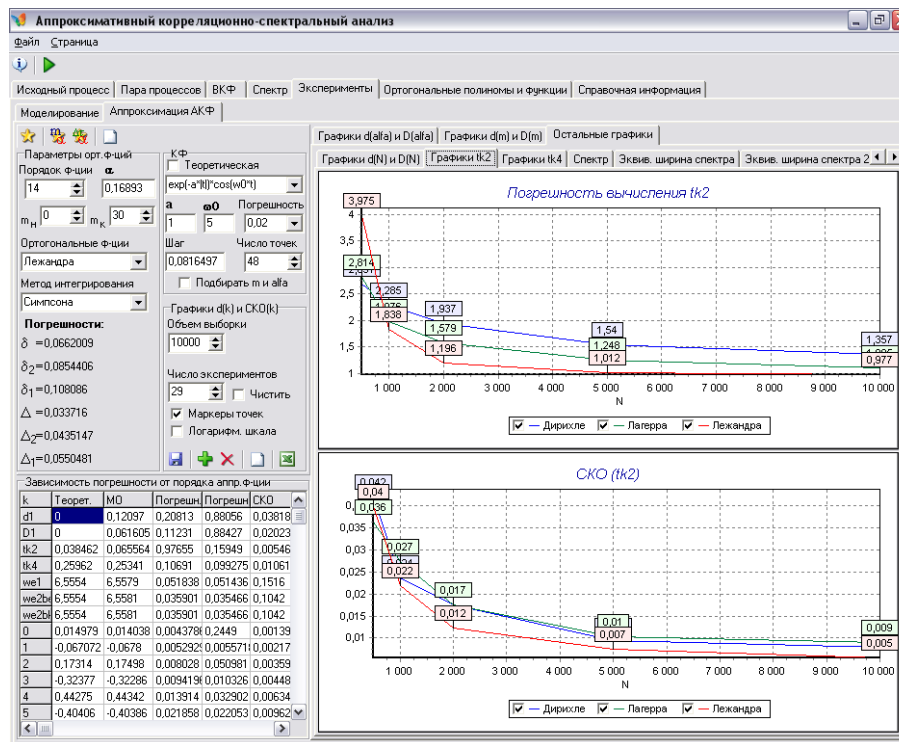


Рисунок 5.80 - Графики зависимости погрешности и СКО оценки интервала корреляции $\mathcal{E}_k^2$ от объема выборки для разных базисов

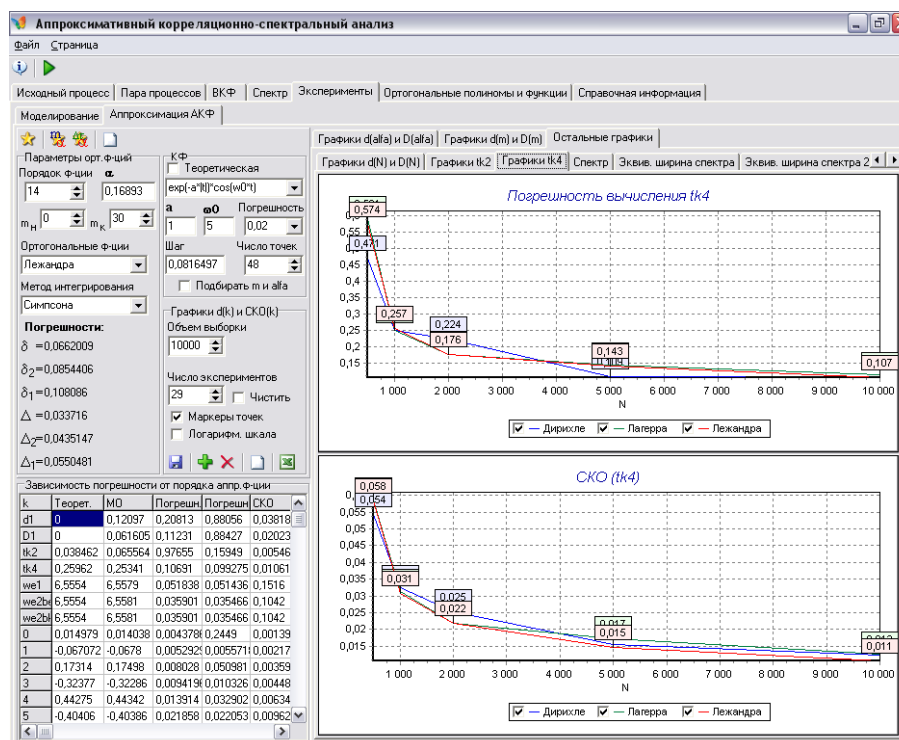


Рисунок 5.81 – Графики зависимости погрешности и СКО оценки интервала корреляции $\mathcal{E}_k^4$ от объема выборки для разных базисов

На рис. 5.82 – 5.83 показаны зависимости для погрешностей оценки эквивалентной ширины спектра от объема выборки для разных ортогональных базисов в результате повторения п. 6-7 для объемов выборки 500, 1000, 2000, 5000, 10000.

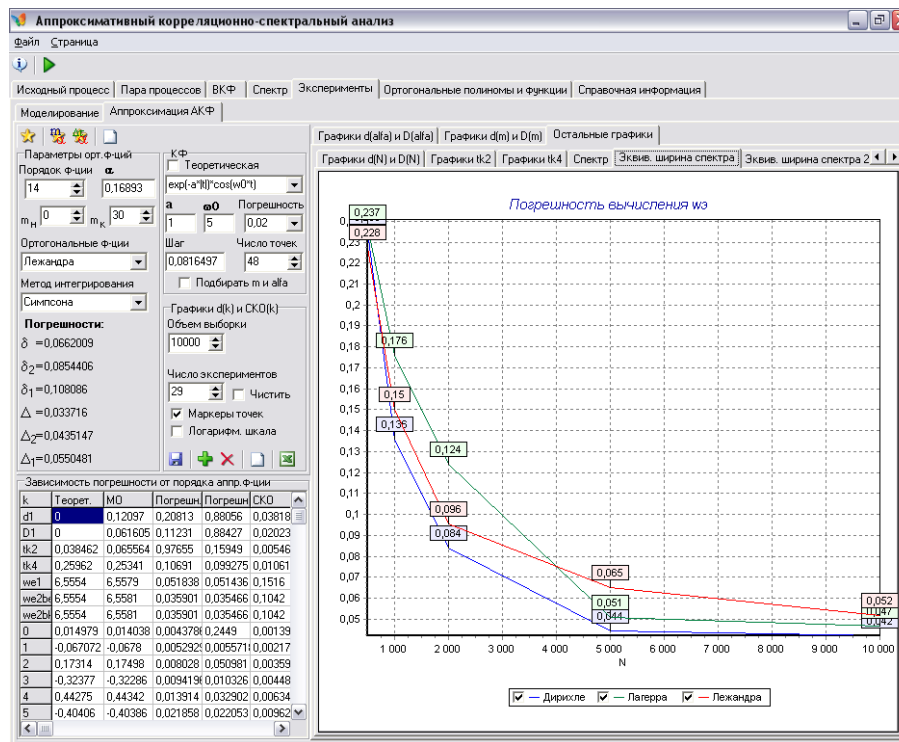


Рисунок 5.82 – Графики зависимости погрешностей оценки эквивалентной ширины спектра от объема выборки для разных базисов (первый способ)

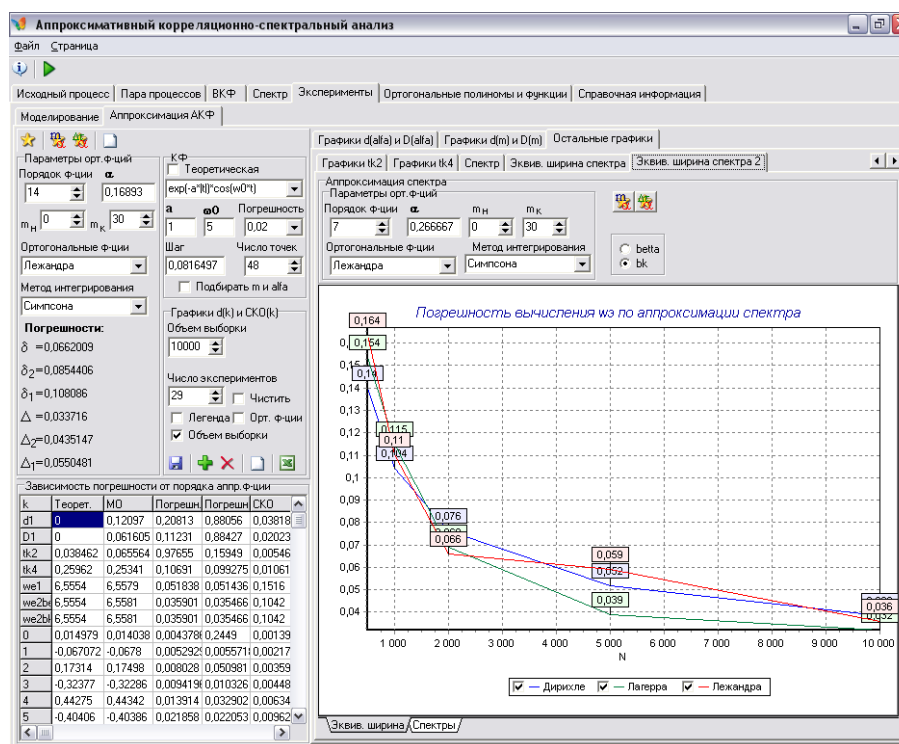


Рисунок 5.83 – Графики зависимости погрешностей оценки эквивалентной ширины спектра от объема выборки для разных базисов (второй способ)

Если менять только ортогональный базис и параметр масштаба α , то можно сравнивать графики погрешностей при разных базисах. Пример сравнения погрешностей вычисления коэффициентов разложения при аппроксимации разными ортогональными функциями приведен на рис. 5.84.

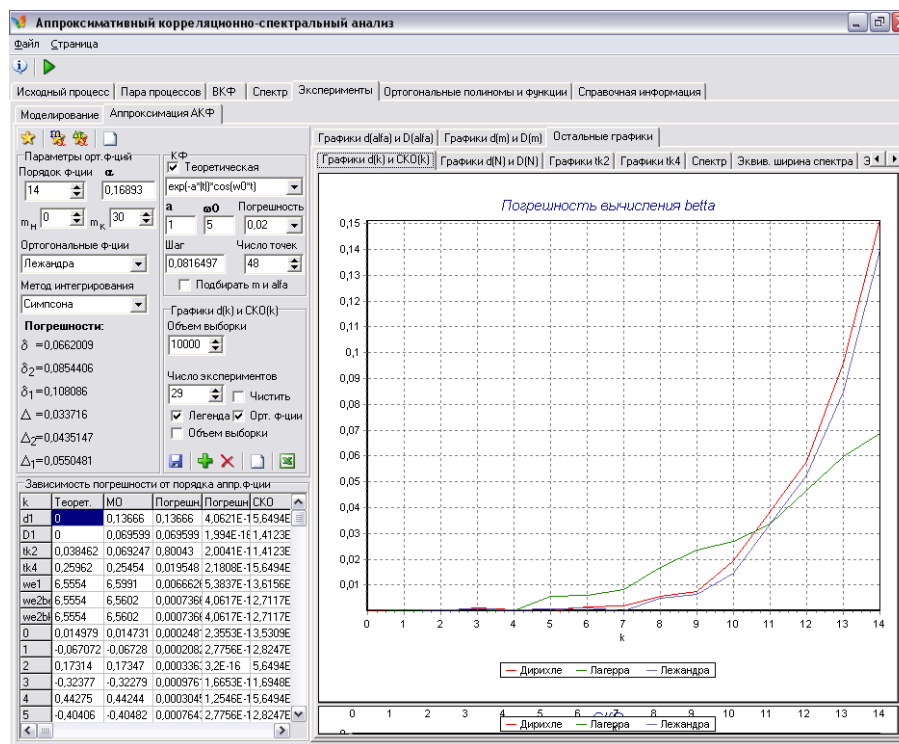


Рисунок 5.84 – Пример сравнения погрешностей вычисления коэффициентов разложения при аппроксимации разными ортогональными функциями

Результаты каждого нажатия кнопки  («Добавить графики») могут быть сохранены в текстовый файл или файл приложения Excel. Имя и место положения текстового файла определяется программой автоматически: в папке, в которой находится программа, создается папка с названием ортогональных функций, в ней создается папка с номером модели КФ (в примере на рис. 5.85 это папка Dirihle\M5\), имя файла «складывается» из следующих значений – «<номер модели КФ>-<объем выборки>-<x>.txt», где x – это значение параметра a для монотонных КФ или показатель колебательности для колебательных КФ. В таком случае при проведении экспериментов и необходимости сохранения результатов пользователю не приходится задумываться над именем каждого сохраняемого файла, что, несомненно, ускоряет его работу. Пример текстового файла результатов на рис. 5.86.

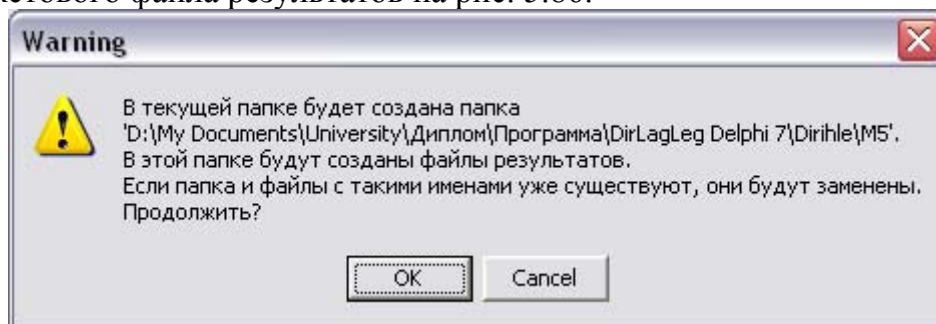


Рисунок 5.85 – Сохранение результатов экспериментов по аппроксимации АКФ в текстовом файле

M5-5000-5.txt - Notepad

№	d1	D1	tk2	tk4	we1	we2beta	we2bk	beta 0
1	0.11600954	0.05843555	0.07558656	0.25031234	6.53326890	6.57596882	6.57596882	0.03389765
2	0.10592108	0.05362847	0.07206612	0.25346964	6.60910158	6.62175188	6.62175188	0.03187877
3	0.13713695	0.07183735	0.07050654	0.26924415	6.52246798	6.55616778	6.55616778	0.02959704
4	0.09031413	0.04565797	0.07466901	0.25349229	6.48602885	6.40847890	6.40847890	0.03364979
5	0.06863830	0.03359596	0.07542085	0.24070350	6.55766656	6.61605392	6.61605392	0.03648274
6	0.24371904	0.13627296	0.09257463	0.29406674	6.21112941	6.15608089	6.15608089	0.03045506
7	0.16914030	0.08802578	0.08416973	0.26309944	6.63817613	6.63332793	6.63332793	0.03251551
8	0.05440556	0.02802967	0.06658636	0.26464405	6.36177933	6.34980087	6.34980087	0.02931344
9	0.07853353	0.03943716	0.06668666	0.25372967	6.44342690	6.42888718	6.42888718	0.03077036
10	0.16447597	0.08746358	0.07652049	0.27513073	6.23729122	6.25709187	6.25709187	0.02827507
11	0.05886246	0.02851680	0.06617637	0.23551948	6.53928691	6.61706823	6.61706823	0.03218160
12	0.15637722	0.08351694	0.08192830	0.27825951	6.40263166	6.38196729	6.38196729	0.02994365
13	0.14439447	0.07215319	0.06690763	0.24448897	6.77917479	6.70199499	6.70199499	0.03181885
14	0.14784045	0.07134815	0.08952972	0.22781447	6.79516859	6.74143530	6.74143530	0.03970515
15	0.11895799	0.06377489	0.06796023	0.28334958	6.29960716	6.30151649	6.30151649	0.02666606
16	0.12242894	0.06122108	0.08299373	0.24630598	6.64513242	6.66711457	6.66711457	0.03381606
17	0.09419843	0.05141326	0.06821576	0.29525150	6.11410324	6.13508460	6.13508460	0.02656550
18	0.12206471	0.05804294	0.07016110	0.26489418	6.51959948	6.49142807	6.49142807	0.03039655
19	0.14497818	0.07639607	0.07844596	0.27183857	6.47379048	6.48303225	6.48303225	0.03153547
20	0.21122337	0.11459735	0.08656608	0.28121824	6.53864785	6.50292626	6.50292626	0.02984224
21	0.09431812	0.05032108	0.06366415	0.28211680	6.31883386	6.41671539	6.41671539	0.02711362
22	0.15388673	0.07865054	0.06987421	0.25503084	6.81703797	6.74139068	6.74139068	0.03182919
23	0.14088995	0.07444844	0.06474614	0.27368043	6.47708745	6.51382154	6.51382154	0.02623452
24	0.12733515	0.06933707	0.07650729	0.29169894	6.38344791	6.43779103	6.43779103	0.02924542
25	0.13667306	0.06992288	0.06624012	0.25685241	6.59463669	6.62978032	6.62978032	0.02985702
26	0.13582490	0.06947351	0.08661503	0.25679867	6.41095094	6.35769070	6.35769070	0.03368672
27	0.11368001	0.05676600	0.07557466	0.24612703	6.61778526	6.59712533	6.59712533	0.03185163
28	0.04344519	0.02205915	0.07626870	0.25732020	6.43982147	6.45390084	6.45390084	0.03293379
29	0.09542361	0.04918207	0.08330081	0.26322627	6.36981127	6.35484440	6.35484440	0.03314195
Ideal	0.00000000	0.00000000	0.03846154	0.25961538	6.55539636	6.55539636	6.55539636	0.03238165
MX	0.12348612	0.06425951	0.07505045	0.26309257	6.48747904	6.48724960	6.48724960	0.03121381
Delta	0.24371904	0.13627296	1.40694037	0.13726505	0.06731754	0.06411691	0.06411691	0.00732350
Delta MX	0.97365541	1.12066596	0.23349873	0.13409008	0.05755330	0.05428572	0.05428572	0.27203800
CKO	0.04425562	0.02465364	0.00810688	0.01747878	0.16838640	0.16148127	0.16148127	0.00296587

Рисунок 5.86 – Текстовый файл результатов

Пример экспорта данных в Excel приведен на рис. 5.87.

Microsoft Excel - M5-10000-5-Лежандра.xls

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
2	d1	D1	tk2	tk4	we1	we2beta	we2bk	beta0	beta1	beta2	beta3	beta4	beta5	
3	1	0.120044	0.059626	0.067051	0.243154	6.571529	6.592258	6.592258	0.014207	-0.06617	0.177058	-0.33186	0.44058	-0.38744
4	2	0.091225	0.045587	0.06237	0.24764	6.562856	6.577765	6.577765	0.013833	-0.06743	0.177762	-0.33186	0.44058	-0.39517
5	3	0.126243	0.065997	0.062906	0.268944	6.40823	6.494496	6.494496	0.012332	-0.06615	0.173376	-0.31843	0.44188	-0.41816
6	4	0.094117	0.047764	0.065525	0.255273	6.382056	6.429643	6.429643	0.013766	-0.06972	0.179266	-0.32916	0.454689	-0.40449
7	5	0.072569	0.036518	0.067716	0.251896	6.516967	6.543087	6.543087	0.015336	-0.06731	0.171971	-0.32238	0.443997	-0.40581
8	6	0.094501	0.046997	0.069962	0.245118	6.548048	6.554289	6.554289	0.015351	-0.06773	0.172967	-0.32043	0.438332	-0.40419
9	7	0.056868	0.027889	0.056867	0.248421	6.405012	6.459904	6.459904	0.011797	-0.07055	0.181015	-0.3197	0.441912	-0.40478
10	8	0.110662	0.056343	0.061878	0.256057	6.589255	6.556519	6.556519	0.013382	-0.06885	0.176041	-0.32254	0.446113	-0.40182
11	9	0.17396	0.091109	0.063901	0.265999	6.412565	6.407407	6.407407	0.011944	-0.06959	0.181163	-0.32586	0.450609	-0.40686
12	10	0.208133	0.112311	0.060728	0.278568	6.591803	6.56071	6.56071	0.012354	-0.06223	0.170979	-0.32294	0.446586	-0.42592
13	11	0.117899	0.060441	0.076021	0.259197	6.464571	6.530871	6.530871	0.01591	-0.06773	0.1706	-0.32114	0.44505	-0.40614
14	12	0.116856	0.060342	0.070368	0.263005	6.331903	6.39515	6.39515	0.014059	-0.06715	0.177898	-0.33319	0.453734	-0.40467
15	13	0.153988	0.078857	0.063656	0.256027	6.725042	6.671471	6.671471	0.014316	-0.06512	0.170762	-0.32241	0.444727	-0.41038
16	14	0.125216	0.064134	0.070125	0.258226	6.479545	6.506427	6.506427	0.01485	-0.06698	0.172581	-0.32487	0.450979	-0.41101
17	15	0.136936	0.068593	0.065029	0.246208	6.647023	6.577854	6.577854	0.013656	-0.06829	0.177673	-0.32479	0.440301	-0.39503
18	16	0.124104	0.061341	0.061358	0.240537	6.798529	6.694678	6.694678	0.014344	-0.06936	0.174406	-0.31763	0.435653	-0.39282
19	17	0.1597	0.082338	0.065725	0.259046	6.579565	6.564246	6.564246	0.013577	-0.06561	0.171424	-0.32072	0.447342	-0.41519
20	18	0.128181	0.065228	0.075371	0.2547	6.492264	6.542863	6.542863	0.016733	-0.06585	0.166059	-0.31846	0.442874	-0.41194
21	19	0.112136	0.056366	0.062615	0.249482	6.645896	6.624239	6.624239	0.013339	-0.06411	0.172311	-0.32493	0.443359	-0.40411
22	20	0.185653	0.092889	0.06539	0.241709	6.811605	6.718136	6.718136	0.015954	-0.06875	0.177683	-0.32588	0.428835	-0.3868
23	21	0.114287	0.055394	0.062896	0.231861	6.895215	6.790739	6.790739	0.015854	-0.06946	0.175026	-0.32082	0.431759	-0.38772
24	22	0.014448	0.00713	0.055435	0.243579	6.582859	6.595974	6.595974	0.013037	-0.06982	0.175441	-0.31774	0.448526	-0.40918
25	23	0.165481	0.084699	0.070821	0.254802	6.468096	6.50368	6.50368	0.013725	-0.07236	0.180284	-0.31788	0.4368	-0.40109
26	24	0.130306	0.0641	0.062154	0.237876	6.863	6.752303	6.752303	0.015527	-0.06954	0.176208	-0.32576	0.441272	-0.38906
27	25	0.130929	0.067426	0.07462	0.260663	6.425613	6.404284	6.404284	0.014859	-0.07087	0.177432	-0.32495	0.447948	-0.39962
28	26	0.108432	0.053663	0.060945	0.242045	6.696064	6.694295	6.694295	0.013866	-0.06696	0.174982	-0.31997	0.43159	-0.39732
29	27	0.122842	0.063636	0.070566	0.264307	6.427034	6.476686	6.476686	0.014089	-0.06577	0.172375	-0.32372	0.44559	-0.41125
30	28	0.101772	0.052925	0.058006	0.267632	6.395252	6.460654	6.460654	0.0106	-0.06899	0.177677	-0.31515	0.442725	-0.41308
31	29	0.111546	0.056897	0.072351	0.256937	6.461731	6.506588	6.506588	0.014504	-0.06776	0.171985	-0.31894	0.443613	-0.40904
32	Теор	0	0	0.038462	0.259615	6.555396	6.555396	6.555396	0.014979	-0.06707	0.173135	-0.32377	0.442749	-0.40406
33	MX	0.120966	0.061605	0.065564	0.253411	6.557901	6.558149	6.558149	0.014038	-0.0678	0.174979	-0.32286	0.443425	-0.40386
34	Delta	0.208133	0.112311	0.076547	0.106908	0.051838	0.035901	0.035901	0.004379	0.005293	0.008028	0.00942	0.013914	0.021858
35	DeltaMX	0.880565	0.884267	0.159493	0.099275	0.051436	0.035466	0.035466	0.244899	0.005572	0.060981	0.010326	0.032902	0.022053
36	CKO	0.038181	0.020239	0.005469	0.010617	0.151599	0.104204	0.104204	0.001397	0.002178	0.003597	0.004481	0.006346	0.009627

Рисунок 5.87 – Файл результатов MS Excel

Если установлен флажок «Чистить», то на графике (рис. 5.78) новая линия будет затирать все остальные, а не добавляться к уже построенным.

Флажок «Легенда» отвечает отображение легенды на графиках (рис. 5.78).

Флажок «Орт. ф-ции» отвечает за наличие в подписи линии названия ортогональных функций, которыми аппроксимировали АКФ (рис. 5.84). Его следует включать, когда на одном графике присутствуют зависимости погрешностей для разных ортогональных функций и/или на усмотрение пользователя.

Флажок «Объем выборки» отвечает за наличие в подписи линии объема выборки (рис. 5.77).

Его следует включать, когда на одном графике присутствуют зависимости погрешностей для разных объемов выборки и/или на усмотрение пользователя.

Построение графиков ортогональных полиномов и функций

Для построения ортогональных функций необходимо задать значения всех необходимых параметров и нажать кнопку  («Построить»). На экране появятся графики ортогональных полиномов или функций соответственно (рис. 5.88 – 5.89).

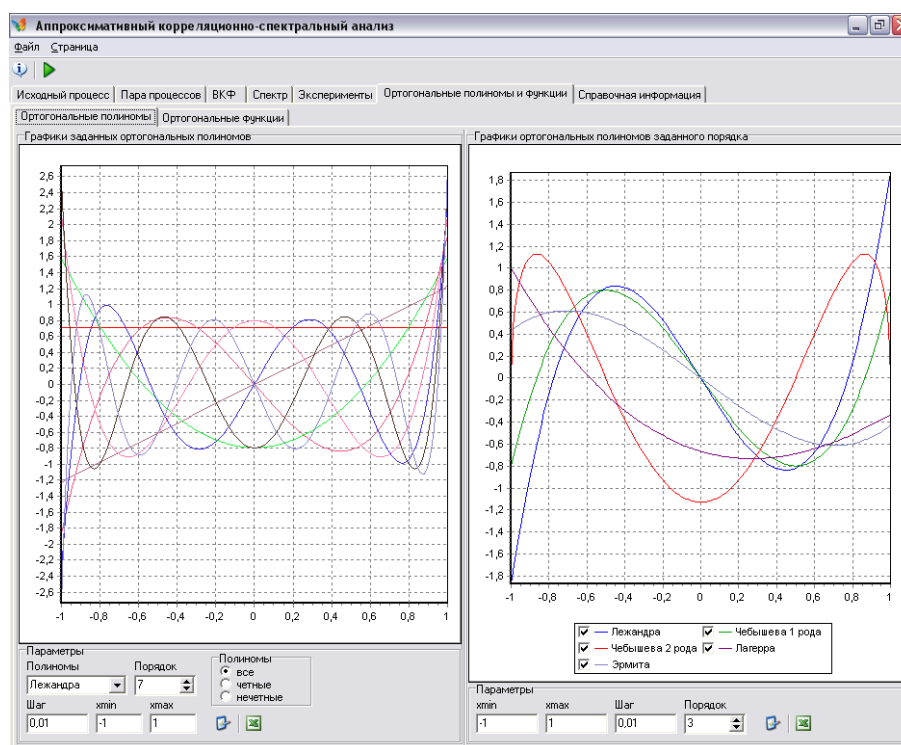


Рисунок 5.88 – Построение ортогональных полиномов

Для полиномов с конечным интервалом ортогональности (Лежандра, Чебышева 1 и 2 рода) заданный интервал $[x_{\min}, x_{\max}]$ преобразуется в интервал ортогональности полиномов. Для полиномов Лагерра точка $x_{\min}$ переносится в точку 0.

Для построения ортогональных функций необходимо задать значения всех необходимых параметров и нажать кнопку  («Построить») или на кнопку . На экране появятся графики ортогональных функций (рис. 5.89 – 5.90).

Если нажать на кнопку  («Определить оптимальные шаг и интервал»), то:

1. слева: будут вычислены оптимальные шаг дискретизации и интервал для каждого порядка (от 0 до указанного) ортогональных функций для заданного значения погрешности приближения (на рис. 5.89 показан пример для 0-7 порядков), в таблице в левом нижнем углу можно посмотреть соответствующие каждому порядку шаг дискретизации и интервал, а на графике – линии, построенные с найденными значениями;

2. справа: будут вычислены оптимальные шаг дискретизации и интервал при указанном порядке для каждой из ортогональных функций для заданного значения погрешности приближения, затем будет выбран наименьший из полученных шаг дискретизации и наибольший интервал, но каждый график будет построен с соответствующими оптимальными значениями.

Если после нажатия кнопки  нажать кнопку , то все линии будут построены с минимальным шагом дискретизации и с максимальным интервалом, выбранными из соответствующих значений (рис. 5.90).

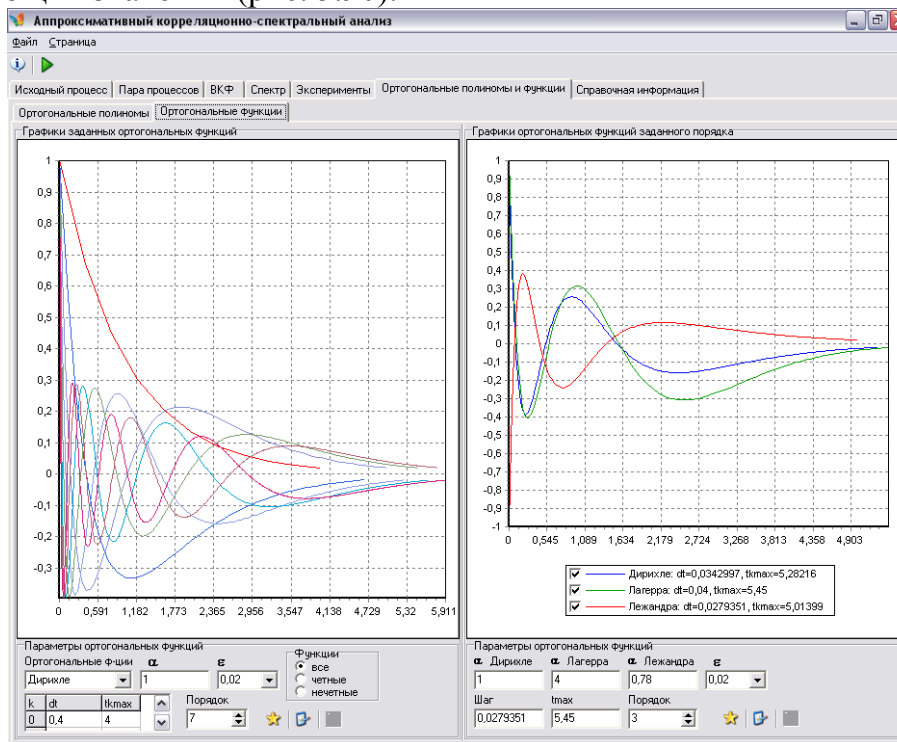


Рисунок 5.89– Построение ортогональных функций

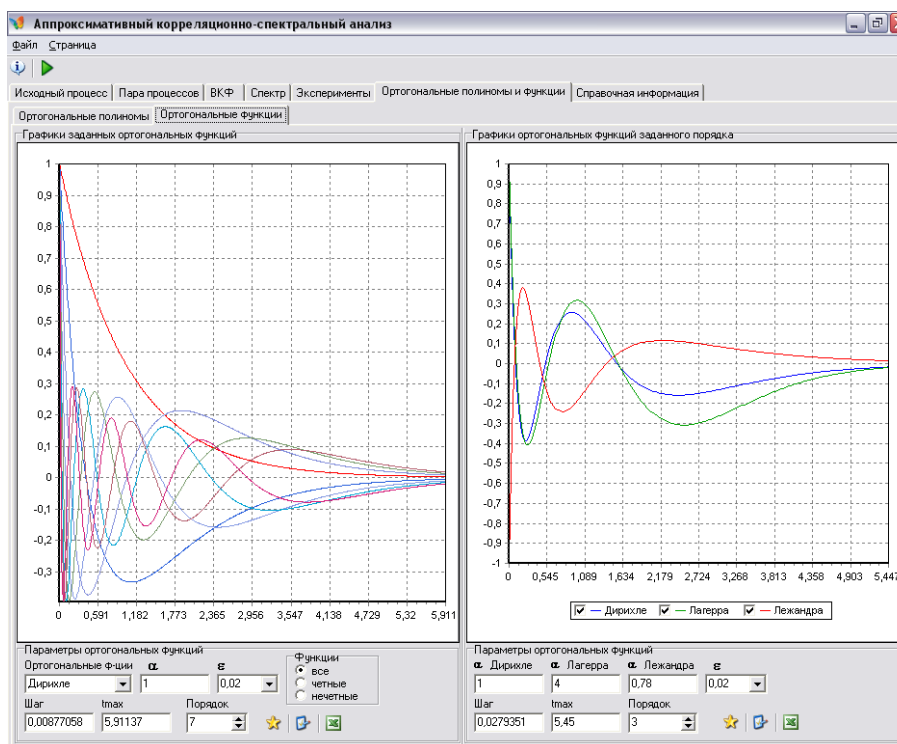


Рисунок 5.90– Построение ортогональных функций

5.6. Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах Якоби

Автоматизированная система организована посредством семантической сети, выполненной в виде закладок, на каждой из которых выполняется решение конкретной задачи [140-141].

Первая закладка предназначена для моделирования входного процесса и расчета его основных функциональных, вероятностных и числовых характеристик (рис. 5.91).

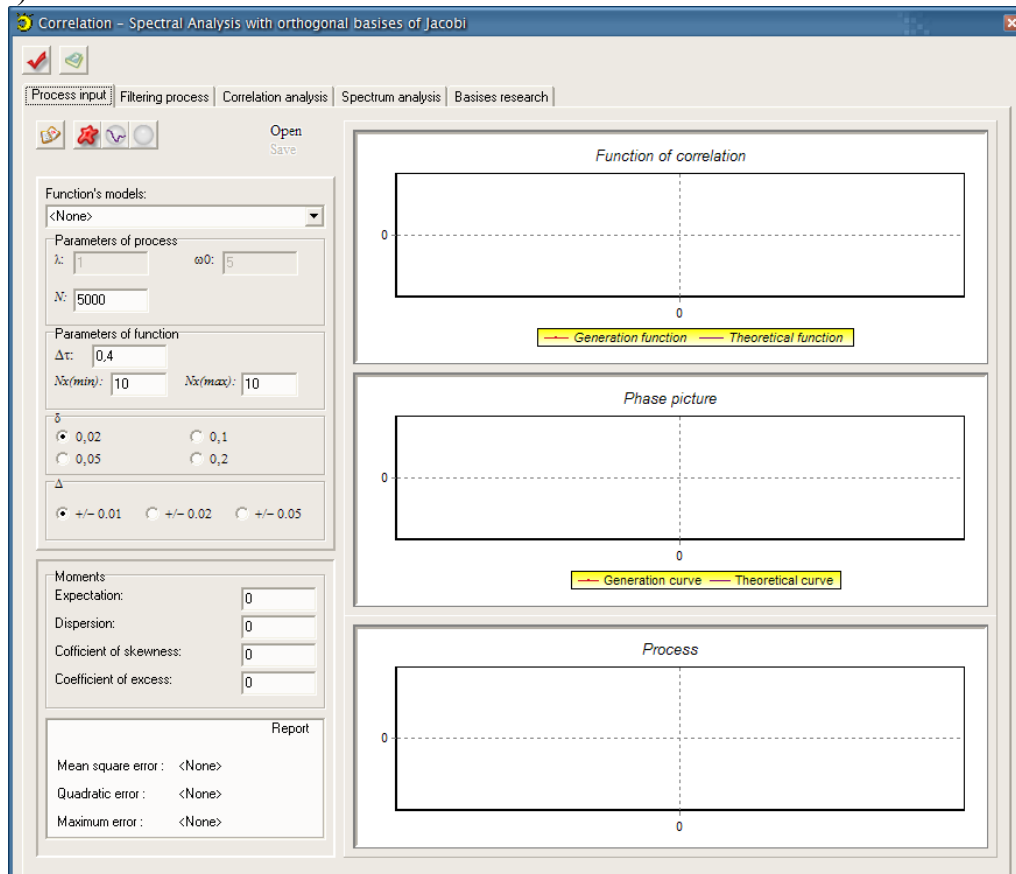


Рисунок 5.91 – Экранная форма формирования входного сигнала

Входной сигнал может быть получен либо загрузкой из файла **Open**, либо генерированием  с заданием исходных параметров N , $\Delta\tau$, N_x . Если в качестве исходного процесса выбран процесс с заданным видом корреляционной функции (см. рисунок 5.92), то исходными параметрами являются также значения δ и коридор затухания Δ , по которым в соответствии с выбранной моделью, и значениями λ и ω_0 (для колебательных моделей), рассчитываются минимальное и максимальное число ординат N_x . Затем производится расчет процесса, корреляционной функции и фазового портрета по минимальному числу ординат $N_x(\min)$.

При необходимости можно проверить результаты проведенного генерирования, наложив на полученные кривые – теоретические с аналогичными исходными параметрами . В левом нижнем окне выводится отчет о результатах проведенного

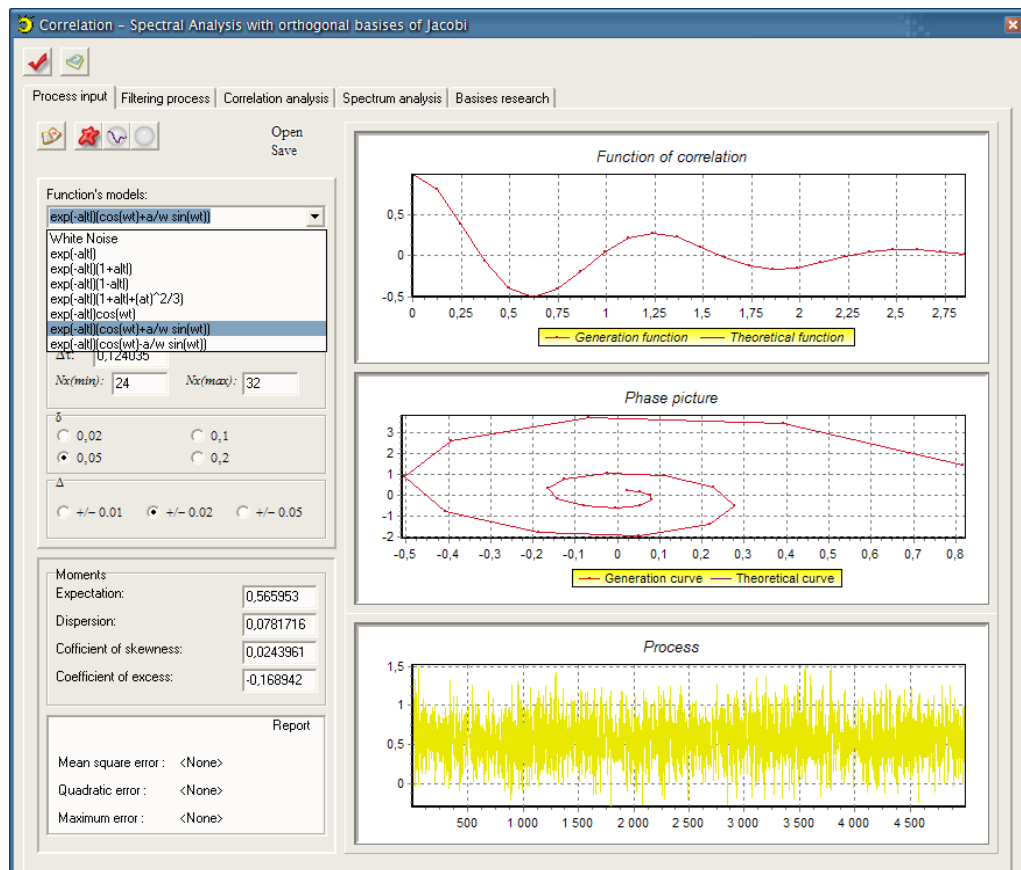


Рисунок 5.92 – Экранная форма формирования входного процесса с заданным видом корреляционной функции

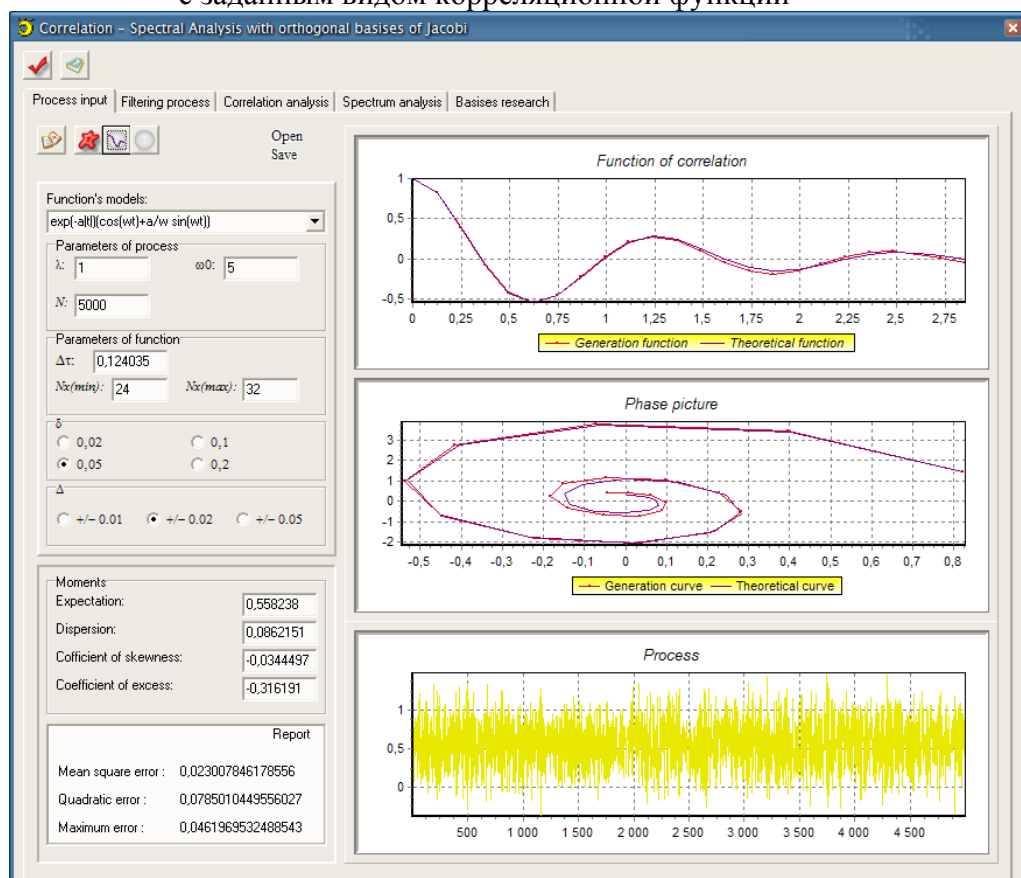
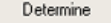


Рисунок 5.93 – Экранная форма аппроксимации входного процесса с заданным видом корреляционной функции соответствующей теоретической кривой

генерирования: квадратическая ошибка, среднеквадратическое отклонение и максимальная ошибка (см. рисунок 5.93). Над отчетом располагается окно с выведенными в нем основными числовыми характеристиками, такими как математическое ожидание, дисперсия, коэффициенты асимметрии и эксцесса сгенерированного процесса. Если необходимо, можно провести очистку и затереть построенные графические зависимости  или сохранить результаты проведенного генерирования в файл .

Для формирования взаимной корреляционной функции и проведения корреляционно-спектрального анализа на тестовых сигналах на вход второй и последующих вкладок необходимо передать - сгенерированный на первой – «белый шум». Далее, в соответствии с общей методикой, формируется пара цифровых фильтров, через которые пропускается сгенерированный сигнал, задается значение линии задержки. Формирование фильтров можно произвести двумя способами: на первой закладке через меню рекомендаций  (см. рисунок 5.94) и на второй закладке (см. рисунок 5.95).

При выборе первого способа задания и при нажатии , на вторую закладку передаются оптимальные параметры интервала дискретизации и числа ординат в соответствии с выбранной моделью и допустимой погрешностью восстановления корреляционной функции. В окне рекомендаций имеется возможность задания как двух одинаковых фильтров (для построения автокорреляционной функции), так и различных фильтров (для построения взаимной корреляционной функции), что выбирается установкой флажка «Cross correlation function».

При втором способе определения фильтров на второй закладке необходимо установить флажки: «First filter <left branch>» («Second filter <right branch>»), «Function» - для задания вида модельной функции, «Parameters» - для задания значений интервала дискретизации и числа ординат, достаточных для восстановления корреляционной функции. Задав необходимые параметры для каждого из фильтров, формируем выходные сигналы . Заметим, что параметры восстановления корреляционной функции могут быть определены оптимальным образом при нажатии на . Как и на первой закладке, имеется возможность проверки полученных в ходе генерирования результатов наложением соответствующей теоретической кривой, а также возможность очистки графических плотов. Обратим внимание, выходные сигналы, необходимые для формирования взаимной (авто-) корреляционной функции, могут быть загружены из файла.

На третьей закладке имеются две вложенные, каждая из которых также соответствует представлению некоторой математической модели, и решению связанной с ней задачи .

Первая из них предназначена для получения, формирования и анализа взаимной (авто-) корреляционной функции из двух процессов путем введения некоторой задержки τ_m (см. рисунок 5.96). В качестве интервала дискретизации $\Delta\tau$ передается минимальное из значений интервалов дискретизации двух исходных процессов, но данное значение может быть изменено. Число ординат восстановления взаимной (авто-) корреляционной функции для каждой из ветвей определяется как N_x и N_y ,

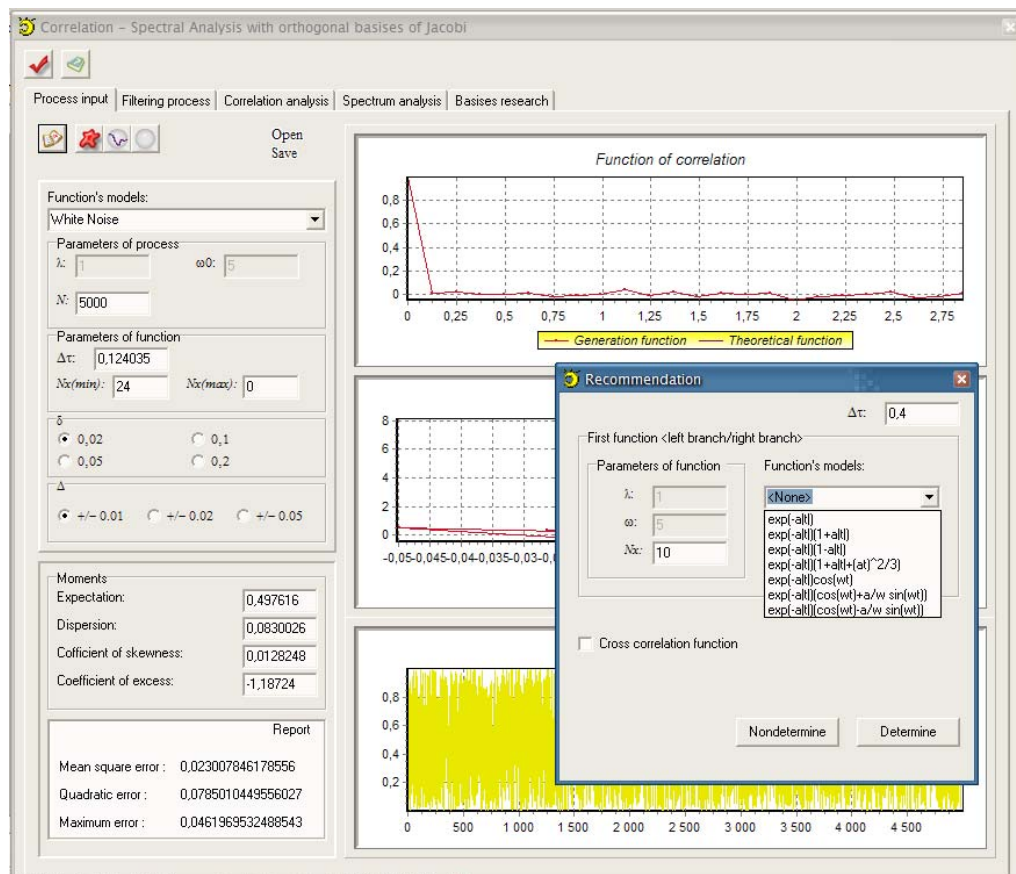


Рисунок 5.94 – Экранная форма рекомендаций по выбору оптимального значения интервала дискретизации для выбранной модельной функции

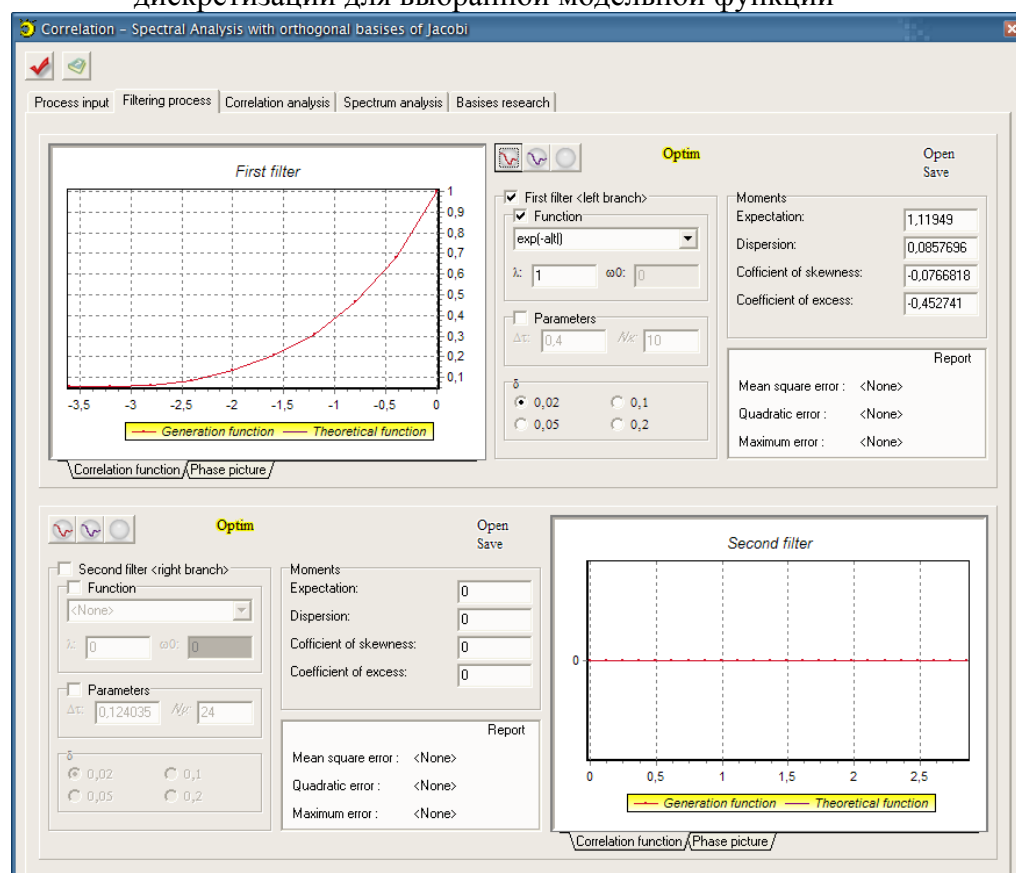


Рисунок 5.95 – Экранная форма «ручного» задания параметров фильтров

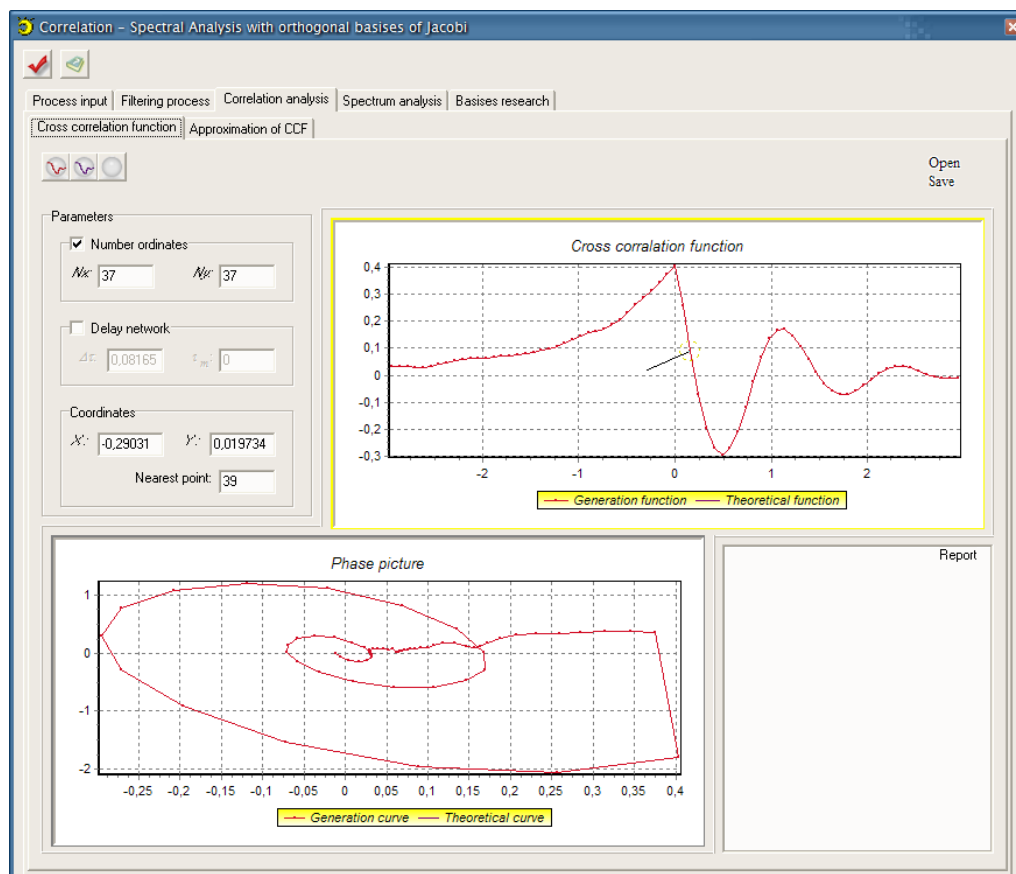


Рисунок 5.96 – Экранная форма формирования взаимной (авто-) корреляционной функции по двум исходным процессам с $\tau_m = 0$, $N_x = N_y = 37$, $\Delta\tau = 0,08165$

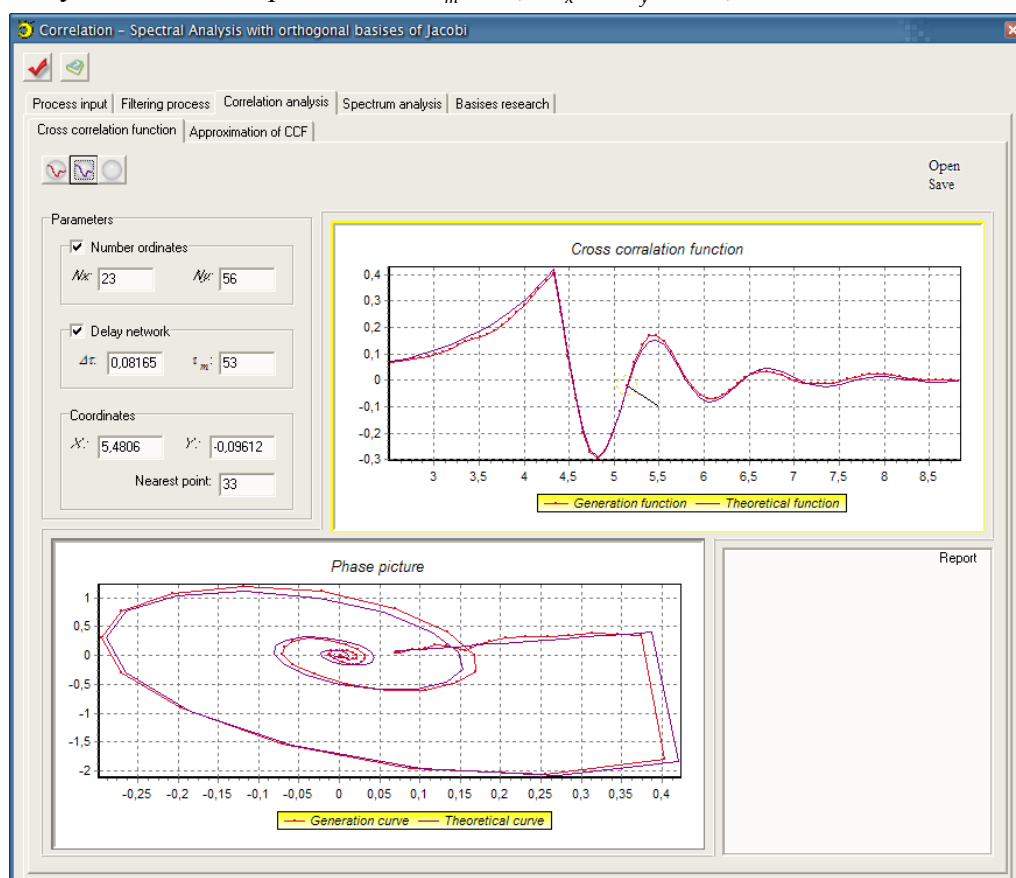


Рисунок 5.97 – Экранная форма формирования взаимной (авто-) корреляционной функции с $\tau_m = 53$, $N_x = 23$, $N_y = 37$, $\Delta\tau = 0,08165$

соответствующие каждому из процессов, которые при желании могут быть изменены (см. рисунок 5.97). Отметим, что также имеются возможности наложения теоретической кривой, очистки, загрузки взаимной (авто-) корреляционной функции из файла и сохранения результатов генерирования в файл соответствующего формата.

Помимо аппроксимации взаимной (авто-) корреляционной функции соответствующей теоретической кривой, имеется возможность аппроксимации в ортогональных базисах Якоби, что организуется на второй закладке (см. рисунок 5.98). Заметим, что в автоматизированной системе рассматривается ограниченный набор ортогональных функций Якоби, имеющий аналогичные характеристики и предусмотренные для аппроксимации процессов, относящихся к одному классу. Методика аппроксимации ортогональными функциями подразумевает разбиение взаимной (авто-) корреляционной на две ветви, каждая из которых может быть аппроксимирована в отдельности. Для того чтобы определить параметры аппроксимации для каждой из ветвей, необходимо установить флажки: «Function Jacobi <left branch>» («Function Jacobi <right branch>») и выбрать соответствующий ортогональный базис, а затем и – «Left branch» («Right branch») (см. рисунок 5.99).

Параметры аппроксимации γ и m , соответствующие данному ортогональному базису могут быть, как заданы вручную, установкой флажка «Parameters of approximation», так и определены автоматически оптимальным образом в соответствии с минимумом квадратической погрешности аппроксимации **Optim**. Однако при этом для получения квазиоптимального значения параметров необходимо контролировать диапазон поиска параметра m , изменить который можно, установив флажок «Range <m>». Заметим, что имеется возможность работы в полуавтоматическом режиме: параметр масштаба ортогональной функции γ выбирается в ручном режиме, а число членов разложения определяется автоматически в соответствии с минимумом квадратической погрешности аппроксимации **m opt**, при этом контролируется диапазон поиска m . Если осуществляется аппроксимация автокорреляционной функции и для аппроксимации левой и правой ветвей используется одинаковый ортогональный базис Якоби, то при определении параметров аппроксимации для одной из ветвей в одном из трех возможных режимов параметры могут быть переданы на другую ветвь нажатием на **Right branch** или **Left branch**.

Аппроксимация с оптимальными параметрами представлена на рисунке 5.100. Ниже панели задания параметров располагается окно с результатами проведенной аппроксимации: значения коэффициентов разложения β_k и погрешности оценки данных коэффициентов, а также ее составляющих. Однако результаты аппроксимации могут быть улучшены, для чего предназначена панель, расположенная над графическим плотом. Панель содержит три основных флажка, каждый из которых тем либо иным образом влияет на результат. Таким образом, установки флажков индивидуальны для конкретной решаемой задачи. Для большинства корреляционных функций необходима установка флажка « b_k », что связано с нарушением основного свойства корреляционных функций (см. рисунок 5.101). Установка флажка «maximum» - осуществляет поиск максимального значения и относительно него разбивает корреляционную функцию на две ветви. По умолчанию значение максимума считается равным нулю. В свою очередь «inverter» предназначен для инвертирования области поиска максимального значения, в результате чего поиск максимума осуществляется в отрицательной области ординат.

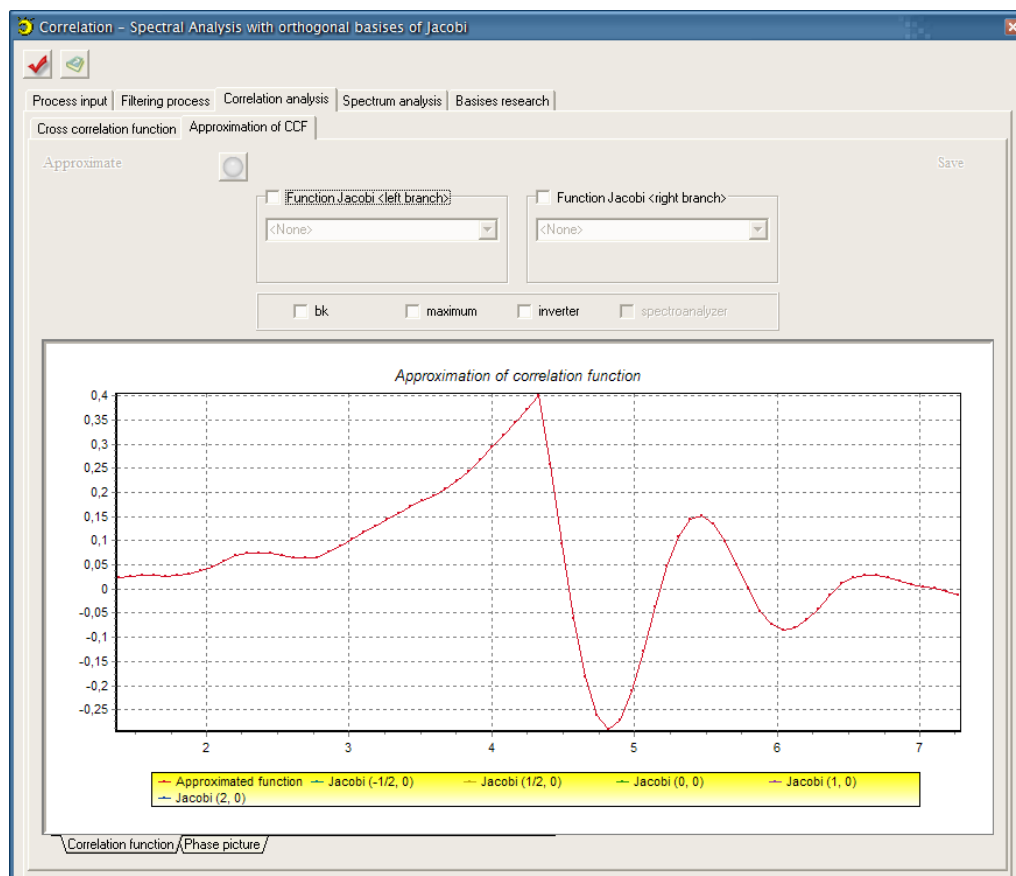


Рисунок 5.98 – Экранная форма аппроксимации взаимной (авто-) корреляционной функции в ортогональном базисе Якоби

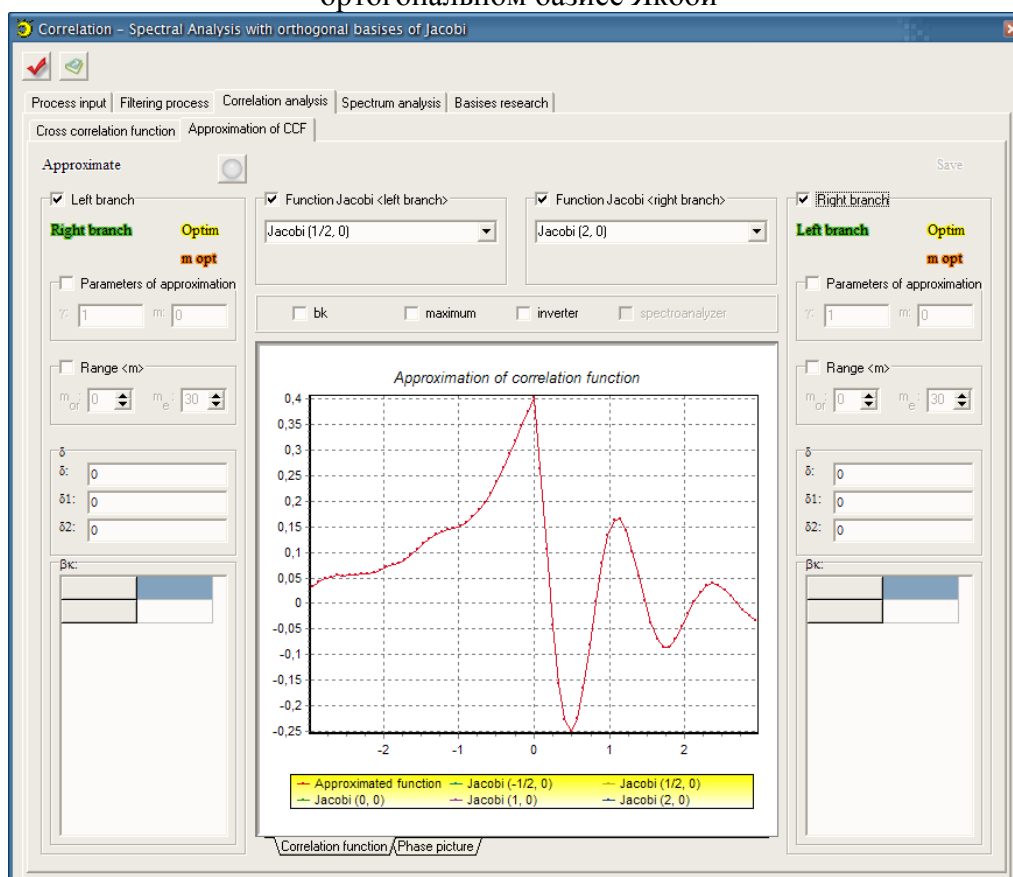


Рисунок 5.99 – Экранная форма задания параметров аппроксимации

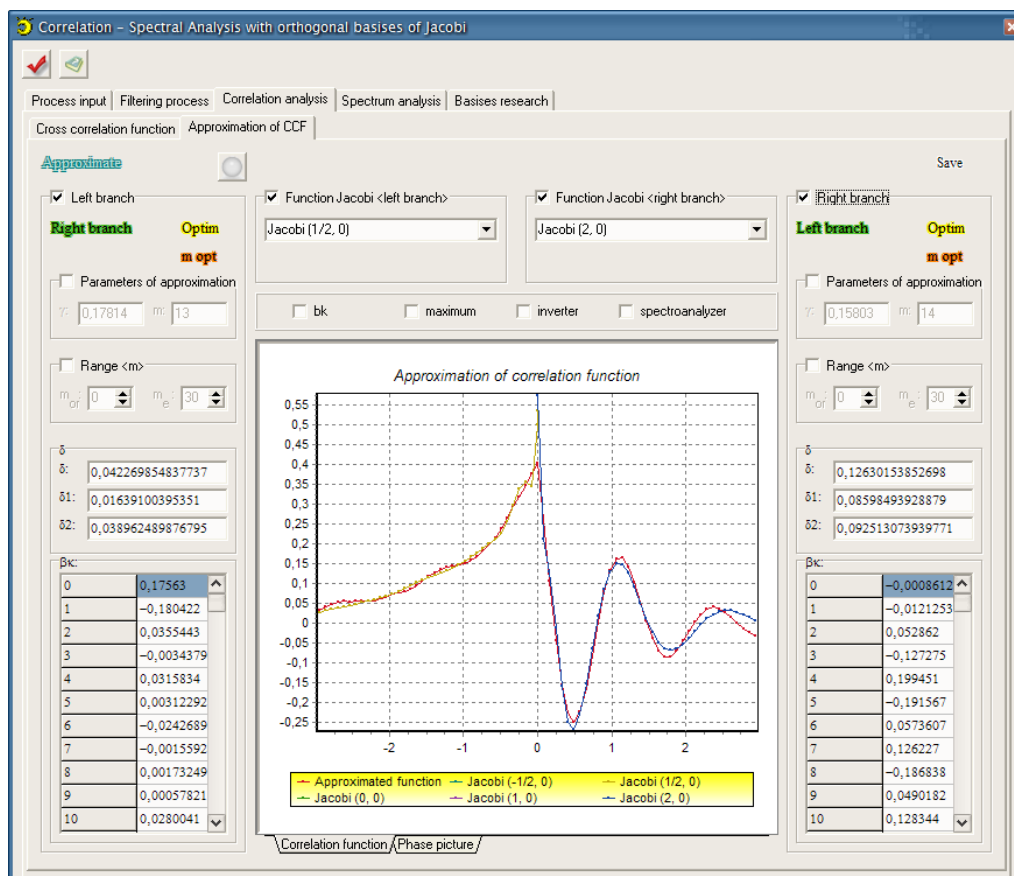


Рисунок 5.100 – Экранная форма аппроксимации ортогональными функциями Якоби (1/2,0) (левая ветвь) и Якоби (2,0) (правая ветвь)

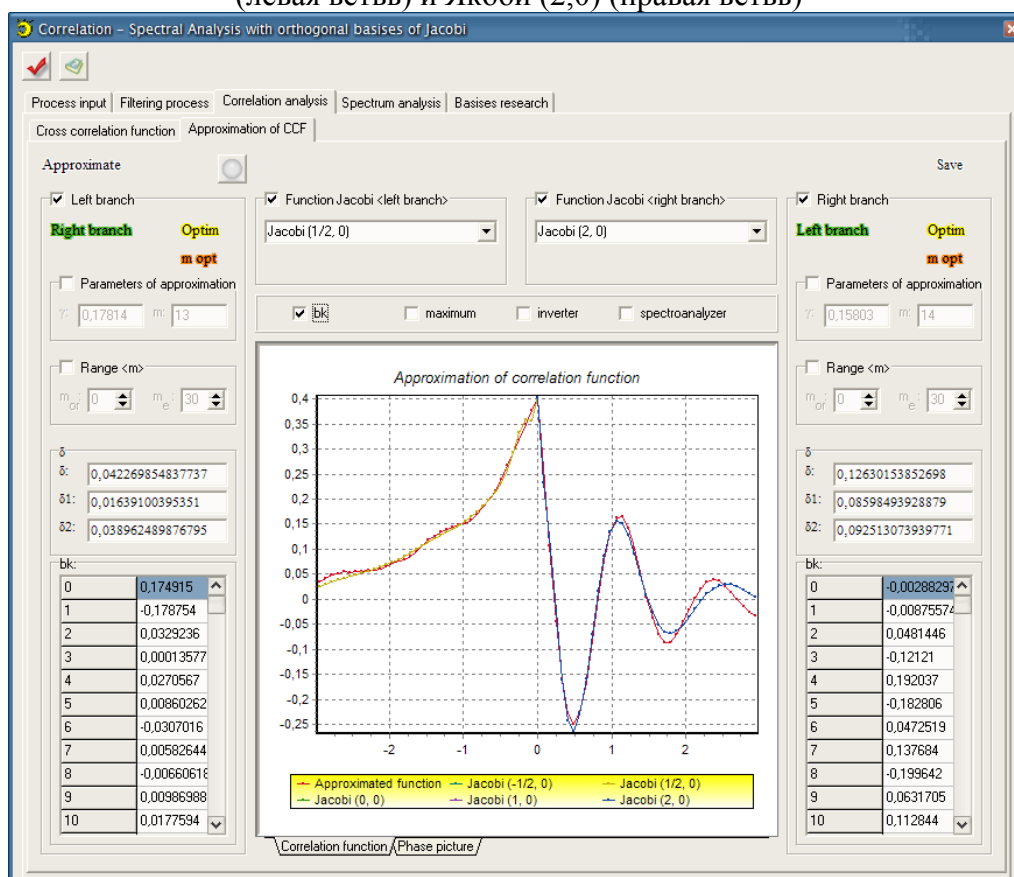


Рисунок 5.101 – Экранная форма аппроксимации ортогональными функциями Якоби (1/2,0) (левая ветвь) и Якоби (2,0) (правая ветвь) с установкой « b_k »

Сравнить результаты аппроксимации без использования последних флажков и с ними можно на рисунках 5.102 и 5.103 соответственно. Заметим, что результаты аппроксимации могут быть сохранены в файл соответствующего формата.

Установка флажка «spectroanalyzer» позволяет перейти к четвертой закладке, где осуществляется построение взаимного спектра по параметрам аппроксимирующего выражения (см. рисунок 5.104). Изменить параметры построенного спектра можно, установив флажок «Parameters of spectrum», сформировав результирующий спектр . Как и при построении корреляционной функции, имеется возможность построения теоретического взаимного спектра , а также очистки графического плота. При двойном щелчке мыши по графикам действительной или мнимой частей появляется окно, позволяющее установкой флажка наложить на данную графическую зависимость модуль спектральной плотности мощности и эквивалентную ширину спектра. При двойном щелчке по графику модуля спектральной плотности предлагается отобразить основные спектральные характеристики: экстремальную частоту, значение спектра в точке максимума, эквивалентную ширину спектра, - а также наложить график эквивалентной ширины спектра. Параметры спектра могут сохраняться в файл, в зависимости от выбранной составляющей спектра и в соответствии с заданным форматом.

Пятая закладка предназначена для исследования свойств ортогональных базисов Якоби. На данной закладке также имеются две вложенные: на первой можно провести исследование ортогональных полиномов, на второй – ортогональных функций

Orthogonal polynomial Orthogonal functions

Установка флажка «Basises parameters» как на первой, так и второй закладке позволяет задать параметры восстановления ортогональных полиномов (функций): число ординат N и интервал дискретизации $\Delta\tau$. В первом случае интервал существования (сегмент ортогональности) ограничен и равен отрезку $[-1, 1]$, что позволило сделать полуавтоматический режим настройки: при изменении одного из данных параметров восстановления автоматически пересчитывается другой, исходя из соображений попадания в отрезок ортогональности. Для исследования одного из предлагаемых ортогональных полиномов, т. е. нахождения значения ортогональных полиномов на концах интервала ортогональности, их нормы, и отображение характера поведения на всем интервале существования, необходимо установить флажок «Polynomial Jacobi», после чего можно выбрать вид полинома Якоби, интервал порядка отображения и исследования $[k_{or}, k_e]$  (см. рисунок 5.106). При одинарном щелчке мыши в области, выделенной пунктирным прямоугольником, можно затереть построенные графические зависимости. Если нужно исследовать ортогональный полином определенного порядка, то задают интервал порядка так, чтобы левая граница интервала соответствовала правой и требуемому порядку (см. рисунок 5.107).

Методика исследования ортогональных функций, которое можно провести на следующей закладке, аналогична. Однако, при установке флажка «Fuctions Jacobi» предлагается задать вид функции Якоби, которые используются при аппроксимации на третьей закладке, и образованы из соответствующих ортогональных полиномов,

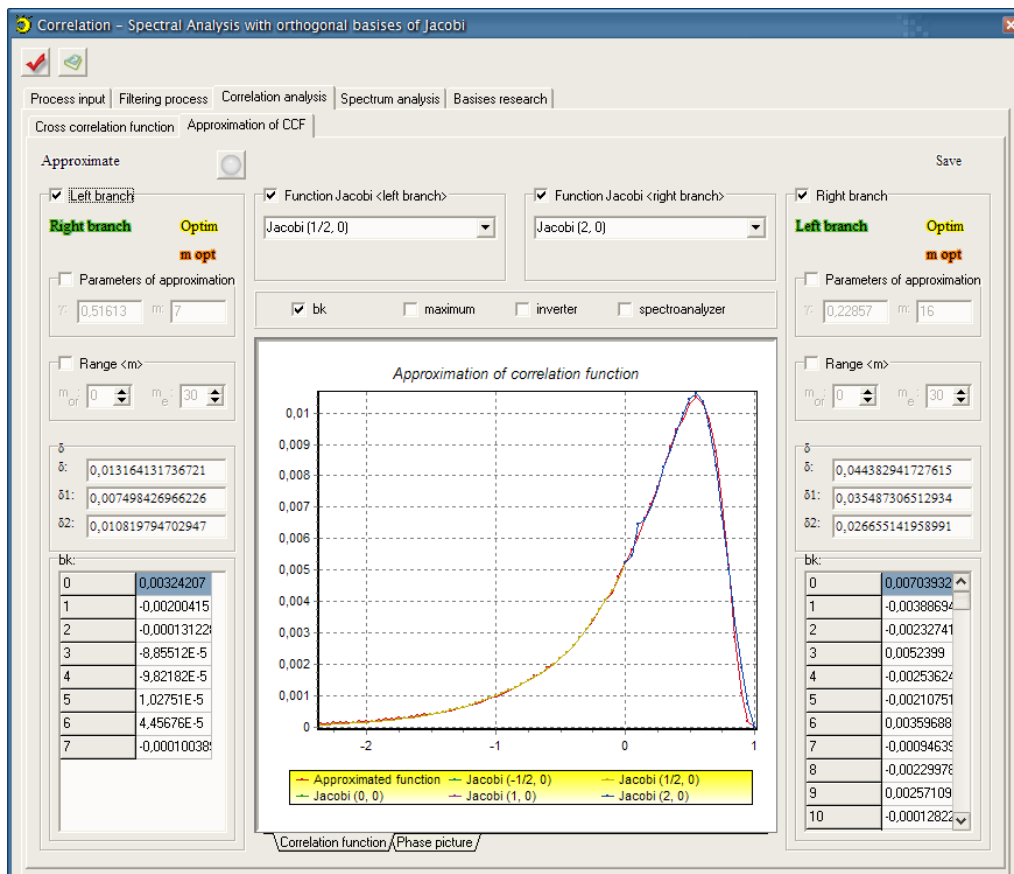


Рисунок 5.102 – Экранная форма аппроксимации ортогональными функциями Якоби (1/2,0) (левая ветвь) и Якоби (2,0) (правая ветвь)

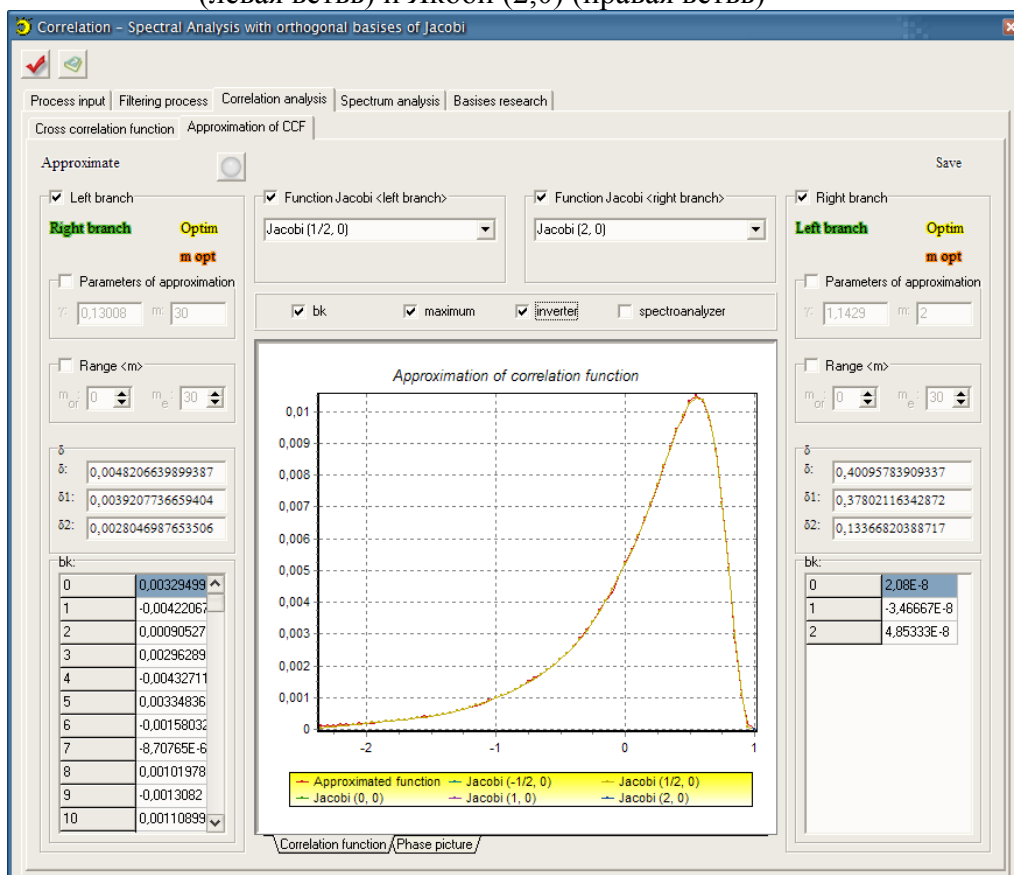


Рисунок 5.103 – Экранная форма аппроксимации ортогональными функциями Якоби (1/2,0) (левая ветвь) и Якоби (2,0) (правая ветвь) с установкой «maximum» и «inverter»

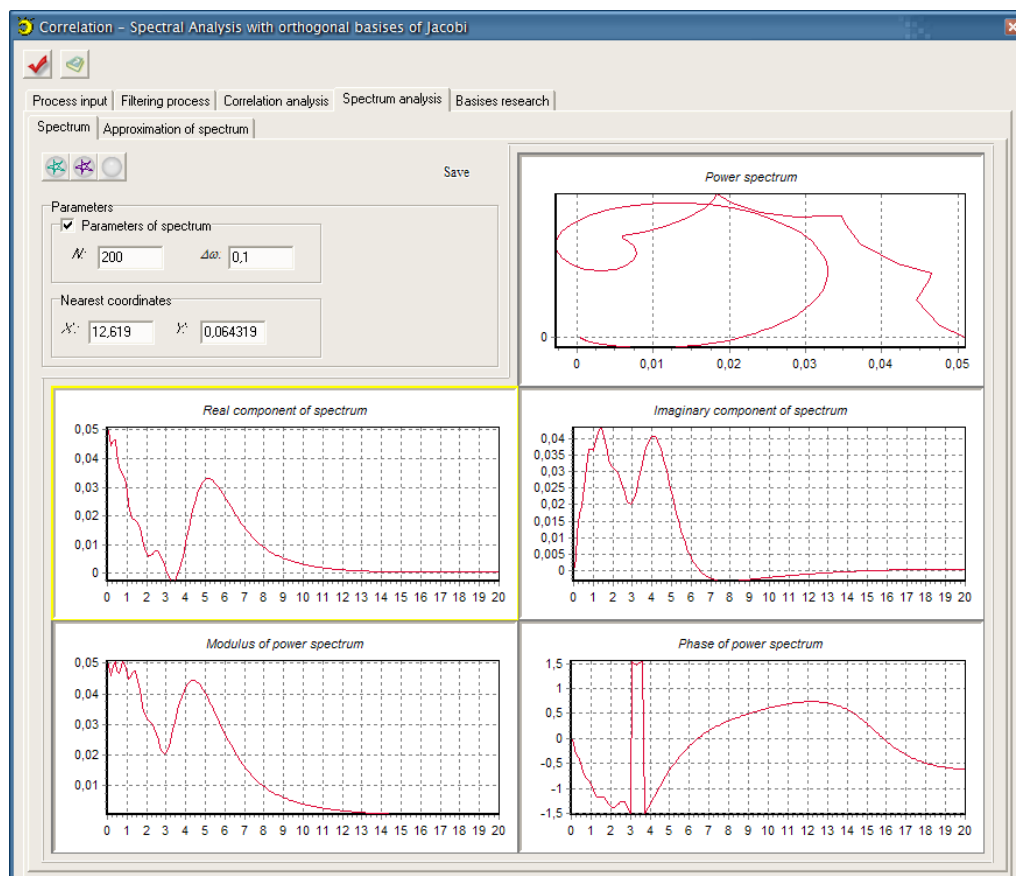


Рисунок 5.104 – Экранная форма формирования спектра и его составляющих по результатам аппроксимации

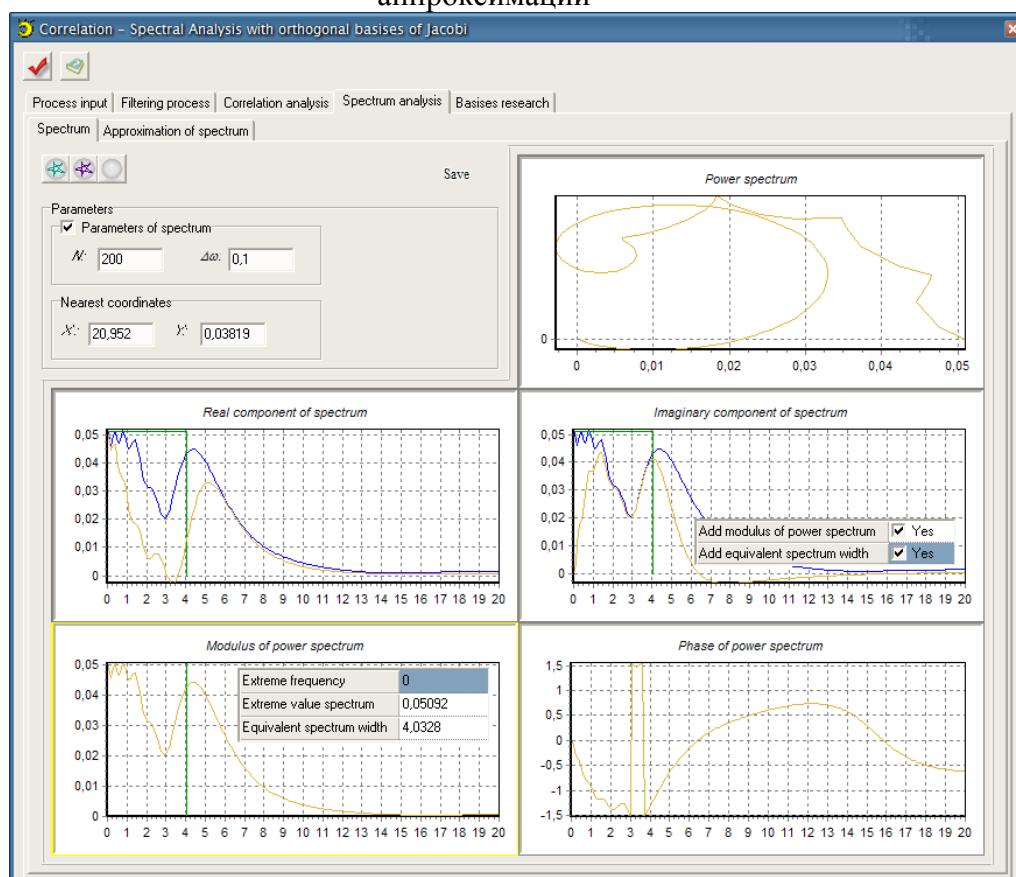


Рисунок 5.105 – Экранная форма формирования спектра и его составляющих и отображения основных спектральных характеристик

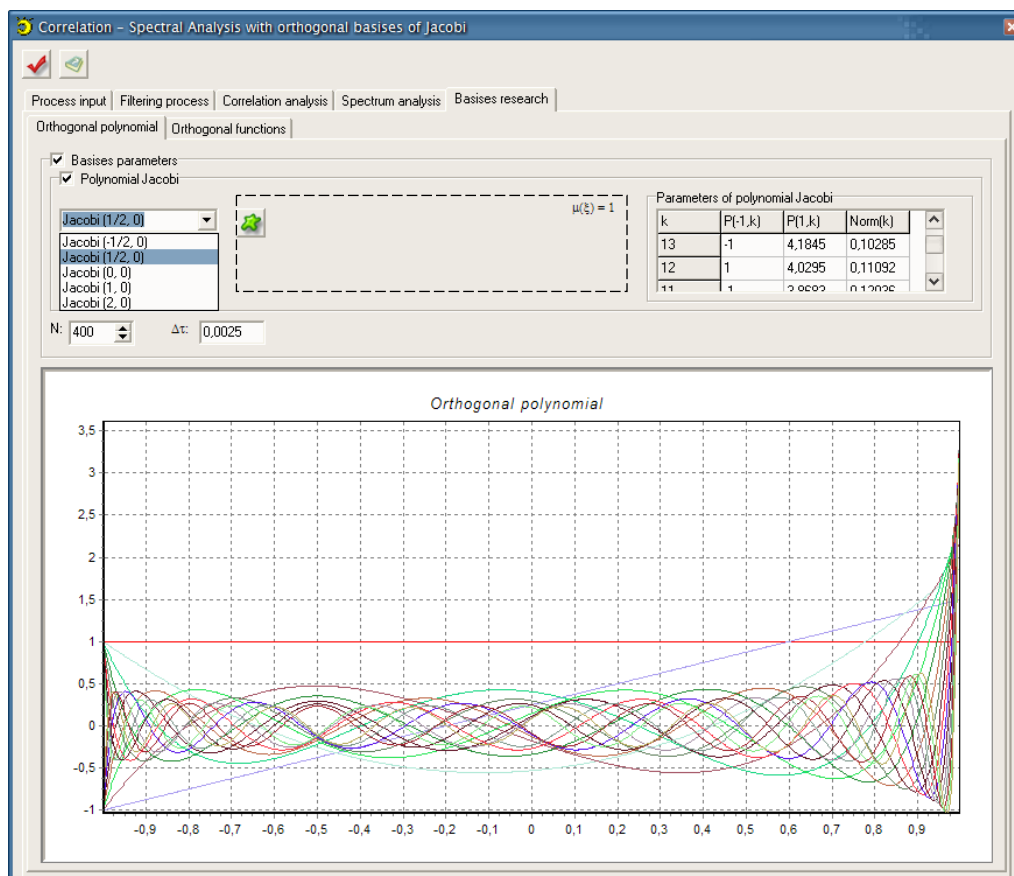


Рисунок 5.106 – Экранная форма исследования ортогональных полиномов Якоби (1/2, 0) 0-18 порядка с параметрами отображения $N = 400$, $\Delta\tau = 0,0025$

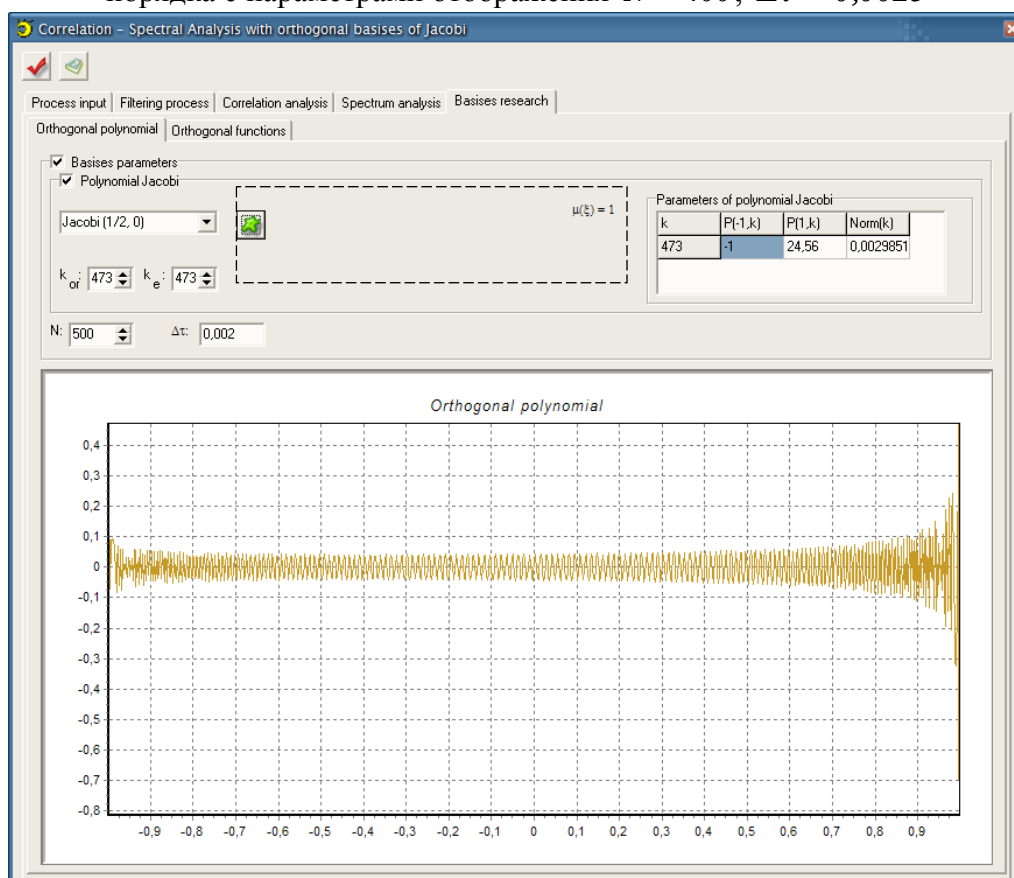


Рисунок 5.107 – Экранная форма исследования ортогонального полинома Якоби (1/2, 0) 473 порядка с параметрами отображения $N = 500$, $\Delta\tau = 0,002$

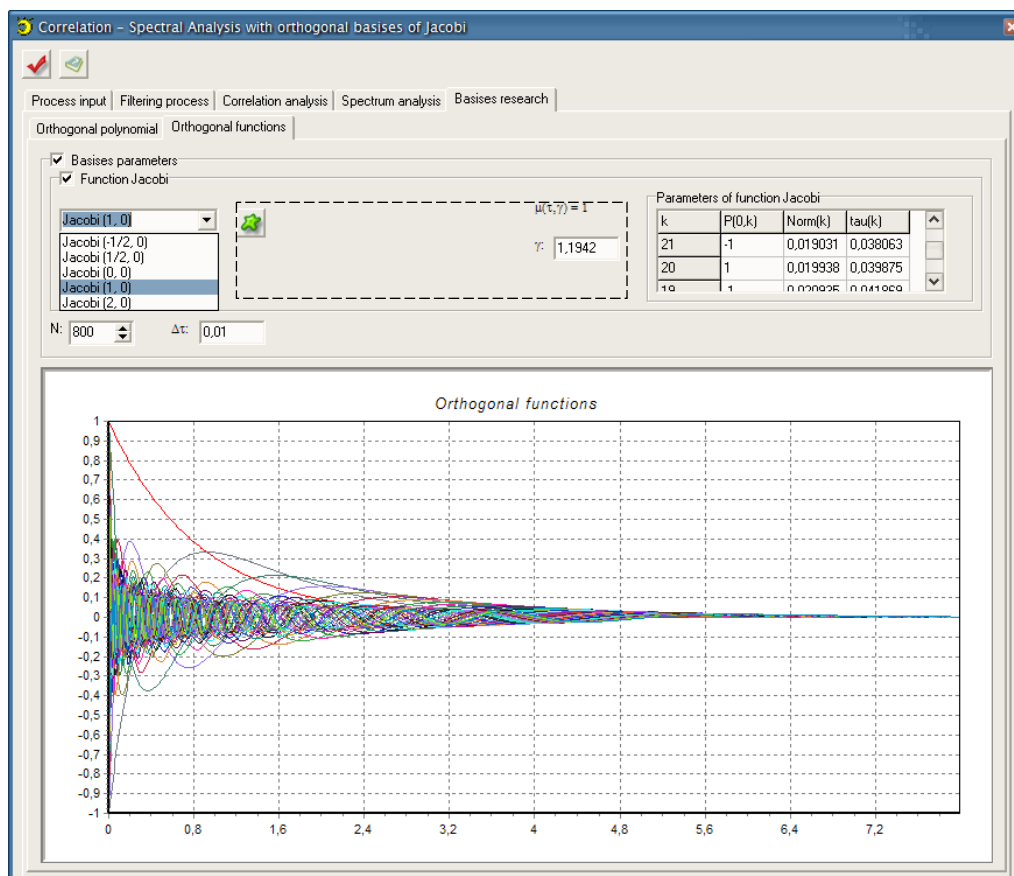


Рисунок 5.108 – Экранная форма исследования ортогональных функций Якоби (1, 0) 0-39 порядка с параметрами отображения $N = 800$, $\Delta\tau = 0,01$, $\gamma = 1,1942$

рассмотренных на предыдущей закладке, интервал порядка отображения и исследования $[k_{or}, k_e]$ и параметр масштаба выбранной ортогональной функции Якоби γ . Исследование в данном случае предполагает нахождение значения ортогональных функций в нуле, определение нормы и длительности ортогональной функции соответствующего порядка, а также отображение характера поведения на всем интервале существования $[0, \infty)$ (см. рисунок 5.108). Заметим, автоматизированная система позволяет изучать ортогональные полиномы и функции Якоби до 512 порядка включительно.

5.7. Автоматизированная система структурного анализа случайных процессов

Данная система состоит из пяти подсистем (п/с) [121-125]:

- генерации СП;
- видоизменения СП;
- структурного анализа;
- корреляционного анализа;
- спектрального анализа;

и позволяет решать следующие задачи:

- генерации случайного процесса со стационарными приращениями;
- загрузки случайного процесса из файла определенного формата;
- видоизменения случайного процесса;
- вычисления и определения модели структурной функции СП;
- вычисления и определения модели корреляционной функции СП;
- вычисления и определения спектральной плотности процесса.

Схема системы представлена на рисунке 5.109.

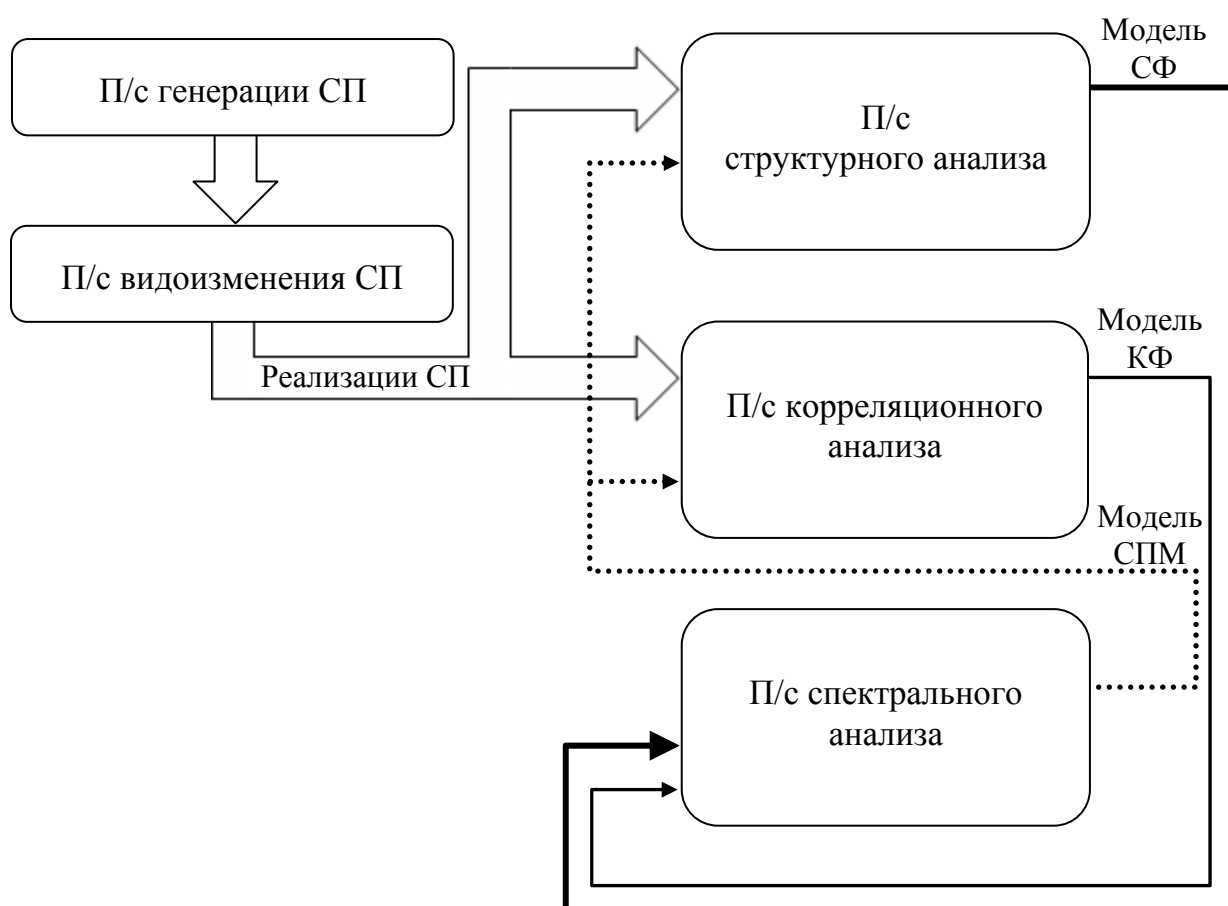


Рисунок 5.109 – Схема автоматизированной информационной системы

Подсистема генерации случайных процессов

Подсистема генерирования случайных процессов предназначена для моделирования процессов с помощью метода имитационного моделирования (см. рис. 5.110).

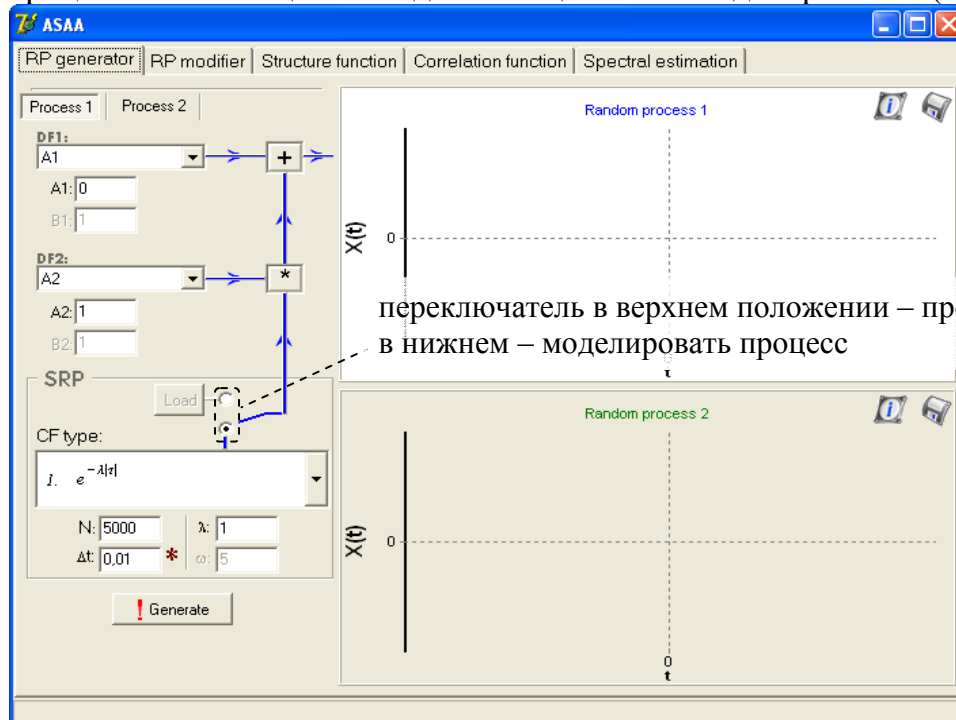


Рисунок 5.110 – Подсистема генерации случайных процессов

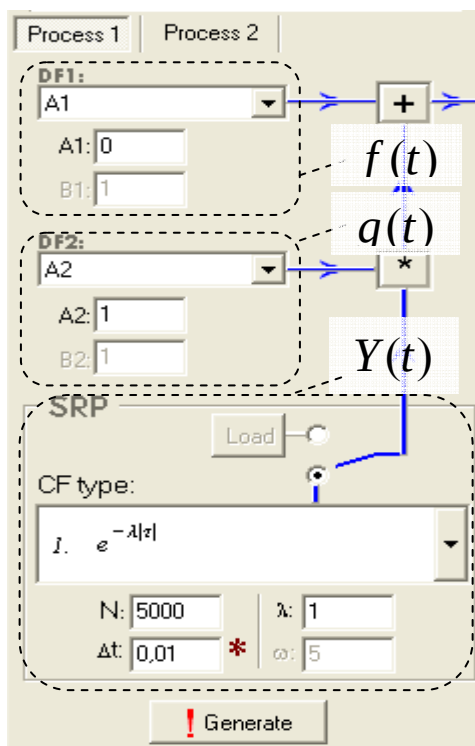
В подсистеме возможна генерация процессов вида (рисунок 5.111):

$$X(t) = f(t)Y(t) + g(t), \quad (5.1)$$

где $Y(t)$ – стационарный случайный процесс;

$f(t), g(t)$ – некоторые действительные неслучайные функции.

В свою очередь, стационарная составляющая $Y(t)$ процесса $X(t)$ может быть



загружена из файла или сгенерирована, для чего имеется соответствующий переключатель, с помощью которого выбирается анализируемый процесс $X(t)$ (рисунок 5.110).

Для генерации ССП $Y(t)$ переключатель необходимо установить в нижнее положение, выбрать вид корреляционной функции (моделируются ССП с заданным видом корреляционной функции), задать ее параметры (λ, ω), число отсчетов N и интервал дискретизации Δt (рисунок 5.111). Генерация процесса будет произведена после нажатия на кнопку «Generate».

Выбрав вкладку «Process 2» можно аналогичным образом определить вид второго процесса.

Если же необходимо сгенерировать коррелированные процессы, то достаточно установить

Рисунок 5.111 – Вид СП

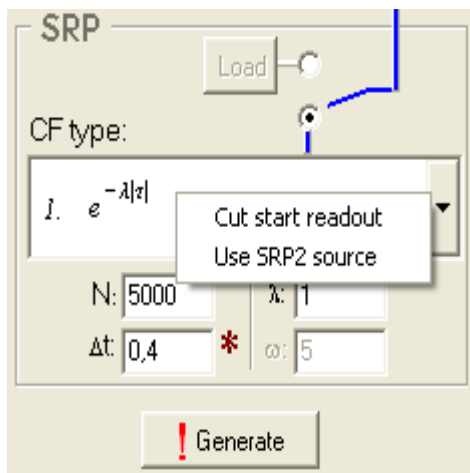


Рисунок 5.112 – Настройка генерируемого СП

флаг «Use SRP2 source» (или «Use SRP1 source») в опциях (рисунок 5.112) одного из процессов, при этом будет использован генератор «белого шума» второго (первого) процесса (рисунок 5.112).

Одной из особенностей генерирования псевдослучайных последовательностей является переходный процесс, в течение которого процесс не является стационарным. Для устранения «нестационарного участка» (рисунок 5.113) предусмотрена опция «Cut start readout» (рисунок 5.112), выбрав которую данный участок будет убран, при этом число реализаций процесса будет равным установленному значению в параметрах генерации (рисунок 5.113).

Измененный процесс может быть сохранен. Для этого необходимо нажать на пиктограмму  (рисунок 5.110) и определить имя файла.

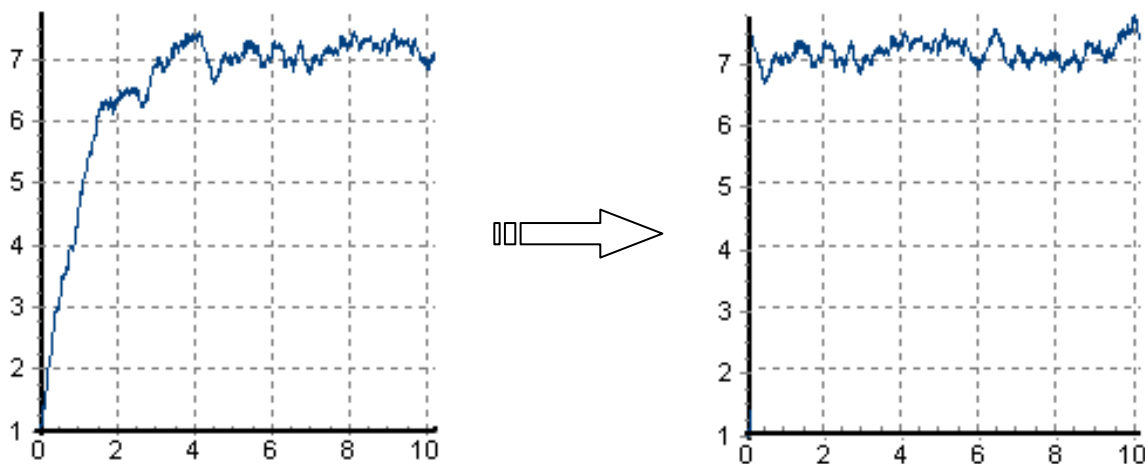


Рисунок 5.113 – Удаление «нестационарного участка»

Подсистема видоизменения случайных процессов

С помощью подсистемы видоизменения возможно рассмотрение сгенерированных процессов по частям. Например, эта необходимость возникает, когда исследуемые процессы имеют вид подобный, представленным на рисунке 5.114. Отчетливо видно, что на отдельных отрезках времени процессы имеют различный характер и, следовательно, необходимо оценивать характеристики не всего процесса, а разбив его на части.

Выделение осуществляется двумя способами:

- Путем ввода с клавиатуры номера отсчета, с которого начинается часть процесса – N_s и номера, которым заканчивается – N_t .
- Определение части процесса посредством манипулятора «мышь». Для этого необходимо определить два крайних отсчета части процесса. Нажав и удерживая левую кнопку «мыши», определяется первый отсчет. Далее перемещением «мыши» влево или вправо выбирается часть процесса. После отпущения левой

кнопки «мыши» определяется второй крайний отсчет. Номера полученных крайних отсчетов заносятся в N_s , N_t .

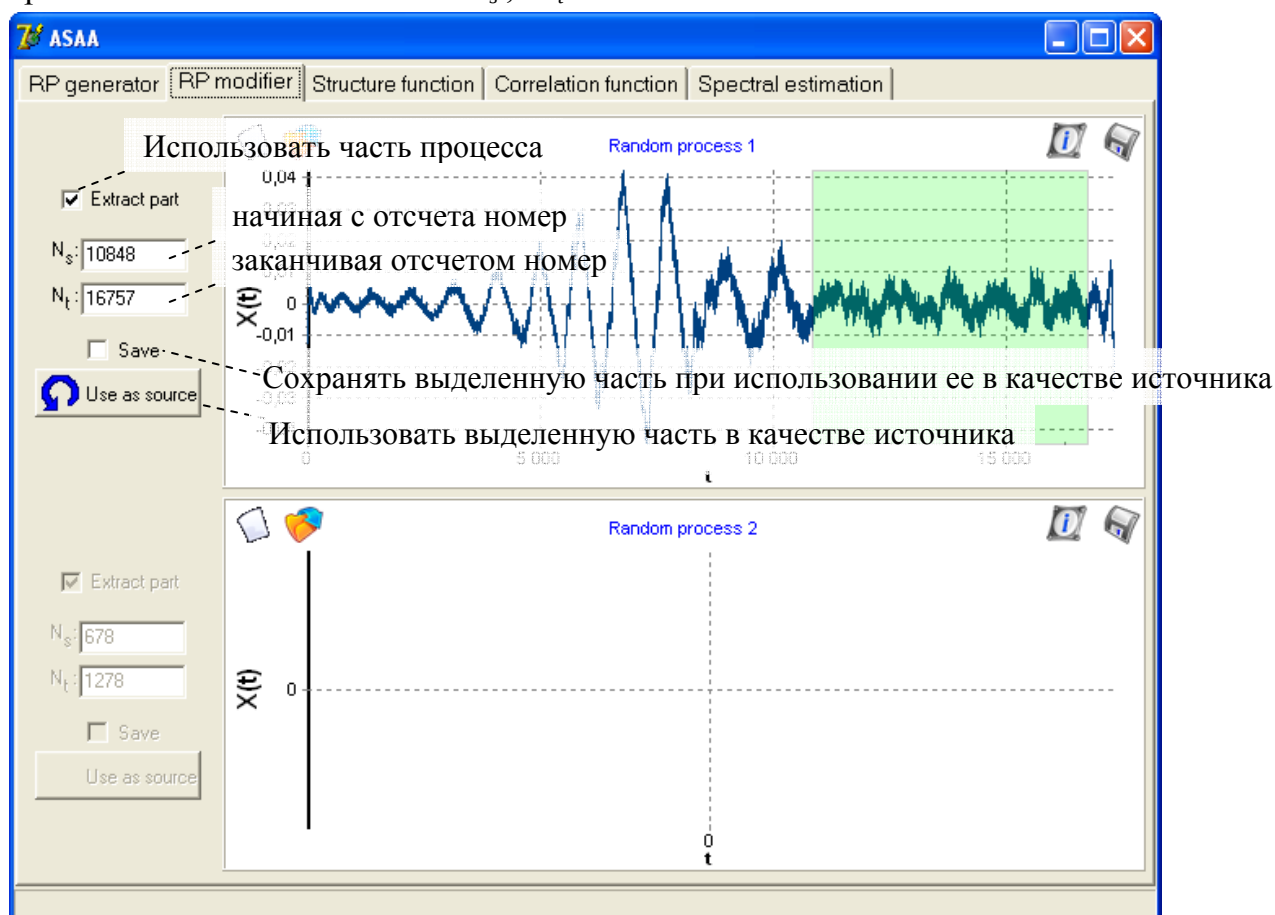


Рисунок 5.114 – Подсистема видоизменения СП

В дальнейшем, при поступлении в зависимые подсистемы (например, в подсистему структурного анализа) используется выделенная часть, которую, к тому же, можно сохранить в файл, нажав на надпись «Save», или же использовать в качестве источника, нажав на кнопку «Use as source», если при этом была выбрана опция сохранения, необходимо будет ввести имя файла, в который выделенная часть будет сохранена. Чтобы использовался весь процесс, а не его часть, достаточно убрать опцию «Extract part». Весь процесс будет использован также и в случае, если значение N_s будет большим значения N_t (такой вариант возможен при вводе значений «крайних» отсчетов с клавиатуры).

При нажатии на кнопку «Use as source» выделенная часть устанавливается в качестве исходного процесса. Это позволяет рассмотреть процесс более детально.

В данной подсистеме возможно оперирование процессами, которые были смоделированы в подсистеме генерации либо загруженными из файла. Для загрузки процесса из файла достаточно нажать на пиктограмму  и выбрать необходимое имя файла.

Если определен только один процесс, то все дальнейшие вычисления (определение структурной функции, например) будут производиться только с использованием его одного. Иначе же будут вычисляться взаимные характеристики процессов.

Подсистема структурного анализа

В данной подсистеме существует возможность вычисления структурной функции непосредственно по процессам либо используя модель спектральной плотности мощности. Выбрать один из методов можно с помощью соответствующего селектора (рисунок 5.115). Также возможна загрузка структурной функции из файла.

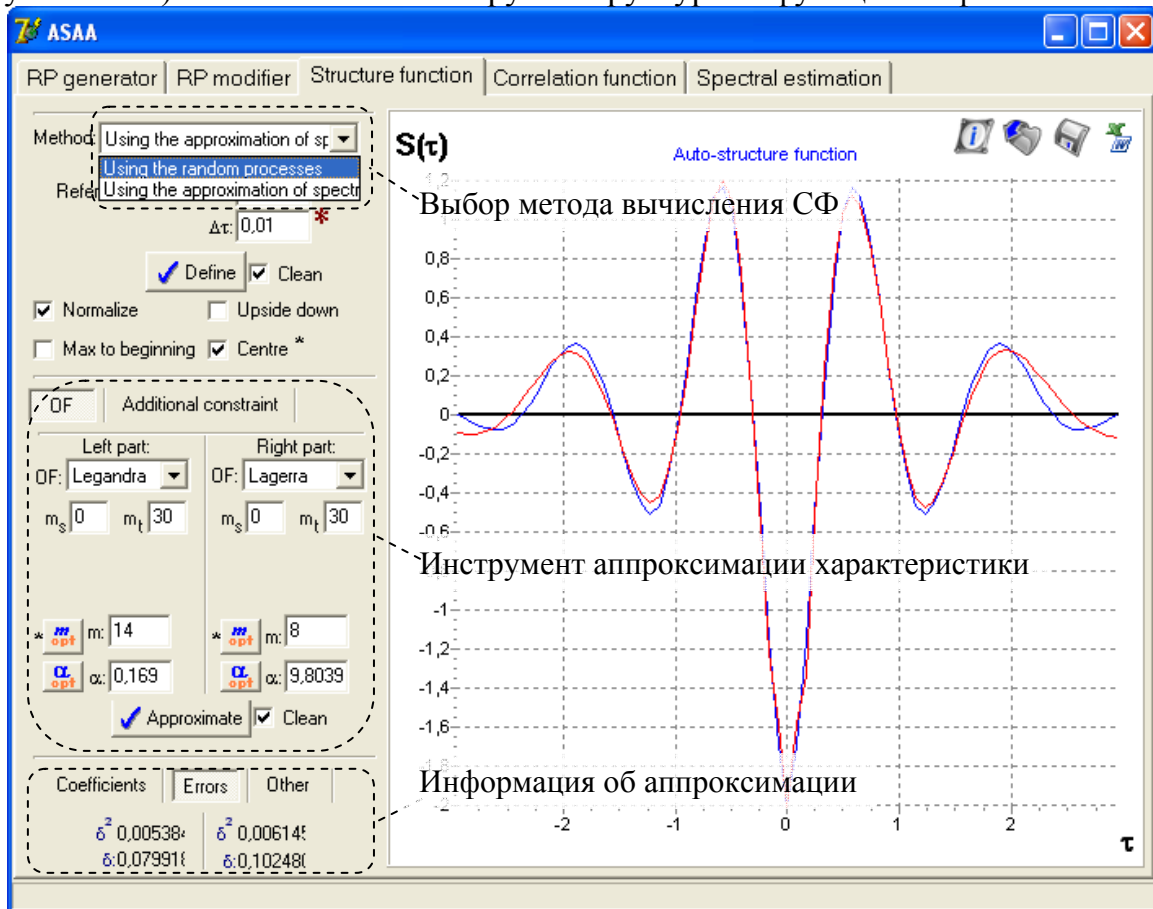


Рисунок 5.115 – Подсистема структурного анализа

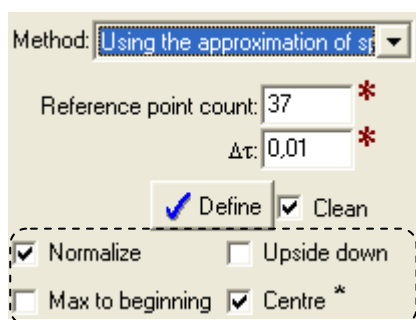


Рисунок 5.116– Модифицирование СФ

Существует возможность видоизменения структурной функции, и в случае загрузки ее из файла, и в случае вычисления (рисунок 5.118):

- С помощью опции «Upside down» происходит преобразование исходной структурной функции S_x в виде

$$\mathcal{E}_x(t) = -S_x(t).$$

Для вычисления структурной функции процесса необходимо задать требуемое количество ординат структурной функции («Reference point count»), и затем нажать на кнопку «Define». В случае вычисления СФ по модели СПМ дополнительно необходимо указать шаг дискретизации (рисунок 5.116).

Существует возможность видоизменения структурной функции, и в случае загрузки ее из файла, и в случае вычисления (рисунок 5.118):

Опция «Max to beginning» предназначена для отыскания максимального значения структурной функции и переноса оси ординат в соответствующую найденному максимуму точку.

- Опция «Normalize» приводит значения структурной функции к диапазону [0,1].
- Опция «Center» реализована в связи с применением в системе ортогональных функций, свойством которых является

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_k(t) \rightarrow 0. \quad (5.2)$$

В свою очередь, структурная функция подчиняется свойству

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_x(t) \rightarrow \infty. \quad (5.3)$$

Центрированием структурной функции можно добиться ситуации, при которой она будет удовлетворять свойству (5.1), что приводит к более приемлемым результатам аппроксимации. По умолчанию центрирование производится относительно среднего значения СФ $M[S_x(t)]$. Также можно центрировать относительно значения $S_x(\infty)$, для этого необходимо нажать «*» над опцией «Centre». Центрирование по $S_x(\infty)$ применяется в случае, если структурная функция не является колебательной.

После определения структурной функции можно построить ее модель с помощью инструмента аппроксимации, для чего необходимо нажать на кнопку «Approximate» (рисунок 5.115), заранее определив параметры аппроксимирующего выражения для левой и правой ветвей: вид ортогональной функции «OF», число членов разложения ряда «m», параметр ортогональной функции «α», а также вид коэффициентов разложения ряда β_k или b_k , выбрав вкладку «Additional constraint». После аппроксимации определяются погрешности аппроксимации:

- δ^2 – относительная методическая;
- δ – среднеквадратическая.

Выбрав вкладку «Coefficients» можно узнать значения коэффициентов разложения ряда (рисунок 5.115).

Существует возможность выбора оптимального значения числа членов разложения ряда m, а также оптимального значения параметра ортогональных функций α для обеспечения минимальной погрешности аппроксимации. Оптимальное значение параметра α вычисляется по методике, предложенной в работе [108]. Оптимальное же значение m выбирается соответствующее минимуму из набора погрешностей, полученных при аппроксимации с различным числом членов разложения ряда: число членов разложения выбирается из диапазона $[m_s, m_t]$ (рисунок 5.115).

При необходимости, структурную функцию и ее модель как до видоизменения, так и измененную можно сохранить, щелкнув на соответствующую пиктограмму  (рисунок 5.115).

Аналогично работает подсистема корреляционного анализа, за одним лишь исключением: нет необходимости выбирать метод вычисления корреляционной функции – она вычисляется для анализируемых процессов.

Подсистема спектрального анализа

Данная подсистема может выполнять следующие функции:

- Определение СПМ по модели КФ;

- Определение СПМ по модели СФ;
- Определение модели данной СПМ.

Для загрузки СПМ из файла необходимо нажать на пиктограмму  (рисунок 5.117), а для загрузки модели СПМ – дополнительно задать интервал наблюдения и шаг дискретизации.

Если требуется определить СПМ или ее модель по модели КФ или по модели СФ, необходимо выбрать соответствующий метод, а также задать шаг дискретизации и интервал наблюдения, после чего нажать кнопку «Define» (рисунок 5.118).

Прежде чем определить модель СПМ выбираются ее параметры (вид ортогональных функций, параметр масштаба ортогональных функций и число членов разложения ряда), оптимальные значения которых могут быть вычислены нажатием кнопок ,  (рисунок 5.119). Модель СПМ определяется после нажатия кнопки «Approximate».

Полученные с помощью ПС «Спектрального анализа случайных процессов» данные автоматически передаются в другие ПС системы «Аппроксимативного анализа случайных процессов» либо могут быть сохранены в файл, нажатием на пиктограмму  (рисунок 5.117).

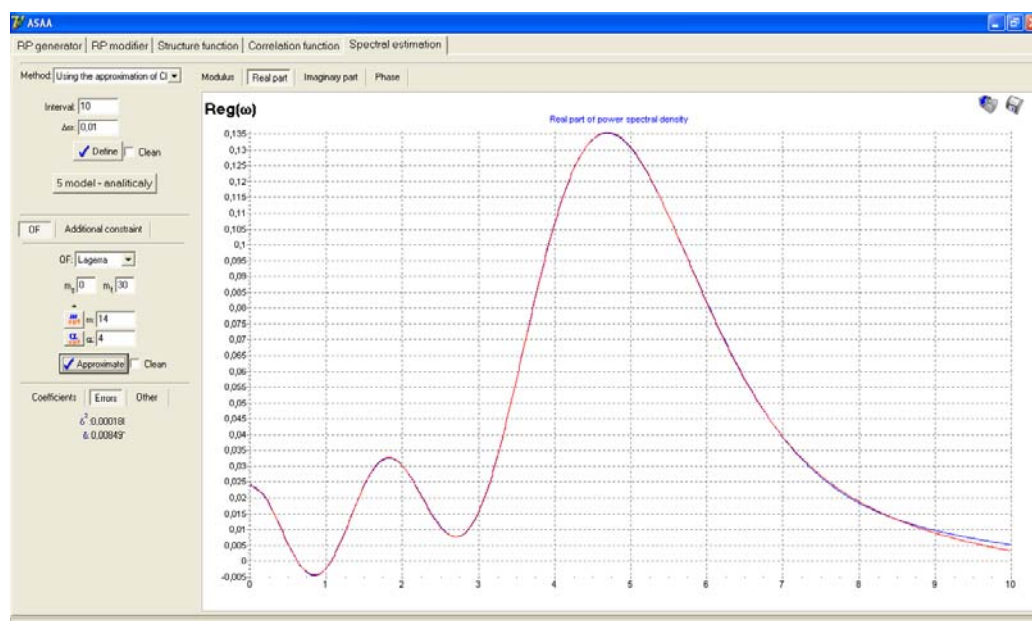


Рисунок 5.117 – Органы управления п/с спектрального анализа

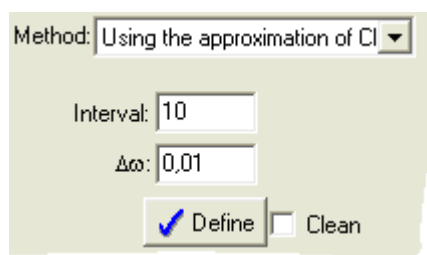


Рисунок 5.118 – Вычисление СПМ



Рисунок 5.119 – Аппроксимация СПМ

Инструмент преобразования данных в Microsoft Excel и Word

Задача преобразования возникает, например, при составлении отчета о результатах вычислений. Для быстрого решения этой задачи был разработан инструмент преобразования данных в Microsoft Excel и Word, общий вид которого представлен на рисунке 5.120.

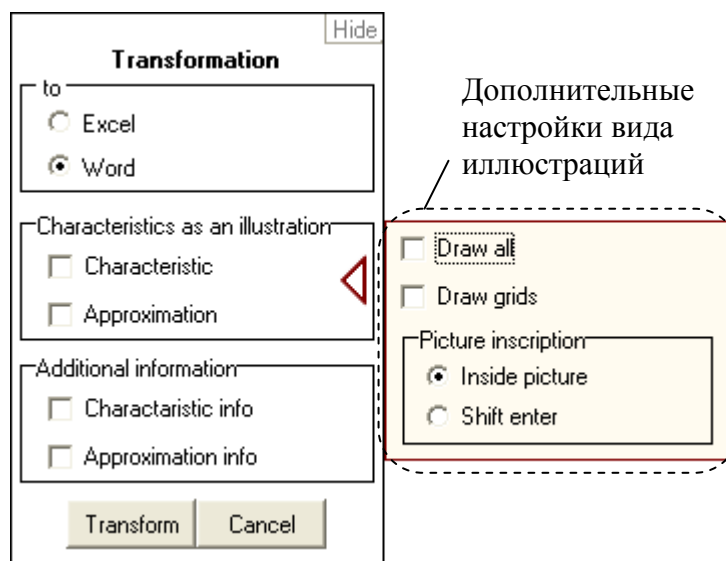


Рисунок 5.120 – Инструмент преобразования данных

Выбор приложения, в которое будет преобразована информация, осуществляется с помощью переключателей

- Excel – Преобразовать в Microsoft Excel;
- Word – Преобразовать в Microsoft Word;

Что именно отображать в качестве иллюстрации определяют флаги:

- Characteristic – Добавить на иллюстрацию исследуемую характеристику;
- Approximation – Добавить на иллюстрацию аппроксимацию характеристики;

Форма представления иллюстрации в Microsoft Excel является стандартной. Иллюстрации же, которые будут размещены в документе Microsoft Word, могут видоизменяться, и настройка их вида осуществляется с помощью выпадающего меню (рисунок 5.120):

- Draw all – Отображать на картинке все графики (как текущие характеристики и их модели, так и предыдущие);
- Draw grids – Отображать линии сетки на графике;

Picture inscription:

- Inside picture – Название рисунка будет объединено с графиком;
- Shift enter – Название рисунка будет отделено от графика «мягким переносом».

Также можно указать какая дополнительная информация необходима при преобразовании:

- Characteristic info – Добавить информацию об исследуемой характеристике (таблица 5.1);
- Approximation info – Добавить информацию об аппроксимации характеристики (таблица 5.2).

Пример таблицы, содержащей информацию
об исследуемой характеристике

Таблица 5.1

	Левая часть	Правая часть
N	37	37
dt	0,01	
Исходные данные	Загружена из файла D:\Current business\test	

Пример таблицы, содержащей информацию
об аппроксимации

Таблица 5.2

	Левая часть	Правая часть
Базис	Лагерра	Лагерра
alpha	1	1
m	10	10
betta0	-0,068058	-0,068058
betta1	-0,102896	-0,102896
betta2	-0,131263	-0,131263
betta3	-0,153863	-0,153863
betta4	-0,171345	-0,171345
betta5	-0,184303	-0,184303
betta6	-0,193284	-0,193284
betta7	-0,198786	-0,198786
betta8	-0,201267	-0,201267
betta9	-0,201142	-0,201142
betta10	-0,198791	-0,198791
Мет. погр.	0,684227	0,684227
СК погр.	0,676085	0,676085
Константа сдвига	0,000000	
Константа центрирования	-0,948751	
Исходные данные	Построена для структурной функции, загруженной из файла D:\Current business\test	

5.8. Подсистема генерирования псевдослучайных последовательностей автоматизированной системы аппроксимативного анализа законов распределения

Подсистема генерирования ПСП с заданным законом распределения состоит из трех частей [128-129]:

- генерирования ПСП методом обратной функции;
- методом линейной интерполяции обратной функции;
- учебного варианта генерирования.

Отметим, что данные могут генерироваться как в самой подсистеме, так и вводиться извне.

Данные, получаемые в первой подсистеме, передаются на вход подсистемы первичной статистической обработки, а также на вход подсистемы аппроксимации [126]. В обоих случаях передается объем выборки N и массив отсчетов ПСП.

Подсистема первичной статистической обработки включает в себя:

- оценку числовых статистических характеристик;
- построение гистограммы;
- построение плотности распределения вероятностей;
- построение функции распределения.

В данную подсистему передается число отсчетов N , массив отсчетов ПСП, число дифференциальных коридоров M . В ходе работы данной подсистемы производится оценка следующих числовых характеристик:

- математического ожидания;
- дисперсии;
- центральных моментов третьего и четвертого порядков;
- коэффициентов асимметрии и эксцесса.

Выходными данными для подсистемы являются число дифференциальных коридоров, минимальное и максимальное значение отсчетов и массив вероятностей попадания отсчетов в коридоры. Эти данные попадают на вход подсистемы аппроксимации.

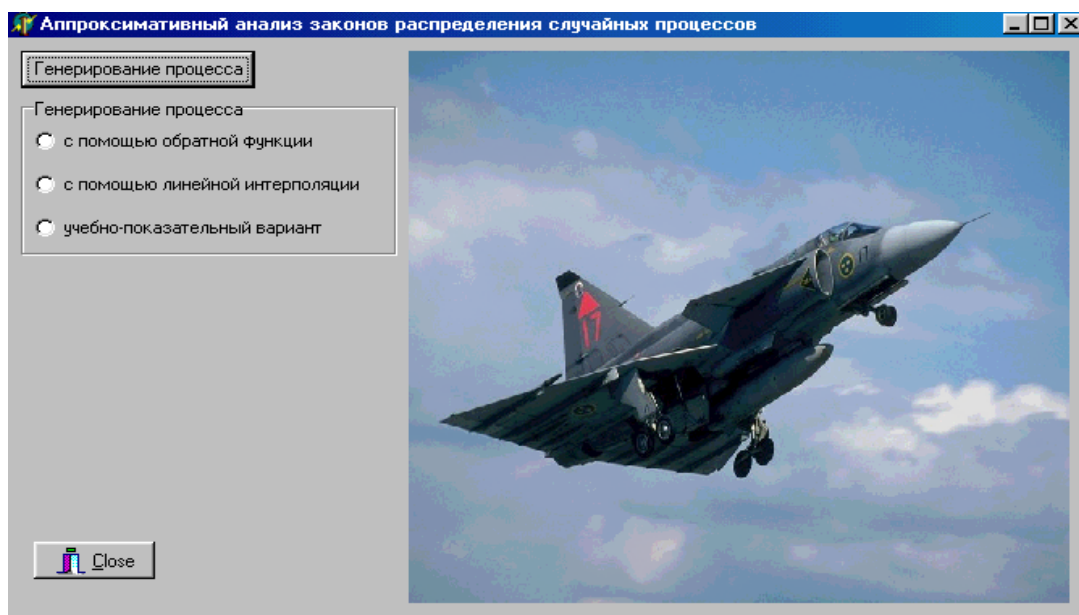


Рисунок 5.121 - Главная экранная форма

При запуске программы на экране появляется экранная форма, изображенная на рисунке 5.121. С нее осуществляется переход к генерированию процесса. Возможны три варианта перехода: к генерированию процесса методом обратной функции, приближенным методом линейной интерполяции и к учебно-показательному варианту генерирования.

Форма 1, реализующая генерирование процесса методом инверсного преобразования (с помощью обратной функции), показана на рисунке 5.122. Она представляет из себя панель, содержащую элементы ввода и отображение информации, меню и клавиши, позволяющее реализовывать различные функции системы.

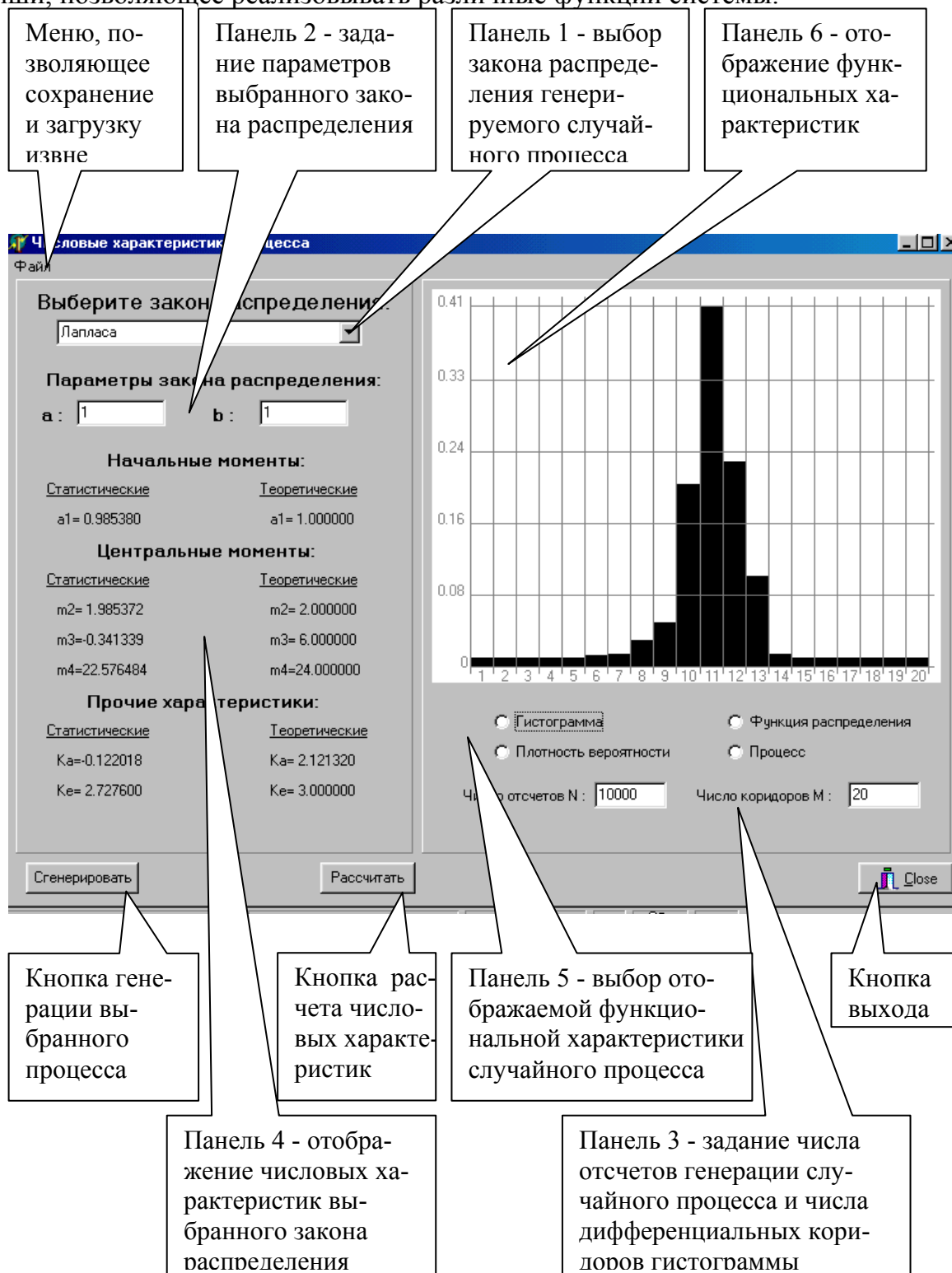


Рисунок 5.122 - Интерфейс экранной формы 1

На форме 1 присутствуют следующие элементы:

- меню, с помощью которого возможно сохранение и загрузка информации в системе;
- панель 1 - выбор закона распределения; в случае программного задания выбранный закон распределения будет использоваться для генерации процесса;
- панель 2 - позволяет задать значение одного или двух (в зависимости от закона) параметров данного закона распределения;
- панель 3 - позволяет указать число отсчетов программно генерируемого случайного процесса, а также число дифференциальных коридоров для расчета гистограммы;
- панель 4 - служит для отображения вычисленных числовых характеристик сгенерированного процесса с заданным законом распределения;
- панель 5 - позволяет выбрать вид отображаемой функциональной характеристики случайного процесса или сам график процесса;
- панель 6 - отображает одну из трех функциональных характеристик случайного процесса: гистограмму, плотность распределения вероятностей или функцию распределения.

Форма 2, реализующая генерирование процесса приближенным методом (с помощью линейной интерполяции функции распределения), показана на рисунке 5.123.

Форма 3, реализующая учебно-показательный вариант генерирования случайного процесса, показана на рисунке 5.124.

На форме 2 присутствуют следующие элементы:

- меню, с помощью которого возможно сохранение и загрузка информации в системе;
- панель 1 - выбор закона распределения; в случае программного задания выбранный закон распределения будет использоваться для генерации процесса;
- панель 2 - позволяет задать значение одного или двух (в зависимости от закона) параметров данного закона распределения а также допустимую погрешность интерполяции функции распределения;
- панель 3 - отображает координаты рассчитанных узловых точек линейно интерполируемой функции распределения;
- панель 4 - служит для отображения вычисленных числовых характеристик сгенерированного процесса с заданным законом распределения;
- панель 5 - позволяет выбрать вид отображаемой функциональной характеристики случайного процесса или сам график процесса;
- панель 6 - позволяет указать число отсчетов программно генерируемого случайного процесса, а также число дифференциальных коридоров для расчета гистограммы;
- панель 7 - отображает одну из трех функциональных характеристик случайного процесса: гистограмму, плотность распределения вероятностей или функцию распределения.

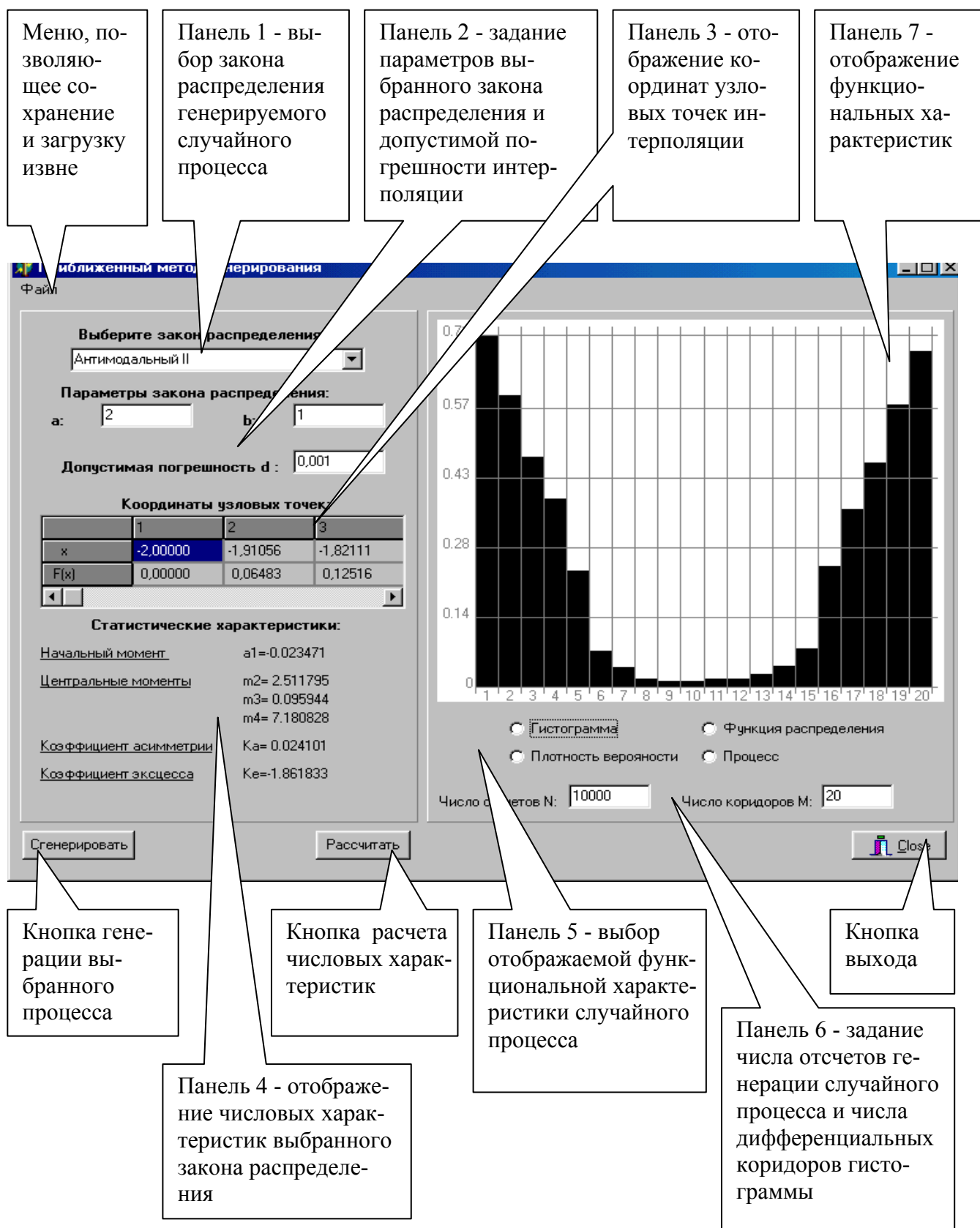


Рисунок 5.123 - Интерфейс экранной формы 2 генерирования методом линейной интерполяции и оценки статистических характеристик случайного процесса

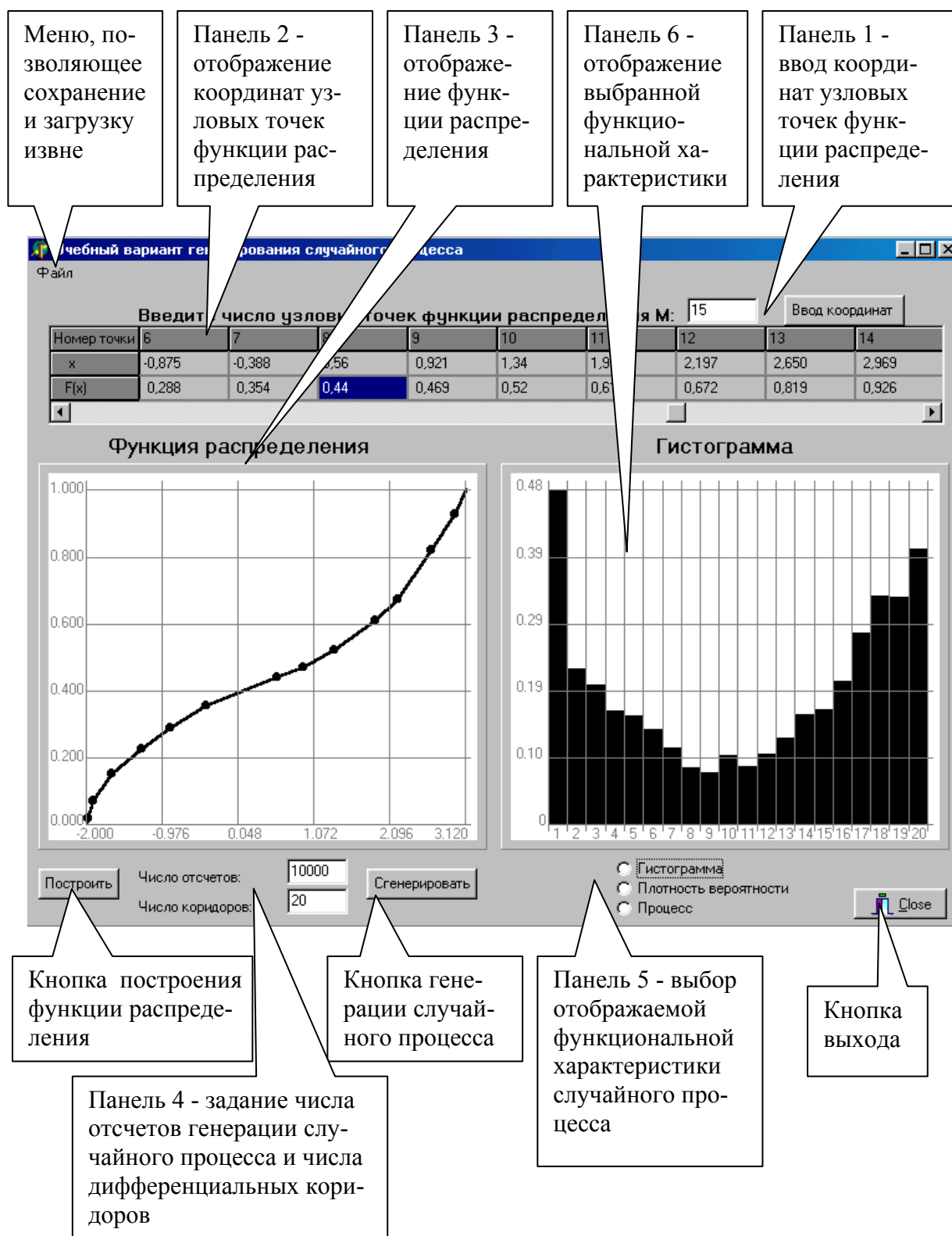


Рисунок 5.124 - Интерфейс экранной формы 3 - учебно-показательный вариант генерирования случайного процесса

На форме 3 присутствуют следующие элементы:

- меню, с помощью которого возможно сохранение и загрузка информации в системе;
- панель 1 – осуществляет ввод количества координат узловых точек функции распределения;
- панель 2 - отображает координаты узловых точек функции распределения;
- панель 3 - отображает функцию распределения и позволяет пользователю её редактирование;
- панель 4 - позволяет указать число отсчетов программно генерируемого случайного процесса, а также число дифференциальных коридоров для расчета гистограммы;
- панель 5 - позволяет выбрать вид отображаемой функциональной характеристики случайного процесса или сам график процесса;
- панель 6 - отображает выбранную функциональную характеристику.

На рисунке 5.125 подробно показано меню формы 1 и формы 2. Оно состоит из следующих пунктов:

- выход - выход из формы 2 и возвращение к основной форме;
- сохранить - сохранение выбранной характеристики:
 - ✓ гистограммы;
 - ✓ плотности распределения;
 - ✓ функции распределения;
 - ✓ отсчетов процесса;
- открыть - загрузка из файлов выбранной характеристики.

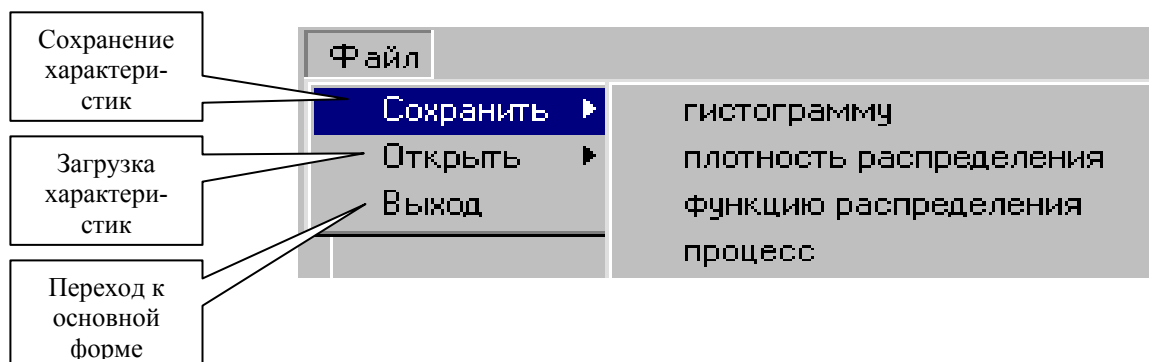


Рисунок 5.125 - Меню формы генерирования процесса методом линейной интерполяции функции распределения

Порядок работы. После загрузки главной экранной формы можно перейти либо к генерированию случайного процесса, либо к аппроксимации процесса. При нажатии кнопки «Генерирование процесса» на главной форме возможен переход к формам генерирования. Форма 1 - генерирование с помощью обратной функции; форма 2 - генерирование приближенным методом с использованием линейной интерполяции функции распределения; форма 3 - учебный вариант генерирования.

При переходе к форме 2 (рисунок 5.123) необходимо выбрать из списка на панели 1 закон распределения, по которому будет генерироваться процесс; указать параметры процесса на панели 2; указать количество отсчетов случайного процесса и число дифференциальных коридоров гистограммы на панели 6. При нажатии кнопки «Сгенерировать» отображаются координаты узловых точек функции распределения

и генерируется случайный процесс. При нажатии кнопки «**Рассчитать**» рассчитываются и отображаются на панели 4 числовые характеристики сгенерированного случайного процесса. На панели 5 выбирается и рассчитывается функциональная характеристика. При выборе на панели 5 указателя «**Процесс**» появляется форма отображения случайного процесса (рисунок 5.126).

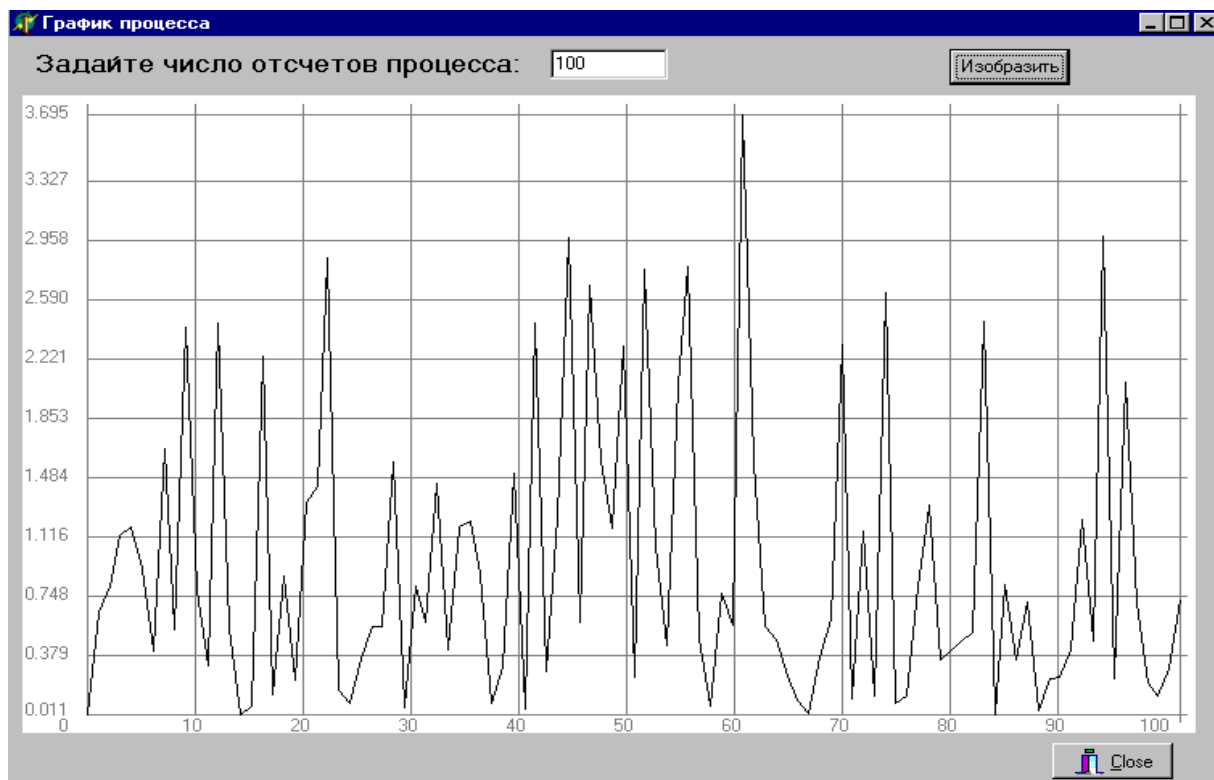


Рисунок 5.126 - Пример реализации случайного процесса

Загрузка данных извне и сохранение функциональных характеристик процесса осуществляется при использовании пунктов главного меню.

При переходе к форме 1 (рисунок 5.122) работа ведется аналогично по описанному выше алгоритму. Отличие - не отображаются координаты узловых точек функции распределения, поскольку она задается аналитически.

При переходе к форме 3 (рисунок 5.124) на панели 1 необходимо ввести количество узловых точек функции распределения и нажать кнопку «**Ввод координат**». Затем на панели 2 ввести координаты узловых точек. При нажатии на кнопку «**Построить**» на панели 3 отображается введенная функция распределения. Существует возможность редактирования функции распределения. Пользователь может передвинуть узловые точки с помощью мыши. При этом на панели 2 отображаются новые координаты узловых точек. При нажатии кнопки «**Сгенерировать**» генерируется случайный процесс. На панели 5 выбирается и рассчитывается функциональная характеристика. При выборе на панели 5 указателя «**Процесс**» появляется форма отображения случайного процесса. Выход к главной экранной форме осуществляется нажатием кнопки «**Close**» или выбором в меню пункта «**Выход**».

Загрузка координат узловых точек извне и сохранение функциональных характеристик процесса осуществляется при использовании пунктов главного меню.

Приведем примеры генерирования ПСП с заданным законом распределения с помощью разработанной системы.

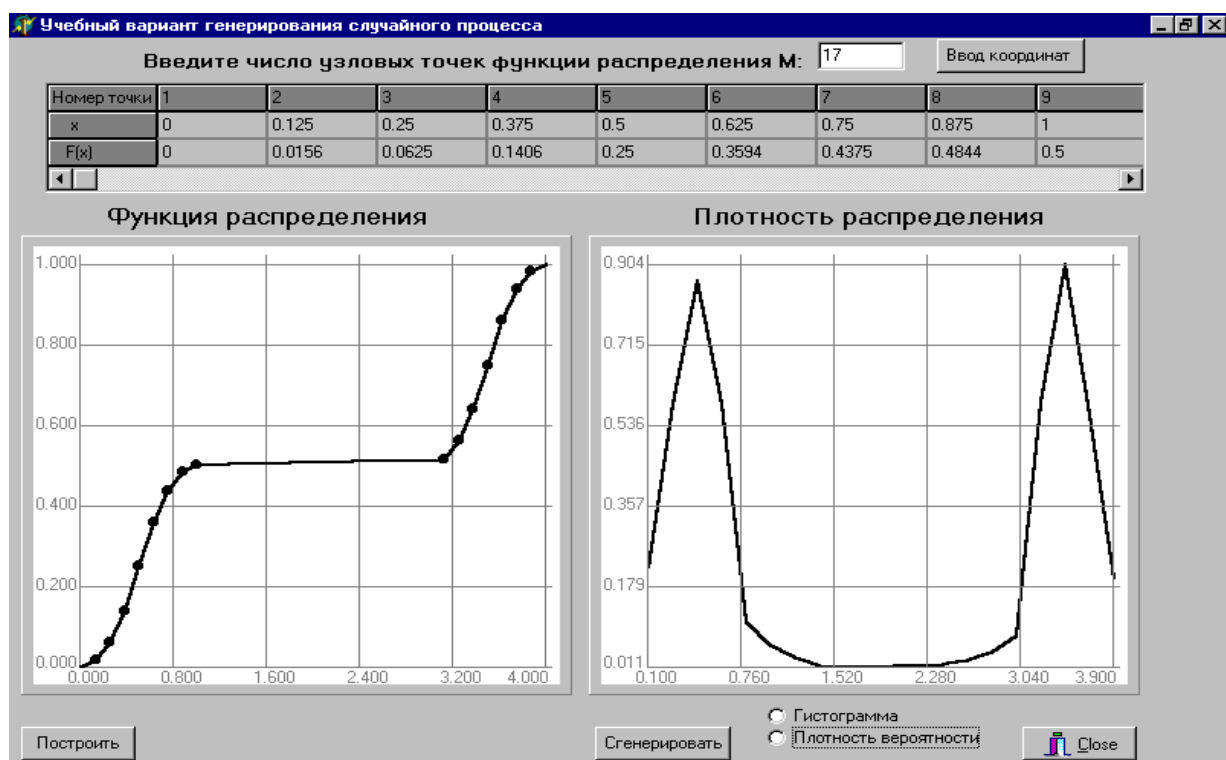


Рисунок 5.127 - Результаты генерирования ПСП с двумодальным законом распределения



Рисунок 5.128 - Результаты генерирования ПСП с трёхмодальным законом распределения

Из анализа рисунков 5.127 - 5.128 видно, что с помощью разработанной автоматизированной системы возможно генерирование ПСП с произвольным законом распределения. Отметим, что функция распределения ПСП может быть задана аналитически, таблично и в графическом виде.

5.9. Автоматизированная система для аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов

Автоматизированная система состоит из комплекса технических средств, пакета прикладных программ, интерфейса пользователя, математического и методического обеспечения [87, 111, 171]. Для удобства использования в учебном процессе в систему включен блок генерирования случайных процессов с заданными законами распределения вероятностей.

Технические требования, предъявляемые к системе, состоят в следующем:

- программные требования - Microsoft Windows 95-98;
- аппаратные требования - процессор Pentium 100 МГц, ОЗУ 16 Мб, на жестком диске 15 Мб.

Описание подсистем

Разработка структуры пакета программ велась в соответствии с приведенной схемой, представленной на рис. 5.129. Учитывая большое разнообразие законов распределения, основным требованием, предъявляемым к структуре пакета программ, является открытость, то есть возможность добавления в программу новых методов аппроксимации и законов распределения без изменения структуры программы. В соответствии с этим требованием пакет программ системы разбит на четыре блока, обмен между которыми осуществляется в виде передачи данных (см. рис. 5.130):

- получения статистических данных;
- оценки статистических данных;
- аппроксимации;
- оценки качества аппроксимации.

Блок получения статистических данных делится, в свою очередь, на три части:

- генерация случайного процесса с заданным видом закона распределения;
- ввод выборки из N отсчетов случайного процесса из выбранного файла;
- ввод частот попадания в дифференциальные коридоры отсчетов случайного процесса из выбранного файла.

В первом случае данные генерируются в самой программе, во втором - возникают как результат эксперимента или генерируются в другой программе и передаются в систему. Данные, получаемые в первом блоке, передаются в блок оценки статистических характеристик вместе со способом получения информации. В первом и втором случае передается массив отсчетов случайного процесса, в третьем - частоты попадания в дифференциальные коридоры. В первом случае вводится также число дифференциальных коридоров и передается номер закона распределения, по которому сгенерирован случайный процесс.

Блок оценки статистических характеристик состоит из шести частей: оценки числовых характеристик случайного процесса; расчета и построения плотности



Рисунок 5.129 - Пакет программ генерирования и аппроксимации законов распределения случайных процессов

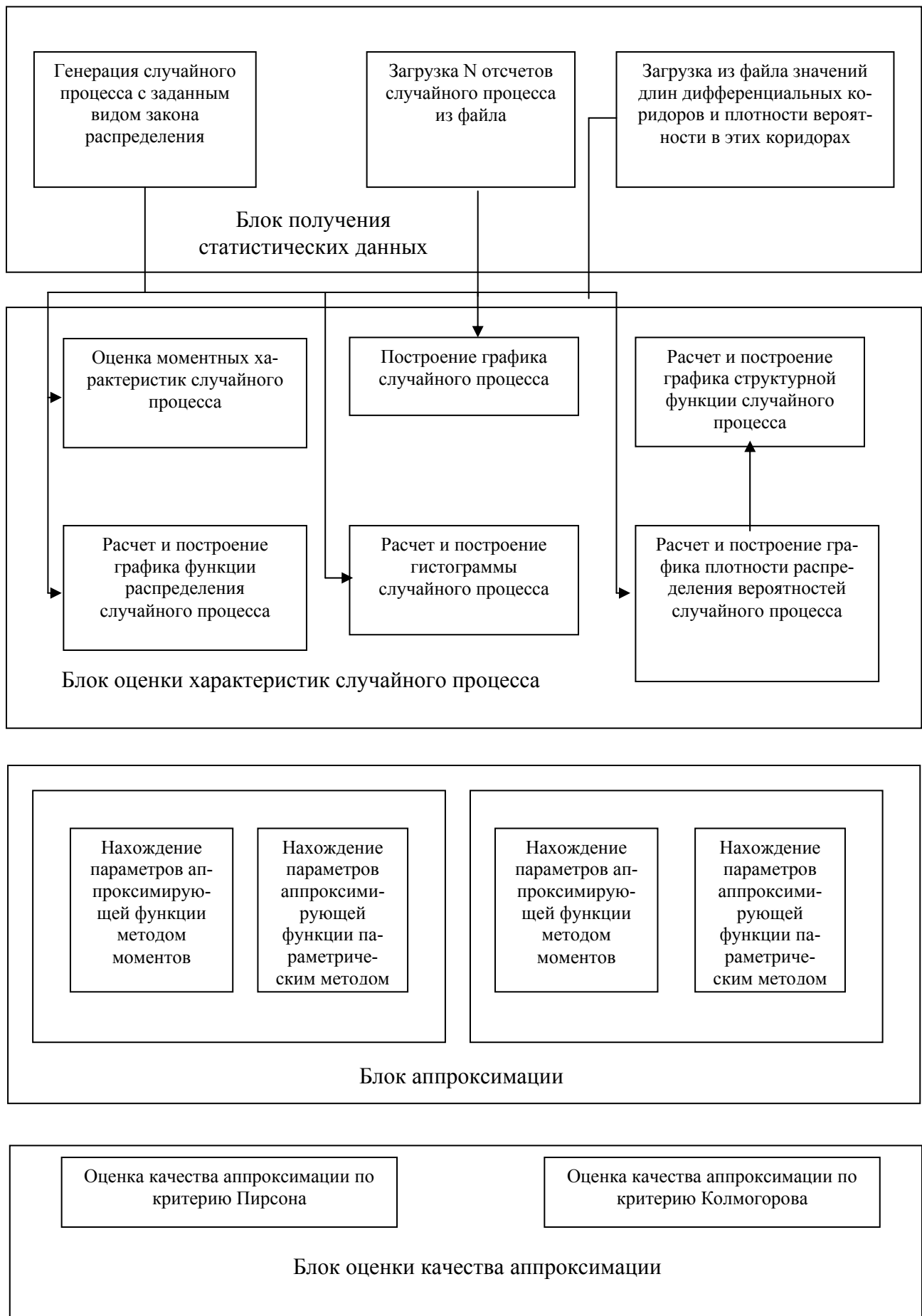


Рисунок 5.130 - Блоки пакета прикладных программ и их взаимодействие

распределения вероятностей; функции распределения, гистограммы; фазового портрета и графика случайного процесса.

Данные в этот блок попадают из блока получения статистических данных. В первом и втором случае на основе отсчетов случайного процесса рисуется график процесса, определяются частоты попадания в дифференциальные коридоры, и формируется гистограмма, оцениваются числовые характеристики случайного процесса. Данные о частотах попадания в дифференциальные коридоры передаются в блоки формирования функции распределения и плотности распределения вероятности. Значения плотности распределения вероятности передаются в блок формирования фазового портрета случайного процесса.

Блок аппроксимации состоит из четырех частей: аппроксимации плотности распределения вероятностей и функций распределения по методу моментов, аппроксимации плотности распределения вероятностей и функций распределения параметрическим методом.

В блок аппроксимации передаются из блока получения статистических данных число дифференциальных коридоров и номер закона распределения, а из блока оценки статистических характеристик - значения плотности распределения вероятностей и значения функции распределения, значения математического ожидания и дисперсии. Математическое ожидание и дисперсия используется в методе моментов, значение плотности вероятности и функции распределения используется в параметрическом методе.

Используя переданные значения и выбранный для аппроксимации закон распределения, в данном блоке вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующего закона.

Блок оценки качества аппроксимации состоит из двух частей:

- оценки по критерию Пирсона;
- оценки по критерию Колмогорова.

В блок оценки качества аппроксимации передаются:

- из блока получения статистических данных - значения частот попадания в дифференциальные коридоры, число отсчетов случайного процесса, число дифференциальных коридоров;
- из блока оценки статистических характеристик - значения функции распределения;
- из блока аппроксимации - значения неизвестных параметров аппроксимирующего закона распределения.

Благодаря такому блочному построению структуры программы можно добавлять новые возможности, не видоизменяя ее принципиально. Трудоемкость таких изменений будет определяться только сложностью программной реализации самих изменений, а не перестройкой структуры системы.

Описание интерфейса системы

Основу интерфейса системы составляют две основные экранные формы, с которыми работает пользователь:

- экранная форма задания случайного процесса и оценивания его характеристик;
- экранная форма аппроксимации случайных процессов и оценки качества аппроксимации.

Первая форма, показанная на рис. 5.131, представляет из себя панель, содержащую элементы ввода и отображение информации, а также «горячие» клавиши, позволяющие реализовывать различные функции системы:

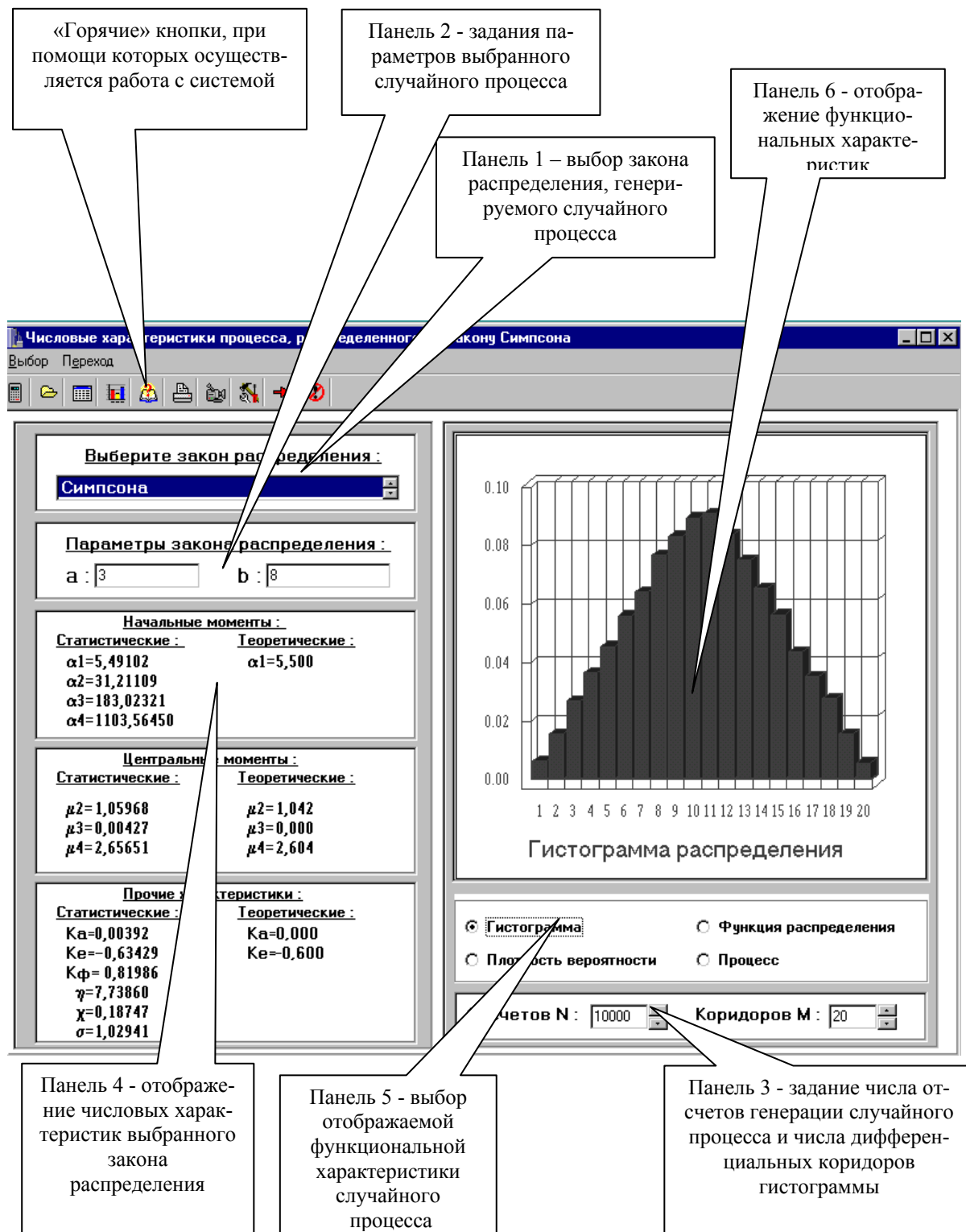


Рисунок 5.131 - Интерфейс экранной формы генерирования и оценки статистических характеристик случайного процесса

На главной форме присутствуют следующие элементы:

- панель «горячих» клавиш, с помощью которой осуществляется управление работой системы;
- панель 1 – выбор закона распределения для генерации процесса, в случае его программного задания;
- панель 2 появляется после выбора закона распределения и позволяет задать значение одного или (в зависимости от закона) двух параметров данного закона распределения;
- панель 3 позволяет указать число отсчетов программно-генерируемого случайного процесса, а также число дифференциальных коридоров для расчета гистограммы;
- панель 4 служит для отображения вычисленных числовых характеристик сгенерированного с заданным видом закона распределения случайного процесса;
- панель 5 позволяет выбрать вид отображаемой функциональной характеристики случайного процесса или сам график процесса;
- панель 6 отображает одну из трех функциональных характеристик случайного процесса: гистограмму, плотность распределения вероятностей или функцию распределения.

На рис. 5.132 более подробно показана панель «горячих» кнопок. Она состоит из следующих кнопок:

- расчетов – генерирует случайный процесс с заданным видом закона распределения и параметром;
- загрузки из файла – требует указать файл и вызывает для работы экранную форму приема статистических данных, эта экранная форма показана на рис. 5.133;
- отображения расчетов – считает и отображает числовые характеристики случайного процесса;
- отображения функциональных характеристик – рассчитывает и показывает на панели 6 выбранную на панели 5 функциональную характеристику случайного процесса;
- справки – вызывает справочную систему, содержащую основные сведения об основных видах законов распределения;
- печати – позволяет вызвать стандартный диалог печати под Windows;
- настройки принтера – вызывается стандартное окно настройки параметров принтера;
- перехода к экранной форме структурной функции – при нажатии вызывает экранную форму, отображающую структурную функцию случайного процесса, экранная форма структурной функции показана на рис. 5.136;
- перехода к экранной форме аппроксимации случайного процесса;
- выхода из программы.

На рис. 5.133 показана экранная форма загрузки данных из файла.

На панели 1 выбирается вид данных: отсчеты случайного процесса или частоты попадания в дифференциальные коридоры. В том случае, если выбраны отсчеты на панели 2, задается их число. В случае выбора частот на панели 3 следует указать число дифференциальных коридоров, а также минимальную и максимальную границу диапазона.

После этого, по нажатию кнопки 1, происходит чтение данных из указанного перед этим файла.

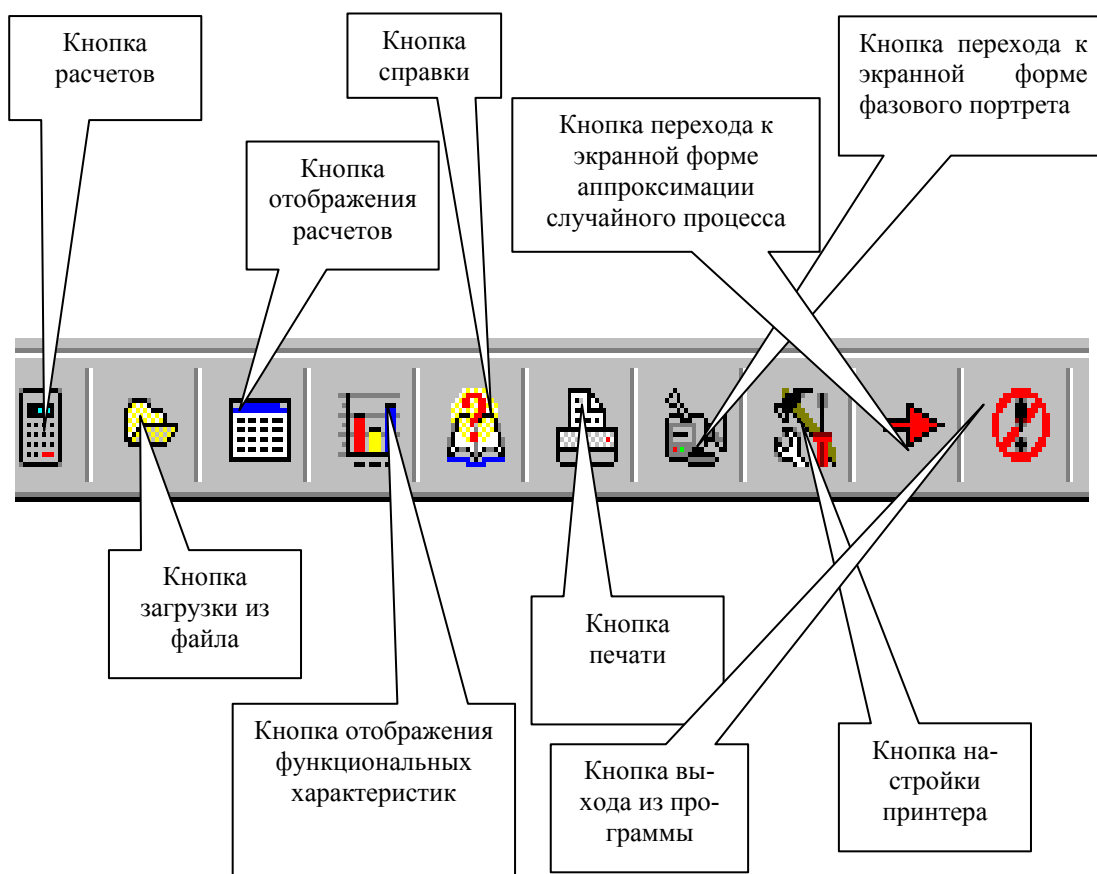


Рисунок 5.132 - Панель «горячих» кнопок

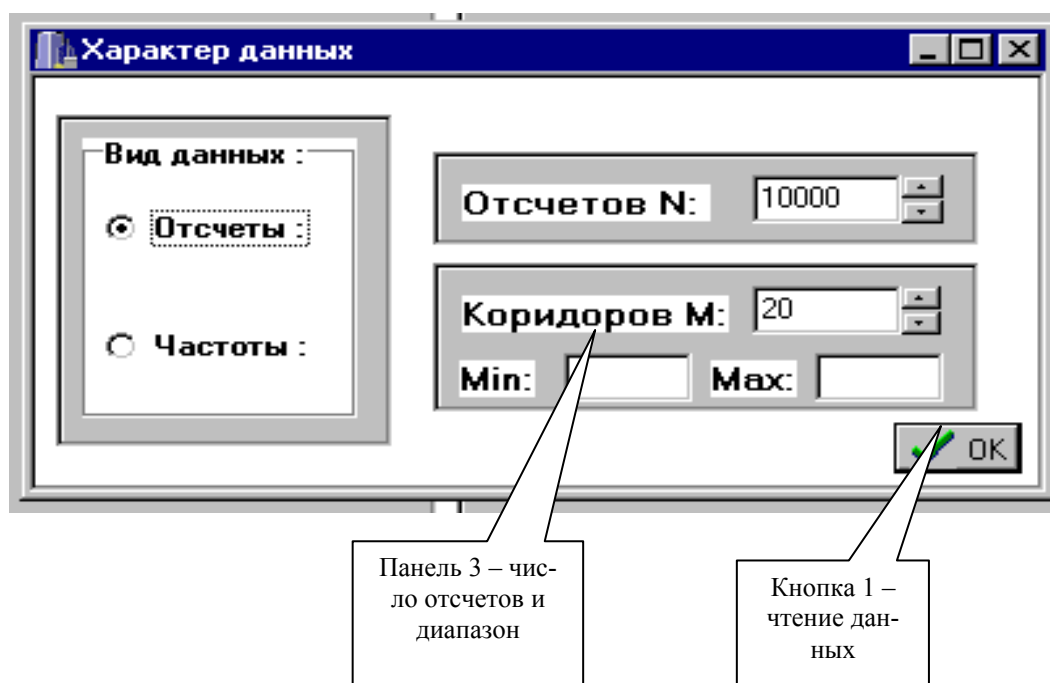


Рисунок 5.133 - Экранная форма загрузки данных из файла

На рис. 5.135 показана экранная форма отображения графика случайного процесса. Она появляется на экране после выбора кнопки с названием «Процесс» на панели 5 основной экранной формы. На экранной форме отображения графика присут-

ствуют панель «горячих» кнопок, панель отображения графика и панель задания числа отсчетов. На панели «горячих» кнопок (рис. 5.134) четыре кнопки: настройки принтера, печати формы, возвращения на основную экранную форму и отображения графика, которая перерисовывает график после изменения числа отображаемых отсчетов случайного процесса. Число отсчетов задается на панели 2. На панели 3 отображается график случайного процесса.

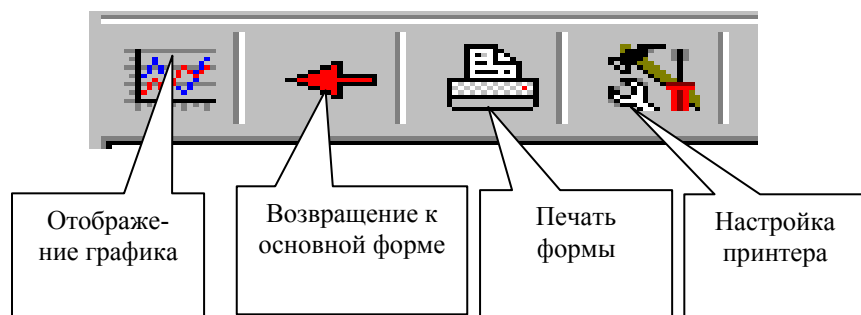


Рисунок 5.134 - Панель «горячих» кнопок экранной формы отображения случайного процесса

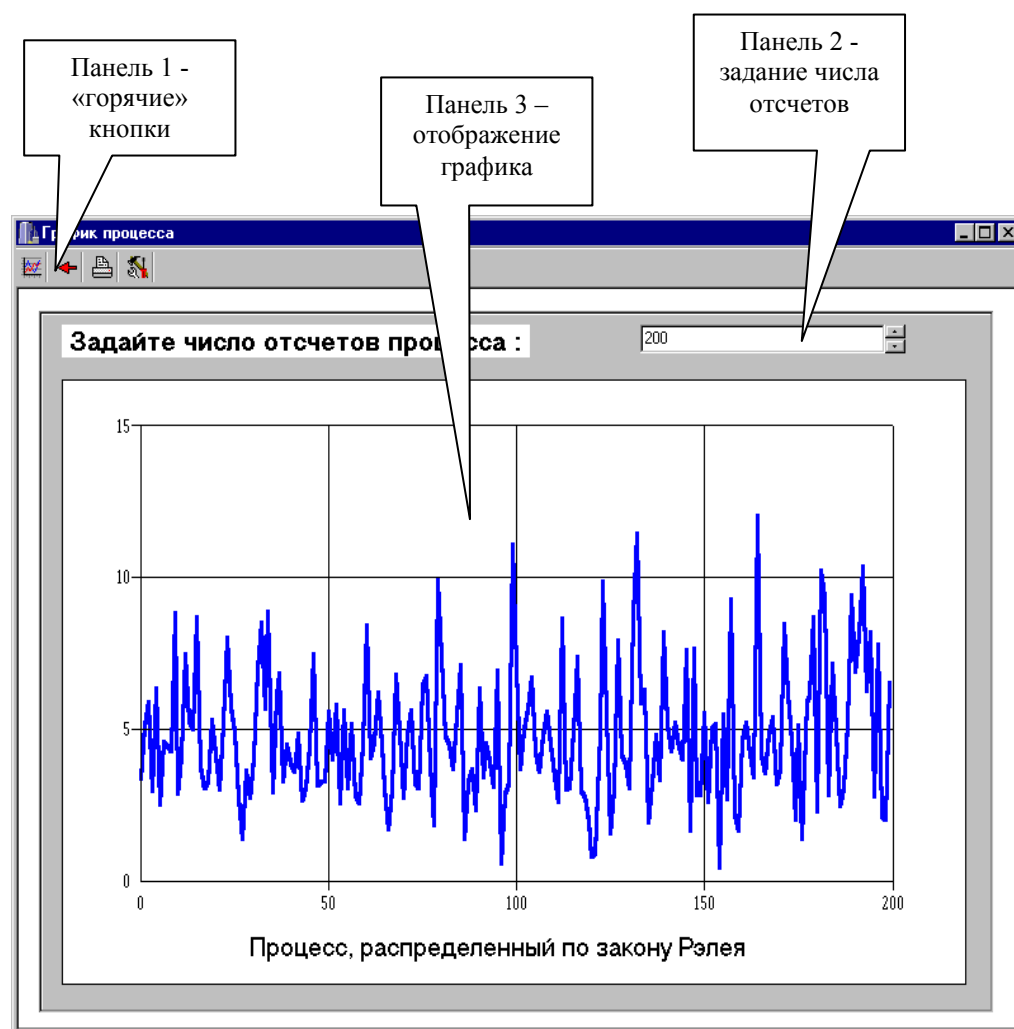


Рисунок 5.135 - Экранная форма отображения случайного процесса

На рис. 5.136 показана экранная форма расчета и отображения структурной функции. На этой форме присутствуют панель «горячих» кнопок и панель отображения графика структурной функции. На панели «горячих» кнопок есть три кнопки: по-

строения структурной функции, возвращения на основную экранную форму и вызова справки.

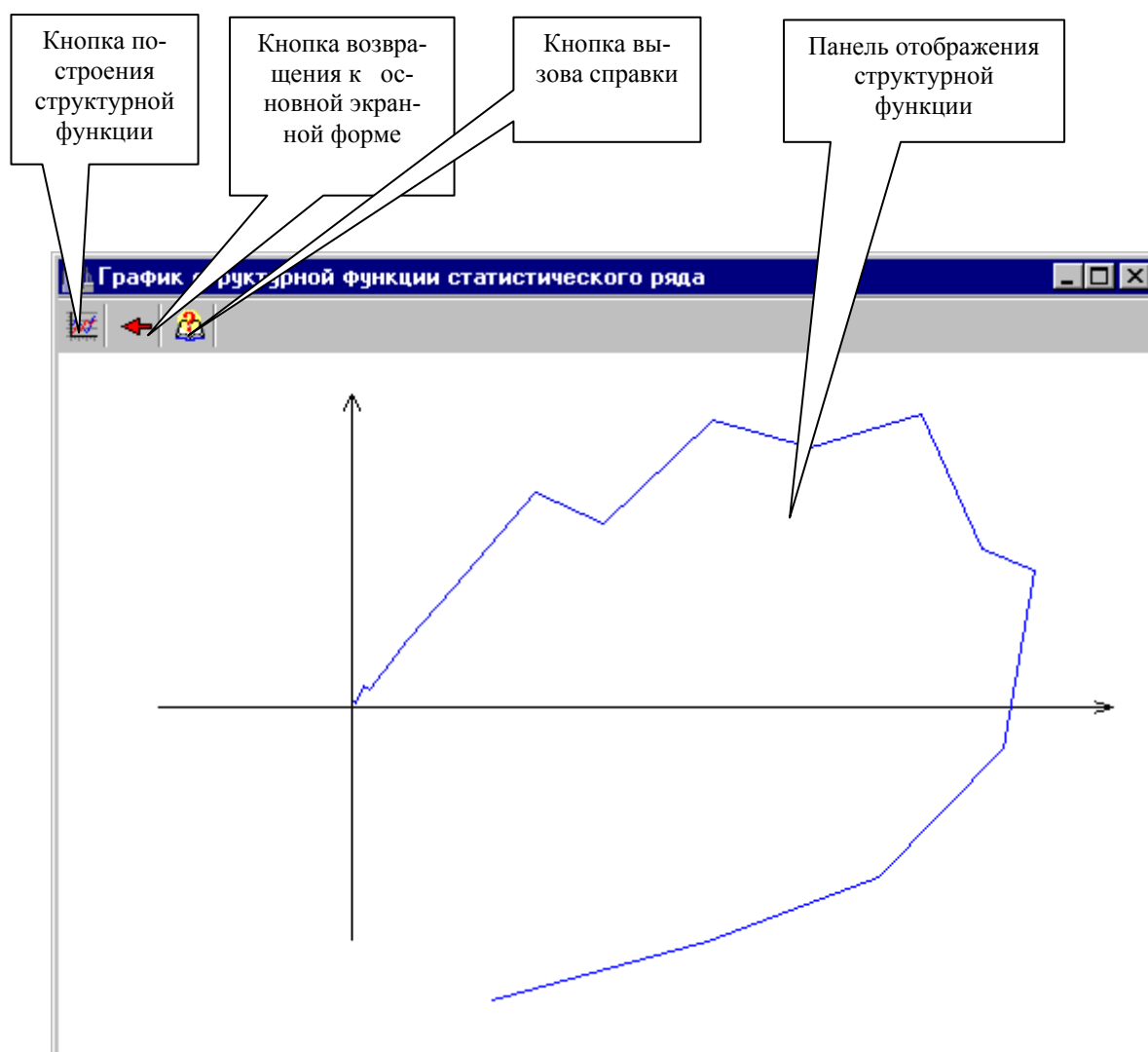


Рисунок 5.136 - Экранная форма расчета и отображения структурной функции случайного процесса

Вторая экранная форма предназначена для реализации блока аппроксимации. Сама форма, показанная на рис. 5.137, представляет собой панель, содержащую элементы ввода и отображение информации, а также «горячие» клавиши, позволяющие реализовывать различные функции системы. На рис. 5.138 - 5.140 представлены укрупненные изображения используемых инструментов.

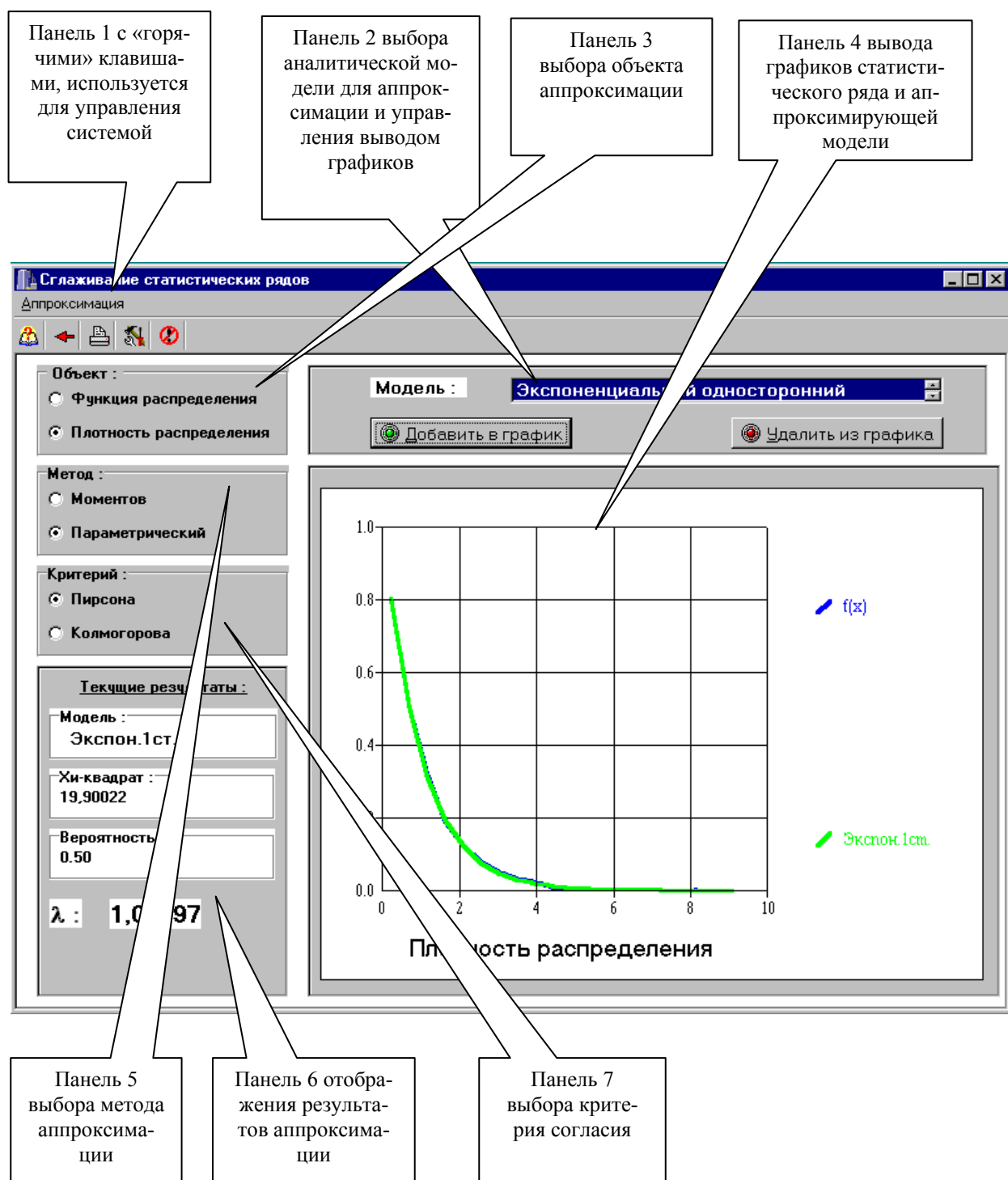


Рисунок 5.137 - Общий вид формы блока аппроксимации

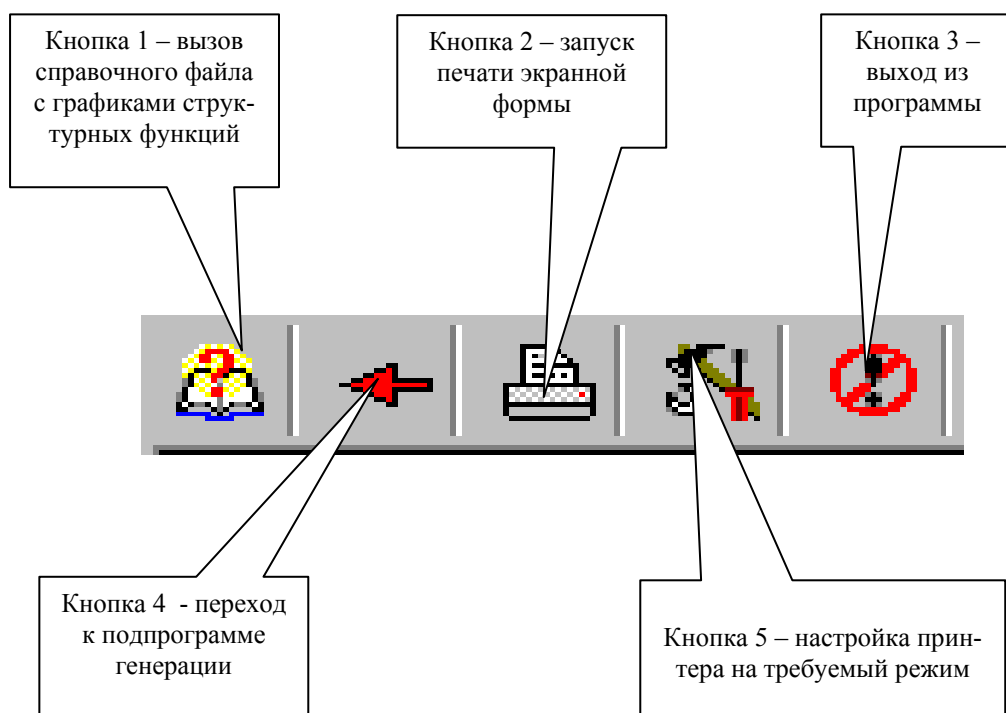


Рисунок 5.138 - Панель инструментов

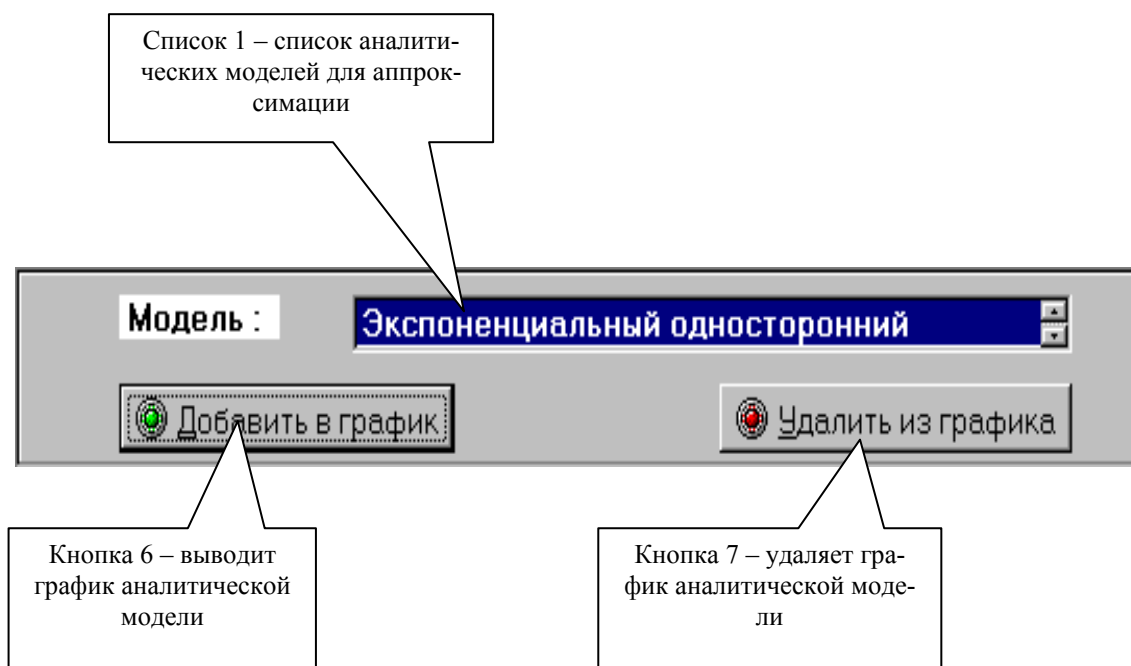


Рисунок 5.139 - Панель выбора аналитической модели

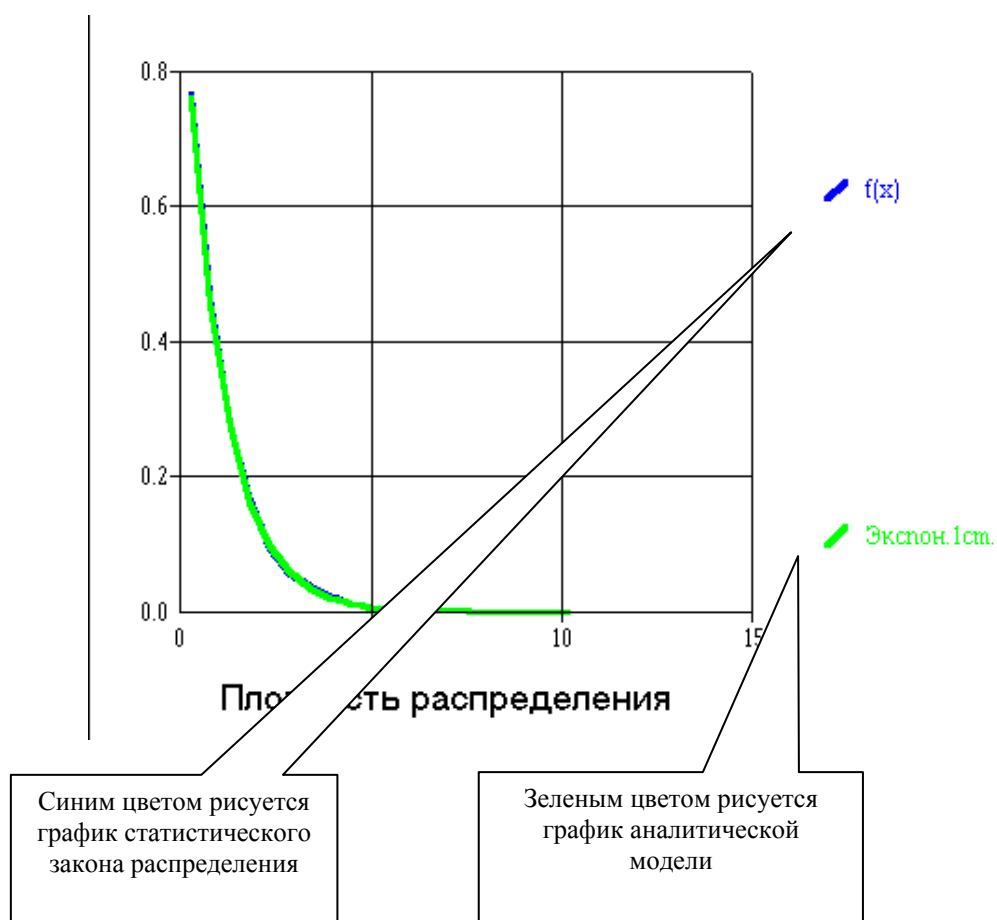
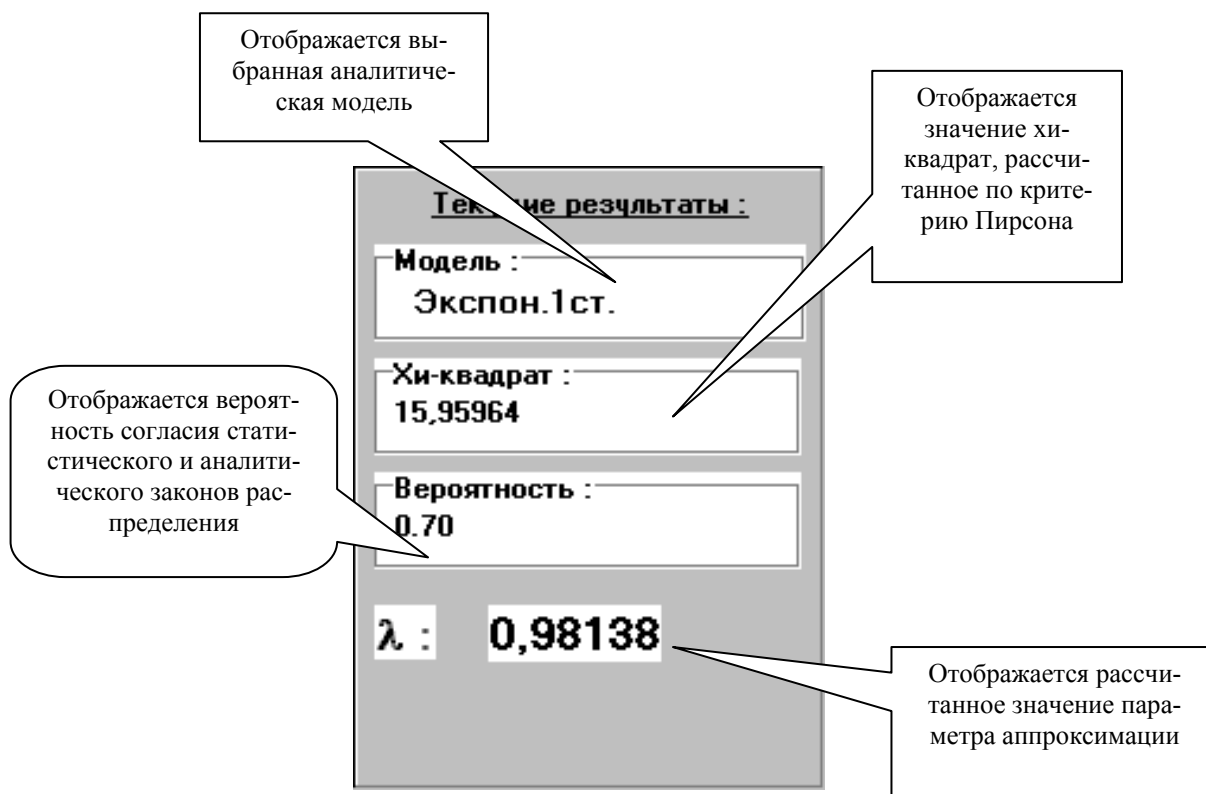


Рисунок 5.140 - Панели вывода результатов

Порядок работы с системой

После загрузки основной экранной формы следует решить, будет ли проведена генерация процесса в самой системе, или будут загружены данные извне. В первом случае на панели 1 основной экранной формы следует выбрать закон распределения из списка законов, с которым будет сгенерирован данный процесс (см. рис. 5.131). На экранной форме появится панель 2, на которой, в зависимости от закона, следует задать значения одного или двух параметров. На панели 3 нужно задать значения числа отсчетов генерируемого процесса и числа дифференциальных коридоров. После нажатия на кнопку расчетов панели «горячих» кнопок основной экранной формы будет произведен расчет N отсчетов процесса.

Для экспорта данных в программу следует нажать кнопку загрузки из файла на основной экранной форме. Пользователю будет предложено указать загружаемый файл в стандартном диалоговом окне Windows. После указания файла появится экранная форма загрузки данных из файла, в которой следует указать тип передаваемых данных.

На первом этапе задаются данные процесса. На втором этапе оцениваются различные характеристики этого процесса. При нажатии на кнопку отображения расчетов на экране появляются числовые характеристики случайного процесса. На панели 5 нажатием кнопки можно выбрать график одной из трех функциональных характеристик или график самого процесса.

При нажатии на кнопку отображения фазового портрета, загружается экранная форма, позволяющая рассчитать и построить график (см. рис. 5.136).

В начале работы с экранной формой аппроксимации случайного процесса пользователь уже должен иметь гипотезу о виде закона распределения исследуемого процесса. Этот гипотетический закон распределения выбирается из общего списка законов распределения на панели 2 (см. рис. 5.137).

После чего, на панели 3 следует выбрать ту функциональную характеристику случайного процесса, по которой будет проводиться аппроксимация: функцию распределения или плотность распределения вероятностей. Выбранная функциональная характеристика графически отображается на панели 4.

На панели 5 выбирается метод нахождения неизвестных параметров теоретического закона распределения:

- метод моментов;
- параметрический метод.

Указав на панели 7 метод оценки качества аппроксимации, следует нажать кнопку 6 на панели 2. По нажатию этой кнопки происходит нахождение неизвестных параметров теоретического закона распределения, и результаты отображаются на панелях 4 и 6.

На панели 4 рисуется выбранная функциональная характеристика теоретического закона распределения, а на панели 6 показывается рассчитанное значение χ^2 (критерий Пирсона) или λ (критерий Колмогорова) и значение вероятности того, что расхождение между статистическим и теоретическим законами распределения можно объяснить случайными причинами.

Если вычисленное значение вероятности не удовлетворяет пользователя, то, нажав кнопку 7, он может убрать график функциональной характеристики теоретического закона распределения с панели 4 и повторить результаты расчёта.

Для примера на рис. 5.141 приведены результаты определения параметров распределения закона Вейбулла.

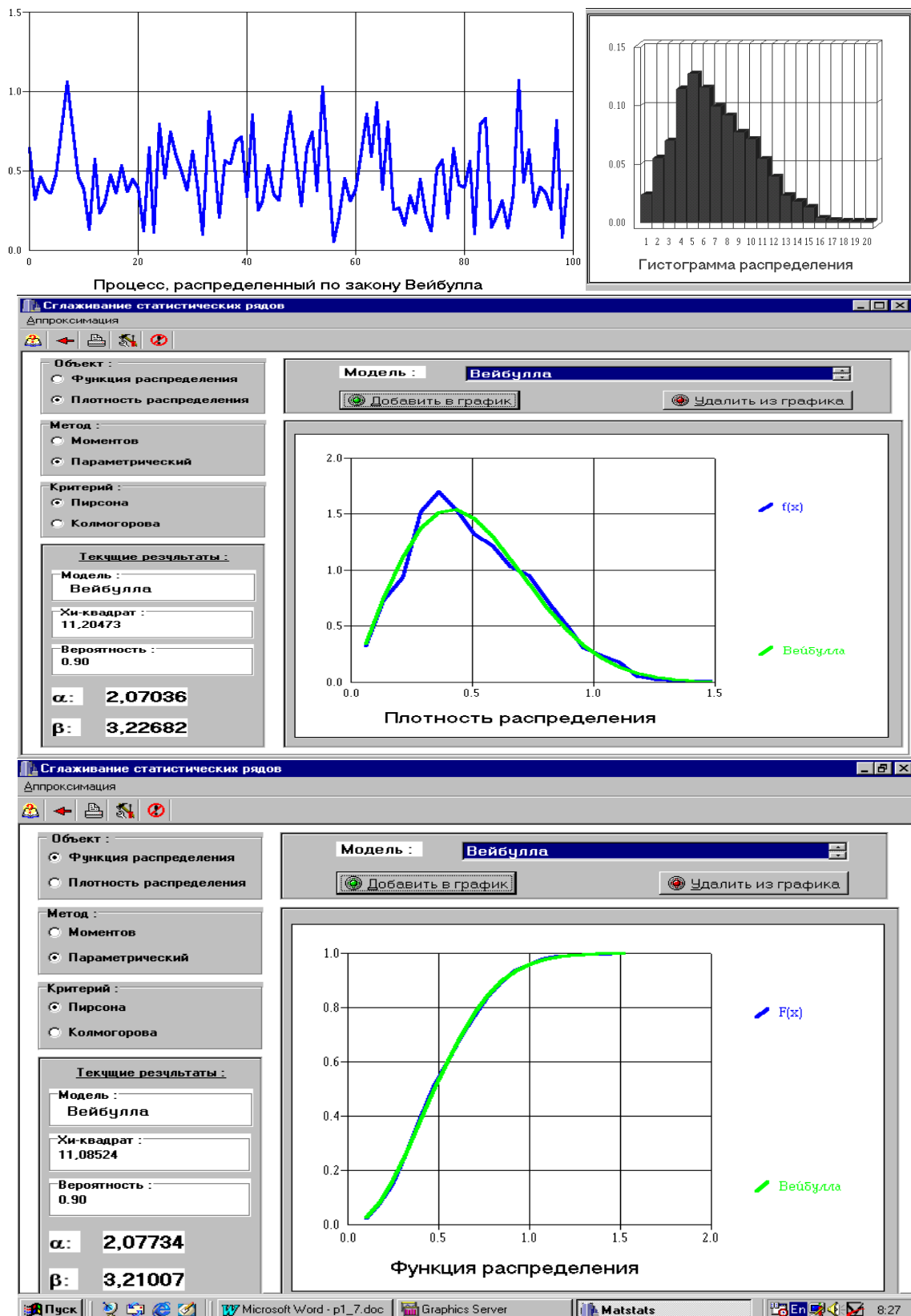


Рисунок 5.141 - Результаты определения параметров закона распределения Вейбулла

5.10. Автоматизированная система аппроксимативного анализа законов распределения ортогональными полиномами и нейросетевыми функциями

Разработанная автоматизированная система состоит из группы подсистем, реализующих следующие задачи (см. рис. 5.142) [143-145]:

- генерация реализации эквидистантного случайного процесса с заданным видом закона распределения, а также загрузка реализаций эквидистантных и неэквидистантных случайных процессов, полученных в результате натурального эксперимента;
- построение сплайн-моделей функциональных характеристик случайных процессов;
- аппроксимация функциональных характеристик (реализация, закон распределения, плотность вероятности) случайного процесса ортогональными полиномами Лежандра, Чебышева, Лагерра и Эрмита;
- интерполяция функциональных характеристик квадратичными и кубическими сплайнами;
- нахождение аналитических выражений функциональных характеристик с использованием нейросетевых моделей (адаптивный алгоритм и метод однократного обучения);
- прогнозирование указанных характеристик;
- вычисление погрешностей приближения указанных характеристик;
- накопление результатов аппроксимации и оценки погрешностей с использованием встроенного модуля базы данных.

Система позволяет генерировать случайные процессы с заданным видом закона распределения методом обратной функции или производить считывание выборки данных из файла. Для генерации в системе присутствует набор стандартных законов распределения. При чтении выборки из файла вид закона распределения ничем не ограничен. Затем данная система по введенной выборке строит сплайн-модели плотности вероятности и функции распределения.

Система осуществляет аппроксимативный анализ, который позволяет производить аппроксимацию функциональных характеристик ортогональными полиномами Чебышева, определенными на конечном интервале, ортогональными полиномами Лагерра, определенными на полубесконечном интервале, ортогональными полиномами Лежандра, определенными на конечном интервале, и ортогональными полиномами Эрмита, определенными на бесконечном интервале. При этом используются различные приемы, повышающие точность аппроксимации.

Система осуществляет интерполяцию функциональных характеристик по узловым точкам с использованием квадратного интерполяционного сплайна и кубического интерполяционного сплайна.

После аппроксимации/интерполяции система рассчитывает абсолютную и среднеквадратическую погрешность восстановления аппроксимируемой (интерполируемой) функции.

По восстановленным из выборки характеристикам и по исходным теоретическим характеристикам строятся производные функциональные характеристики (фазовый портрет и т.д.), а также рассчитываются и сравниваются восстановленные моментные характеристики и выборочные моментные характеристики.

Система заносит на хранение в базу данных аппроксимированные тем или иным способом функциональные характеристики, которые выводятся на один график, что позволяет сравнить, например, одну и ту же характеристику, аппроксимированную несколькими различными методами.

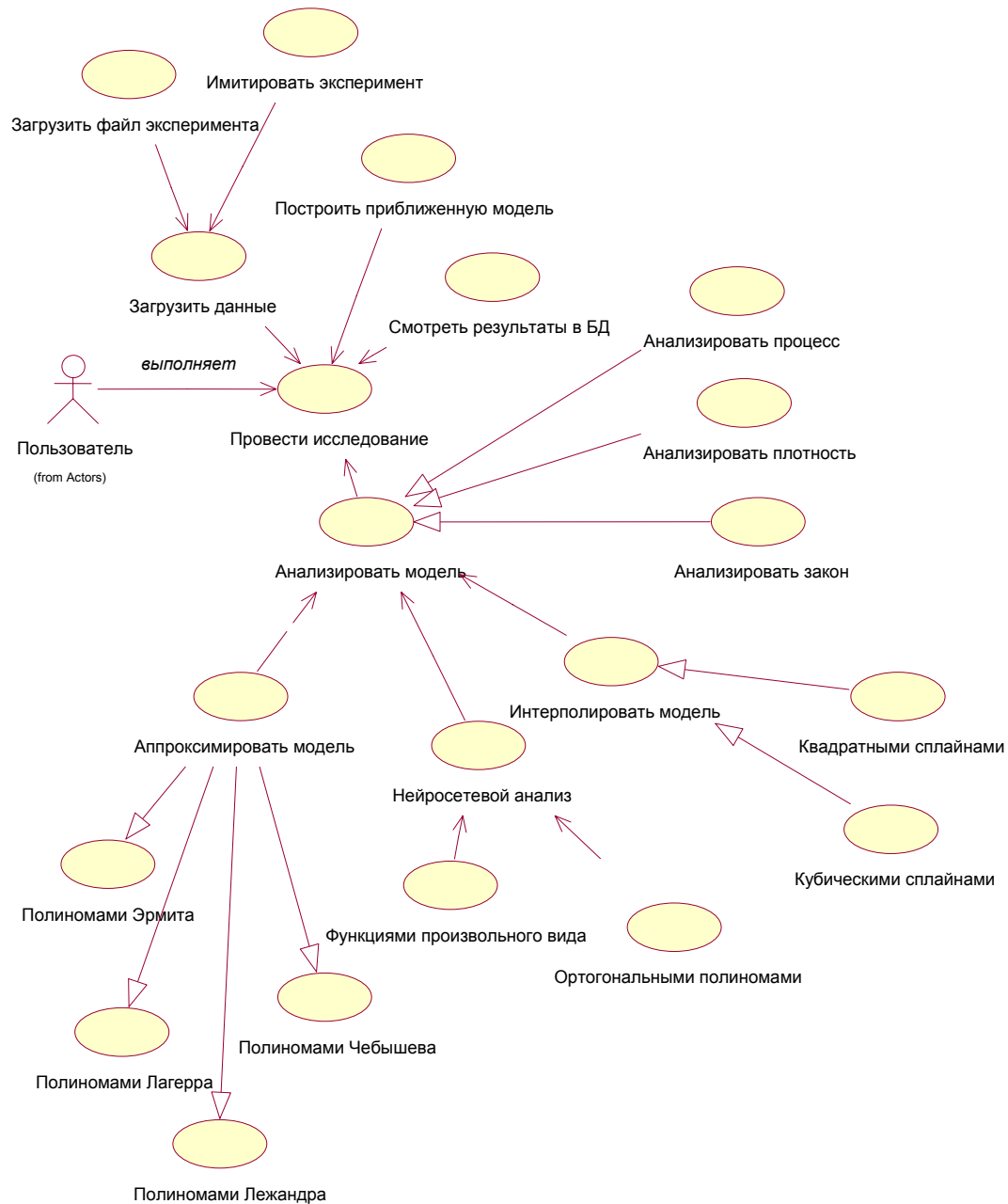


Рисунок 5.142 – Диаграмма вариантов использования

После запуска системы на экране появляется главная форма, которая представлена на рисунке 5.143.

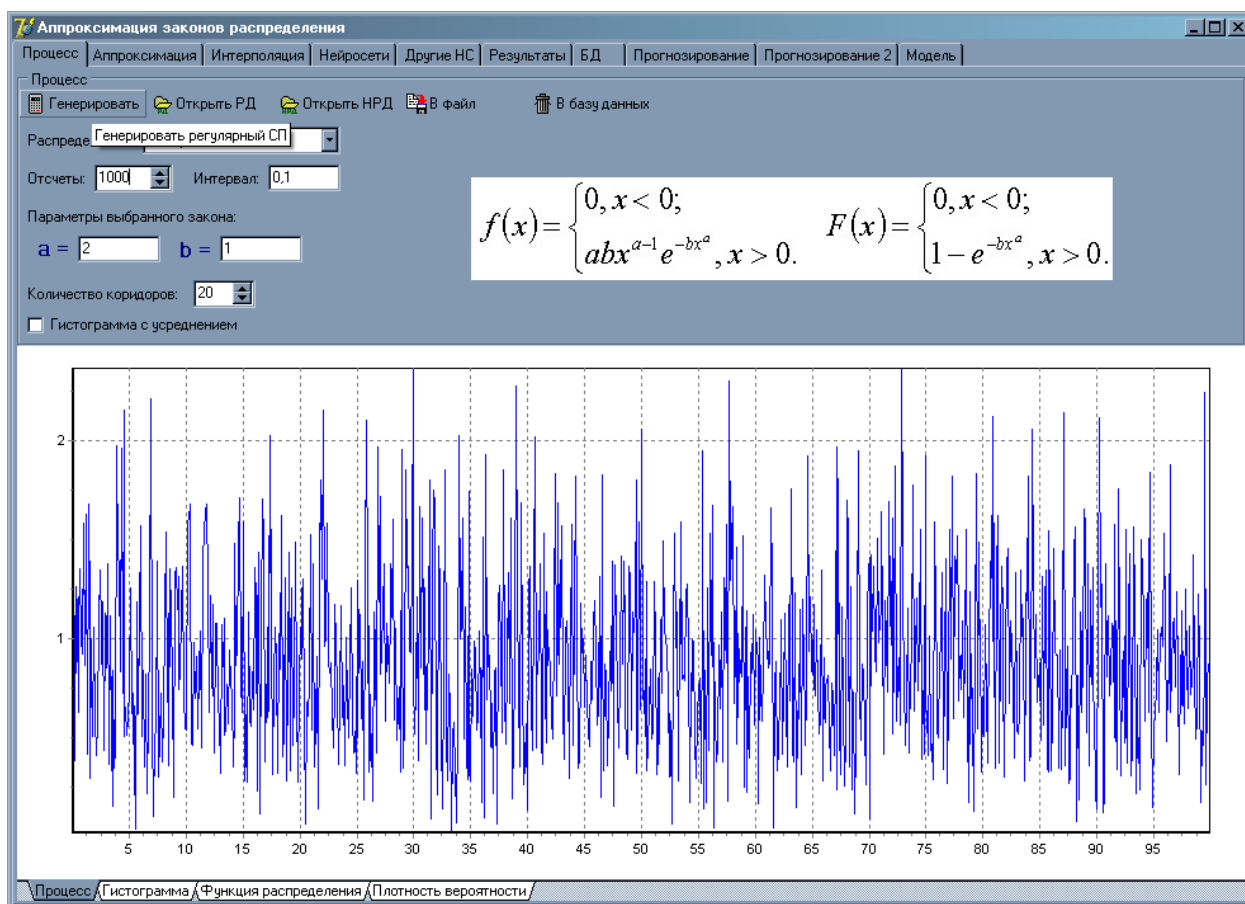


Рисунок 5.143 – Главная форма системы

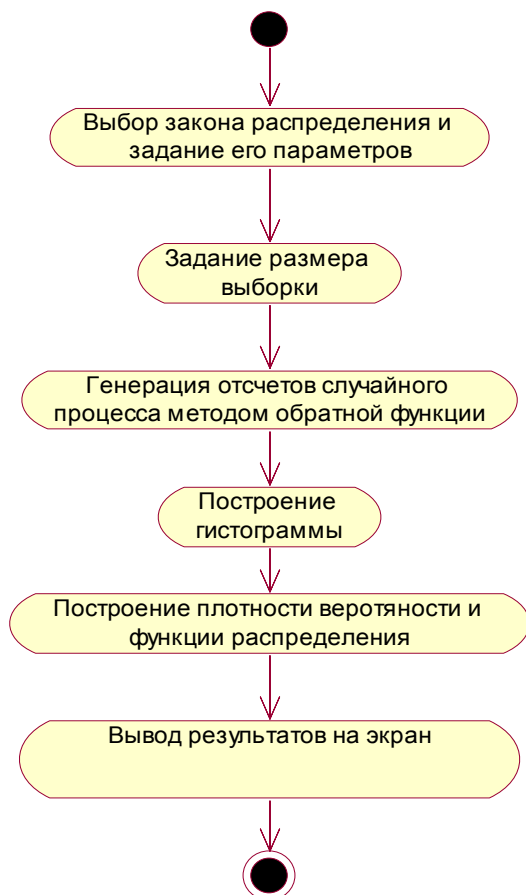


Рисунок 5.144 - Имитировать эксперимент

Пользователю следует выбрать, с какими данными он хочет работать: с данными, которые находятся в файле (например, это могут быть результаты эксперимента) или с данными, которые можно сгенерировать прямо в системе.

Для работы с данными из файла нужно нажать на кнопку «Открыть РД» если данные представляют собой регулярный стационарный процесс, или нажать на кнопку «Открыть НРД», если данные представляют собой нерегулярный стационарный процесс. В появившемся диалоге следует выбрать имя нужного файла.

Для генерации данных следует на главной форме системы выбрать из предложенного списка вид закона распределения, задать параметры выбранного закона, а также количество отсчётов. После этого нужно нажать на кнопку «Сгенерировать». Результат представлен на рисунке 5.145.

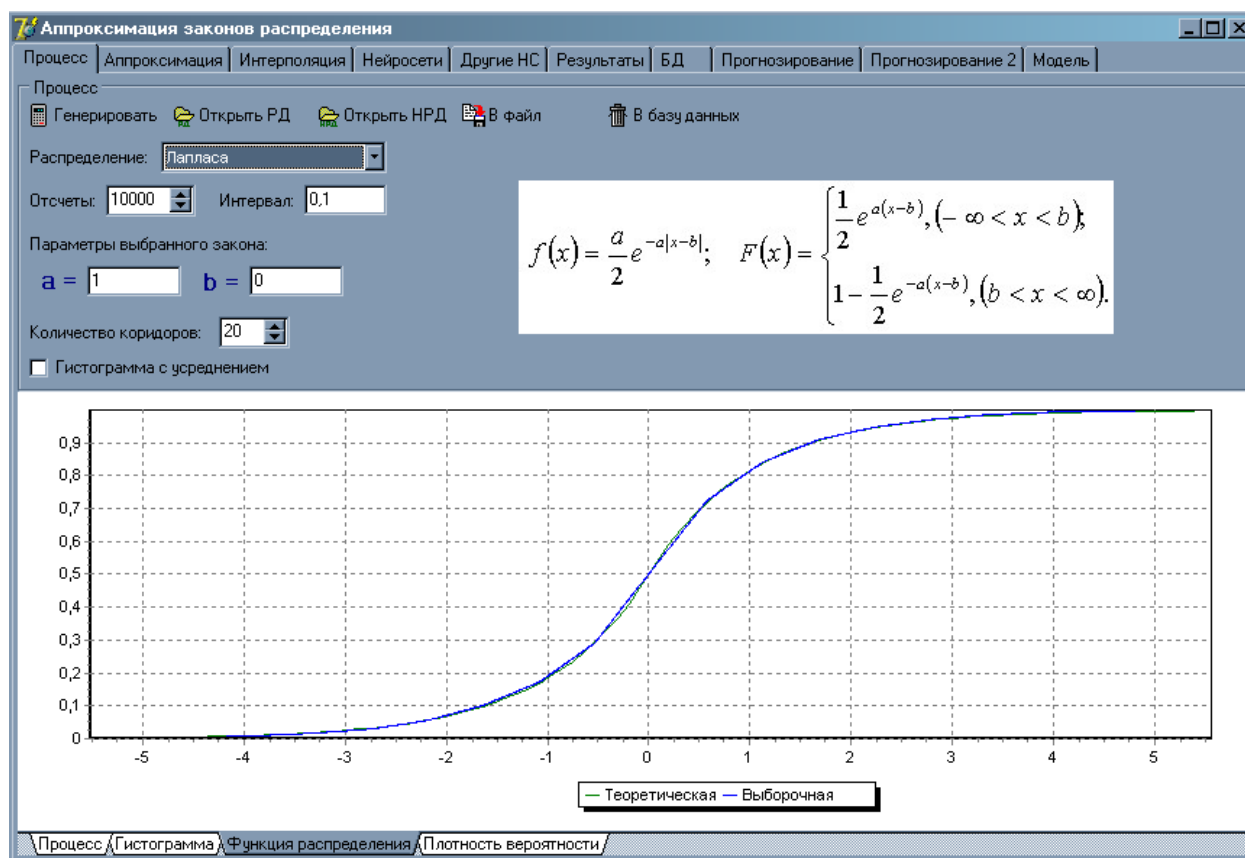


Рисунок 5.145 – Результаты генерации

Как видно на рисунке 5.145, на главной форме появляются графики теоретической и выборочной (то есть построенной по гистограмме) функции распределения выборки данных, имеющей заданный закон распределения. При проведении натуральных экспериментов, конечно, ни о каких теоретических кривых не может быть и речи, поэтому по выборкам строятся и отображаются только сплайн-модели. Но в режиме имитационного моделирования в качестве иллюстративного материала использование теоретических кривых полезно для оценки качества первичной статистической обработки и построения сплайн-моделей. Теоретическая функция распределения выделена зелёным, а выборочная - синим цветом. Кроме того, для удобства пользователя система выводит справочный материал, который представляет собой аналитический вид плотности вероятности и функции распределения выбранного закона распределения с указанием неизвестных параметров, которые требуется определить. Также можно посмотреть графики теоретической и выборочной плотности вероятности, щёлкнув мышью по вкладке «Плотность вероятности», расположенной внизу главной формы системы.

Пользователь может посмотреть гистограмму, построенную на основе имеющейся выборки данных. Для этого нужно щёлкнуть мышью по соответствующей вкладке внизу главной формы системы. Результат представлен на рисунке 5.146.

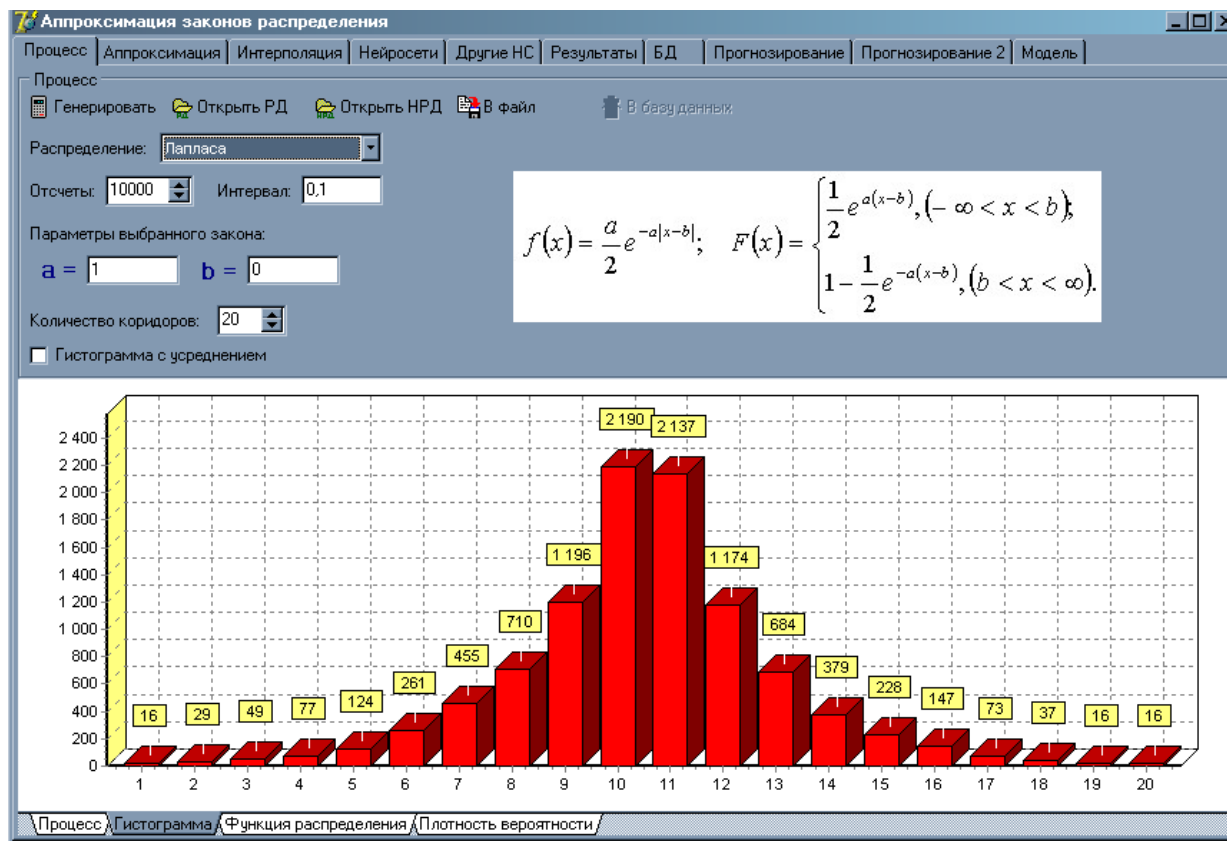


Рисунок 5.146 – Результат построения гистограммы

Гистограмму можно усреднить, выбрав слева на главной форме пункт «Гистограмма с усреднением». Также пользователь может посмотреть случайный процесс, щёлкнув мышью по вкладке «Процесс», расположенной внизу главной формы системы. Результат представлен на рисунке 5.147.

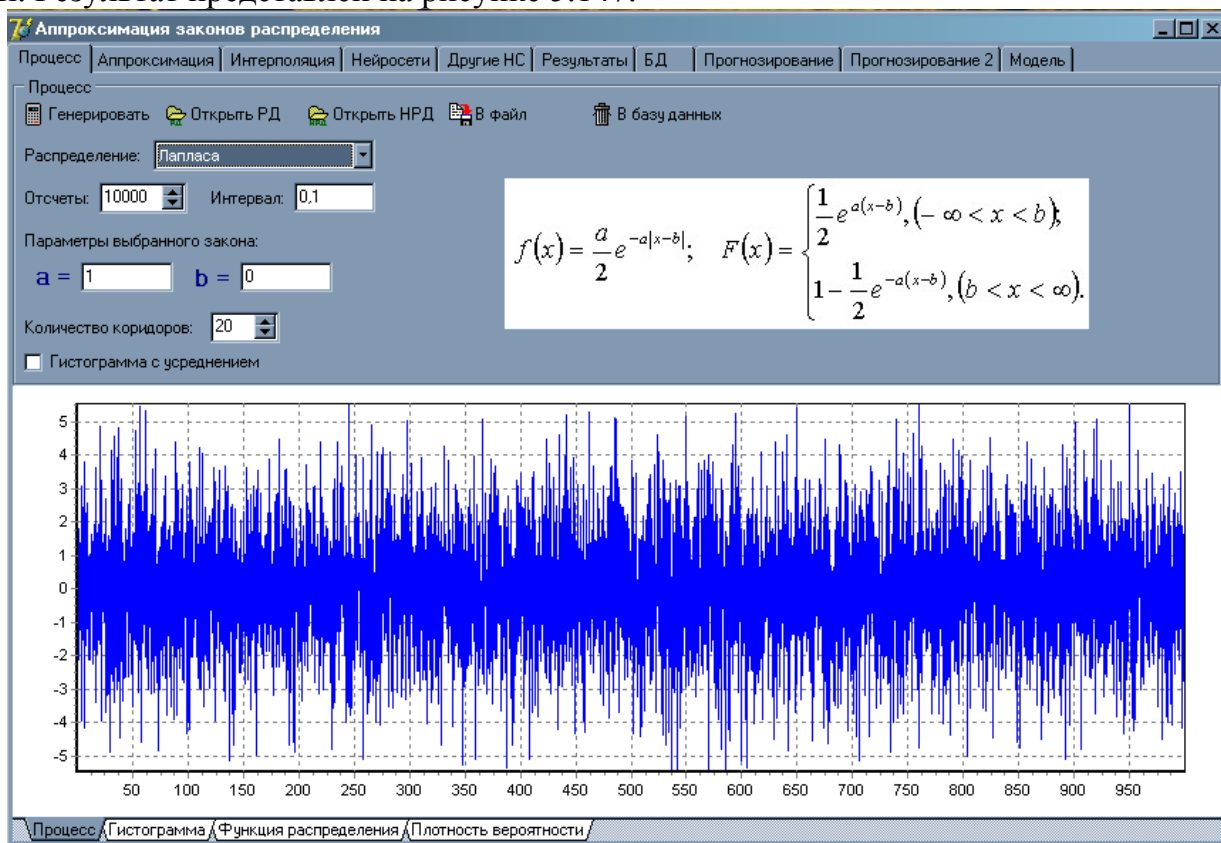


Рисунок 5.147 – Результат моделирования процесса

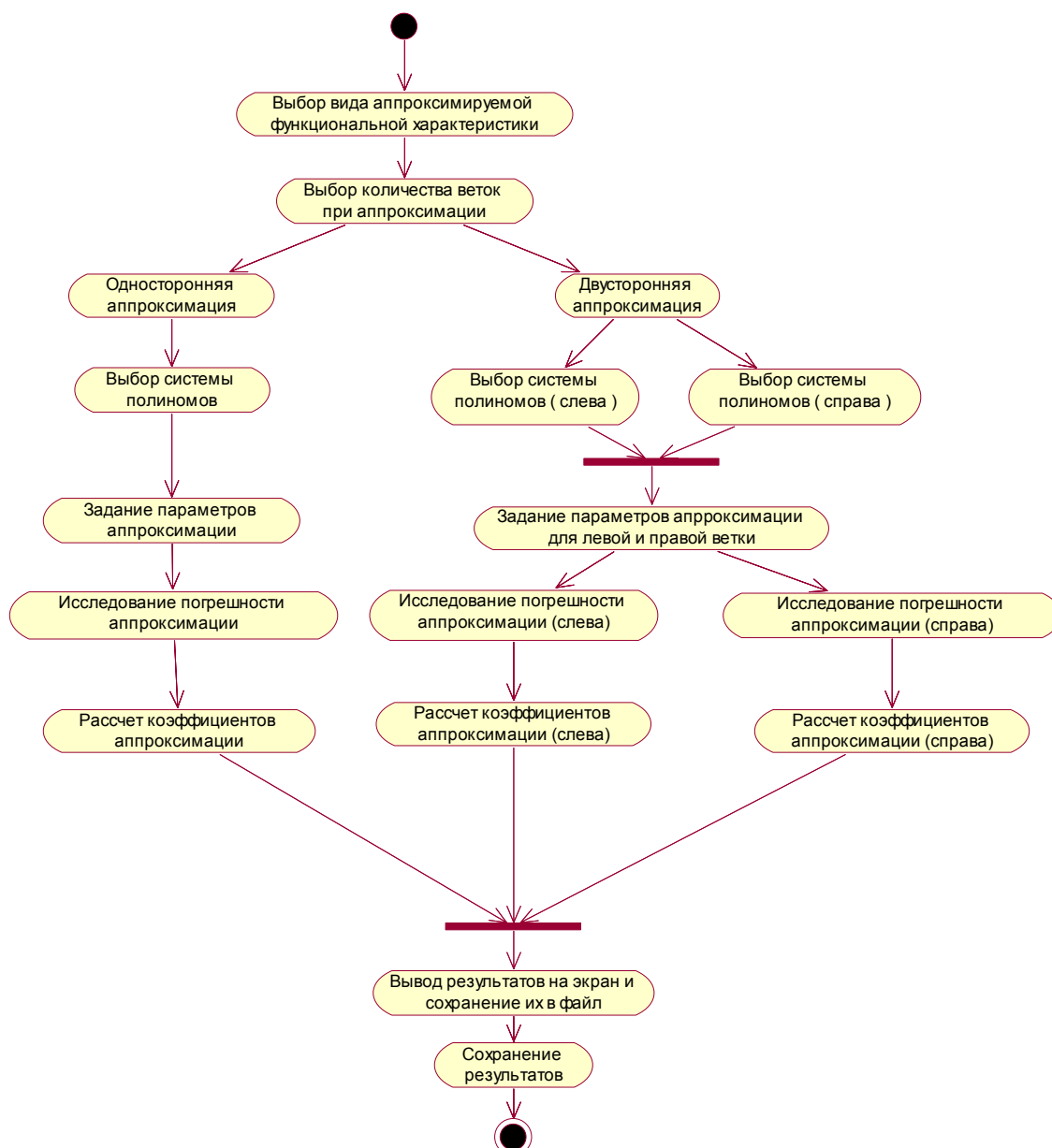


Рисунок 5.148 – Диаграмма деятельности «Аппроксимировать модель»

Выбрав вкладку «Аппроксимация», пользователь попадает на следующую форму, где он должен выбрать, что нужно аппроксимировать – плотность вероятности или функцию распределения. Затем следует выбрать из предложенного списка интервал и систему аппроксимирующих полиномов, ортогональных на определенном интервале (конечном, полубесконечном, бесконечном). При нажатии на кнопку «Оптимум» система автоматически подберёт оптимальное количество полиномов, то есть такое число полиномов, при котором квадратическая погрешность аппроксимации будет минимальной. Затем следует нажать на кнопку «Аппроксимировать». В качестве примера выберем аппроксимацию функции распределения на конечном интервале ортогональными полиномами Лежандра. Результат представлен на рисунке 5.149.

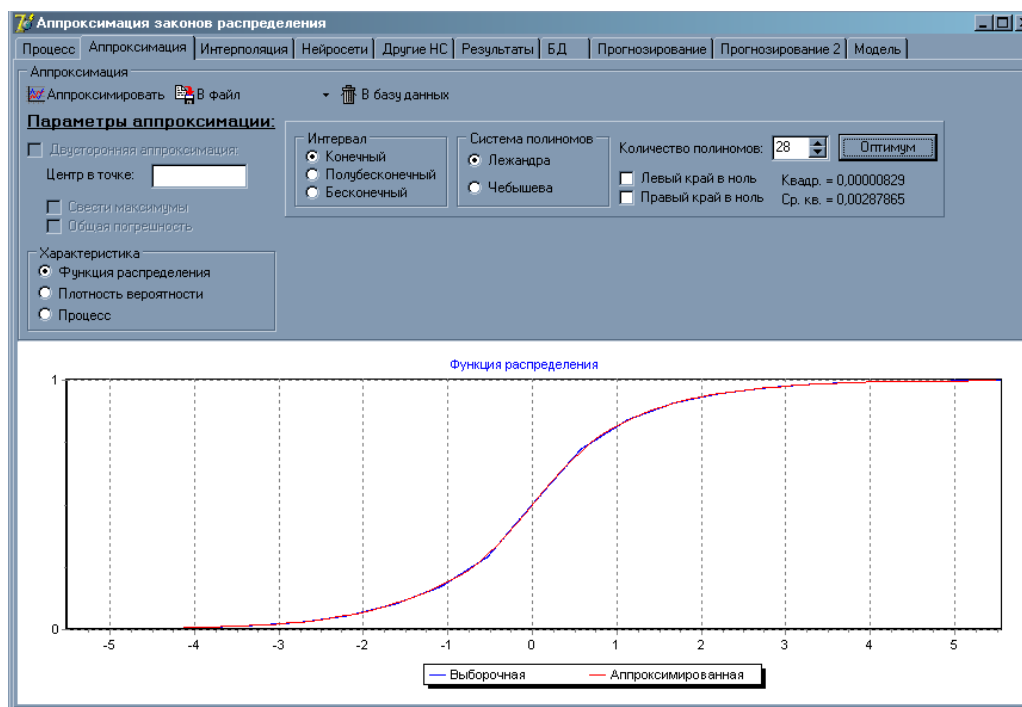


Рисунок 5.149 – Результат аппроксимации функции распределения ортогональными полиномами Лежандра

Для улучшения результатов аппроксимации пользователь может выбрать двустороннюю аппроксимацию, однако это возможно лишь в тех случаях, когда плотность вероятности имеет явно выраженный экстремум. Важным является то обстоятельство, что системы полиномов для правой и левой ветви могут быть не одинаковыми, таким образом, их можно произвольно комбинировать. При двусторонней аппроксимации возможна операция сведения максимумов. Для улучшения результатов аппроксимации возможно также применение приема сведения концов аппроксимируемой функции к нулю. Пример двусторонней аппроксимации со сведением максимумов представлен на рисунке 5.150.

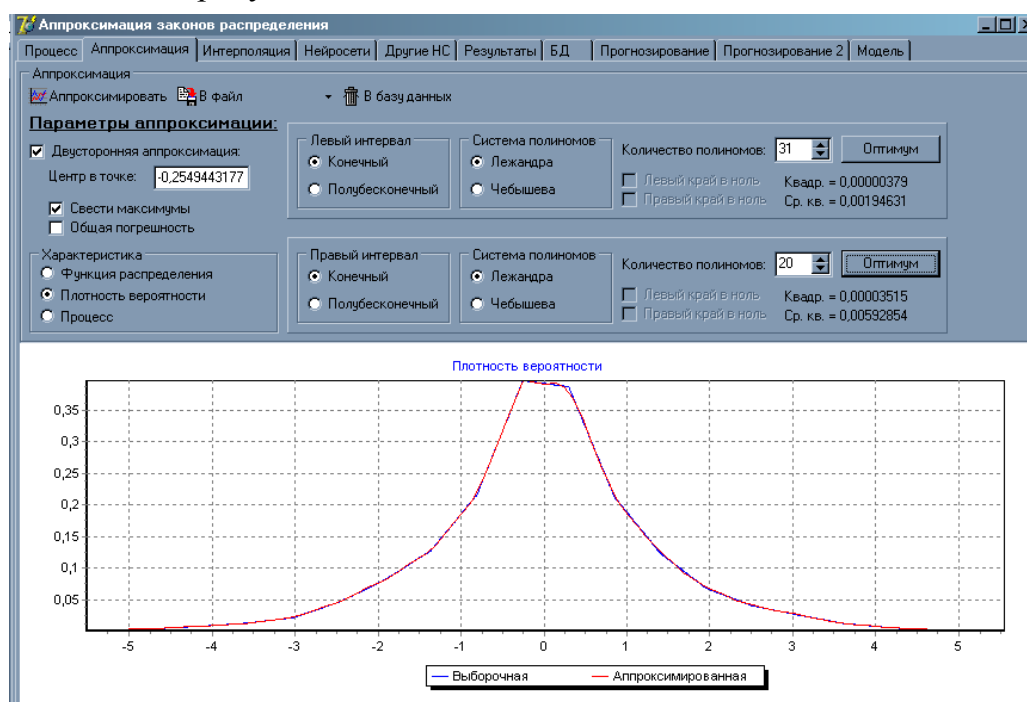


Рисунок 5.150 – Результат двусторонней аппроксимации плотности вероятности ортогональными полиномами Лежандра со сведением максимумов

При двусторонней аппроксимации можно посмотреть не только погрешность аппроксимации для каждого интервала, но и общую погрешность. Для этого, перед тем как нажать на кнопку «Аппроксимировать», нужно щёлкнуть мышкой по пункту «Общая погрешность».

Возможно сохранение результатов в файл. Для этого нужно нажать на кнопку «В файл». Также возможно сохранение результатов и исходной функции в базу данных системы. Для этого нужно щёлкнуть мышью по кнопке «В базу данных» и в появившемся окне ввести название графика. Затем сохранённый результат можно будет просмотреть и сравнить с другими результатами аппроксимации. Для этого надо перейти на вкладку «БД», выбрать в появившемся списке нужное имя и нажать на клавишу «Добавить в график». Предоставляется возможность просмотра результатов нескольких аппроксимаций на одном графике, что является очень удобным для их сравнения и анализа. Это видно из рисунка 5.151.

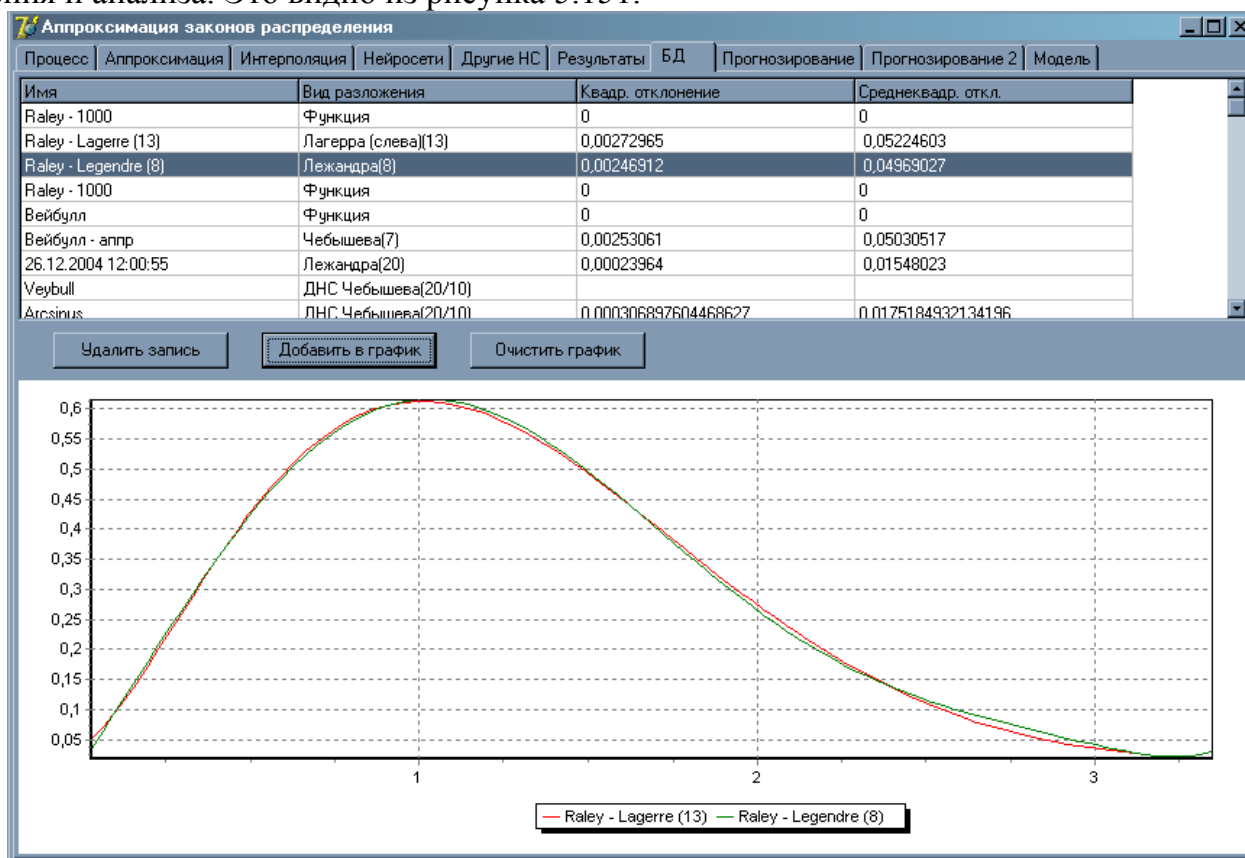


Рисунок 5.151 – Результат работы с базой данных системы

Интерфейс подсистемы интерполяции (рисунок 5.152-5.153) во многом повторяет подсистему аппроксимации, но значительно проще последнего.

Панель инструментов содержит следующие кнопки:

- “Интерполировать” – инициирует процесс определения параметров интерполирующей модели;
- “Сохранить” – сохраняет параметры интерполирующей модели, кнопка активна только после интерполяции;
- “В базу данных” – сохраняет график интерполирующего выражения в базу данных.

Перечень предустановочных параметров включает в себя:

- выбор интерполируемой характеристики (если введена произвольная функция, а не случайная выборка, то права выбора, разумеется, не предоставляется);

- признак двусторонней интерполяции аналогично аппроксимации;
- на панели для каждой ветки расположены средства выбора вида сплайна, установки значения количества узлов интерполяции, а также возможность принудительного присваивания значения доопределяемому параметру. Также на панели после интерполяции рассчитываются значения погрешностей.

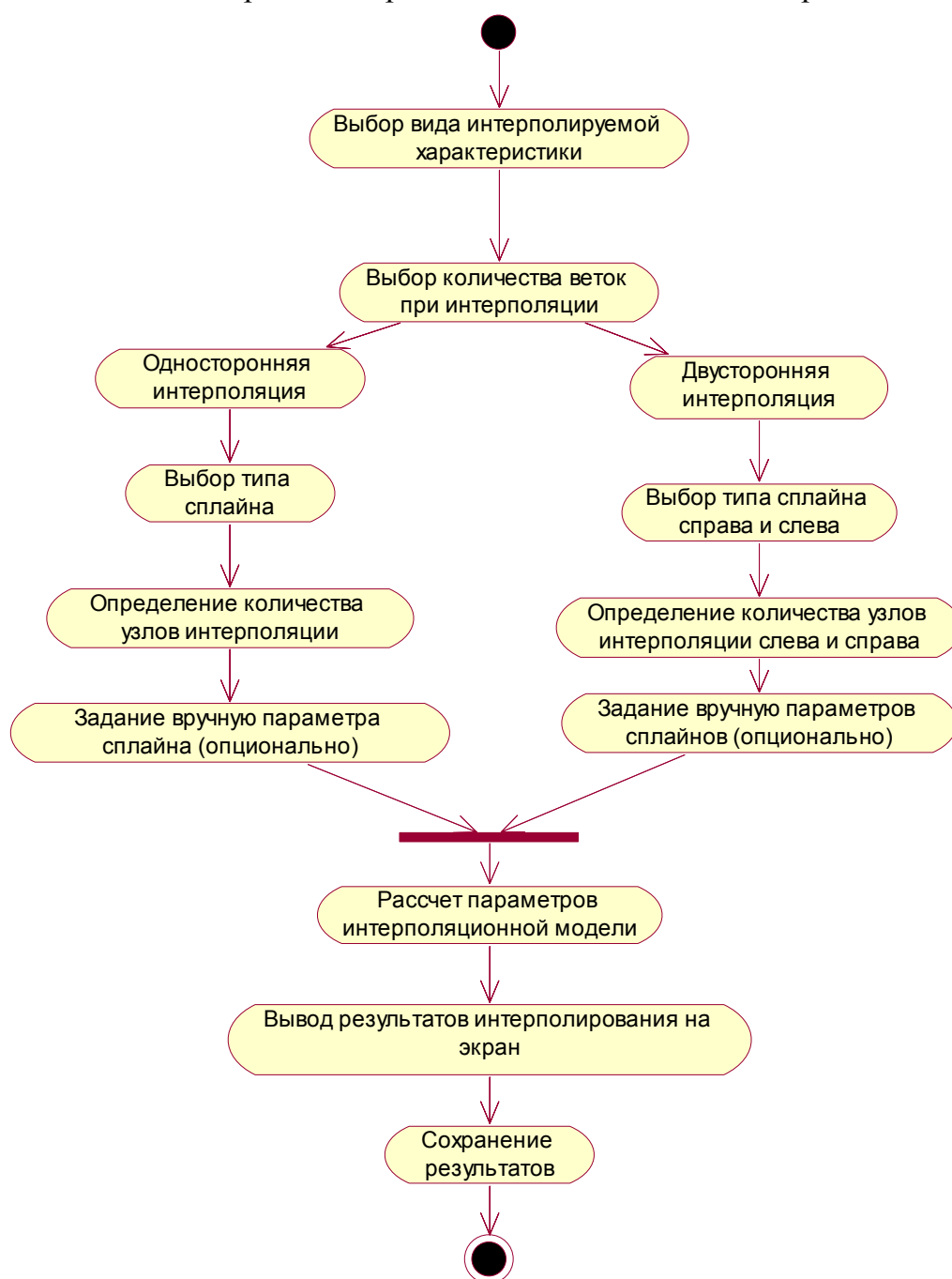


Рисунок 5.152 – Диаграмма деятельности «Интерполировать модель»

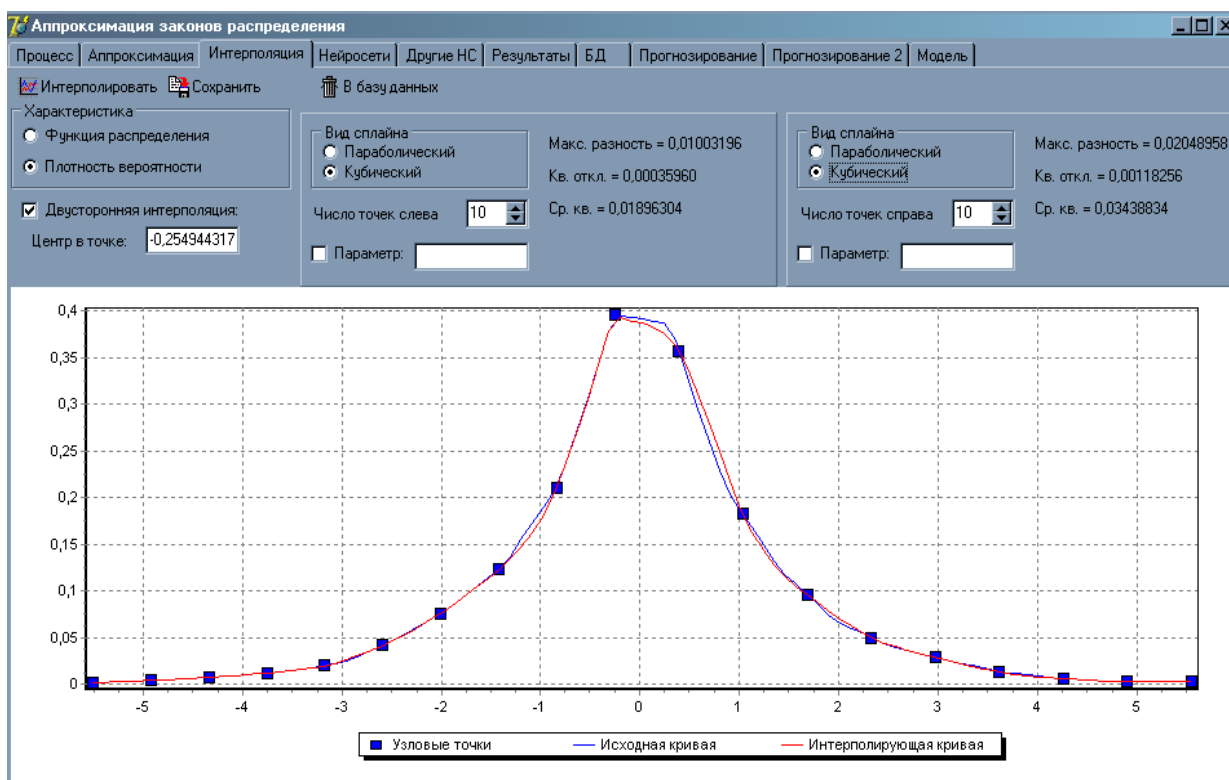


Рисунок 5.153 – Результат интерполяции плотности вероятности кубическим сплайном

В отличие от подсистемы аппроксимации, при интерполяции функциональных характеристик из одной вторая не пересчитываются, так как для полиномиальных сплайнов низкого порядка это не всегда возможно.

Подсистема обработки результатов (рисунок 5.154) после работы подсистем аппроксимации и интерполяции отображает на экране два вида характеристик: числовые характеристики и функциональные (фазовый портрет).

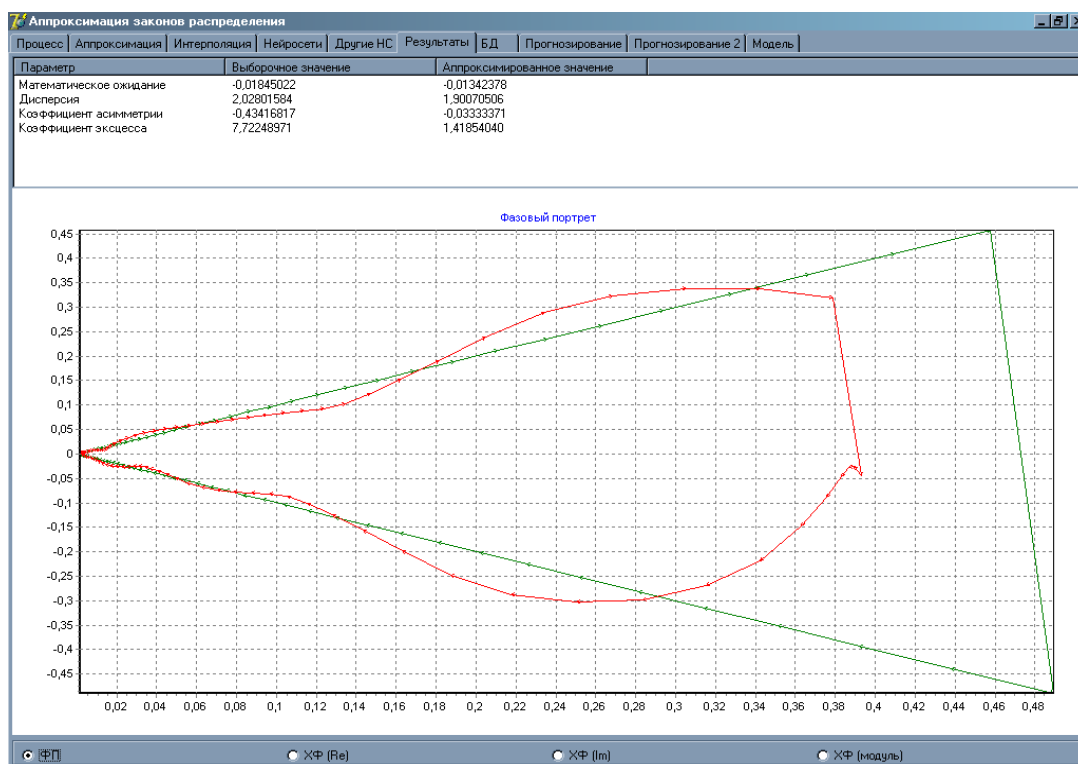


Рисунок 5.154 – Результат построения фазового портрета

Подсистема работает только с данными. Наверху страницы расположен список рассчитываемых характеристик и по два значения напротив каждой характеристики: первое рассчитывается статистическим способом по выборке, второе – по аналитической аппроксимативной модели или интерполирующему выражению.

Ниже на графике изображаются два фазовых портрета – теоретический для сравнения и построенный модельный. Фазовый портрет позволяет установить степень соответствия модели аппроксимируемой функции на каждом интервале значений.

Помимо вышеперечисленных способов определения аналитических выражений функциональных характеристик, в системе представлены модули аппроксимации с использованием нейросетевых алгоритмов.

Модуль «Нейросети» реализует адаптивный алгоритм нейросетевой аппроксимации (см. рис. 5.155).

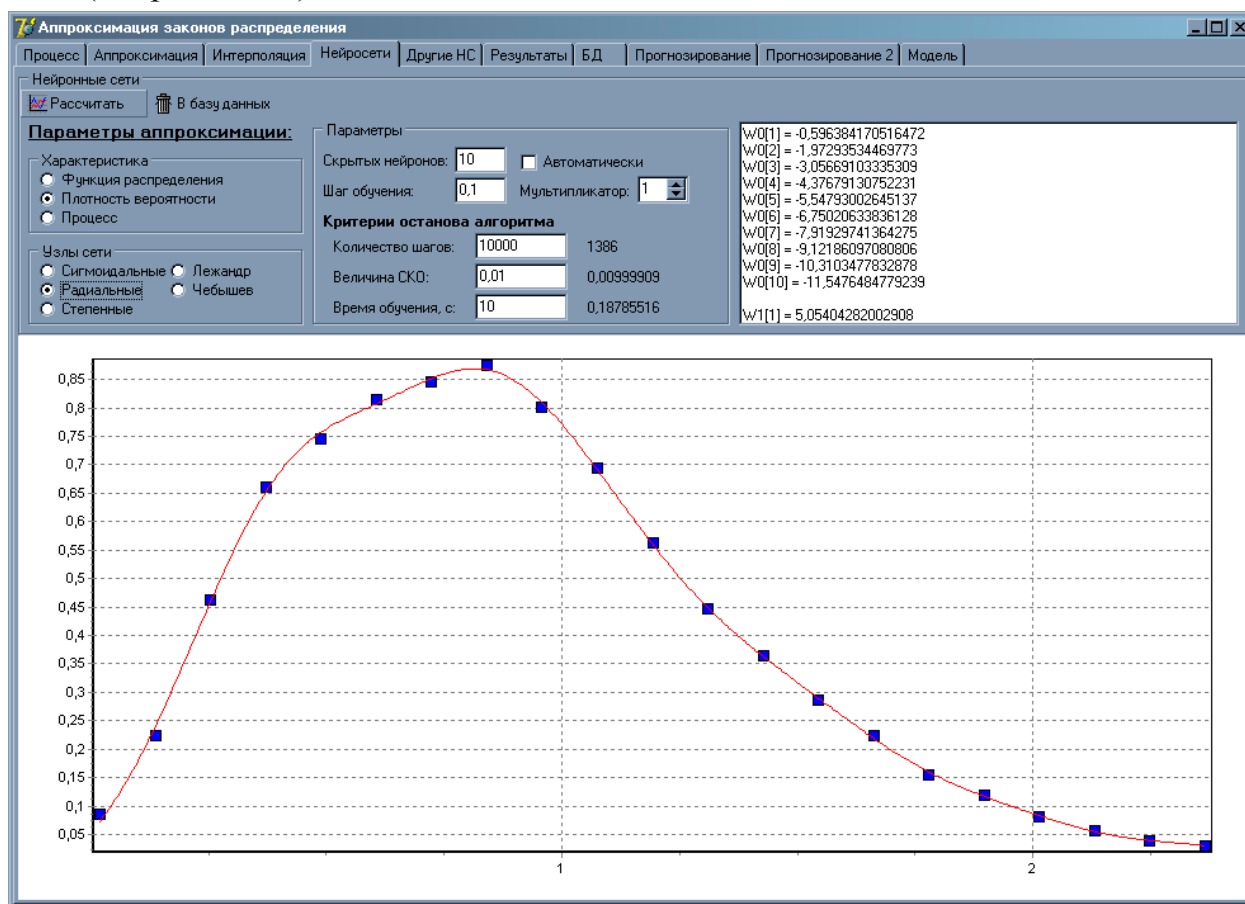


Рисунок 5.155 – Модуль адаптивной нейросетевой аппроксимации

Для того чтобы начать процесс аппроксимации, необходимо задать вид аппроксимируемой характеристики – функция распределения, плотность вероятности или процесс. Эти характеристики включены в радиогруппу «Характеристика».

После выбора характеристики следующим шагом идет определение узловой функции адаптивной нейронной сети. В системе предусмотрены пять видов пороговых функций: сигмоидальные, радиальные, степенные, полиномы Лежандра, полиномы Чебышева.

К последней очереди установок перед аппроксимацией-обучением является задание группы характеристик «Параметры». Эти значения определяют структуру нейронной сети, а также параметры ее обучения. В этой группе задается количество нейронов в скрытом слое сети, значение шага обучения. И предусматриваются три кри-

терия останова обучения: количество шагов алгоритма обучения, величина средне-квадратического отклонения и время обучения сети.

Алгоритм обучения сети запускается нажатием на кнопку «Рассчитать» в верхнем меню. После обучения результаты обучения выводятся в графическом виде на график, содержащий информацию об узлах аппроксимируемой функции. Действительные значения критериев останова алгоритма выводятся справа от заданных значений критериев. В области текстового вывода в правом верхнем углу приводится список значений параметров нейронной сети после обучения. Результаты нейронной аппроксимации могут сохраняться в базу системы нажатием на кнопку «В базу данных».

Алгоритм адаптивной аппроксимации (рисунок 5.156) заключается в том, что нейронная сеть моделирует аналитическое выражение аппроксимируемой характеристики, а обучение сети сводится к адаптации аналитического выражения, моделируемого нейронной сетью, к текущим значениям узловых точек аппроксимируемой характеристики.

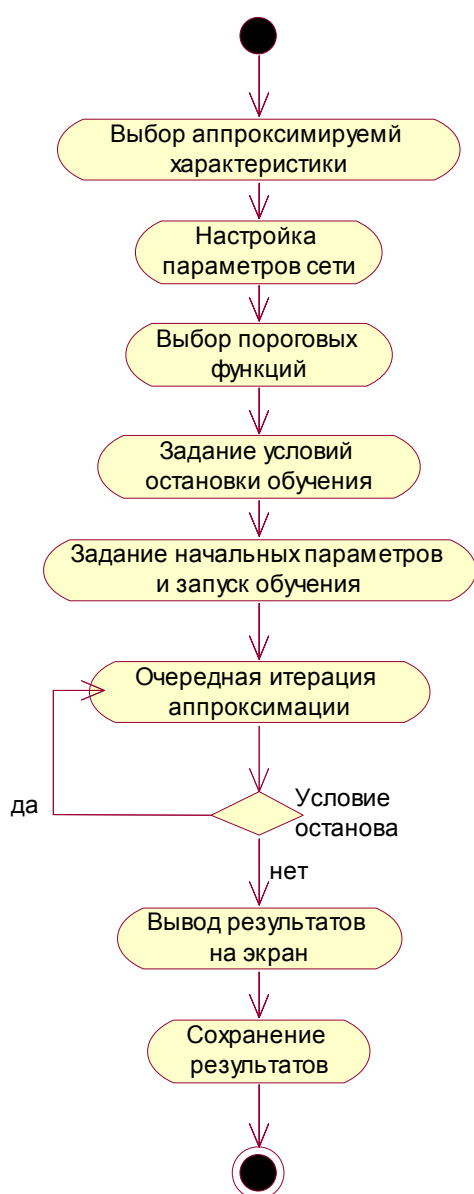


Рисунок 5.156 – Диаграмма деятельности «Адаптивная аппроксимация»

После обучения параметры нейронной сети подставляются в формулу – прототип нейронной сети. Таким образом, получается аналитическое выражение, моделирующее аппроксимируемую характеристику.

Задача декомпозиции (разделения) сигналов является важной составляющей исследования сложных процессов, поскольку информативной составляющей зачастую являются отдельные простые сигналы, которые необходимо выделить из общей картины.

Модуль нейросетевой адаптивной аппроксимации подходит также и для решения этой задачи. Поскольку, задав вид функций разложения, можно представить (аппроксимировать) исходный сигнал суммой простых функций, что подпадает под определение не только аппроксимации, но и декомпозиции.

При условии наличия априорной информации о форме сигналов-составляющих задача декомпозиции сводится к определению количества простых функций в суммарном сигнале и значений неизвестных параметров. В качестве модели нейронной сети используется однослойный персептрон с одним входом и одним выходом. Целью является минимальная величина погрешности восстановления сигнала при минимальном количестве функций.

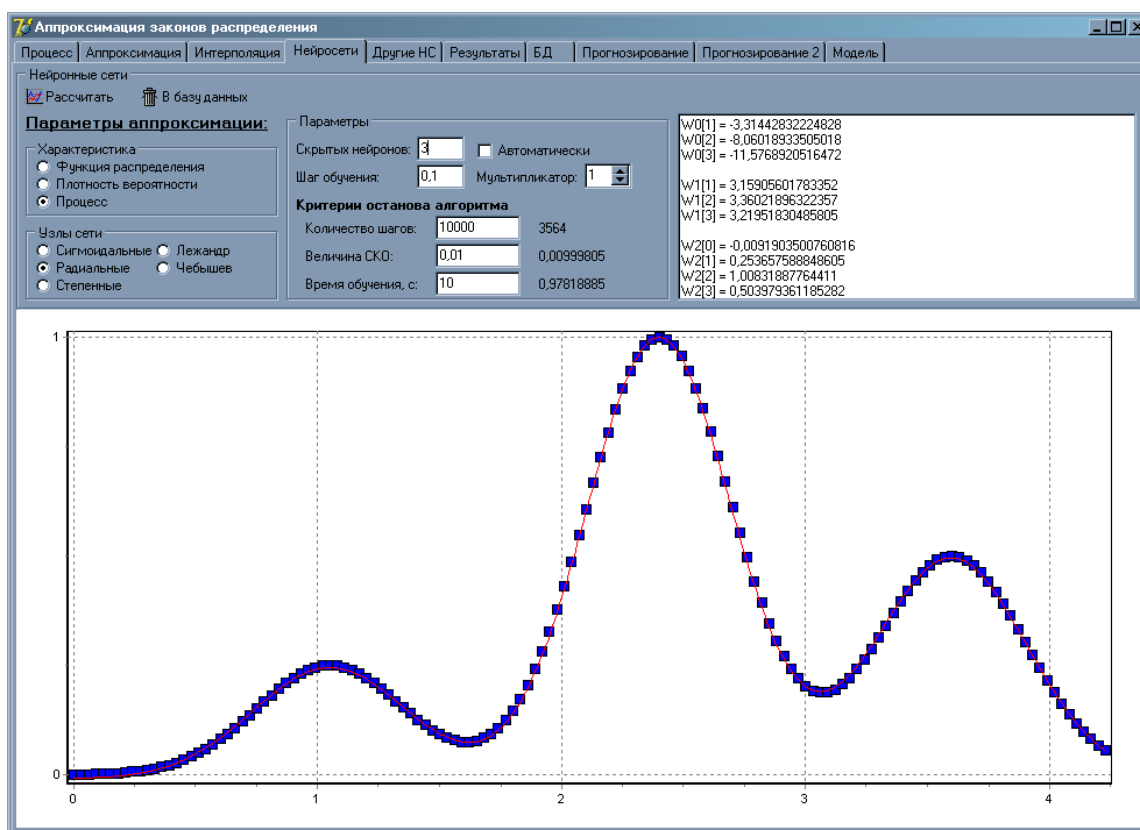


Рисунок 5.157 – Декомпозиция сигнала

Последовательность действий аналогична аппроксимации функций, единственное отличие заключается в выборе функций для разложения. Система поддерживает декомпозицию сложных сигналов на простые функции Гаусса. Результаты разложения представляются в окне в правом верхнем углу в виде коэффициентов модели.

Второй нейросетевой модуль «Другие НС» (см. рис. 5.158) осуществляет аппроксимацию функциональных характеристик с использованием метода с однократным обучением.

Аппроксимация начинается с определения аппроксимируемой характеристики – плотность вероятности, функция распределения или процесс. Этот параметр определяется в радиогруппе «Функция».

Следующим шагом идет определение функций разложения аппроксимируемой характеристики. Это может быть ряд степенных функций, полиномов Лежандра или полиномов Чебышева.

Последним шагом задаются параметры и определяется структура однослойного персептрона, с помощью которого будут определяться коэффициенты аппроксимирующей модели.

Это количество выходов нейронной сети, равное количеству членов ряда разложения аппроксимируемой характеристики, количество шагов обучения нейросети перед аппроксимацией и объем обучающей выборки.

Нажатием на кнопку «Обучить» на верхней панели инициируется процесс обучения однослойного персептрона. Количество входов задается равным количеству узловых точек аппроксимируемой характеристики, автоматически генерируется требуемое количество обучающих примеров, и они предъявляются на вход сети заявлено число раз по циклу.

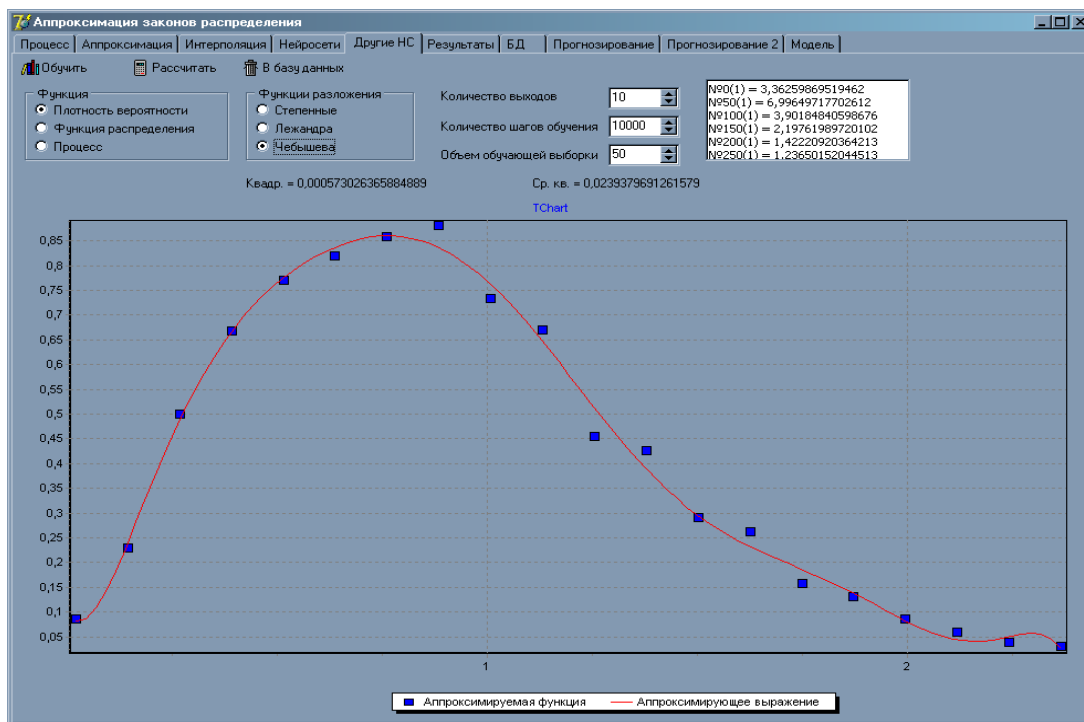


Рисунок 5.158 – Аппроксимация методом с однократным обучением

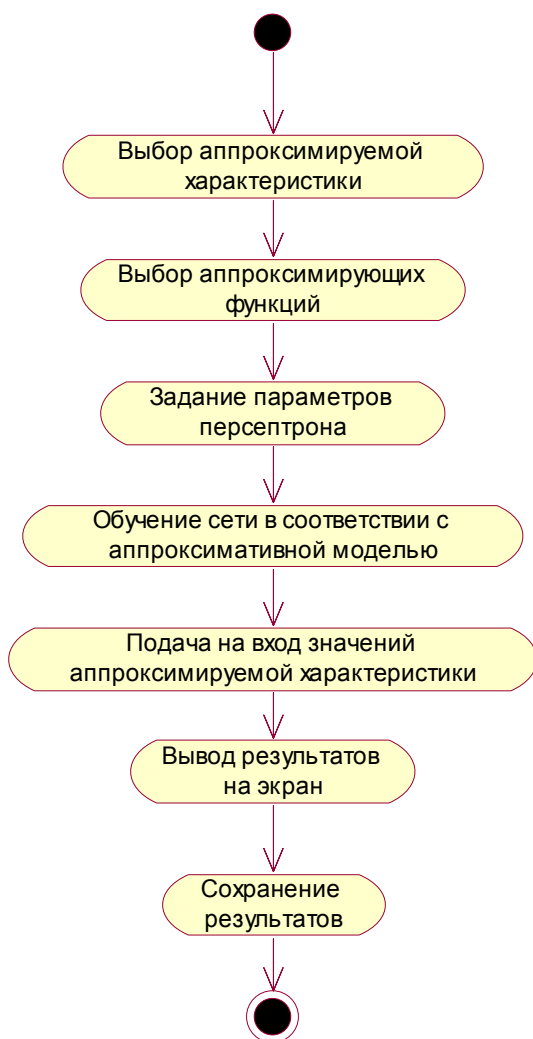


Рисунок 5.159 – Аппроксимация с однократным обучением

После обучения кнопка «Рассчитать» становится доступна. Нажатие на нее подает на вход сети значения узловых точек аппроксимируемой функциональной характеристики. Выходные значения воспринимаются как искомые коэффициенты аппроксимативной модели, ее график выводится на экран для визуального сравнения того, насколько точно он проходит через узловые точки.

Результаты можно сохранить в базу системы нажатием на кнопку «В базу данных».

Алгоритм метода с однократным обучением (рис. 5.159) заключается в том, что нейросеть настраивается на аппроксимацию определенными функциями (полиномами) характеристик, заданных конкретным количеством узловых точек, таким образом, что выходом сети является набор коэффициентов аппроксимирующей модели. Это позволяет один раз обучить сеть и использовать ее для аппроксимации множества различных функциональных характеристик, заданных с помощью одинакового количества узловых точек через одинаковые интервалы.

При выборе пункта «Модель» в главном меню системы пользователь получает возможность табулировать аппроксимирующую

щее выражение. Для этого следует нажать кнопку «Загрузить» и в появившемся окне выбрать нужный файл. Предусматривается задание количества табулируемых значений и числа цифр после запятой в соответствующих окнах в правой части формы. После этого нужно нажать кнопку «Табулировать». Результаты представлены на рисунке 5.160.

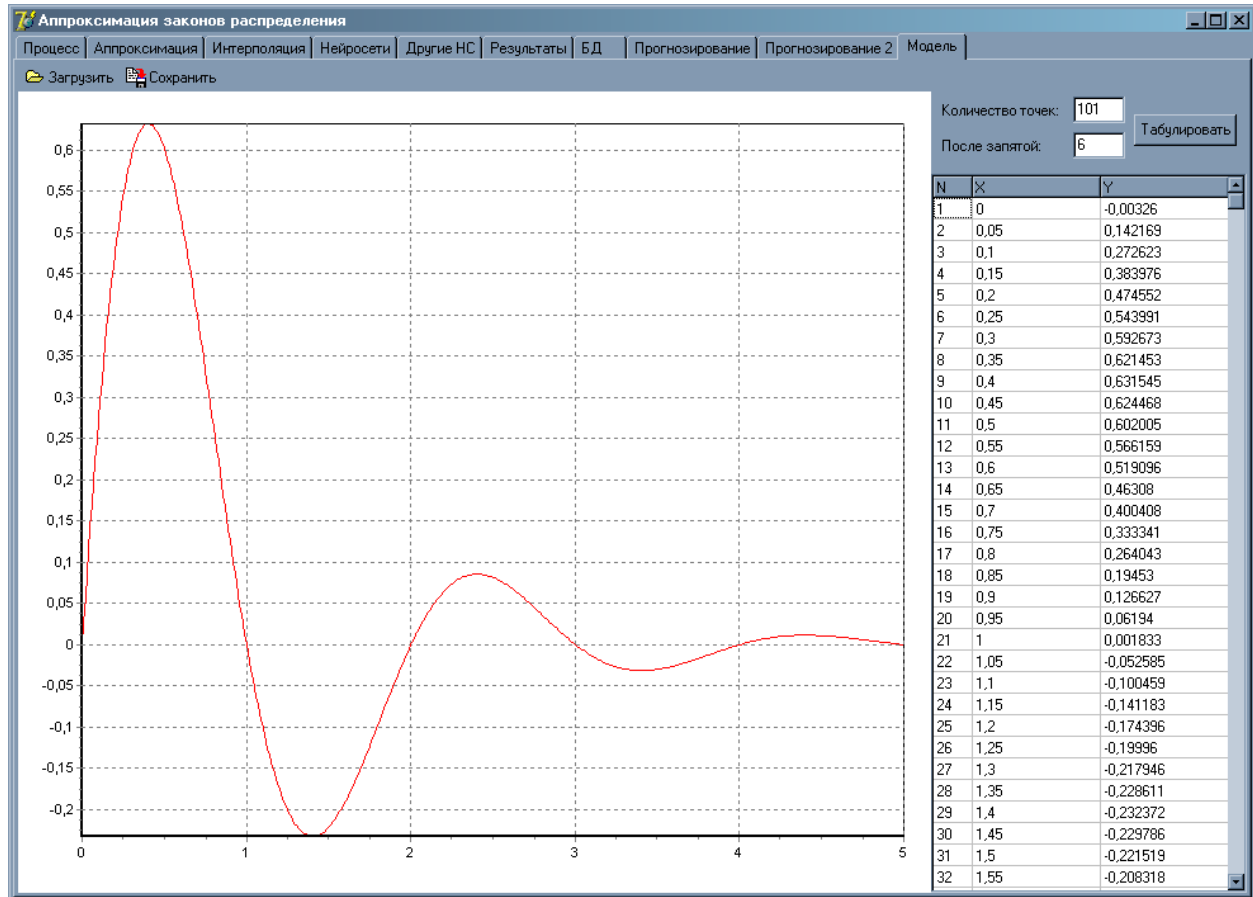


Рисунок 5.160 –Результаты табулирования аппроксимирующего выражения

5.11. Автоматизированная система аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов

Структурная схема разработанного программного комплекса аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов с помощью ортогональных функций представлена на рис. 5.161 [126-127, 130].

В состав программного комплекса входит несколько подсистем:

- подсистема имитационного моделирования и первичной статистической обработки случайного процесса;
- подсистема аппроксимации законов распределения функциями заданного вида;
- подсистема аппроксимации плотностей вероятности ортогональными функциями Лагерра, Лежандра, Дирихле, Эрмита и расчета характеристической функции;
- подсистема аппроксимации характеристических функций и расчета плотности вероятности.

Данные подсистемы взаимодействуют друг с другом согласно функциональной схеме программного комплекса, изображенной на рис. 5.162.

Каждая подсистема находится на отдельном листе и содержит необходимые компоненты пользовательского интерфейса.

Первая часть данного программного комплекса предназначена для генерирования случайных последовательностей (СП) с заданными законами распределения, построения гистограммы, полигона частот, кумулятивной кривой и структурной функции, а также оценивания статистических моментных характеристик. Целью создания этой части является имитационное моделирование случайных процессов с заданными вероятностными характеристиками. Данная подсистема необходима для проверки и анализа алгоритмов аппроксимации методом имитационного моделирования.

Далее оцениваются полученные вероятностные характеристики. Одна подсистема реализует аппроксимацию функции и плотности распределения вероятностей функциями заданного вида. Другая подсистема предназначена для аппроксимации плотностей распределения ортогональными функциями Лагерра, Лежандра, Дирихле и Эрмита. Аппроксимация предусматривает подбор оптимальных параметров аппроксимирующих выражений, обеспечивающих минимальную среднеквадратическую погрешность. Существует также возможность определения характеристической функции по параметрам аппроксимирующих выражений и аппроксимации самих характеристических функций. Во всех подсистемах имеется возможность сохранения данных в файл.

В начале работы нужно задать исходные данные для генерирования СП с заданным законом распределения. Для сгенерированного процесса производится первичная статистическая обработка, то есть рассчитывается математическое ожидание, дисперсия, центральные моменты третьего и четвертого порядков, коэффициенты асимметрии и эксцесса, строятся гистограмма, полигон частот, кумулятивная кривая и структурная функция. Сгенерированный СП поступает на вход подсистемы аппроксимации параметрическими моделями, где производится идентификация процесса и аппроксимация характеристик случайного процесса методом моментов и параметрическим методом. Оценка достоверности аппроксимации производится по критериям Пирсона и Колмогорова. Полученный процесс поступает также на вход подсистемы аппроксимации ортогональными функциями. При работе в этой подсистеме необходимо задать начальные приближения параметров аппроксимирующих выражений и

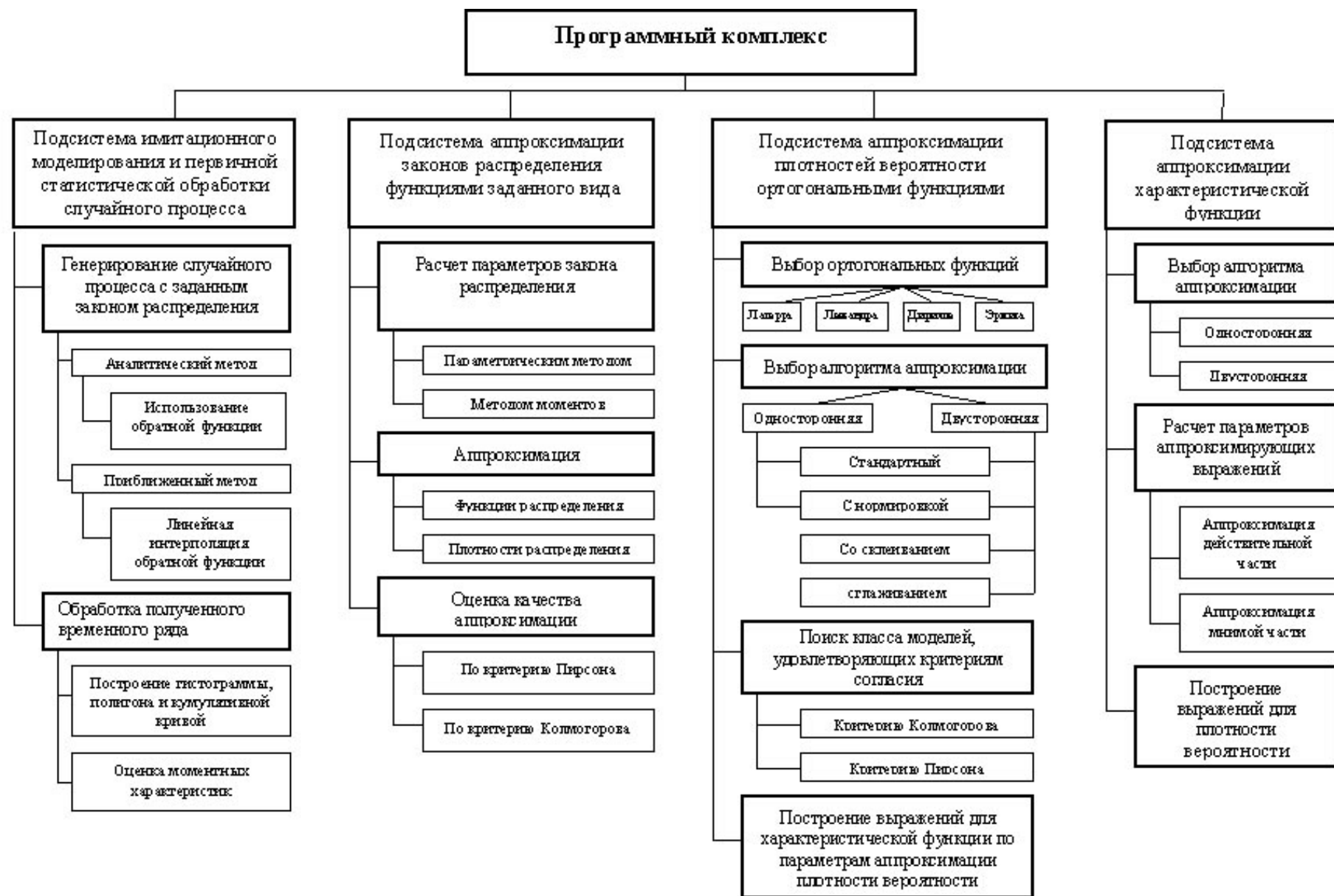


Рисунок 5.161 – Структурная схема автоматизированной системы

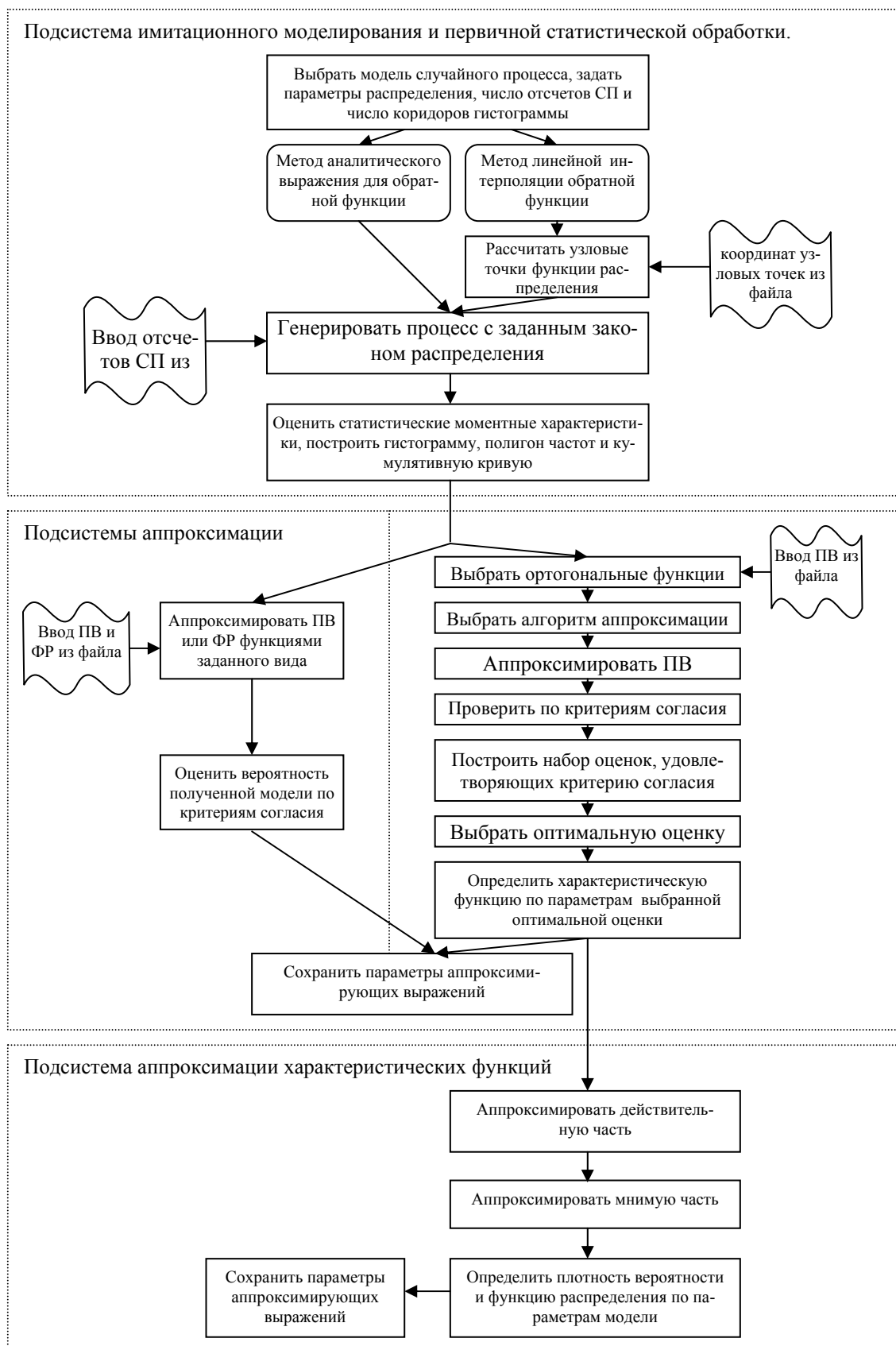


Рисунок 5.162 - Схема взаимодействия подсистем

получить их оптимальные значения. Данная подсистема позволяет из множества аппроксимирующих моделей выделить набор удовлетворяющих критериям согласия Пирсона и Колмогорова. Рассчитанные оптимальные параметры аппроксимирующих выражений поступают на вход подсистемы расчета характеристической функции.

В комплексе предусмотрено использование информации из внешнего источника данных (файла), что позволяет использовать его последовательно по описанной выше схеме, однако возможна работа в каждой конкретной подсистеме отдельно. Всего в системе 4 листа, переход на лист осуществляется выбором соответствующей закладки вверху экрана. В верхней части каждого листа находится набор функциональных кнопок, позволяющих сохранить, загрузить данные, а также осуществлять расчеты. Для каждой из кнопок предназначена всплывающая подсказка.

Подсистема имитационного моделирования и первичной статистической обработки данных

Первый лист, реализующий подсистему моделирования реализации случайного процесса заданного вида с заданными параметрами и его первичной статистической обработки, изображен на рис. 5.163.

Прежде всего, необходимо выбрать закон распределения, по которому будет генерироваться реализация процесса, задать его параметры, число отсчетов генерируемой реализации и число интервалов для гистограммы. Процесс возможно также загрузить извне, нажав функциональную кнопку .

В системе для типовых законов распределения, начиная с нормального, функция, обратная функции распределения, вычисляется линейной интерполяцией, для чего сначала необходимо рассчитать координаты узловых точек функции распределения, нажав кнопку «Р» на панели редактирования узловых точек. Типовой закон распределения можно редактировать, получая различные варианты распределения. Добавить еще одну узловую точку можно, нажав кнопку «Д», удалить текущую точку – нажав кнопку «У». Соответствующие изменения сразу будут вноситься и в графическое изображение функции распределения. Редактирование координат уже рассчитанных узловых точек также возможно изменением самого графика. Для этого необходимо указатель мыши навести на выбранную точку, нажать левую кнопку мыши и перетащить указатель в новую координату. Узловая точка изменит положение. Одновременно будут пересчитаны ее координаты в таблице узловых точек.

Для генерирования реализации процесса с выбранным законом распределения и заданными параметрами нужно нажать функциональную кнопку , после чего также будут рассчитаны статистические числовые характеристики полученного процесса: математическое ожидание, дисперсия, центральные моменты третьего и четвертого порядков, коэффициент асимметрии, коэффициент эксцесса.

В правой части листа находится панель отображения функциональных характеристик сгенерированного процесса. При выборе одной из трех закладок «Гистограмма», «Плотность» или «Функция» на экране отображается соответствующая статистическая характеристика. При выборе закладки «Процесс» отображается график реализации. При выборе закладки «Структурная функция» отображается соответствующая сгенерированному процессу структурная функция.

Сгенерированную реализацию процесса можно сохранить, нажав кнопку .

В данной системе также возможна загрузка реализации случайного процесса с внешнего источника (из файла) нажатием кнопки , и расчет и построение соответствующих вероятностных характеристик.

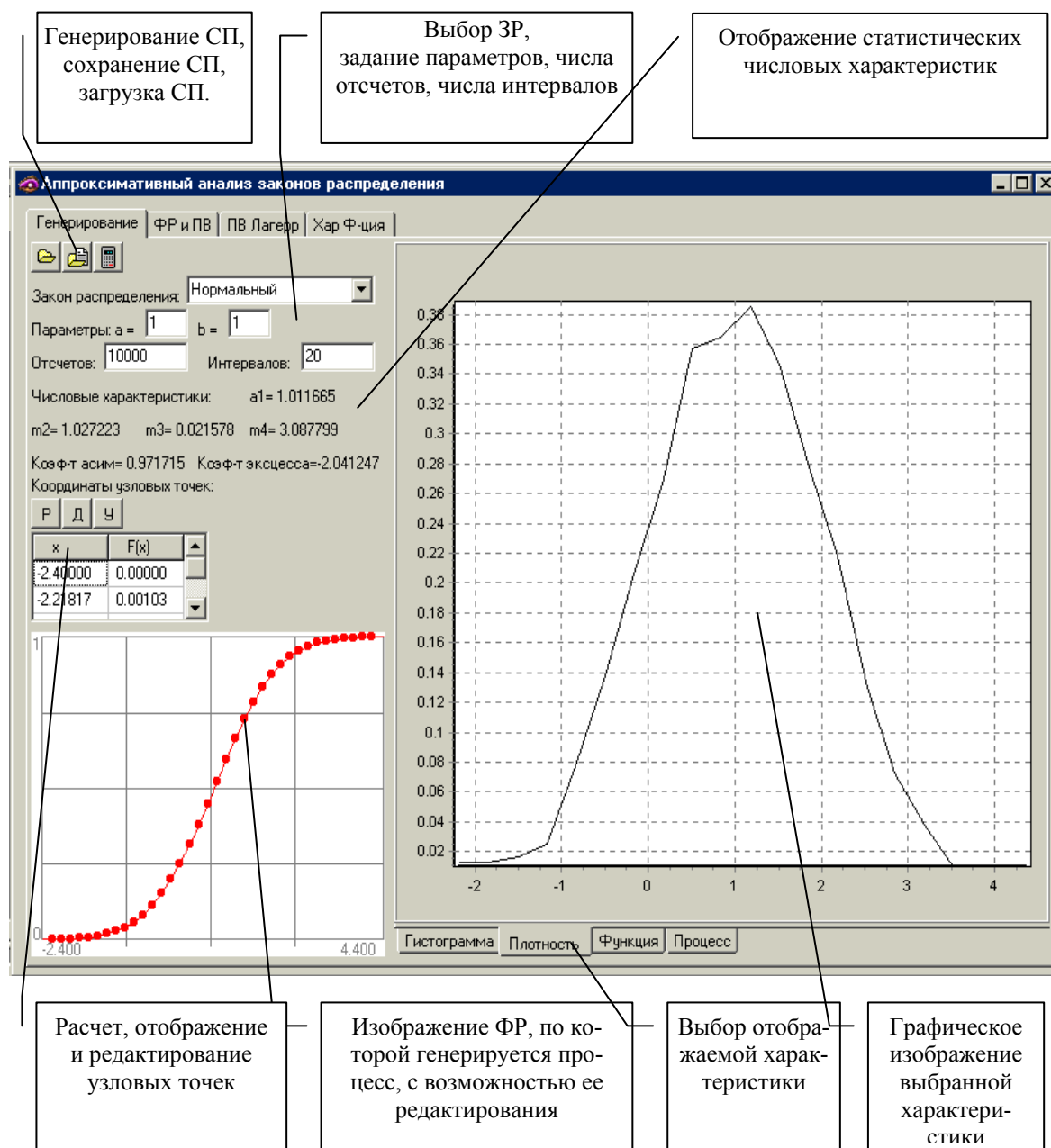


Рисунок 5.163 - Лист генерирования процесса

Подсистема аппроксимации законов распределения функциями заданного вида

На рис. 5.164 изображен второй лист рабочей формы, который содержит подсистему аппроксимации плотностей вероятности и функций распределения параметрическими моделями.

Статистические плотность вероятности и функция распределения, подлежащие аппроксимации, рассчитываются на листе 1. Их также можно загрузить в подсистему на лист 2 извне, нажав кнопку  для плотности или кнопку  для функции распре-

деления. Данные вероятностные характеристики можно также сохранить с помощью кнопок  - сохранение плотности; и  - сохранение функции распределения.

Прежде всего, из выпадающего списка необходимо выбрать закон распределения, моделью которого будет аппроксимировано полученное статистическое распределение. Нужно указать, какая характеристика будет аппроксимирована (полигон частот или кумулятивная кривая), отметив ее в списке «Аппроксимация»; затем выбрать метод расчета теоретических параметров распределения (моментов или параметрический) в списке «Метод» и критерий согласия (Пирсона или Колмогорова) в

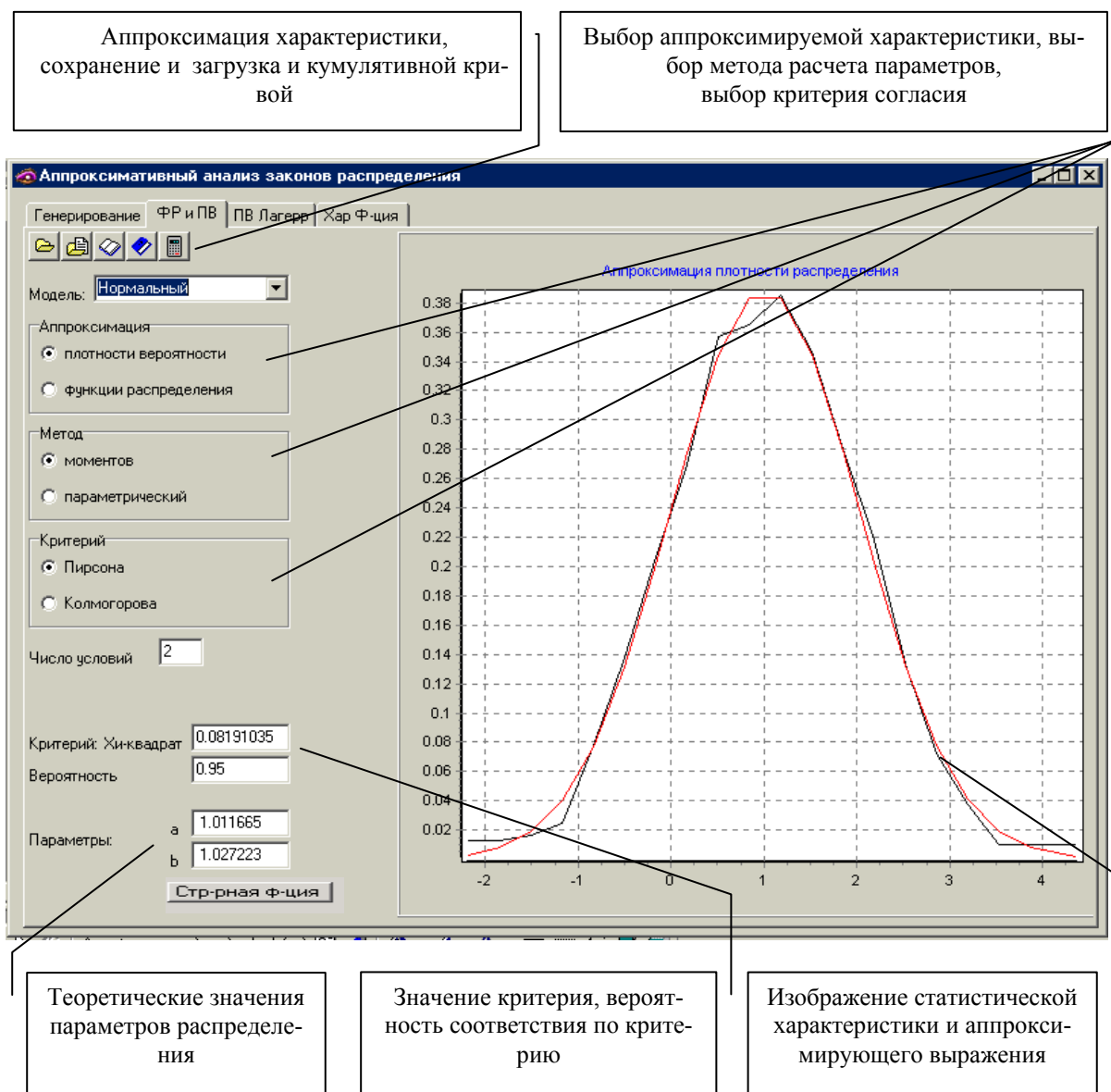


Рисунок 5.164 - Лист аппроксимации плотности вероятности и функции распределения функциями заданного вида

списке «Критерий». Затем нажать кнопку  для проведения расчетов параметра, графического отображения аппроксимирующей функции и отображения вероятности соответствия статистического распределения выбранному теоретическому.

Отображение структурной функции полученного распределения, а также структурной функции теоретического распределения, которым проводится аппроксимация, производится при нажатии кнопки «Стр-ная ф-ция» (рис. 5.165).

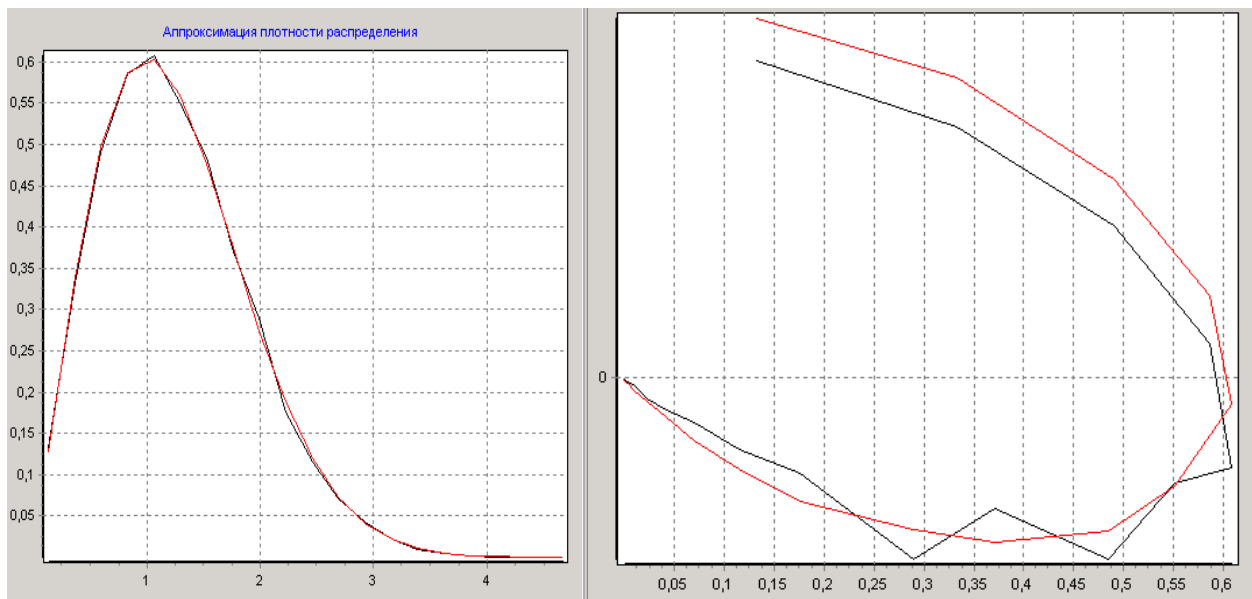


Рисунок 5.165 - Идентификация закона распределения по структурной функции и аппроксимация параметрическим методом

Подсистема аппроксимации плотностей вероятности ортогональными функциями

На листе 3 рабочей формы, изображенном на рис. 5.166, расположена подсистема аппроксимации плотностей вероятности ортогональными функциями.

Аппроксимируемая плотность рассчитывается на листе 1 (листе генерирования) или загружается в подсистему на листе 3 с помощью функциональной кнопки . Сохранение плотности производится нажатием кнопки . Необходимо выбрать алгоритм аппроксимации рассчитанного или загруженного полигона частот. Аппроксимация может проводиться одним из предложенных алгоритмов:

- односторонняя аппроксимация (без разделения на ветви);
 - без нормировки;
 - с нормировкой;
- двусторонняя аппроксимация (с разделением на правую и левую ветви относительно существующего глобального максимума, применима для функций Лагерра, Лежандра и Дирихле);
 - без нормировки;
 - с нормировкой;
 - со склеиванием ветвей;
 - со сглаживанием в точке склеивания ветвей.

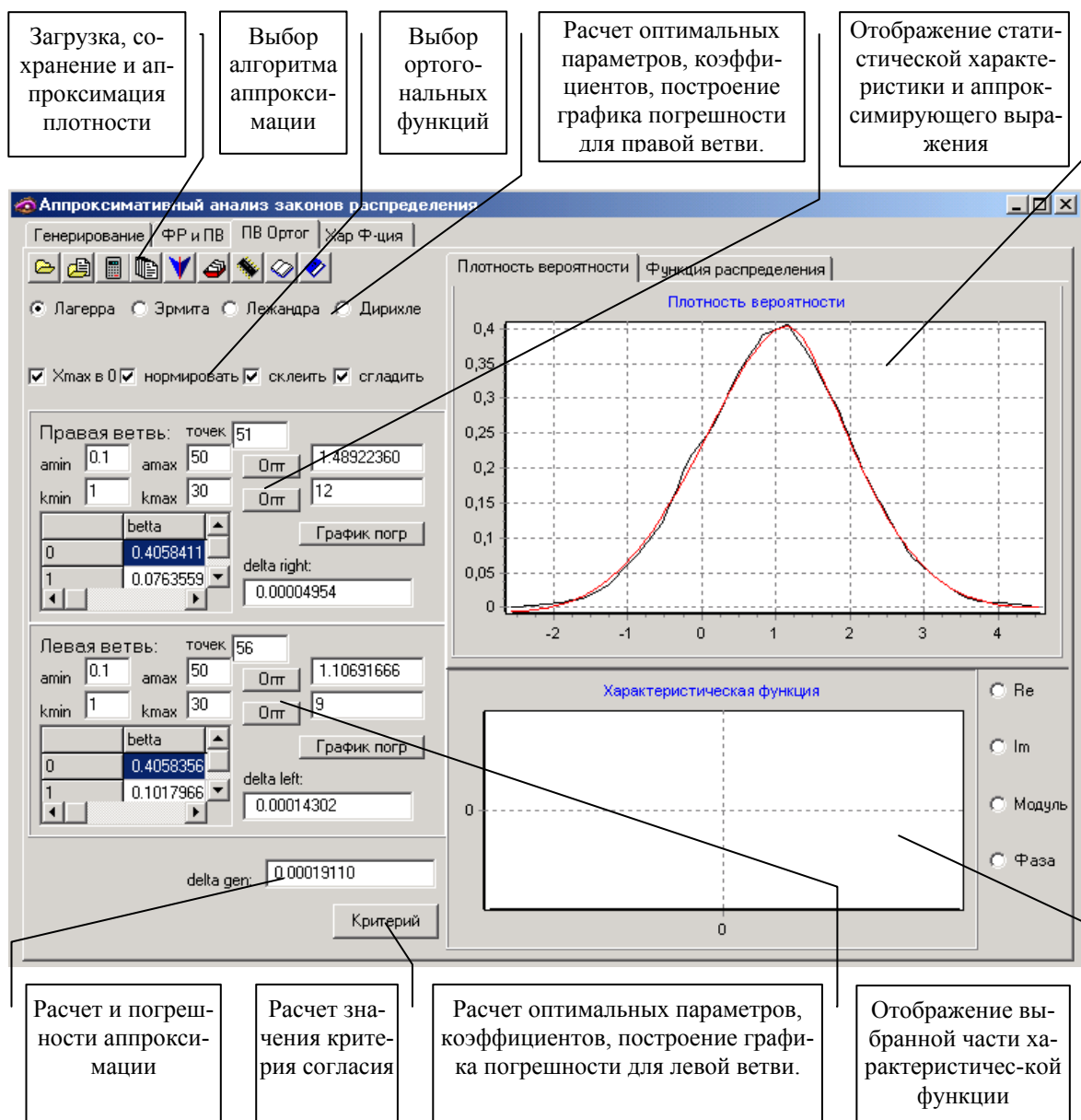


Рисунок 5.166 - Лист аппроксимации плотностей вероятности ортогональными функциями

Выбор алгоритма аппроксимации производится установкой следующих флажков: «Хмах в 0» - проводится двусторонняя аппроксимация с разделением плотности вероятности на правую и левую ветви; «нормировать» - коэффициенты разложения рассчитываются из условия, что площадь, ограниченная аппроксимирующей функцией, равна 1; «склеить» - коэффициенты разложения рассчитываются с учетом условия «склеивания» правой и левой ветви в точке разделения плотности и равенства площади под кривой 1; «сгладить» - коэффициенты разложения рассчитываются из условия гладкого склеивания аппроксимирующих выражений для правой и левой ветви и равенства 1 площади под аппроксимирующей кривой. Если какой-либо из флажков установлен, то аппроксимация ведется по соответствующему алгоритму, если никакой из флажков не установлен, то используется стандартный алгоритм аппроксимации ортогональными функциями – без разделения на ветви, нормировки и т.д.

На панели расчета параметров аппроксимации правой ветви рассчитываются оптимальные параметры α и m – число членов разложения – нажатием кнопок «Оптим» для каждого из параметров соответственно. Также параметры α и m можно задать вручную. Оптимальный параметр α ищется из диапазона $[\alpha_{min}; \alpha_{max}]$. Число членов разложения ряда m из диапазона $[k_{min}; k_{max}]$. Диапазоны задаются вручную. Аналогично рассчитываются параметры аппроксимации левой ветви. Расчет коэффициентов разложения и расчет аппроксимирующей функции обеих ветвей производится при нажатии функциональной кнопки . Нажатие на кнопку «График погр» отображает график зависимости погрешности аппроксимации от числа m членов разложения в сумме ряда. Такие графики строятся для каждой ветви отдельно.

На панели отображения аппроксимируемой характеристики возможен также просмотр статистической и построенной по оценке плотности функций распределения, что осуществляется выбором закладки «Функция распределения».

Установка флажков «Re», «Im», «Модуль» или «Фаза» рассчитывает действительную или мнимую части, модуль или фазу характеристической функции, соответствующей полученному аппроксимирующему плотность вероятностей ряду Лагерра.

При нажатии кнопки «Критерий» на экране появляется окно, представленное на рис. 5.167.

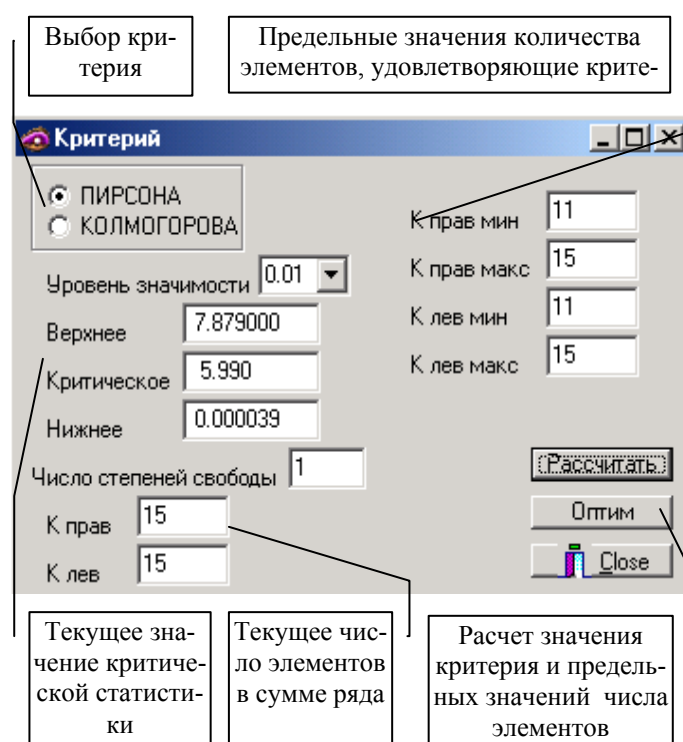


Рисунок 5.167 - Форма оценки качества аппроксимации

согласия находится в допустимых границах.

При работе с данной формой нужно выбрать критерий согласия из списка, в котором по умолчанию установлен критерий Пирсона, а также выбрать из выпадающего списка значение уровня значимости. При нажатии кнопки «Рассчитать» осуществляется расчет критической статистики для полученного ранее аппроксимирующего выражения. Для критерия Пирсона рассчитывается также верхняя и нижняя границы критерия при заданном уровне значимости и числе степеней свободы, а для критерия Колмогорова рассчитывается верхняя граница критерия при заданном уровне значимости.

Кнопка «Оптим» производит расчет минимального и максимального количества элементов в сумме аппроксимирующего ряда, при которых значение соответствующего критерия

Подсистема аппроксимации характеристических функций ортогональными функциями

На листе 4 (рис. 5.168) находится подсистема аппроксимации действительной и мнимой частей характеристической функции ортогональными функциями Лагерра,

Лежандра и Дирихле. Данная подсистема позволяет применять как одностороннюю, так и двустороннюю аппроксимацию.

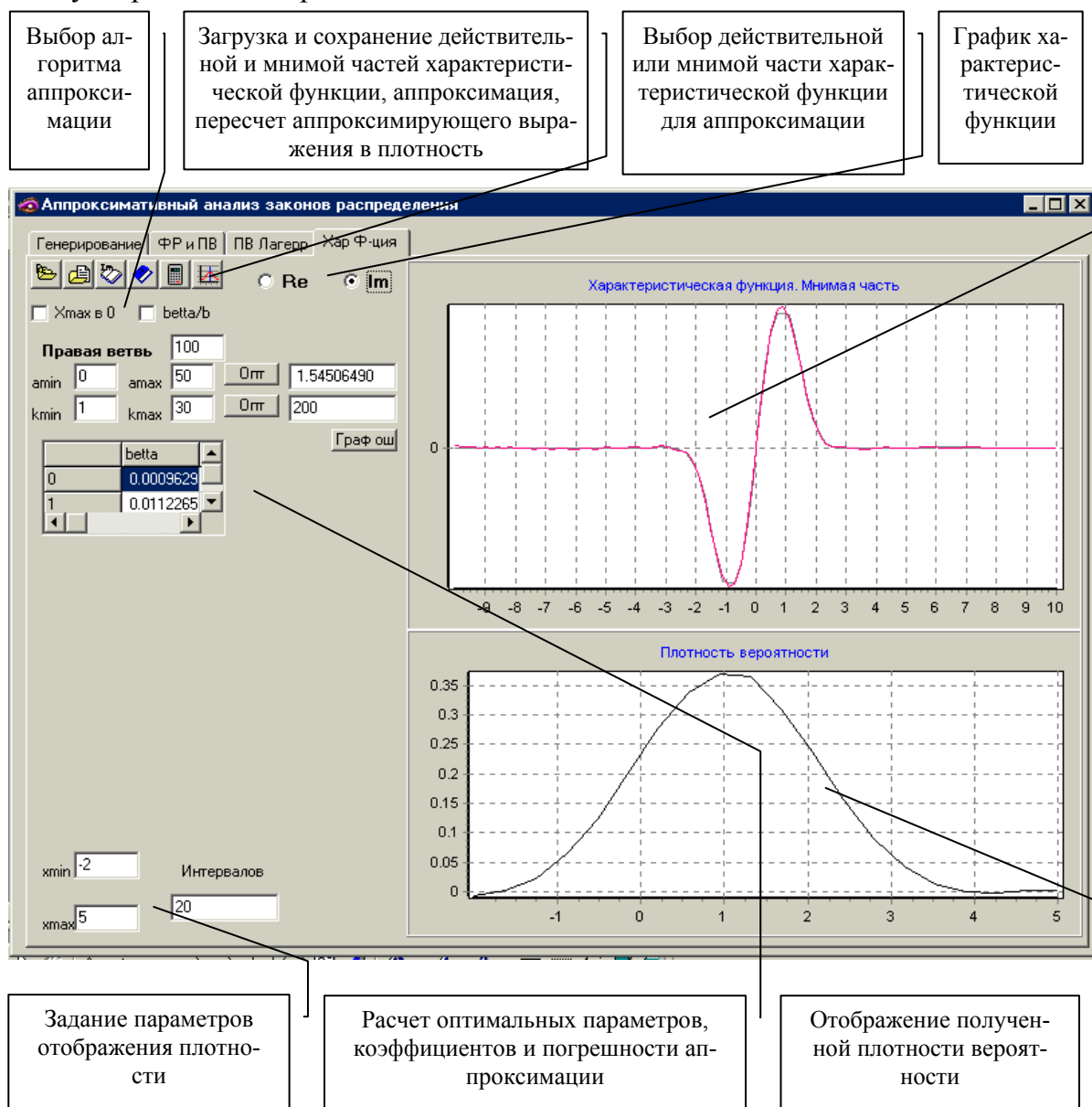


Рисунок 5.168 - Лист аппроксимации характеристической функции ортогональными функциями

Расчет оптимальных параметров, минимизирующих среднеквадратическую погрешность аппроксимации, аналогичен расчету на листе 3. Также параметры можно заносить вручную. При установленном флажке «Re» аппроксимируется действительная часть характеристической функции, при флажке «Im» - мнимая. Если флажок «Xmax в 0» установлен, ведется двусторонняя аппроксимация. По аппроксимирующим выражениям строится соответствующая плотность вероятности. Для этого необходимо задать диапазон изменения x и количество интервалов для графического отображения плотности, затем нажать функциональную кнопку .

Форматы всех файлов, содержащих необходимую для расчетов информацию, представлены в Приложении П.12.

5.12. Автоматизированная система аппроксимативного анализа нестационарных процессов

Для запуска приложения в операционной среде Windows следует открыть папку, содержащую исполняемые файлы приложения и запустить исполняемый файл Approximate.exe. [153-155].

После запуска приложения открывается основное окно, в верхней части которого находятся кнопки с пиктограммами и подписями, по нажатию на которые выполняется соответствующее действие (рис. 5.169).

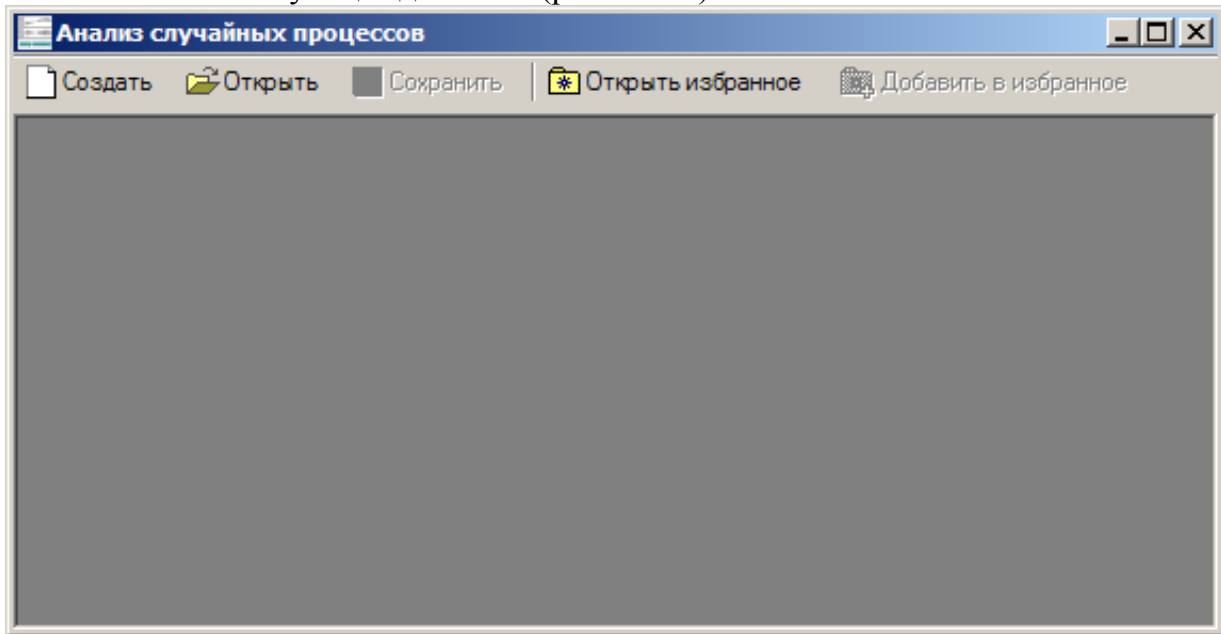


Рисунок 5.169 – Главное окно приложения

Общие принципы работы с системой

Поскольку при работе с системой, когда постоянно приходится иметь дело с выборками, в любой момент по ней может потребоваться некоторая информация (диапазон значений, число отсчетов и т.п.), с правой стороны от графика, на котором она изображена, всегда отображаются следующие данные по выборке:

- тип выборки – эквидистантная/неэквидистантная;
- число отсчетов;
- диапазон значений X ;
- диапазон значений Y ;
- оценка математического ожидания;
- оценка дисперсии;
- значение критерия серий.

В системе также предусмотрена возможность работы с несколькими подсистемами одновременно, при этом каждая подсистема может быть в один момент открыта в неограниченном количестве экземпляров для обработки различных данных. Для быстрого переключения между экземплярами подсистем используется меню в верхней части окна с пиктограммами и подписями: для подсистемы генерации это значок чистого листа с подписью «Создание выборки», для подсистемы центрирования и нормирования – листок со схематическим изображением выборки и название открытого файла, либо элемента «Избранного».

Работа с подсистемой генерации выборки

По нажатию кнопки «Создать» запускается подсистема генерации выборки нестационарного случайного процесса, исходный вид которой показан на рис. 5.170.

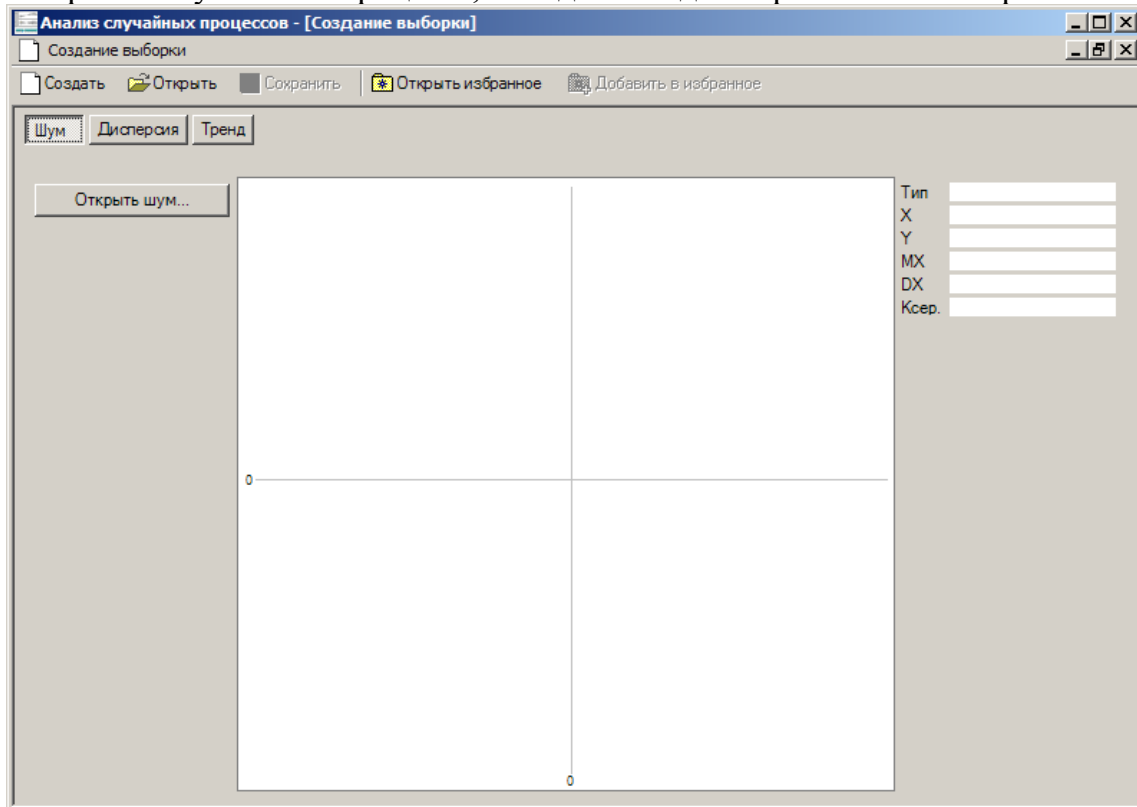


Рисунок 5.170 – Исходный вид подсистемы генерации

По нажатию кнопки «Открыть шум» открывается стандартное диалоговое окно выбора файла с расширением для предварительного просмотра выборки (рис. 5.171).

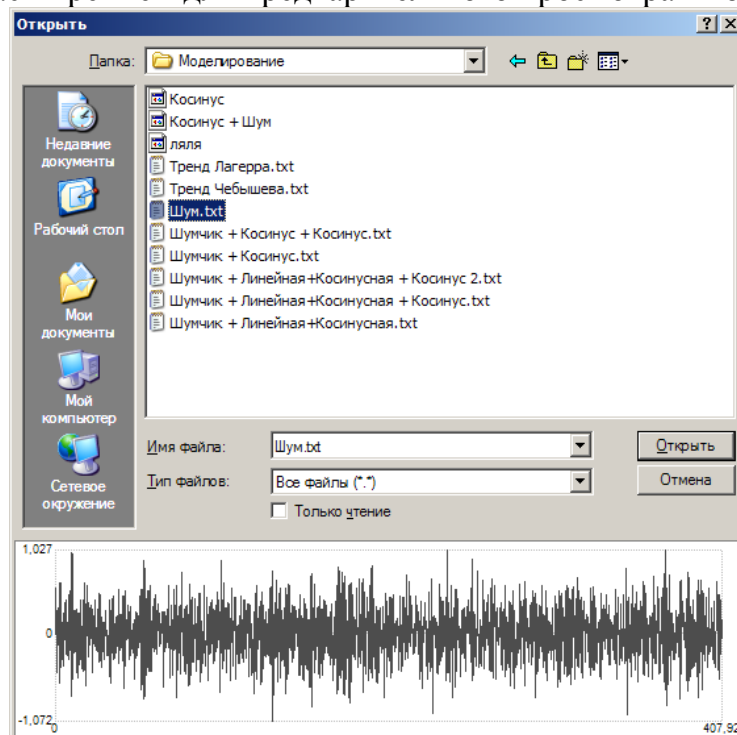


Рисунок 5.171 – Окно выбора файла

При выделении файла, содержащего поддерживаемые программой данные, внизу диалогового окна отображается графическое представление данных, содержащихся в файле. По нажатию кнопки «Открыть» диалоговое окно закрывается, и данные передаются в подсистему генерации (рис. 5.172).

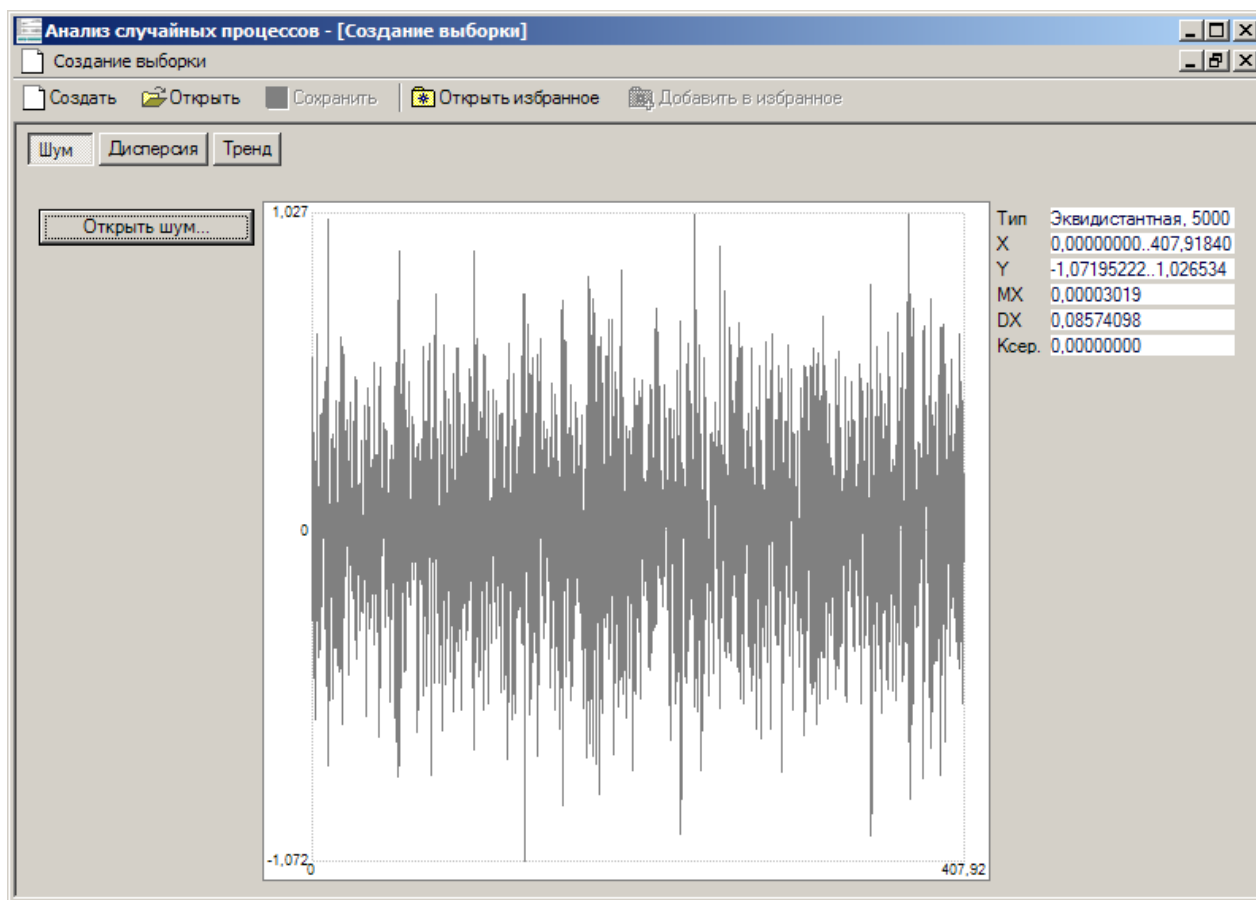


Рисунок 5.172 – Вид подсистемы генерации после загрузки шума

Эти же данные отображаются всюду в системе, где происходит работа с выборкой.

После загрузки в систему данных для перехода к наложению мультипликативного тренда следует нажать на кнопку «Дисперсия» в верхней части окна. В результате окно приложения будет разделено на две части: в верхней части задается функция, представляющая мультипликативный тренд, а в нижней – результат наложения мультипликативного тренда на шум. По умолчанию вид мультипликативного тренда не определен, поэтому в нижней части окна отображаются те же данные, что поступили на вход. Для определения вида функции следует выбрать ее из выпадающего списка, как показано на рис. 5.173.

После выбора вида функции под выпадающим списком появятся поля ввода с подписями, соответствующие параметрам выбранной функции. Для задания значения параметра следует перейти в соответствующее поле, щелкнув по нему мышью, либо нажатием клавиши «Tab», и ввести требуемое значение параметра. По окончании ввода, после нажатия клавиши «Enter», график функции обновится, согласно новым значениям параметра, а также обновится предварительный просмотр в нижней части окна (рис. 5.174).

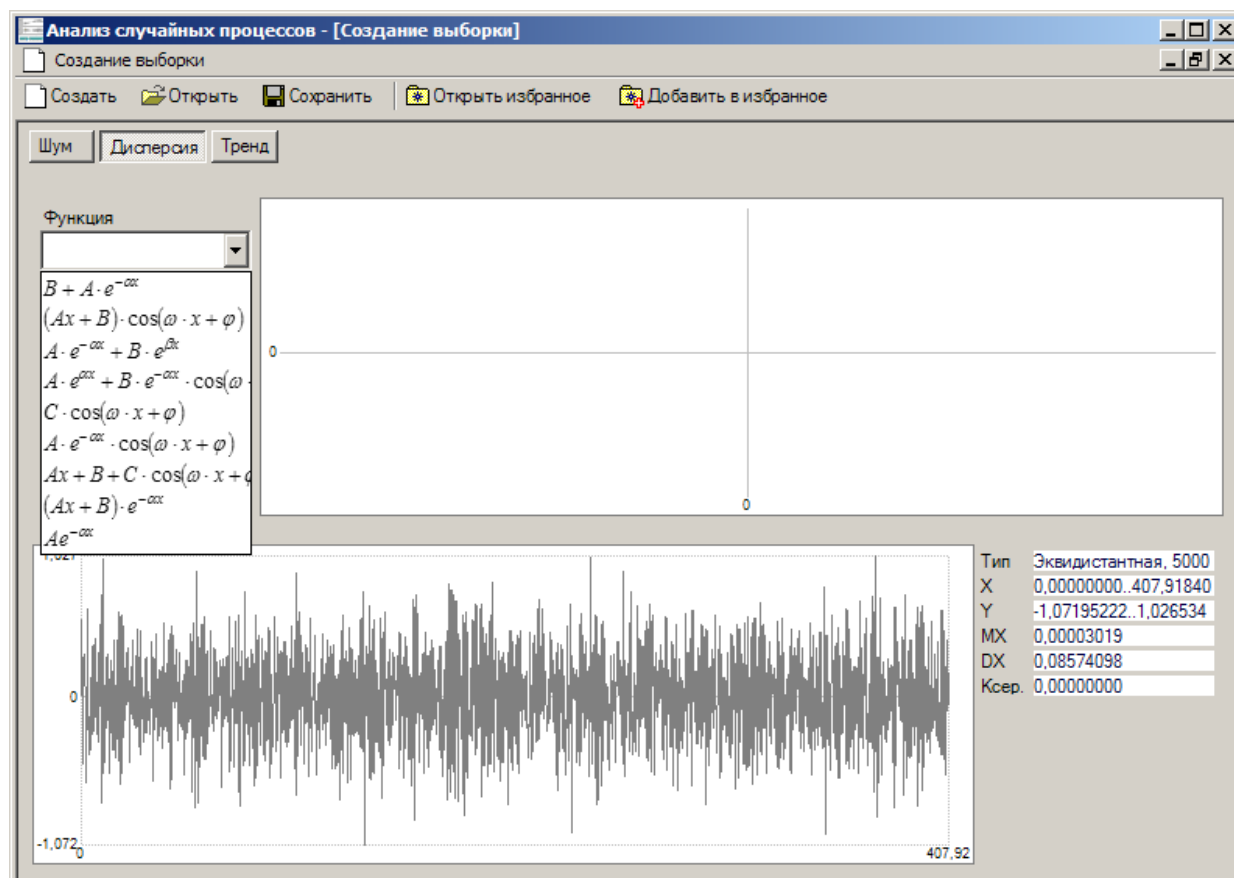


Рисунок 5.173 – Выбор вида дисперсии

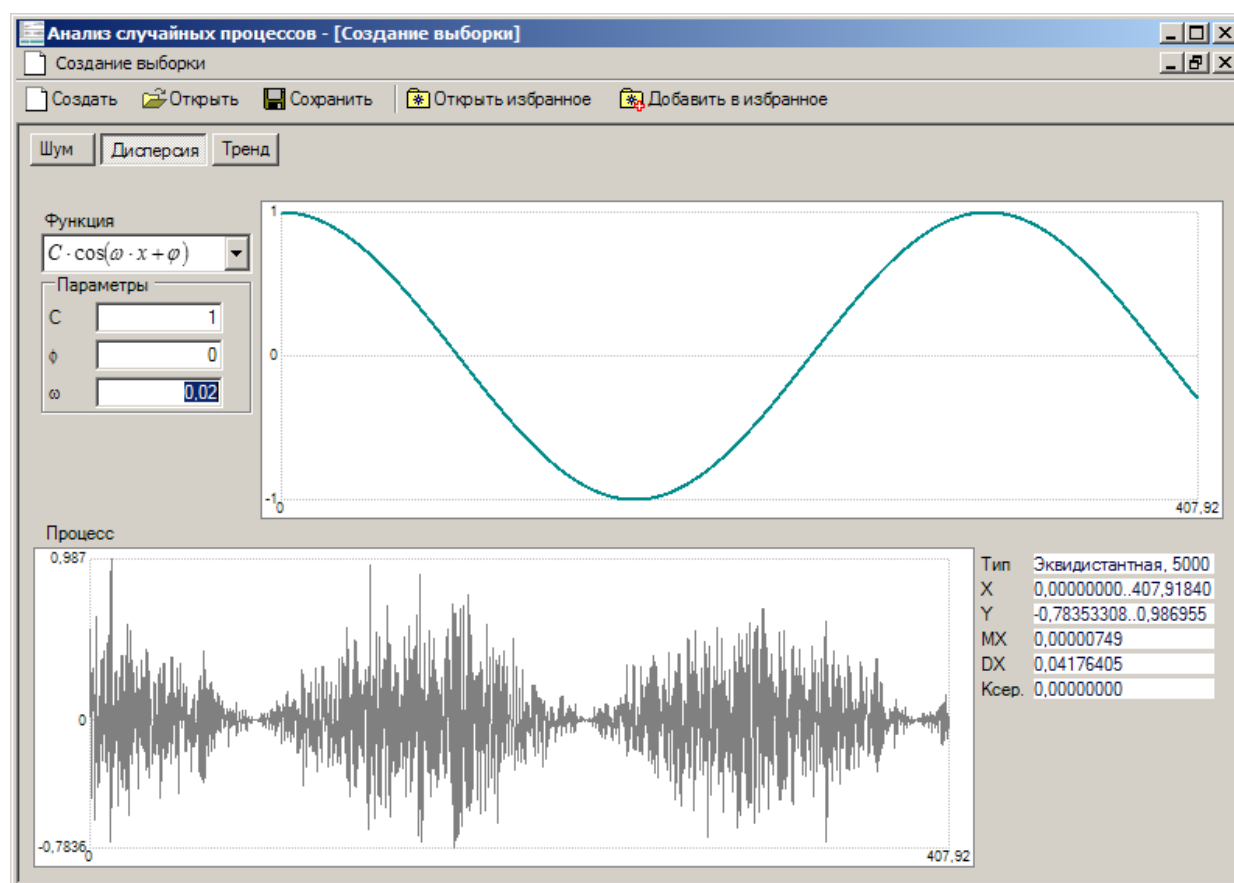


Рисунок 5.174 – Просмотр результата наложения дисперсии

Для применения к полученной выборке аддитивного тренда выполняется переход в подсистему наложения тренда нажатием кнопки «Тренд» рядом с кнопкой «Дисперсия». Работа с подсистемой наложения аддитивного тренда полностью аналогична с подсистемой наложения мультипликативного тренда (рис. 5.175).

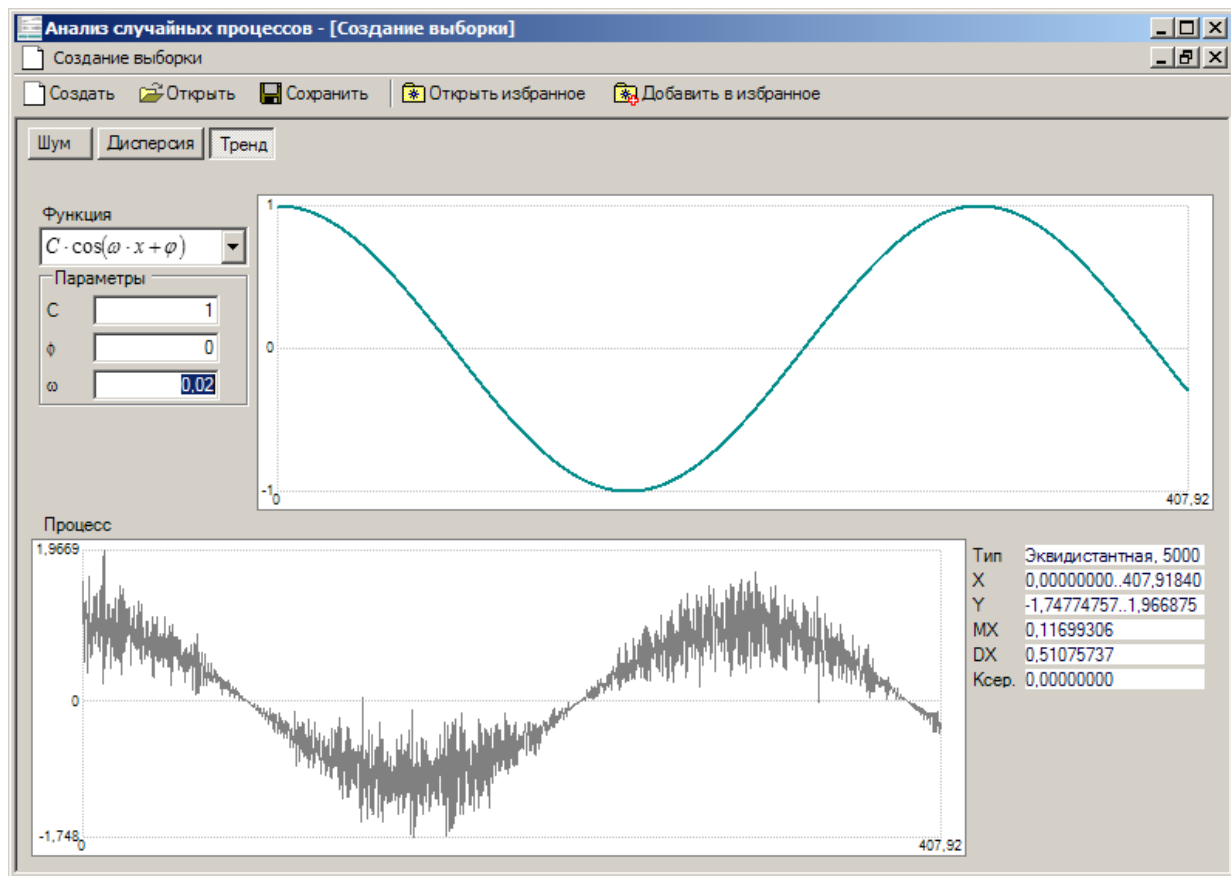


Рисунок 5.175 – Вид подсистемы наложения тренда

Для сохранения результатов наложения в файл следует нажать кнопку «Сохранить» и выбрать из выпадающего меню, что именно следует сохранить: тренд или полученную реализацию нестационарного случайного процесса. Кроме того, в любой момент можно добавить промежуточные результаты моделирования, а также полученный тренд в «Избранное», нажав на кнопку «Добавить в избранное».

Работа с подсистемой аппроксимации нестационарных случайных процессов

Чтобы открыть ранее сохраненные данные, либо данные, полученные из другого источника, следует нажать на кнопку «Открыть» в верхней части окна системы. При нажатии на эту кнопку появится окно открытия файла, показанное на рис. 5.172. После выбора файла с данными в зависимости от их типа запускается подсистема работы с выборкой, либо подсистема просмотра модели.

Вид подсистемы работы с выборкой в начальный момент времени показан на рис. 5.176.

Для перехода в подсистему центрирования и нормирования выборки следует нажать кнопку «Центрирование и нормирование» в верхней части окна. Для перехода к подсистеме экстраполяции следует нажать кнопку «Экстраполяция», расположенную рядом с кнопкой «Центрирования и нормирования».

В подсистеме центрирования и нормирования окно приложения разбито на три горизонтальные части, как показано на рис. 5.177.

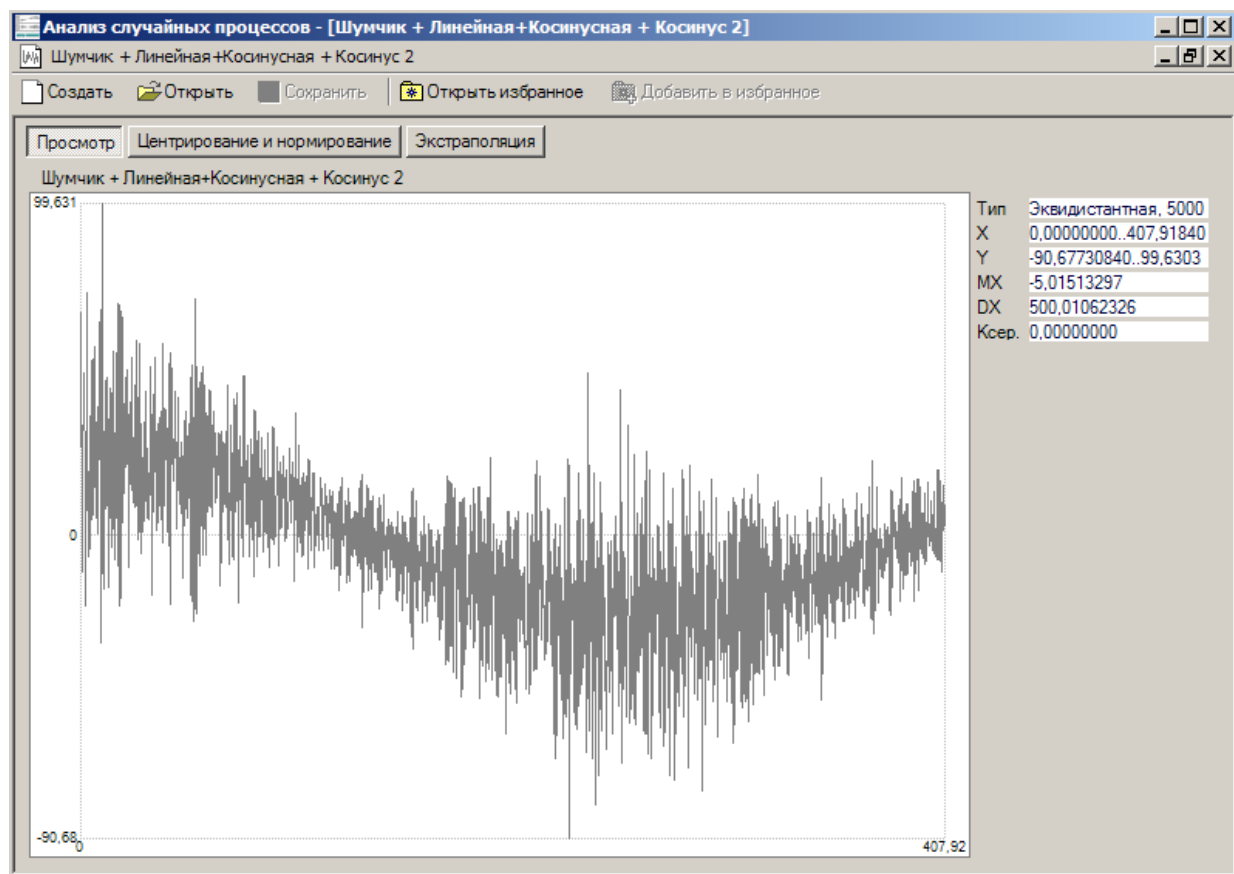


Рисунок 5.176 – Подсистема работы с выборкой

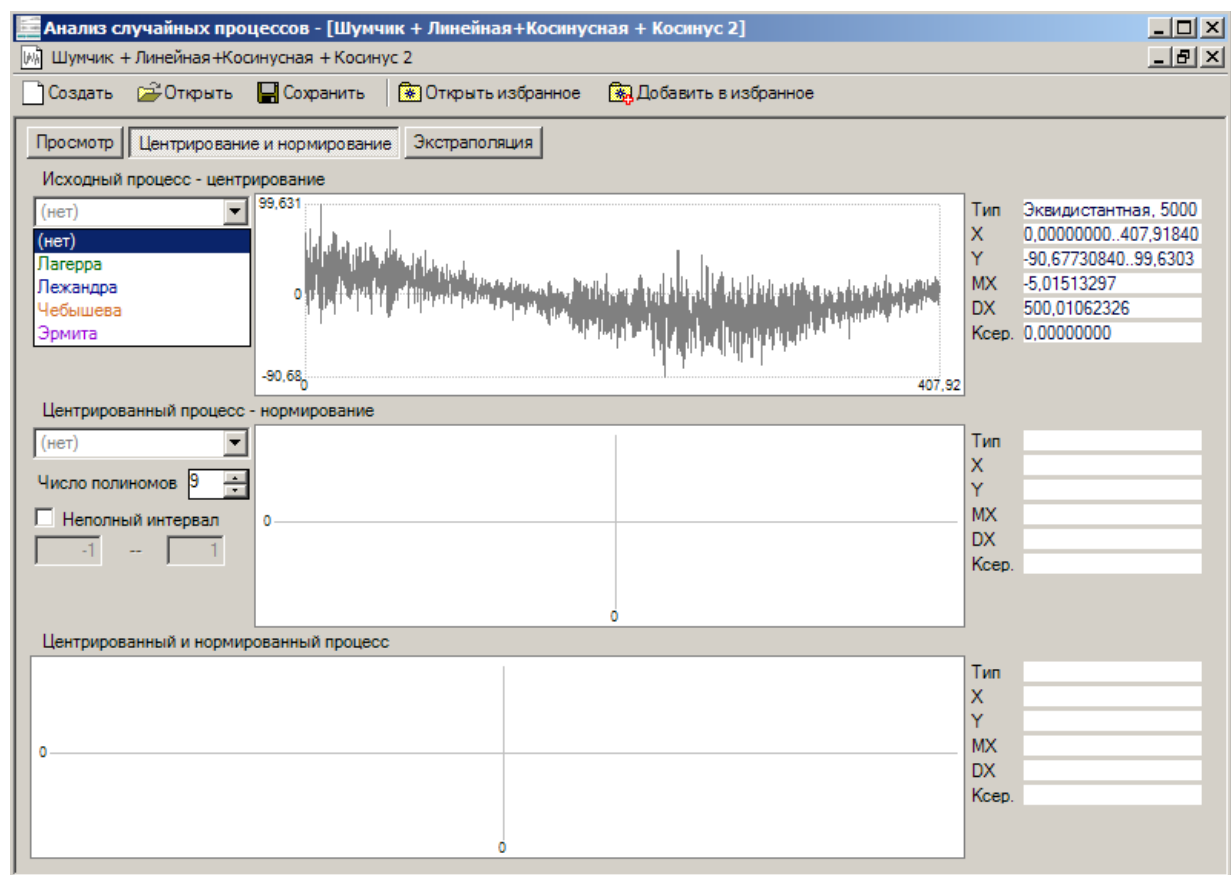


Рисунок 5.177 – Вид подсистемы центрирования и нормирования

На верхнем графике показана выборка, а также график модели выделяемого тренда. Для выбора ортогонального базиса, в котором происходит построение модели тренда, следует щелкнуть на выпадающем списке и выбрать из него название базиса. Для задания числа членов разложения следует перейти к полю, подписанному «Число полиномов», и ввести значение. Кроме того, находясь в этом поле, изменить значение можно последовательно, нажимая кнопки «Вверх» и «Вниз» для увеличения и уменьшения значения соответственно.

Для использования части интервала ортогональности следует отметить галочку «Неполный интервал» и ввести в поля под ней значения для левой и правой границ интервала. По окончании ввода каждого из значений следует нажать клавишу «Enter», либо перейти в другое поле. При выборе базиса Лагерра и Эрмита галочка «Неполный интервал» выбирается автоматически.

Изменении параметров аппроксимации автоматически приводит к вычислению тренда.

Аналогичным образом задаются параметры для выделения мультипликативного тренда.

Вид подсистемы центрирования и нормирования после установки параметров выделения аддитивного и мультипликативного трендов показан на рис. 5.178.

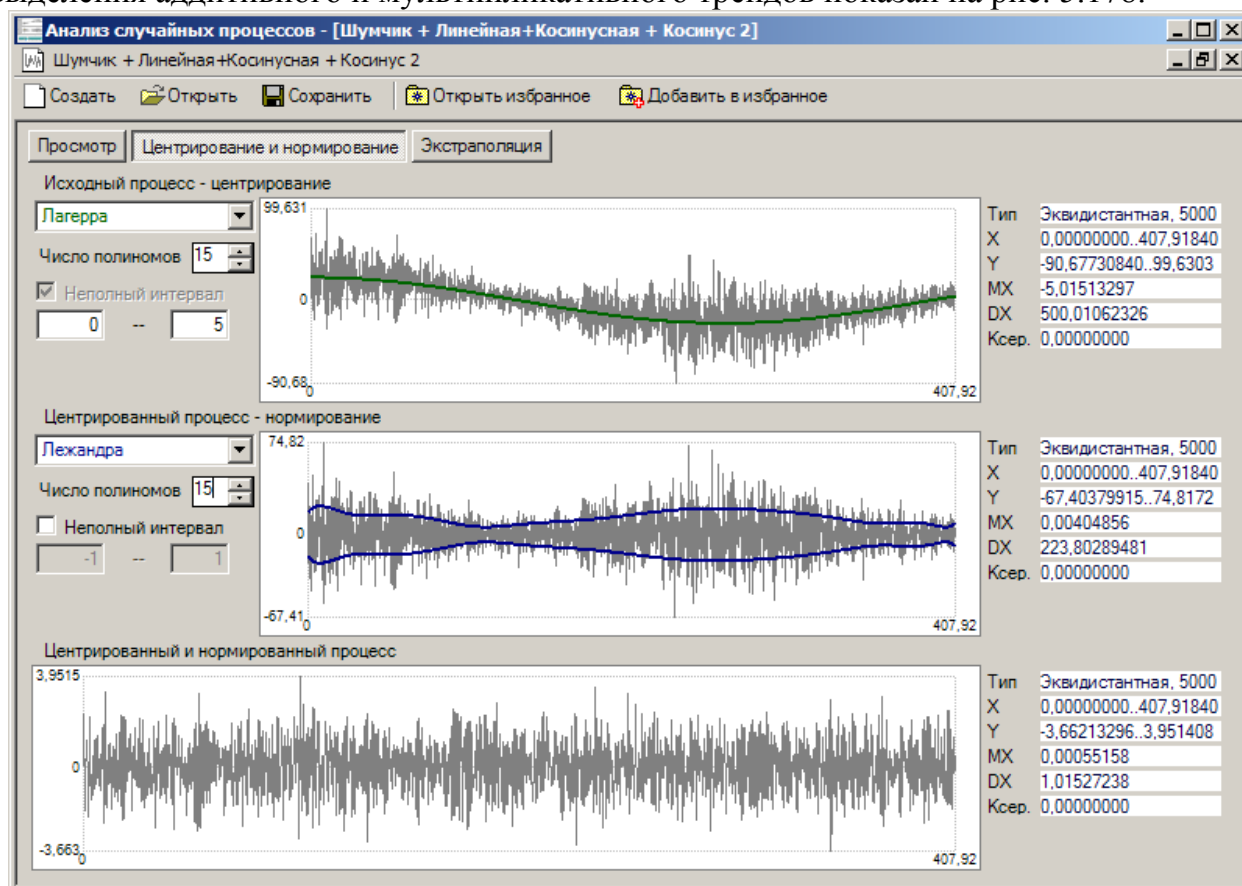


Рисунок 5.178 – Подсистема центрирования и нормирования в действии

Результаты выделения тренда и дисперсии, а также центрирования и нормирования можно сохранить в файл, нажав кнопку «Сохранить», либо добавить к библиотеке избранных данных, нажав кнопку «Добавить в избранное». Во втором случае перед добавлением появляется диалоговое окно, показанное на рис. 5.179.

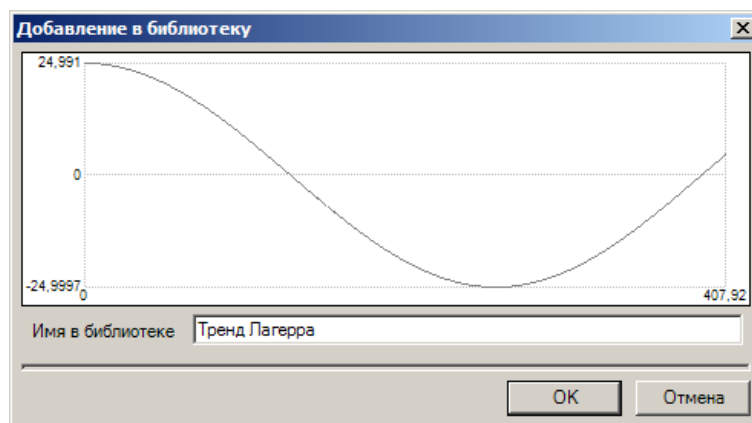


Рисунок 5.179 – Окно добавления в библиотеку

В окне графически отображаются данные, которые будут добавлены в библиотеку, а также предлагается ввести уникальную текстовую метку для добавляемых данных, чтобы упростить в дальнейшем их поиск. По нажатию кнопки «ОК» диалоговое окно закрывается и данные добавляются в библиотеку.

Перехода к подсистеме экстраполяции осуществляется нажатием кнопки «Экстраполяция».

Процесс взаимодействия с этой подсистемой аналогичен процессу выделения тренда и дисперсии, что легко угадывается по ее виду (рис. 5.180).

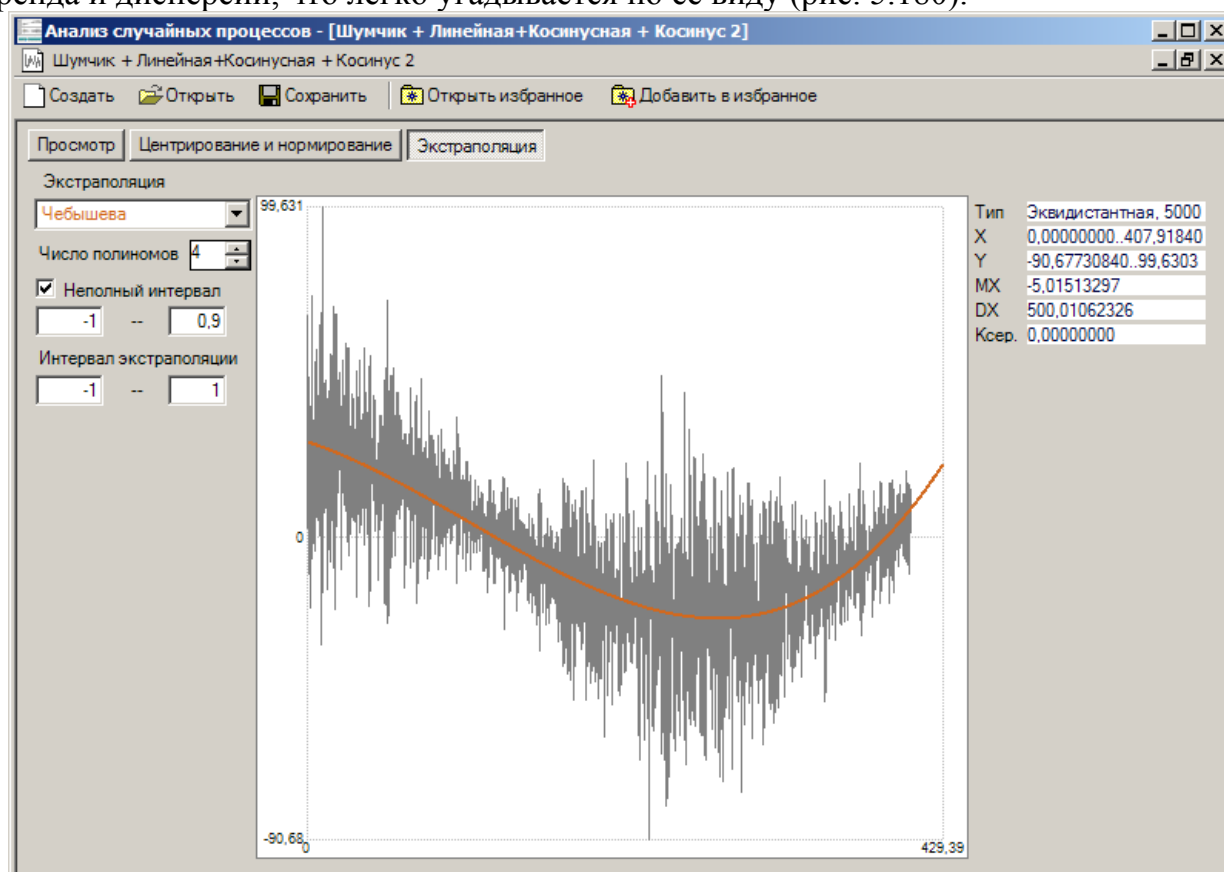


Рисунок 5.180 – Подсистема экстраполяции

Единственным дополнением является пара полей ввода «Интервал экстраполяции». В них указывается интервал, на котором восстанавливаются значения ортогонального разложения. Полученную в результате экстраполяции модель также можно сохранить в файл и добавить в избранное.

По нажатию кнопки «Открыть избранное» открывается окно библиотеки избранных данных (рис. 5.181). В библиотеке хранятся как временные ряды, так и ортогональные разложения.

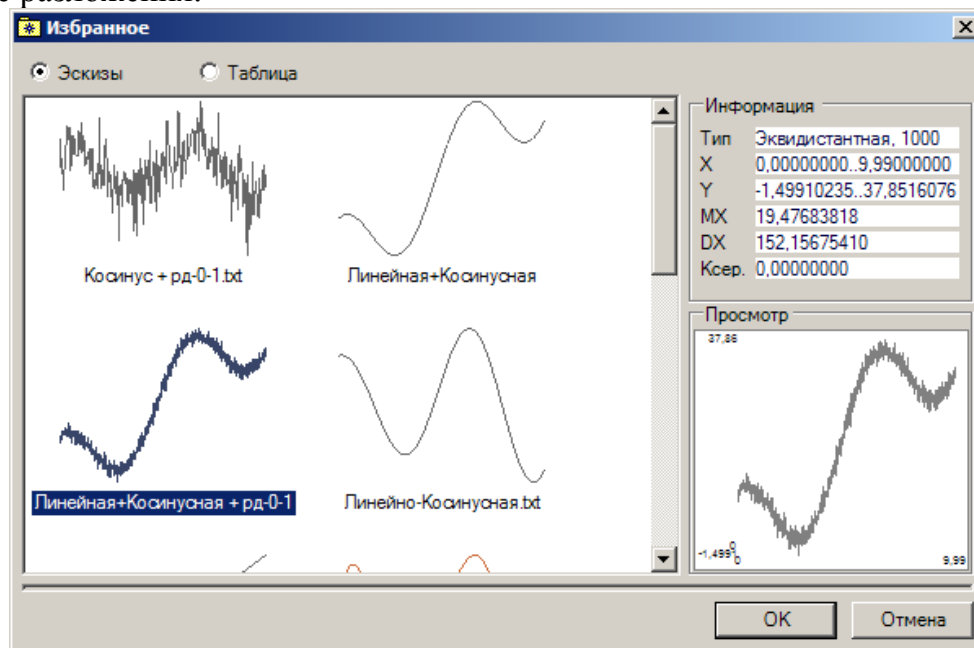


Рисунок 5.181 – Библиотека избранных данных

При выборе элемента библиотеки в правой части окна отображается информация о нем, а так же его график. В режиме табличного просмотра (рис. 5.182) отображается список элементов библиотеки и краткое описание. Для переход в этот режим следует щелкнуть мышкой по надписи «Таблица» в верхней части окна.

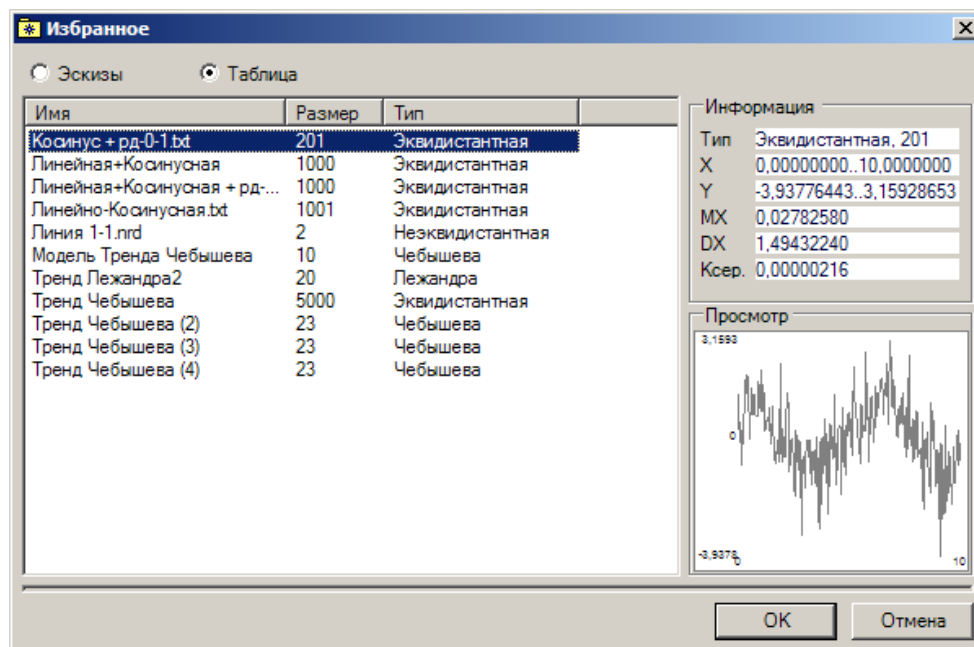


Рисунок 5.182 – Режим табличного просмотра

После выбора элемента и нажатия на кнопку «ОК» в правом нижнем углу диалогового окна оно закрывается, и запускается подсистема, соответствующая типу выбранных данных (подсистема работы с выборкой или подсистема просмотра модели).

5.13. Система имитационного моделирования преобразования Фурье

Система имитационного моделирования является 32-х разрядным приложением в среде Windows, разработанная на языке программирования Borland Delphi 5 [157]. Системные требования: Pentium-166 с 64 Мб оперативной памяти, операционная система Windows95/98/NT/2000.

В состав системы входят следующие файлы:

- 1) *fourie.exe* - основной запускаемый модуль;
- 2) *signal.dll* - библиотека процедур расчета входных сигналов;
- 3) *stream.dll* - библиотека процедур расчета дискретизирующей последовательности;
- 4) *fourie.dll* - библиотека процедур вычисления ДПФ.

Структура программного комплекса представлена на рис. 5.183 и состоит из следующих модулей:

- интерфейсного модуля управления (*fourie.exe*);
- модуля расчета входной последовательности (*signal.dll*);
- модуля расчета сигнала дискретизации (*stream.dll*);
- модуля восстановления сигнала (*fourie.exe*);
- модуля расчета ДПФ (*fourie.dll*);
- модуля расчета погрешности (*fourie.exe*).

На рис. 5.184 – 5.190 представлены экранные формы системы имитационного моделирования. Исследователю предлагаются следующие виды эксперимента:

- моделирование входного сигнала;
- моделирование сигнала дискретизации;
- восстановление сигнала в случае неравномерной дискретизации;
- расчет преобразования Фурье;
- проведение статистических исследований.



Рисунок 5.183 - Структура системы имитационного моделирования

Любой эксперимент после выбора параметров инициируется выбором пункта меню «Настройка/Расчет». Пункты меню дублируются кнопками на панели инструментов. Полученные графики можно распечатать или сохранить в файл формата *.BMP.

Система позволяет моделировать и выводить графики следующих типов сигналов (рис. 5.184):

- полигармонический псевдослучайный сигнал: имеется возможность выбрать частотный состав моделируемого сигнала, соотношение начальных фаз и частоту дискретизации;
- широкополосный случайный сигнал с заданным видом АКФ: имеется возможность выбрать параметры затухания АКФ и интервал корреляции, частота дискретизации выбирается автоматически исходя из погрешности моделирования АКФ;
- узкополосный случайный сигнал с заданным видом АКФ: имеется возможность выбрать параметры затухания и частоту колебаний АКФ, интервал корреляции, частота дискретизации выбирается автоматически исходя из погрешности моделирования АКФ.

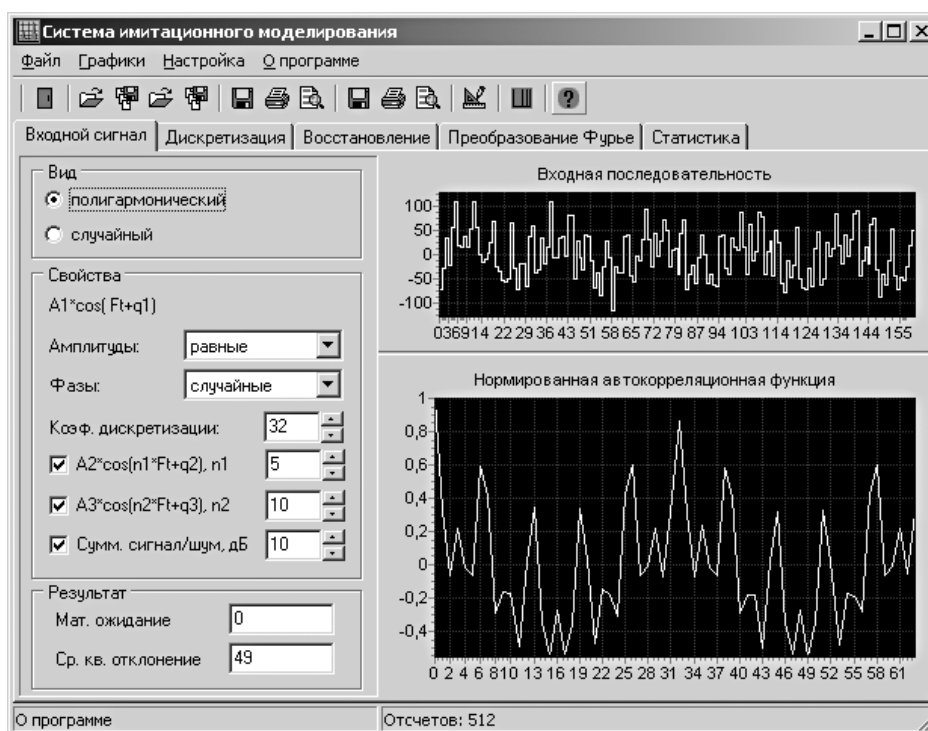


Рисунок 5.184 - Интерфейс системы имитационного моделирования

Система моделирования позволяет сохранить сгенерированный сигнал или его АКФ в текстовый файл для использования в других исследовательских системах или повторных вычислений.

При проведении эксперимента исследователь имеет возможность проконтролировать математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение полученной модельной входной последовательности.

На выходных графиках выводятся моделируемый сигнал и его автокорреляционная функция.

Следующим этапом исследований является моделирование потока дискретизации (рис. 5.185). Возможно генерирование двух типов потоков дискретизации:

- потока с пропусками наблюдений;
- потока с аддитивной случайной дискретизацией.

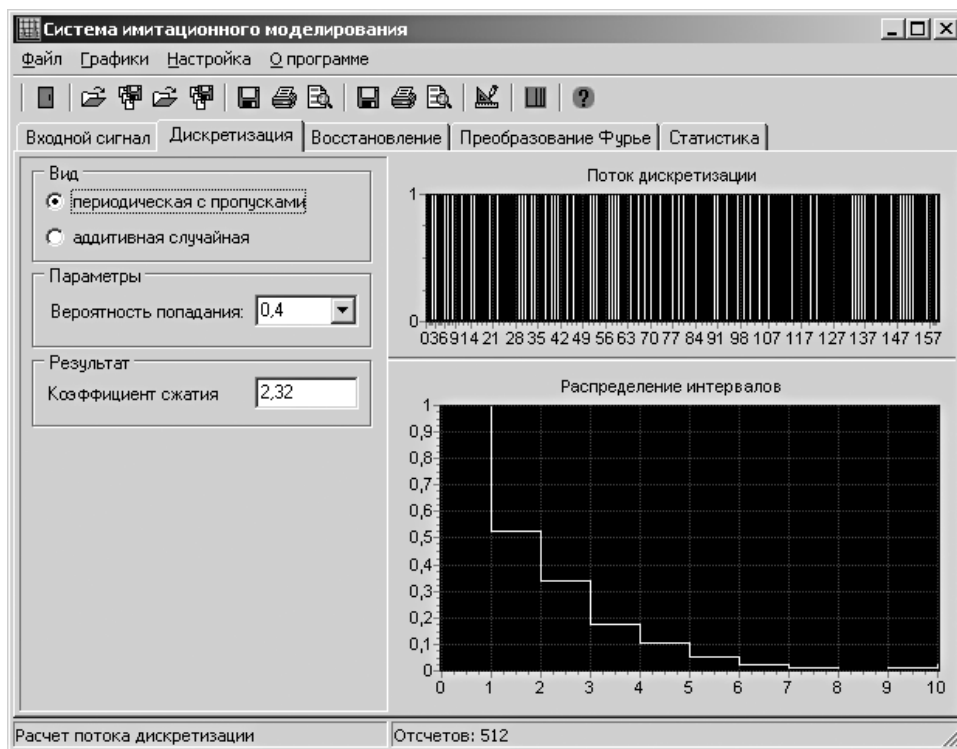


Рисунок 5.185 - Интерфейс системы имитационного моделирования

Разрежение потока производится выбором соответствующего значения параметра. При установке вероятности 1 для дискретизации с пропусками и показателя 10 для аддитивной дискретизации поток становится регулярным. Выходным значением эксперимента является коэффициент сжатия потока, определяющий соотношение реальных и пропущенных отсчетов.

На выходных графиках представляются поток дискретизации и гистограмма распределения интервалов в потоке. Система моделирования позволяет сохранить сгенерированный поток и гистограмму распределения в текстовый файл для использования в других исследовательских системах или повторных вычислений.

На третьем этапе эксперимента – «Восстановление» – возможна предварительная обработка сигнала с помощью простейших моделей аппроксимации (рис. 5.186):

- восстановление ближайшим правым отсчетом;
- восстановление ближайшим левым отсчетом;
- восстановление ближайшим отсчетом;
- восстановление с помощью линейной интерполяции.

Программа рассчитывает графики восстановленной входной последовательности и ее нормированную автокорреляционную функцию, которую удобно сравнивать с АКФ исходного сигнала на закладке «Входной сигнал» (рисунки 5.187-5.188).

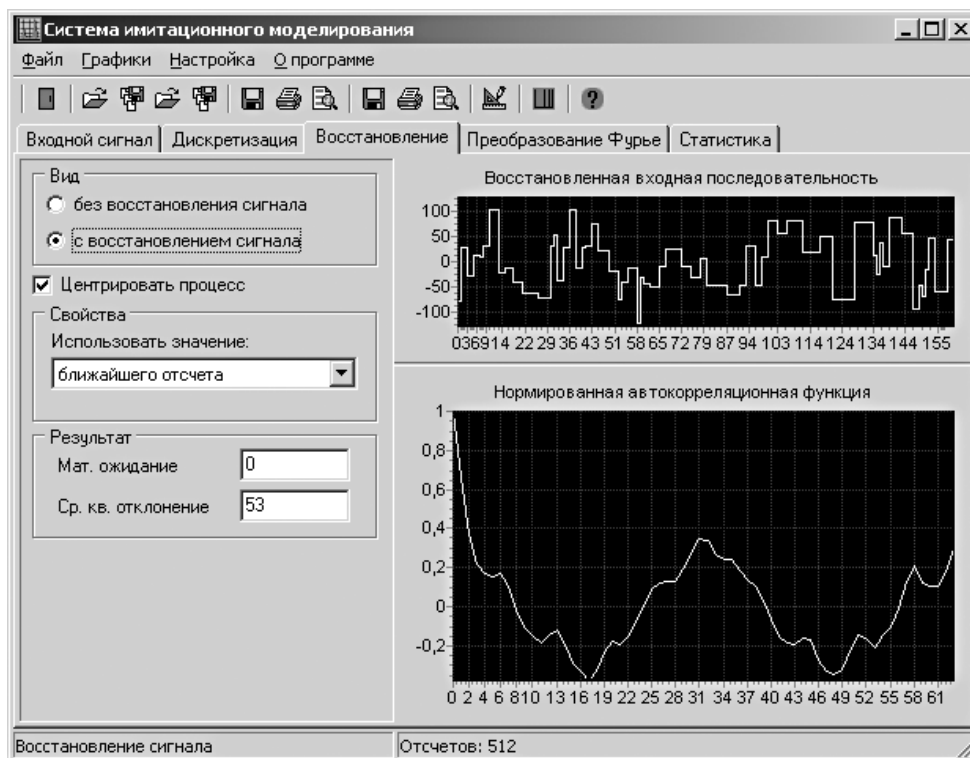


Рисунок 5.186 - Интерфейс системы имитационного моделирования

Т.к. восстановление сигнала может изменить его постоянную составляющую, то исследователю предлагается центрировать процесс и проследить за значениями его параметров.

На закладке «Преобразование Фурье» производится расчет ДПФ восстановленной последовательности различными методами:

- прямым методом вычисления ДПФ;
- методом Кули–Тьюки по основанию два.

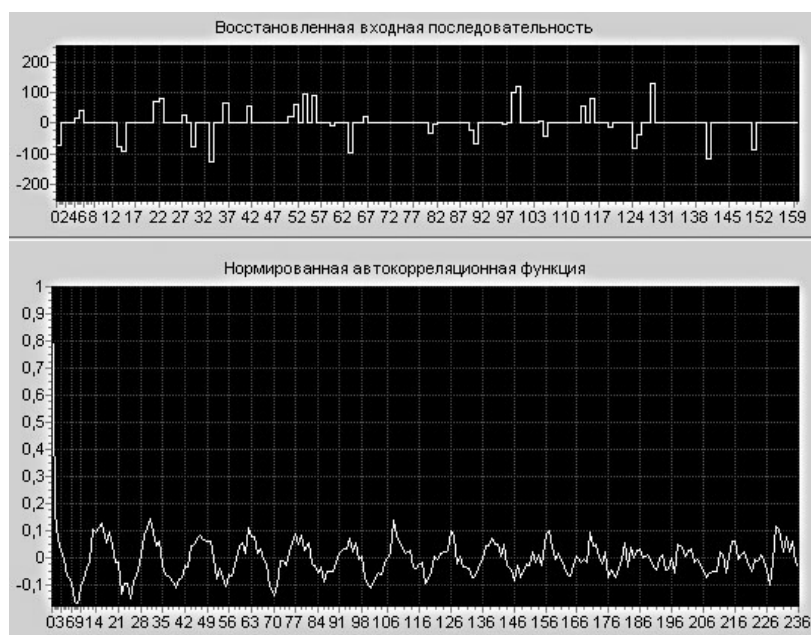


Рисунок 5.187 – Входной сигнал

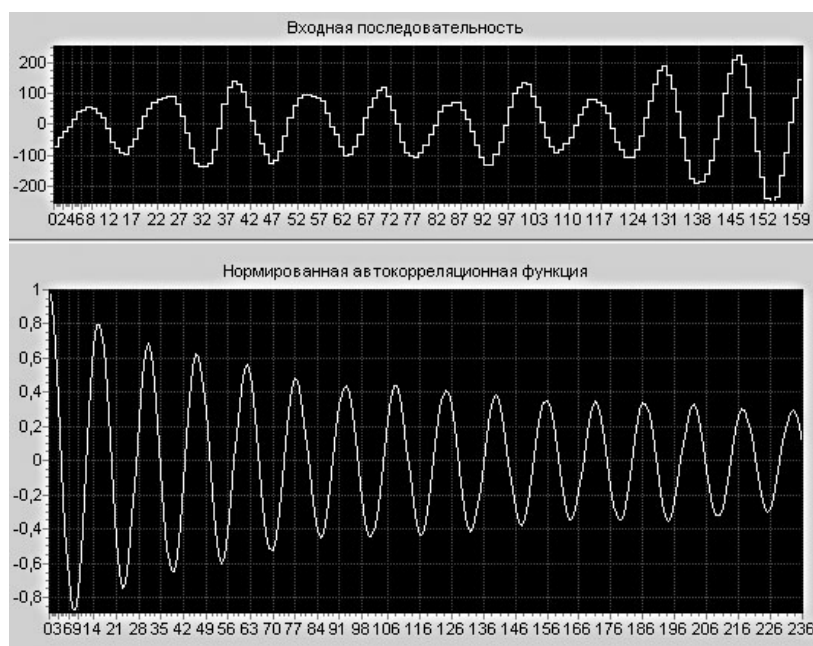


Рисунок 5.188 - Сигнал с пропусками наблюдений

Каждый метод имеет как классическую, так и дескрипторную версию алгоритма вычислений (рис. 5.189). При вычислениях ДПФ в каталоге программы создаются файлы с рассчитанными коэффициентами преобразования, имеющие расширение *.DAT. Эти файлы используются при повторных расчетах преобразования Фурье, что может значительно сократить потери времени исследователя.

В качестве параметра расчета выступает входная разрядность вычислителя преобразования: сигнал на входе может иметь квантование от двух до восьми разрядов, что соответствует $4 \div 256$ уровням квантования.

Эксперимент проводится методом сравнения с образцовым сигналом, за который принимается сигнал выбранного типа с регулярной дискретизацией исходной разрядности (256 уровней), рассчитанный выбранным методом. Т.е. классический и дескрипторный методы сравниваются в пределах заданного алгоритма вычислений: прямого метода или метода Кули–Тьюки.

На выходных графиках представляются нормированный спектр мощности и распределение абсолютной ошибки его вычисления по спектру. Исследователь также может проконтролировать максимальную ошибку вычислений, среднее значение ошибки и ее среднеквадратическое отклонение. Для оценки времени вычислений можно использовать две величины: количество прошедших тактов процессора или показания точного таймера операционной системы Windows.

На закладке «Статистика» производится статистический анализ параметров расчета ДПФ. Набор исследуемых величин является комбинацией из параметров, заданных на предыдущих этапах экспериментов (рис. 5.190). Число повторений эксперимента может изменяться в пределах от 1 до 100.

Выходными данными являются графическое распределение искомой величины, ее максимальное и среднее значение.

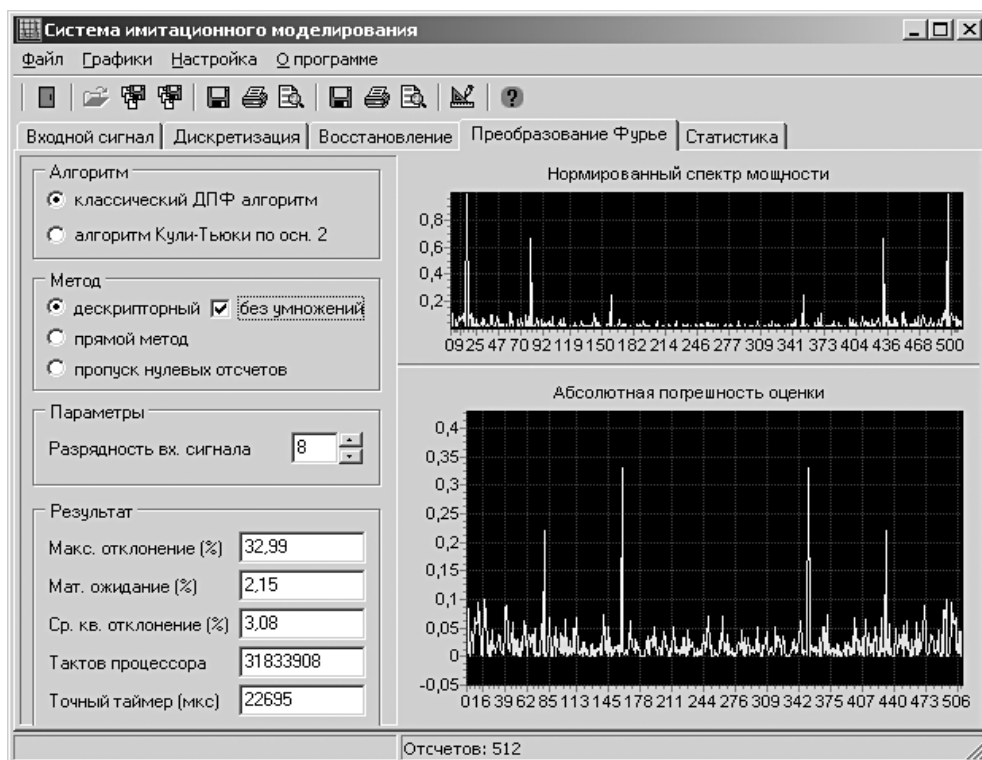


Рисунок 5.189 - Интерфейс системы имитационного моделирования

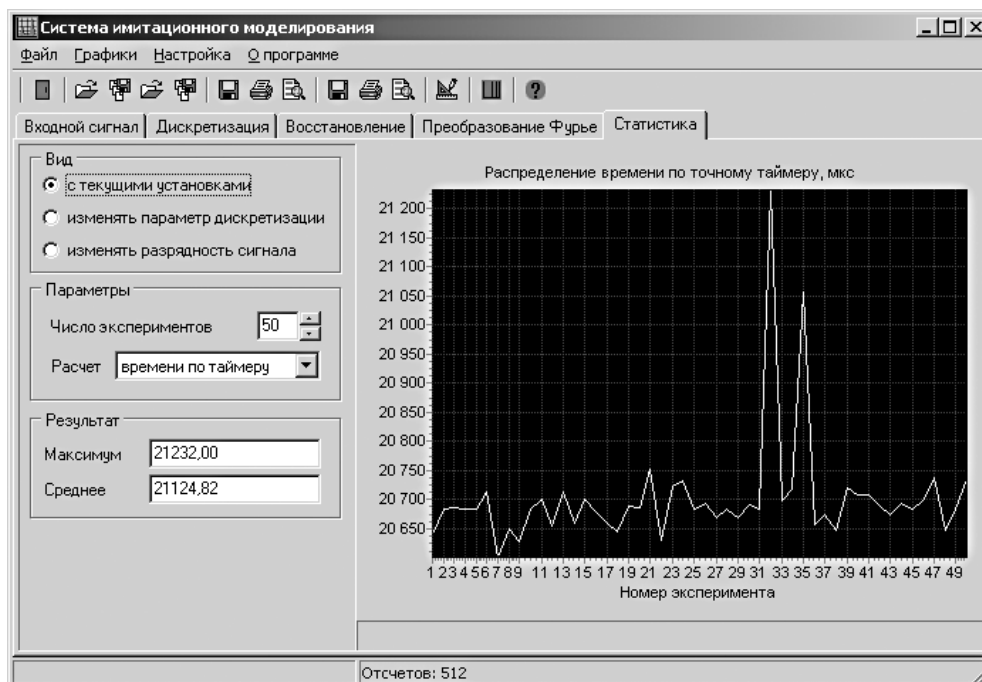


Рисунок 5.190 - Интерфейс системы имитационного моделирования

Моделирование входных воздействий

В качестве входных воздействий системы расчета ДПФ выбраны два вида процессов:

1. Псевдослучайный стационарный процесс

Очень часто в качестве модели стационарного случайного процесса используется комбинация узкополосных составляющих, аддитивно смешанных с широкополосным шумом (рис. 5.192).

В качестве узкополосного воздействия выбрана сумма трех синусоидальных колебаний со случайными амплитудами и начальными фазами. В качестве источника шума используется генератор равномерно распределенной случайной величины ЭВМ, обеспечивающий достаточную для инженерных расчетов точность. Начальные условия выбраны следующим образом:

- сигнал может содержать от одной до трех гармонических составляющих;
- сигнал может быть аддитивно смешан с широкополосным шумом;
- амплитуды и начальные фазы гармонических составляющих могут выбираться как равными, так и случайными величинами;
- частоты гармонических составляющих могут отличаться до 10 раз;
- отношение максимальной амплитуды суммарного полигармонического сигнала к максимальной амплитуде добавляемого широкополосного шума может изменяться в пределах ± 10 дБ.

Пример псевдослучайного процесса, синтезированного подобным образом, приведен на рис. 5.193.

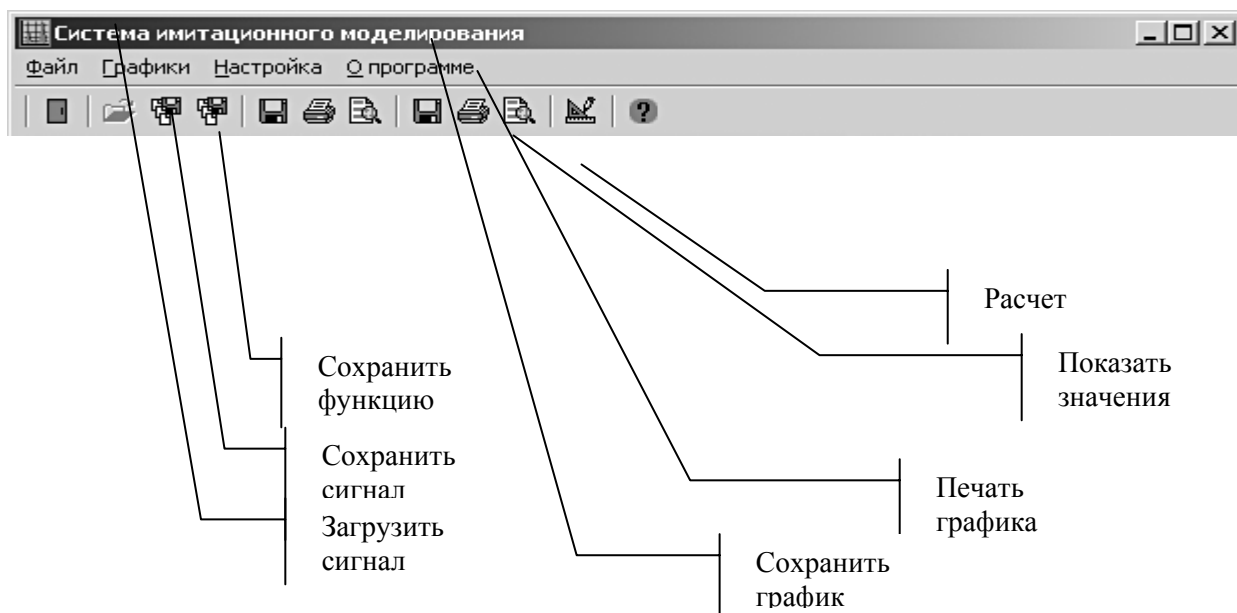


Рисунок 5.191 - Меню программы

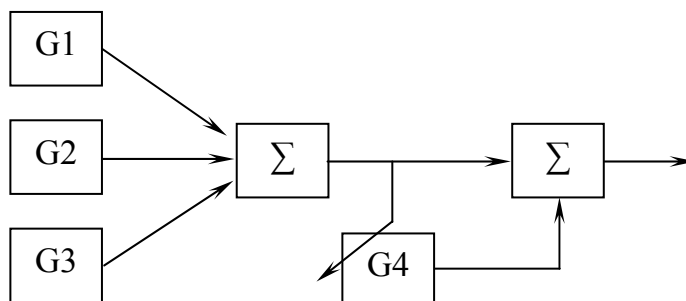


Рисунок 5.192 - Формирование псевдослучайного сигнала

где G1, G2, G3 – генераторы гармонических колебаний;
G4 – управляемый генератор широкополосного шума.

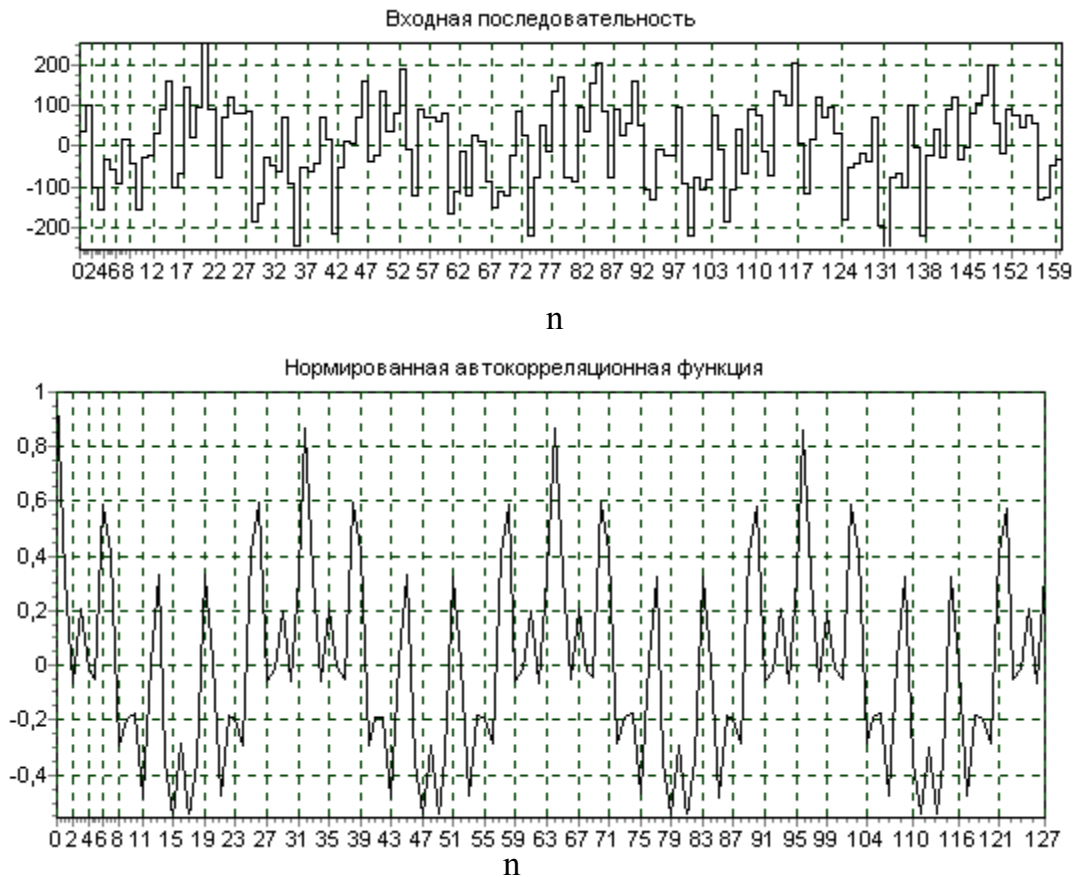


Рисунок 5.193 – Нормированная корреляционная функция

Псевдослучайный стационарный процесс:

$$X(n) = \cos(fn + q_1) + \cos(5fn + q_2) + \cos(10fn + q_3) + m(n),$$

где n и f – безразмерные нормированные время и частота;

q_1, q_2, q_3 – случайные начальные фазы;

$m(n)$ – широкополосный шум.

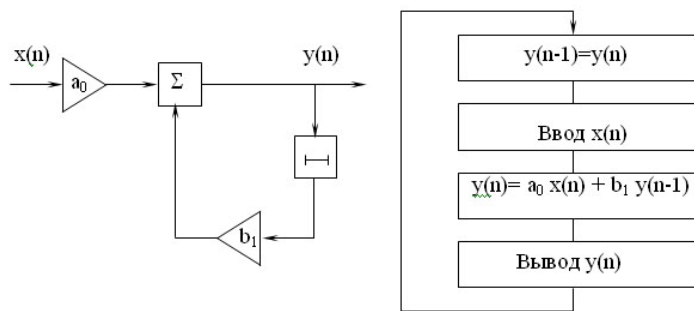
1. Случайный стационарный сигнал

Данный вид входных воздействий представляет собой коррелированный временной ряд – случайный входной сигнал с заданным видом автокорреляционной функции. Сигнал формируется методом цифровой фильтрации равномерно распределенной случайной величины. Как показано в [161], рекурсивные фильтры имеют наименьшие погрешность восстановления и время формирования. В таблице П.9 приведены формулы для вычисления коэффициентов импульсной характеристики рекурсивного цифрового фильтра. Структуры цифровых фильтров представлены на рис. 5.194.

Начальные условия могут быть выбраны следующим образом:

- уровень для определения максимального интервала корреляции 0,01; 0,02; 0,05;
- погрешность восстановления при линейной интерполяции АКФ 2%; 5%;
- показатель затухания АКФ 0,1; 1; 5;
- частота колебаний АКФ 1..10 Гц.

Разностное уравнение: $y(n) = a_0 x(n) + b_1 y(n-1)$



Разностное уравнение: $y(n) = a_0 x(n) + a_1 y(n-1) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2)$

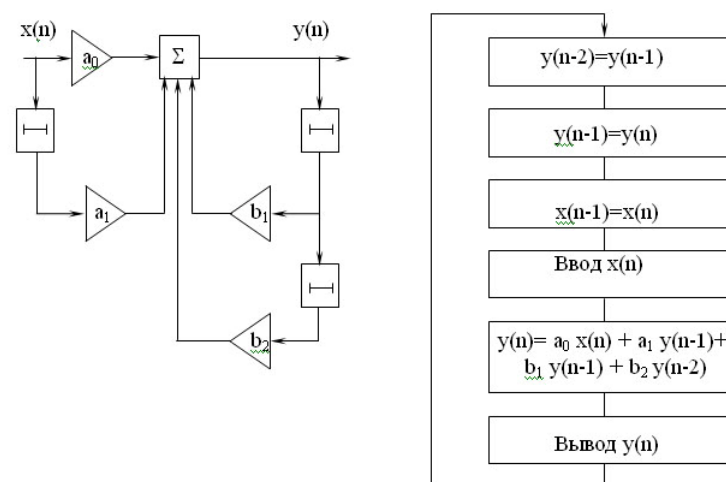


Рисунок 5.194 - Алгоритмы цифровой фильтрации

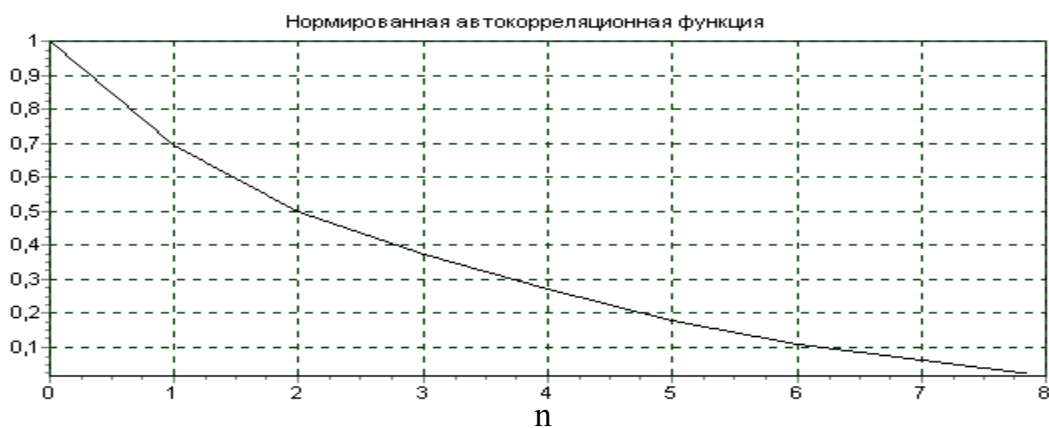


Рисунок 5.195 – НКФ $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$

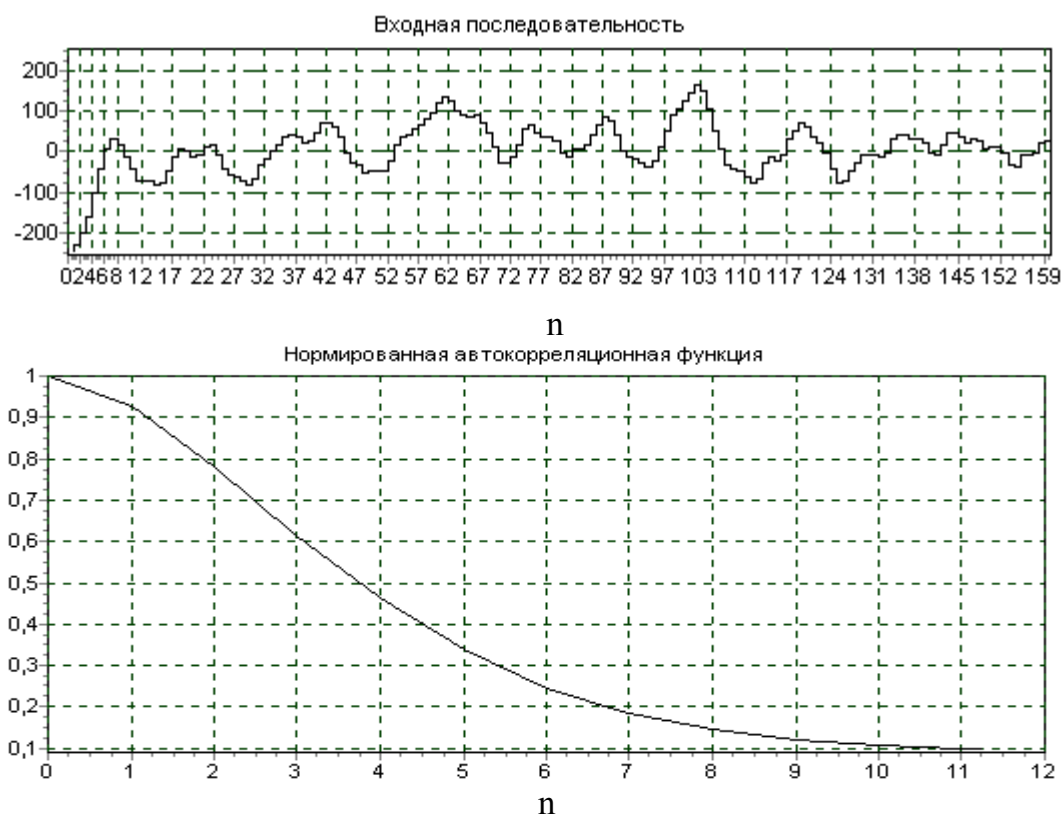


Рисунок 5.196 – Широкополосный случайный коррелированный процесс с

$$\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$$

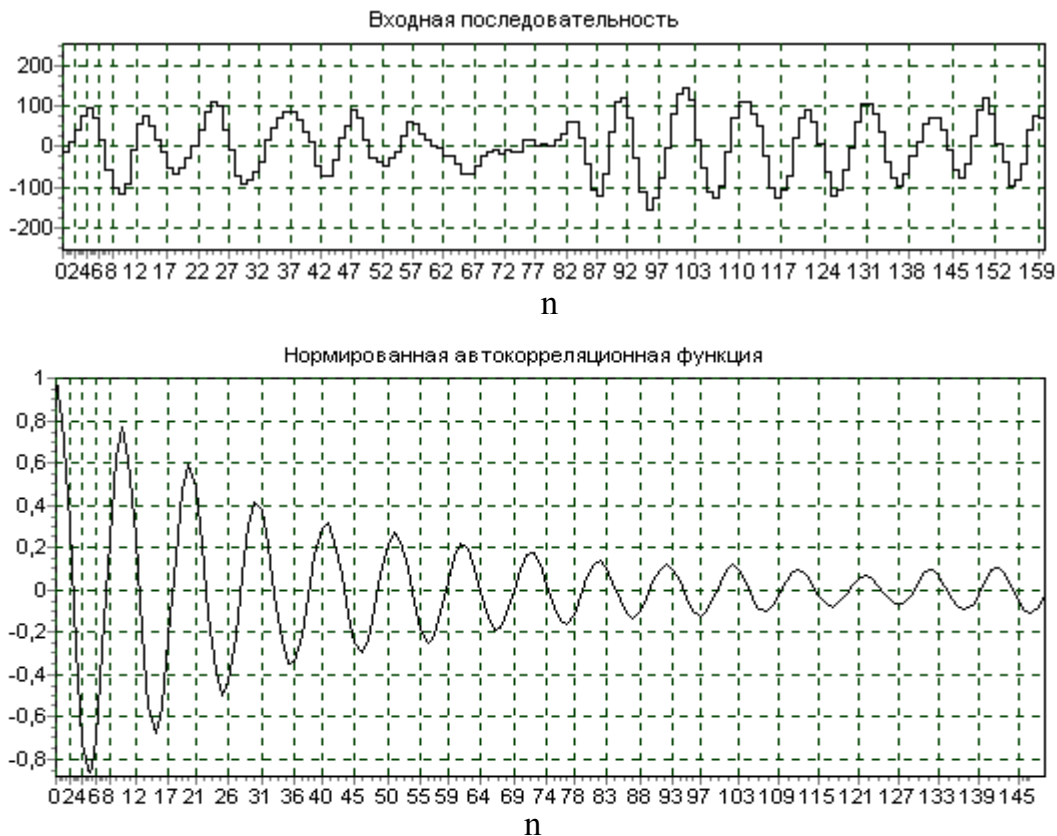


Рисунок 5.197 - Узкополосный случайный коррелированный процесс с $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$

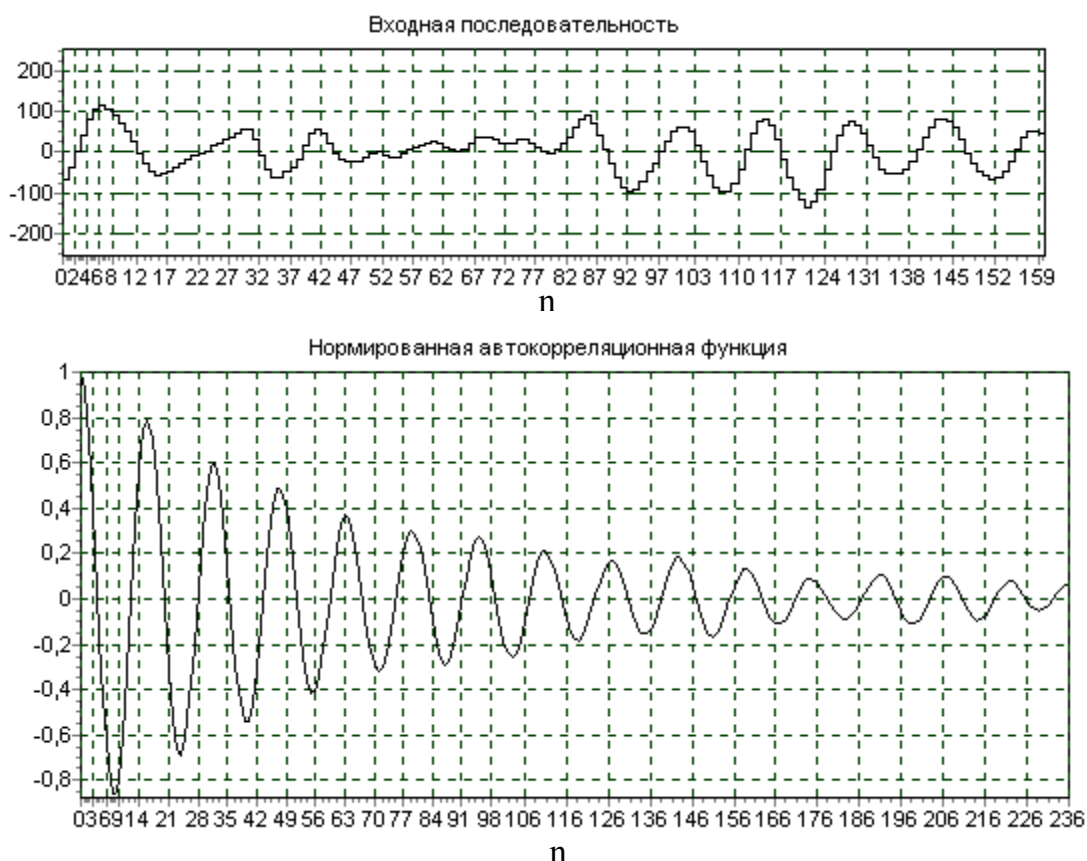


Рисунок 5.198 - Узкополосный случайный коррелированный процесс с

$$\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$$

Моделирование потока с нерегулярной дискретизацией

Исследование системы вычисления дискретного преобразования Фурье производится как в условиях регулярной дискретизации, так и в условиях неравномерной (случайной) последовательности дискретизирующих импульсов. В экспериментах данной работы использовался поток дискретизации, характеристики которого не зависят от характеристик исследуемого процесса, что соответствует непреднамеренной случайной дискретизации. В большинстве случаев, для описания различных видов неравномерной дискретизации используют модели рекуррентных потоков Пальма [117]:

- периодическая дискретизация со случайными пропусками наблюдений;
- аддитивная случайная дискретизация;
- периодическая дискретизация с «дрожанием».

Используются так же обобщающие модели потоков:

- периодическая дискретизация с «дрожанием» и случайными пропусками наблюдений;
- аддитивная случайная дискретизация со случайными пропусками наблюдений.

Параметры расчета ДПФ

Одним из видов эксперимента, проводимого с помощью системы имитационного моделирования, является возможность вычисления ДПФ, используя входные сигналы произвольной разрядности. Разрядность входного сигнала при вычислениях

дескрипторным методом в значительной степени определяет объем требуемой памяти. Изменение разрядности сигнала на различных участках расчета ДПФ представлено на рисунке 5.199.

Как уже отмечалось, разработанная система имитационного моделирования оценивает погрешность расчета ДПФ методом образцового сигнала. Вычисления в исследуемых методах ДПФ производится в целых числах и коэффициенты хранятся в виде целого числа со знаком.

В качестве исходного для моделирования на языке Delphi5 слов с малой разрядностью использовался целый тип *ShortInt*, представляющий на большинстве современных ЭВМ 8–разрядное слово со знаком и фиксированной точкой. Нужная разрядность слов достигается сдвигом содержимого вправо и отбрасыванием нулевых старших разрядов при вычислениях.

С целью создания равных условий при проведении сравнительных экспериментов как в классическом так и дескрипторном случае используется один двумерный массив элементов *ShortInt*. Размерность массива составляет $[(n*k)\bmod N \times q_{\max}]$. При выполнении классического преобразования в нем хранятся поворачивающие коэффициенты преобразования, и адресация осуществляется *Mem[addr,1]*. В случае дескрипторного преобразования коэффициенты представляют собой готовые произведения, а в адресации используется текущая амплитуда отсчета: *Mem[addr, x(n)]*. Этим достигается единообразие структуры массива для всех видов экспериментов, создаваемая компилятором языка Borland Delphi 5.

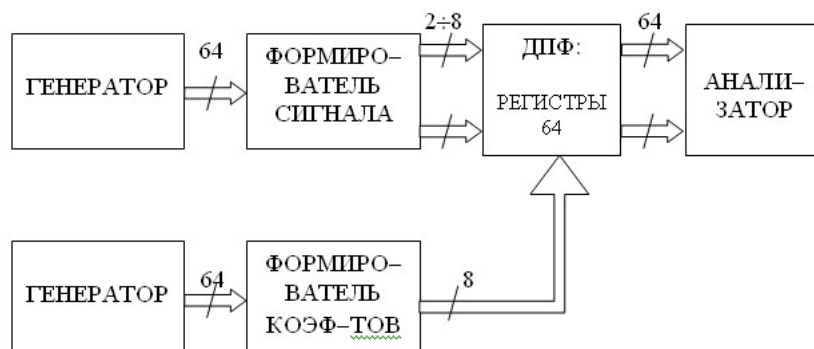


Рисунок 5.199 - Изменение разрядности сигнала при вычислении ДПФ

Восьмиразрядное ограничение разрядности слов в массиве является скорее вынужденным, т.к. значительно сокращает объем требуемой памяти при сохранении массивов и в оперативной памяти и на жестком диске ЭВМ. Однако данное ограничение разрядности вносит в вычисления «погрешность квантования коэффициентов» при сравнении с образцовым сигналом, являющуюся одним из предметов исследований.

Другим элементом эксперимента является возможность восстановления сигнала простейшими интерполяционными моделями (рисунок 5.200) [117]:

- восстановление ближайшим правым отсчетом;
- восстановление ближайшим левым отсчетом;
- восстановление ближайшим отсчетом;
- восстановление с помощью линейной интерполяции.



а)



б)



в)



г)



д)

Рисунок 5.200 – Восстановление сигнала

Важной задачей является оценка времени вычисления преобразования Фурье. В выбранной для моделирования многозадачной операционной системе Windows фиксация малых временных интервалов связана со значительными трудностями. Это связано с тем, что каждая задача/поток выполняется ОС с определенным приоритетом, в соответствии с которым автоматически распределяются ресурсы системы. Другим фактором, вносящим погрешность в измерение времени, является тот факт, что в силу разности архитектур различных процессоров и операционных систем выполнение одних и тех же операций с данными может требовать различного количества командных циклов.

Учет всех перечисленных факторов достаточно сложен, поэтому наилучшими условиями для проведения эксперимента является однопроцессорная система с минимумом запущенных процессов (особенно с высокими приоритетами) и минимальным использованием виртуальных и кэш-ресурсов.

Восстановление сигнала простейшими интерполяционными моделями:

- а) исходный сигнал с пропусками наблюдений;
- б) восстановление правым отсчетом;
- в) восстановление левым отсчетом;
- г) восстановление ближайшим отсчетом;
- д) линейная интерполяция.

В разработанной системе имитационного моделирования расчета ДПФ время вычисления можно оценить двумя способами.

Первый основан на использовании команды RDTSC (Read Time Stamp Counter) процессоров семейства Pentium. Она возвращает значение внутреннего 64-битного таймера, соответствующее количеству тактов с момента подачи напряжения или сброса процессора. Это значение, измеренное до и после процедуры вычислений, при известной тактовой частоте процессора дает оценку временного интервала.

Другой способ основан на использовании функций *API* операционных систем Windows. Функция *QueryPerformanceFrequency* позволяет получить частоту инкремента таймера, подключенного по шине ISA или ее аналога в современных наборах микросхем, а функция *QueryPerformanceCounter* – его текущее значение до и после выполнения процедуры вычисления ДПФ. Если система не может прочитать значение таймера, то функция *QueryPerformanceCounter* возвращает нуль.

6. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ НА БАЗЕ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ

6.1. Основные понятия и определения

В предлагаемом лабораторном практикуме рассматриваются основные задачи прикладного анализа случайных процессов:

1. математического описания и моделирования случайных процессов, потоков событий, неэквидистантных временных рядов;
2. оценивания типовых характеристик случайных процессов, потоков событий, неэквидистантных временных рядов;
3. идентификации функциональных вероятностных характеристик, основанной на фазовых портретах (структурных функций);
4. аппроксимации функциональных вероятностных характеристик параметрическими моделями, включая ортогональные функции и полиномы.

При этом основное внимание уделяется как исследованию самих алгоритмов, так и их практическому использованию при решении разнообразных прикладных задач.

Следует отметить, что исследование алгоритмов возможно как аналитическими методами, так и методом имитационного моделирования на ЭВМ, суть которого заключается в анализе их метрологических характеристик с использованием псевдослучайных последовательностей, сгенерированных с помощью ЭВМ.

Как правило реализация этого метода включает следующие основные блоки:

- имитации входных процессов и внешних воздействий;
- реальных и идеальных моделей, а также их разности;
- формирования изменения параметров модели:
 - под воздействием внешних факторов;
 - в случае технологического разброса на множестве экземпляров;
 - в случае временной нестабильности;
- первичной статистической обработки для определения статистических характеристик наблюдаемых процессов при данных испытаниях;
- вторичной статистической обработки и управления машинным экспериментом:
 - совокупной обработки множества результатов экспериментов;
 - определения необходимого числа прогонов модели и принятия решений при последовательном планировании о продолжении или окончании эксперимента;
 - управления параметрами модели и значениями внешних факторов;
 - управления системным временем;
- датчик системного времени;
- управляющую программу, синхронизирующую процесс моделирования.

Функциональная схема системного моделирования, поясняющая взаимодействие отдельных блоков, представлена на рис. 6.1.

Сложность имитационной модели и затраты машинного времени при ее исследовании во многом будут зависеть от принципа имитационного моделирования.

Учитывая, что основным принципом проектирования АСНИ, ИИС, процессорных средств измерения является агрегатное проектирование [111], наиболее целесообразно при конструировании модели использовать принцип блочного моделирования, суть которого сводится к следующему:

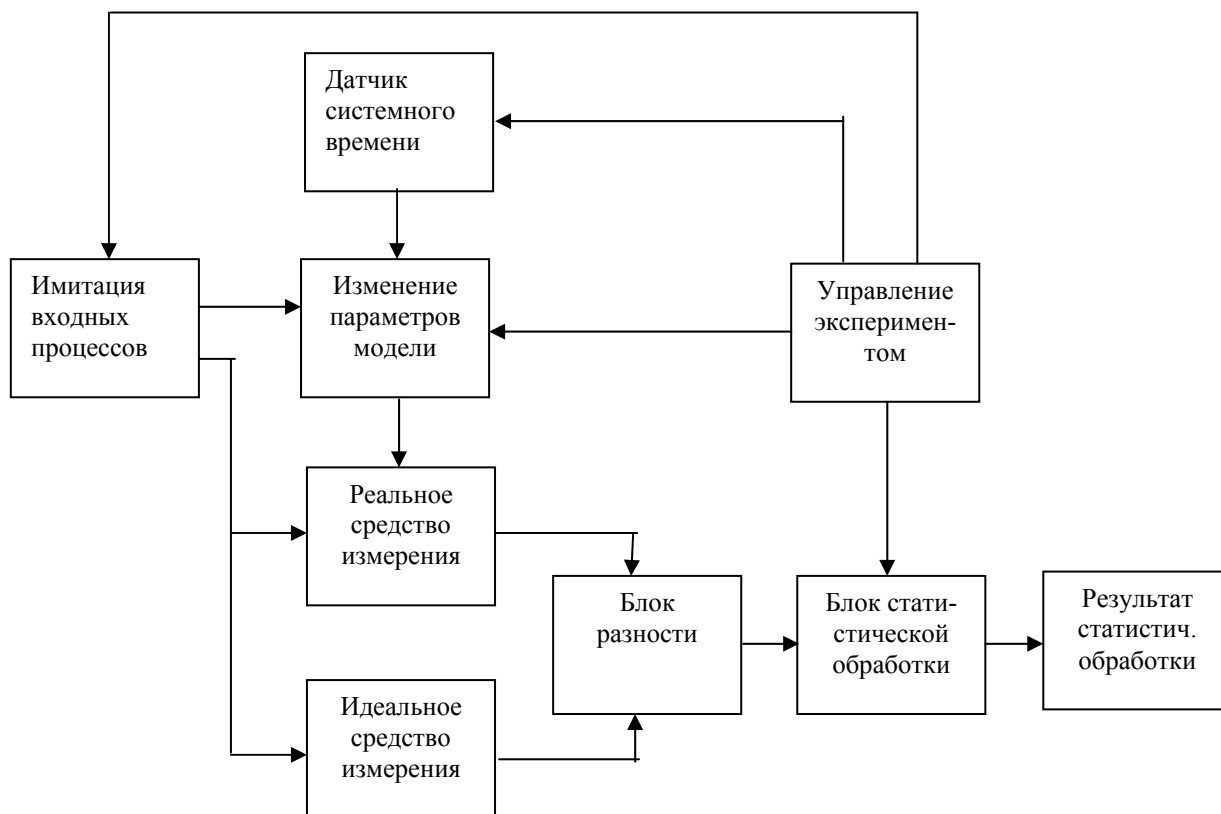


Рисунок 6.1 - Функциональная схема имитационного моделирования

на основании декомпозиции АСНИ, ИИС, ПРИС создается библиотека моделей стандартных блоков для моделирования входных воздействий, дестабилизирующих факторов, блоков реальных систем.

- на основании разработанных моделей блоков конструируется модель системы в соответствии с ее структурой, с возможностью контроля промежуточных последовательностей, соответствующих реальным физическим точкам системы.

Достоинства блочных моделей являются:

- гибкость, простота изменения конфигурации модели системы, возможность прослеживания промежуточных результатов; соответствие математической модели;
- возможность унификации процедур моделирования путём создания библиотеки стандартных процедур;
- единообразие и простота построения моделей разнообразных структур;
- возможность автоматизации процедуры построения моделей систем.

К недостаткам блочного моделирования следует отнести:

- увеличение времени моделирования;
- необходимость большого объёма памяти для хранения библиотеки моделей.

Следует подчеркнуть, что затраты на моделирование, достоверность полученных результатов во многом зависят от принятых решений на этапе планирования эксперимента, особенно при определении необходимого числа испытаний, выборе входных воздействий и т.д.

Согласно методике, изложенной в РТМ 25139-74 [96], в качестве метрологической характеристики может выбираться максимальное значение модуля погрешностей оценки Θ :

$$\Delta = \max \{ |\Delta_j| \} \quad j = 1, \dots, N, \quad (6.24)$$

где N – число испытаний, зависящее от доверительной информации $P_d = 0,95$. Так, если $P_d = 0,95$, то число испытаний равно 29 независимо от закона распределения погрешностей.

Структура пакета прикладных программ имитационного моделирования алгоритмов оценивания вероятностных характеристик случайных процессов, потоков событий, неэквидистантных временных рядов, содержащего как обрабатывающие, так и управляющие программы, состоит из следующих основных блоков:

- задания входных воздействий с требуемыми характеристиками;
- первичной статистической обработки информации;
- вторичной статистической обработки информации;
- алгоритмов оценивания вероятностных характеристик;
- сервисных;
- определения методической погрешности и ее составляющих;
- определения инструментальных составляющих погрешности.

Одним из важных этапов имитационного моделирования является выбор, обоснование и моделирование сигналов, используемых в модельном эксперименте. Решение этой задачи определяется целевой функцией моделирования, назначением исследуемой системы и т.д. Так как при моделировании АСНИ, ИИС, ПРИС основной задачей является определение метрологических характеристик при определенных ограничениях на технико-экономические показатели, то существенным требованием, предъявляемым к образцовому (испытательному или тестовому) сигналу, является возможность оценки с его помощью погрешности результата измерения данным средством на заданном классе входных воздействий.

Учитывая большое разнообразие решаемых задач и соответствующих им средств измерения, однозначного ответа о виде образцового сигнала быть не может. Окончательное решение о выборе вида образцового сигнала для конкретных типов средств измерения должно приниматься по результатам лабораторных исследований.

В самом общем виде выбор образцового сигнала осуществляется:

- выбором наихудшего сигнала из множества возможных входных сигналов, для обеспечения гарантированной погрешности результата измерения;
- формированием набора типовых сигналов, то есть наиболее часто встречающихся входных сигналов или сигналов, наиболее интересующих исследователя;
- формированием набора типовых сигналов, включающих в себя наихудший сигнал.

Основными требованиями, предъявляемыми к образцовым сигналам, являются следующие:

- заданный вид вероятностных характеристик;
- принадлежность к классу входных сигналов, для которых предназначено данное средство;
- стабильность во времени;
- отклонение текущих характеристик от расчетных не должно быть более допустимого.

В некоторых случаях, кроме случайных сигналов, возникает необходимость в применении детерминированных образцовых сигналов.

6.2. Моделирование некоррелированных временных рядов

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков в генерировании некоррелированных временных рядов с заданными законами распределения, проверка качества генерирования.

6.2.1. Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделах 1.2, 2.1, 2.2, 3.4 и 5.8.

6.2.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временной ряд с заданным законом распределения с объемом выборки, равным $N=500$ (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29).
2. Проверить качество генерирования, воспользовавшись для определения параметров аналитического выражения законов распределения методом моментов.
3. Определить погрешности оценки параметров модели.
4. Пункты 1-3 повторить для объемов выборки $N=1000, 2000, 5000$.

6.2.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Метод и алгоритм моделирования некоррелированных временных рядов для заданного закона распределения.
3. Обратная функция закона распределения вероятностей.
4. Пример реализации некоррелированного временного ряда.
5. Примеры гистограмм для различного объема выборки – $N=500, 1000, 2000, 5000, M=20$.
6. Значения параметров, определенные по методу моментов, и модуль относительной погрешности оценки параметров закона распределения для $N=500, 1000, 2000, 5000$, представленные в табличной форме (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29). Для определения параметра закона распределения и вычисления погрешности оценки параметра можно воспользоваться пакетом Excel.
7. Графическая зависимость максимальной по модулю относительной погрешности оценки параметров закона распределения от объема выборки - $N=500, 1000, 2000, 5000$. Для построения графических зависимостей можно воспользоваться пакетом Excel.
8. Выводы по работе.

6.2.4. Контрольные вопросы

1. Какие временные ряды называются некоррелированными?

2. Какие вероятностные характеристики характеризуют положение случайной величины?
3. Какие вероятностные характеристики характеризуют форму законов распределения случайной величины?
4. У какого закона распределения коэффициент эксцесса имеет наименьшее значение?
5. Для каких законов распределения математическое ожидание, мода и медиана совпадают?
6. Назовите основные методы генерирования случайных процессов.
7. Что лежит в основе метода обратной функции?
8. В чем заключается метод моментов оценки параметров законов распределения?

6.3. Моделирование некоррелированных временных рядов приближенным методом

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков в генерировании некоррелированных временных рядов с заданными законами распределения приближенным методом, проверка качества генерирования.

6.3.1. Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование работы приведено в подразделах 1.2, 2.2, 3.4 и 5.8.

6.3.2. Задание на самостоятельную работу

1. Открыть подсистему «Генерирование процесса - учебно-показательный вариант» (см. 5.8).
2. Ввести координаты узловых точек функции распределения. Построить функцию распределения и сгенерировать ПСП для $N=5000$. Построить гистограмму, статистическую плотность распределения вероятностей, реализацию ПСП.
3. С помощью «мыши» трансформировать функцию распределения. Записать новые координаты узловых точек. Построить гистограмму, статистическую плотность распределения вероятностей, реализацию ПСП. Сделать выводы.
4. Открыть подсистему «Генерирование процесса с помощью линейной интерполяции».
5. Рассчитать и ввести координаты узловых точек для заданного преподавателем закона распределения для $\delta = 0,01$ и $\Delta x = const$.
6. Сгенерировать временной ряд с заданным законом распределения приближенным способом с объёмом выборки, равным $N=5000$, $M=20$.
7. Построить гистограмму, статистическую плотность распределения вероятностей, реализацию ПСП. Проверить качество генерирования, воспользовавшись для определения параметров аналитического выражения законов распределения методом моментов. В качестве критерия приближения применить критерий Пирсона.

8. Привести результаты эксперимента: гистограмму, статистическую функцию распределения (см. 5.8).
9. Определить относительные погрешности оценки параметров модели. Результаты представить в табличной форме.
10. Пункты 4-8 повторить для $\delta = 0,02 - 0,03$ и сделать выводы о качестве генерирования ПСП и допустимой погрешности восстановления функции распределения.
11. Пункты 4-8 повторить для объёмов выборки $N=1000, 2000, 5000$.
12. Пункты 4-8 повторить для $\Delta x = var$.
13. Сравнить результаты генерирования ПСП с результатом, полученным методом инверсного преобразования с помощью подсистемы «Генерирование процесса с помощью обратной функции».

6.3.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Метод и алгоритм моделирования некоррелированных временных рядов для заданного закона распределения приближенным методом.
3. Координаты узловых точек функции распределения, заданные таблично, до и после «трансформации» закона распределения. Построить гистограмму, статистическую плотность распределения вероятностей, реализацию ПСП.
4. Примеры реализации некоррелированного временного ряда.
5. Координаты узловых точек для заданного преподавателем закона распределения для $\delta = 0,01 - 0,03$.
6. Примеры гистограмм для различного объёма выборки – $N=500, 1000, 2000, 5000$, $\delta = 0,01$, $M=20$.
7. Пример результатов эксперимента: гистограммы, статистической функции распределения.
8. Значения параметров, определенные по методу моментов, и модуль относительной погрешности оценки параметров закона распределения для $N=500, 1000, 2000, 5000$, представленные в табличной форме.
9. Выводы по работе.

6.3.4. Контрольные вопросы

1. В каких случаях применяется приближенный метод генерирования?
2. Из каких соображений выбирается допустимая погрешность восстановления функции распределения при генерировании ПСП приближенным методом?
3. Назовите способы задания функции распределения, их преимущества и недостатки.

6.4. Моделирование коррелированных временных рядов

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков в генерировании временных рядов с заданным видом корреляционной функции, проверка качества генерирования.

6.4.1. Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделах 1.5, 1.6, 1.7, 2.5 – 2.8, 3.3, 5.2-5.6.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить одну из систем моделирования (см. 5.2 – 5.6).

6.4.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временные ряды с заданными видами корреляционных функций и заданными параметрами – $N=1000$ (интервал дискретизации определить исходя из погрешности восстановления корреляционной функции $\delta = 0,02$).
2. Для каждого временного ряда определить корреляционную функцию.
3. Для каждой корреляционной функции построить её фазовый портрет.
4. Наложить на фазовый портрет фазовые портреты типовых моделей корреляционных функций с заданными параметрами. Сделать вывод о виде корреляционной функции временного ряда (идентифицировать вид корреляционной функции).
5. С помощью графического пакета Paint распечатать реализации временных рядов ($N=100$) и соответствующие им корреляционные функции и фазовые портреты.
6. Сгенерировать временные ряды с заданными видами корреляционных функций и заданными параметрами – $N=500, 1000, 2000, 5000$ (интервал дискретизации определить исходя из погрешности восстановления корреляционной функции $\delta = 0,02$).
7. Определить и построить зависимость максимального значения модуля погрешности оценки корреляционной функции от объёма выборки (число модельных экспериментов равно 29).
8. Определить и построить зависимость максимального значения модуля погрешности оценки фазового портрета от объёма выборки (число модельных экспериментов равно 29).

6.4.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Метод и алгоритм моделирования коррелированных временных рядов с заданным преподавателем видом корреляционной функции.
3. Импульсная характеристика формирующего фильтра (Приложение П.9).
4. Примеры реализации коррелированных временных рядов для объёма выборки $N=1000$ и соответствующих им корреляционных функций.
5. Фазовые портреты корреляционных функций.
6. Погрешности генерирования коррелированных временных рядов для $N=500, 1000, 2000, 5000$, представленные в табличной форме (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29). Интервал дискретизации выбрать для восстановления корреляционной функции с погрешностью $\delta = 0,02$.

7. Графические зависимости погрешности генерирования от объема выборки - $N=500, 1000, 2000, 5000$. Для построения графических зависимостей можно воспользоваться пакетом Excel.

8. Выводы по работе.

6.4.4. Контрольные вопросы

1. Какие вероятностные характеристики относятся к характеристикам взаимосвязи?
2. Какие случайные процессы, временные ряды относятся к коррелированным случайным процессам?
3. Какой метод лежит в основе генерирования временных рядов с заданным видом корреляционной функции?
4. От чего зависит выбор интервала дискретизации случайного процесса?
5. Что такое фазовый портрет корреляционной функции?
6. Какая часть фазового портрета является наиболее информативной?
7. Как отличить фазовый портрет колебательной корреляционной функции?
8. Что характеризует показатель колебательности корреляционной функции?
9. В чем заключается методика оценки качества генерирования случайного процесса с заданным видом корреляционной функции с использованием фазового портрета корреляционной функции?

6.5. Моделирование неэквидистантных временных рядов с заданным видом корреляционных функций

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков в генерировании неэквидистантных временных рядов с заданным видом корреляционной функции, проверка качества генерирования.

6.5.1. Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделах 1.9, 1.10, 2.12, 5.2

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить системы моделирования (см. 5.2, 5.3).

6.5.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временные ряды с заданными видами корреляционных функций и заданными параметрами – $N=5000$ (интервал дискретизации определить исходя из погрешности восстановления корреляционной функции $\delta = 0,02$).
2. Запомнить временные ряды в базе данных.
3. Для каждого временного ряда, вызванного из базы данных, с помощью алгоритма нерегулярной дискретизации сгенерировать неэквидистантный временной ряд с заданными параметрами нерегулярной дискретизации (рассмотреть модели с р-преобразованием, «дрожанием» и аддитивной случайной дискретизацией).

4. Для каждого неэквидистантного временного ряда с помощью алгоритма с использованием интервальной корреляционной функции определить корреляционную функцию.

5. Для заданной модели нерегулярной дискретизации определить коэффициенты сжатия (число модельных экспериментов равно 29).

6. Определить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение коэффициента сжатия.

6.5.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.

2. Метод и алгоритм моделирования неэквидистантного временного ряда с заданным видом корреляционной функции и модели нерегулярной дискретизации.

3. Пример реализации неэквидистантного временного ряда для объёма выборки $N=1000$.

4. Пример оценки корреляционной функции для объёма выборки $M=1000$.

5. Оценки коэффициентов сжатия, представленные в табличной форме и в виде графических зависимостей от параметра нерегулярной дискретизации (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29).

6. Оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения коэффициентов сжатия, представленные в графическом виде.

7. Выводы по работе.

6.5.4. Контрольные вопросы

1. Назовите основные свойства потоков событий.

2. Каким образом задаются потоки случайных событий?

3. Назовите основные классы неэквидистантных временных рядов.

4. Назовите типовые модели неэквидистантных временных рядов.

5. Назовите основные характеристики неэквидистантных временных рядов.

6. Что характеризует интервальная корреляционная функция?

7. Каким образом генерируются неэквидистантные временные ряды?

8. Что характеризует коэффициент сжатия?

6.6. Моделирование коррелированных временных рядов с заданными корреляционно-спектральными свойствами

Цель работы: изучение метода моделирования случайных процессов с помощью композиции отдельных имитационных модулей.

6.6.1. Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование представлено в подразделах 1.5, 1.6, 2.10, 5.3 -5.6.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить системы моделирования (см. 5.3-5.6).

6.6.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получить задание: вид автокорреляционных функций, значения их параметров.
2. Составить систему для выполнения преобразований, требуемых при получении указанной в задании пары случайных процессов. Настроить модули.
3. Сгенерировать «белый шум».
4. Получить процесс с заданным видом КФ.
5. Оценить КФ и построить ее график.
6. Занести погрешности в БД. (В случае отсутствия БД оформить).
7. Повторить пункты 3-6 29 раз.
8. Определить погрешность моделирования процесса методом имитационного моделирования.
9. Оформить отчет.

6.6.3. Содержание отчета

1. Задание.
2. Цель работы.
3. Схема системы.
4. Метод и алгоритм моделирования коррелированных временных рядов с заданным преподавателем видом корреляционной функции.
5. Импульсная характеристика формирующего фильтра (приложение 3).
6. Примеры реализации коррелированных временных рядов для объема выборки $N=5000$ и соответствующих им корреляционных функций.
7. Погрешности генерирования коррелированных временных рядов для $N=500, 1000, 2000, 5000$, представленные в табличной форме (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29). Интервал дискретизации выбрать для восстановления корреляционной функции с погрешностью $\delta = 0,02$.
8. Графические зависимости погрешности генерирования от объема выборки $N=500, 1000, 2000, 5000$.
9. Выводы по работе.

6.6.4. Контрольные вопросы

1. Какие вероятностные характеристики относятся к характеристикам взаимосвязи?
2. Какие случайные процессы, временные ряды относятся к коррелированным случайным процессам?
3. Какой метод лежит в основе генерирования временных рядов с заданным видом корреляционной функции?
4. От чего зависит выбор интервала дискретизации случайного процесса?

6.7. Аппроксимация законов распределения параметрическими моделями

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации законов распределения временных рядов.

6.7.1. Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделах 1.2, 3.4. 5.9.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов (см. 5.9).

6.7.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временной ряд, распределенный по заданному закону распределения $N=500$, $M=10$.
2. Построить гистограмму.
3. Определить параметры законов распределения методом моментов, аппроксимации плотностей распределения вероятностей, функций распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации.
4. Найти характеристическую функцию случайного временного ряда (для одной реализации).
5. Пункты 1-4 повторить для $N=1000$, 2000 , 5000 и $M=10$, $M^{(0)}$ – оптимальное число дифференциальных коридоров.
6. Проанализировать зависимость погрешности оценки параметров законов распределения от объёма выборки, числа дифференциальных коридоров.
7. Качество аппроксимации определить, воспользовавшись критерием Пирсона и Колмогорова.

6.7.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Методы и алгоритмы аппроксимации законов распределения.
3. Примеры экранных форм для аппроксимации законов распределения вероятностей.
4. Значения параметров законов распределения, определенные по методу моментов, аппроксимации плотностей распределения вероятностей и функций распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации, относительные погрешности оценки параметров закона распределения, для $N=500$, 1000 , 2000 , 5000 и $M=10$, представленные в табличной форме (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29).
5. Характеристическая функция случайного временного ряда.
6. Выводы по работе.

6.7.4. Контрольные вопросы

1. Какие численные методы применяются при аппроксимации законов распределения?
2. Из каких соображений выбирается начальное приближение?
3. Какой из методов аппроксимации обладает лучшей сходимостью?
4. Какой из методов аппроксимации более трудоёмкий?

6.8. Аппроксимация законов распределения ортогональными полиномами

Цель работы: изучение аппроксимации законов распределения ортогональными полиномами Лежандра, Чебышева, Лагерра, Эрмита.

6.8.1. Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделах 1.2, 4.14, 5.10.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов (см. 5.10).

6.8.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получить задание: закон распределения, параметры, ортогональные базисы. Число отсчетов принять 10000.
2. Аппроксимировать функцию распределения заданного закона ортогональными полиномами, меняя число дифференциальных коридоров от 10 до 50 и меняя число полиномов от 10 до 50.
3. Аппроксимировать плотность вероятности заданного закона ортогональными полиномами, меняя число дифференциальных коридоров от 10 до 50 и меняя число полиномов от 10 до 50. Результаты аппроксимации (значение СКО) занести в таблицу.

6.8.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Алгоритм аппроксимации законов распределения ортогональными полиномами.
3. Примеры экранных форм для аппроксимации законов распределения вероятностей ортогональными полиномами.
4. Значения параметров законов распределения, представленные в табличной форме.
5. Выводы по работе.

6.8.4. Контрольные вопросы

1. Какие полиномы называются ортогональными?

2. Назовите область определения ортогональных полиномов Лежандра, Чебышева, Лагерра, Эрмита.
3. Какие параметры ортогональных моделей подлежат определению?

6.9. Аппроксимация корреляционных функций и спектральных плотностей мощности параметрическими моделями

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности случайных процессов.

6.9.1. Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделах 1.6, 1.8, 3.3, 5.2 и 5.3.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик (см. 5.2).

6.9.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временной ряд с заданным видом корреляционной функции и со следующими параметрами - $M = \text{ent}[\tau_{k_{\max}} / \Delta\tau]$, $N=12,5 M$, $\delta = 0,02$.
2. Вычислить корреляционную функцию.
3. Построить фазовый портрет корреляционной функции.
4. Задать вручную начальные приближения параметров корреляционной функции и найти значения параметров аналитического выражения корреляционной функции, воспользовавшись методами Ньютона, Ньютона с конечно-разностными производными и деформированного многогранника. Определить погрешности аппроксимации.
5. Определить спектральную плотность мощности и частоту, соответствующую максимуму спектральной плотности мощности.
6. Повторить пункты 1 - 5 для объёмов выборки $N=k M$, где $k=25, 50, 100$ (начальное приближение определить в автоматическом режиме).
7. Проанализировать зависимость погрешности оценки параметров корреляционной функции и аппроксимации от объёма выборки N .
8. Повторить пункты 1 - 5 для объёма выборки $N=25 M_1$, где $M_1=M/2, M/3, M/4$ (начальное приближение определить в автоматическом режиме).
9. Проанализировать зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции от M_1 – числа отсчётов корреляционной функции.
10. Повторить пункты 1 - 5 для $N=25 M$ и $\delta = 0,02 ; 0,05 ; 0,1 ; 0,2$.
11. Проанализировать зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции от $\Delta\tau$.

6.9.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Методы и алгоритмы аппроксимации корреляционных функций.
3. Примеры экранных форм для аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности.
4. Пример экранной формы построения фазового портрета.
5. Зависимости погрешности оценки параметров аналитического выражения и аппроксимации от объёма выборки N .
6. Зависимости погрешности аппроксимации корреляционной функции от M_1 .
7. Зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции от $\Delta\tau$.
8. Пример результатов аппроксимации (вывод параметров модели).
9. Выводы по работе.

6.9.4. Контрольные вопросы

1. Какие численные методы применяются при аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности?
2. Какой участок фазового портрета является самым информативным?
3. Как отличить фазовый портрет колебательной корреляционной функции от фазового портрета монотонной корреляционной функции?
4. Из каких соображений выбирается начальное приближение при аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями?
5. Какой метод аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями обладает лучшей сходимостью?
6. Какой метод аппроксимации проще реализовать?

6.10. Аппроксимация взаимных корреляционных функций и спектральных плотностей мощности параметрическими моделями

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации взаимных корреляционных функций и спектральных плотностей мощности случайных процессов.

6.10.1. Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделах 1.6, 1.8, 2.10, 3.3, 5.3.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик (см. 5.3).

6.10.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временные ряды с заданным видом корреляционной функции со следующими параметрами: $N=5000$, $\delta = 0,02$, $\tau_m = 10$.
2. Вычислить взаимные корреляционные функции.
3. Построить фазовые портреты взаимных корреляционных функций.

4. Задать вручную начальные приближения параметров взаимной корреляционной функции и найти значения параметров аналитического выражения взаимной корреляционной функции, воспользовавшись методом Ньютона.

5. Повторить пункты 1-4 для заданной взаимной корреляционной функции и объемов выборки $N=kM$, где $k=12,5; 25; 50; 100$.

6. Проанализировать зависимость погрешности оценки параметров корреляционной функции и аппроксимации от объема выборки.

7. Сгенерировать временной ряд (параметры задать самостоятельно) и определить спектральную плотность мощности.

6.10.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Методы и алгоритмы аппроксимации взаимных корреляционных функций.
3. Пример экранной формы генерации случайных процессов.
4. Пример экранной формы вычисления взаимной корреляционной функции и построения фазового портрета.
5. Примеры экранных форм для аппроксимации взаимной корреляционной функции.
6. Пример экранной формы определения спектральной плотности мощности.
7. Взаимные корреляционные функции и фазовые портреты.
8. Зависимости погрешности оценки параметров аналитического выражения взаимной корреляционной функции и аппроксимации от объема выборки.
9. Зависимость погрешности аппроксимации взаимной корреляционной функции от M_1 – числа отсчётов корреляционной функции.
10. Зависимость погрешности аппроксимации взаимной корреляционной функции от значения интервала дискретизации $\Delta\tau$.
11. Выводы по работе.

6.10.4. Контрольные вопросы

1. В чём заключается специфика аппроксимации взаимных корреляционных функций по сравнению с аппроксимацией автокорреляционных функций?
2. Какие численные методы применяются при аппроксимации взаимных корреляционных функций?
3. Из каких соображений выбирается начальное приближение при аппроксимации взаимных корреляционных функций параметрическими моделями?
4. Как отличить фазовый портрет колебательной взаимной корреляционной функции от монотонной?
5. Какая часть фазового портрета является наиболее информативной?

6.11. Аппроксимация корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности случайных процессов ортогональными функциями.

6.11.1. Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделах 1.6, 1.8, 4.3-4.5, 4.7, 4.10, 5.2 – 5.6.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик (см. 5.2 – 5.6).

6.11.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временной ряд с заданным видом корреляционной функции и со следующими параметрами - $M = \text{ent}[\tau_{k_{\max}} / \Delta\tau]$, $N = 12,5 M$, $\delta = 0,02$.
2. Вычислить корреляционную функцию.
3. Задать вручную начальное приближение параметра ортогональной функции и найти значения параметров аналитического выражения корреляционной функции $\alpha, b_0, \dots, b_m, m$, воспользовавшись методами Симпсона, трапеций и прямоугольников. Определить погрешности аппроксимации.
4. Определить спектральную плотность мощности и частоту, соответствующую максимуму спектральной плотности мощности.
5. Повторить пункты 1-4 для объёмов выборки $N = k M$, где $k = 25, 50, 100$.
6. Проанализировать зависимость погрешности оценки параметров корреляционной функции и аппроксимации от объёма выборки.
7. Повторить пункты 1-4 для объёмов выборки $N = 25 M_l$, где $M_l = M/2, M/3, M/4$.
8. Проанализировать зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции от M_l – числа отсчётов корреляционной функции.
9. Повторить пункты 1-4 для $N = 25 M$ и $\delta = 0,02; 0,05; 0,1; 0,2$.
10. Проанализировать зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции от $\Delta\tau$.

6.11.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Метод и алгоритмы аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями
3. Примеры экранных форм для аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями.

4. Зависимости погрешности оценки параметра ортогональной функции и аппроксимации от объема выборки N .
5. Зависимости погрешности аппроксимации корреляционной функции от M_l .
6. Зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции от $\Delta\tau$.
7. Параметры модели, представленные в табличной форме.
8. Выводы по работе.

6.11.4. Контрольные вопросы

1. Какие параметры описывают ортогональное разложение корреляционной функции и спектральной плотности мощности?
2. Из каких соображений выбирается начальное приближение параметра ортогональных функций?
3. Какие методы оценки параметра ортогональной функций Вы знаете?
4. Назовите самый простой метод оценки параметра ортогональной функций.
5. Почему увеличение числа членов разложения ортогонального ряда не всегда приводит к уменьшению погрешности аппроксимации?
6. В чём заключается основное «неудобство» ортогональных разложений?

6.12. Аппроксимация взаимной корреляционной функции ортогональными функциями

Цель работы: изучение методов аппроксимации взаимной корреляционной функции ортогональными функциями Лагерра, Лежандра, Дирихле.

6.12.1 Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделах 1.6, 1.8, 4.6, 4.10, 5.3 – 5.6.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик (см. 5.3 – 5.6).

6.12.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получить задание: вид функций, параметры, ортогональный базис.
2. Определить интервал дискретизации, сгенерировать «белый шум», получить пару процессов с равномерной дискретизацией.
3. Оценить ВКФ и построить аналитический график.
4. Аппроксимировать ВКФ ортогональными функциями и занести результаты аппроксимации с указанием погрешностей в БД (в случае отсутствия БД оформить таблицу).
5. Повторить процедуру аппроксимации для 29 разных генераций «белого шума».
6. Определить методическую погрешность аппроксимации ВКФ методом имитационного моделирования.
7. Оформить отчет.

6.12.3. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Метод и алгоритмы аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями.
3. График полученной ВКФ и аппроксимирующего выражения для пары СП с равномерной дискретизацией.
4. Результаты имитационного моделирования.
5. Выводы по работе.

6.12.4. Контрольные вопросы

1. В чем заключается специфика выбора вида модели и оценки ее параметров при аппроксимации взаимных корреляционных функций?
2. Из каких этапов состоит алгоритм аппроксимации ортогональными функциями?
3. Какие параметры характеризуют ортогональное разложение корреляционной функции?
4. Какие данные необходимо сохранять при аппроксимации взаимных корреляционных функций ортогональными функциями?
5. Как определить интервал корреляции при аппроксимации ортогональными функциями? Рассмотреть случай аппроксимации автокорреляционных функций.
6. Из каких соображений выбирается начальное приближение параметра масштаба ортогональных функций?
7. Почему увеличение числа членов разложения ортогонального ряда не всегда приводит к уменьшению погрешности аппроксимации?
8. В чём заключается основное «неудобство» ортогональных разложений?
9. Каким образом оценивается погрешность аппроксимации, вызванная конечным числом членов ряда, если используется критерий минимума квадратической погрешности?
10. Какие факторы учитываются при анализе составляющих методической оценки погрешности, вносимой определением коэффициентов разложения?

6.13. Аппроксимативный корреляционно-спектральный анализ экспериментальных данных

Цель работы: приобретение навыков корреляционно-спектрального анализа данных, получаемых в ходе эксперимента.

6.13.1 Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделах 1.6, 1.8, 4.7. 5.2 – 5.6.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик (см. 5.2 – 5.6).

6.13.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получить задание: файл с аппроксимируемой функцией или таблицу значений (график). В последнем случае необходимо создать файл, пользуясь описанием форматов файлов в приложении.
2. Аппроксимировать функцию ортогональными функциями Лагерра, Лежандра, Дирихле. Подобрать значения параметров, минимизирующих среднеквадратическую погрешность аппроксимации. Создать файл отчета.
3. По параметрам аппроксимирующих выражений определить преобразование Фурье от функции.
4. Оформить отчет.

6.13.3. Содержание отчета

1. Задание.
2. Цель работы.
3. Графики, иллюстрирующие аппроксимацию. В том числе привести графики неудачных результатов аппроксимации (в случае их наличия).
4. Графики спектральных плотностей мощности, полученных по коэффициентам аппроксимирующих выражений.
5. Выводы по работе.

6.13.4. Контрольные вопросы

1. Какие характеристики относятся к обобщенным спектральным характеристикам?
2. В чем заключается физический смысл интервалов корреляции?
3. В чем заключается физический смысл показателя колебательности?
4. Назовите методы определения эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса.
5. Какие процессы относятся к широкополосным случайным процессам?
6. Какие процессы относятся к узкополосным случайным процессам?
7. В чем заключается специфика определения эквивалентной ширины спектра мощности узкополосного процесса?
8. В чем заключается специфика аппроксимации спектральных плотностей мощности?
9. Какие параметры описывают ортогональное разложение спектральной плотности мощности?
10. Приведите методику аппроксимации взаимных спектральных плотностей мощности ортогональными функциями.

6.14. Аппроксимация корреляционных функций и спектральных плотностей мощности неэквидистантных временных рядов параметрическими моделями

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности неэквидистантных временных рядов параметрическими моделями.

6.14.1. Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделах 1.9, 1.10, 4.8, 5.2, 5.3.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик (см. 5.2, 5.3).

6.14.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать неэквидистантный временной ряд с заданными видом корреляционной функции и моделью нерегулярной дискретизации со следующими параметрами - $M = \text{ent}[\tau_{k\max} / \Delta\tau]$, $N=1000$, $\delta = 0,02$.

2. Вычислить корреляционную функцию.

3. Построить фазовый портрет корреляционной функции.

4. Задать вручную начальные приближения параметров корреляционной функции и найти значения параметров аналитического выражения корреляционной функции, воспользовавшись методами Ньютона, Ньютона с конечно-разностными производными и деформированного многогранника. Определить погрешности аппроксимации.

5. Определить спектральную плотность мощности и частоту, соответствующую максимуму спектральной плотности мощности.

6. Повторить пункты 1-5 для объёма выборки $N=5000$, задав начальные значения параметров в автоматическом режиме (остальные параметры остаются без изменения).

7. Проанализировать зависимость погрешности оценки параметров корреляционной функции и аппроксимации от параметра нерегулярной дискретизации.

8. Повторить пункты 1-5 для объёма выборки $N=1000$, $J_{\max1} = J_{\max}/2$, где $J_{\max}$ - число отсчётов корреляционной функции.

9. Проанализировать зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции при заданном $J_{\max}$ от значения параметра нерегулярной дискретизации.

6.14.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.

2. Методы и алгоритмы аппроксимации корреляционных функций.

3. Пример экранной формы построения фазового портрета.

4. Примеры экранных форм для аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности.

5. Зависимости оценки параметров аналитического выражения и погрешности аппроксимации от параметра нерегулярной дискретизации в табличной и графической формах.

6. Зависимости оценки параметров аналитического выражения и погрешности аппроксимации корреляционной функции от параметра нерегулярной дискретизации в табличной и графической формах.

7. Выводы по работе.

6.14.4. Контрольные вопросы

1. Назовите методы оценки корреляционных функций неэквидистантных временных рядов.

2. Можно ли идентифицировать модель корреляционной функции неэквидистантного временного ряда по фазовому портрету?

3. Как образом производится идентификация модели корреляционной функции неэквидистантного временного ряда?

4. Из каких соображений выбирается начальное приближение при аппроксимации корреляционных функций неэквидистантного временного ряда параметрическими моделями?

5. В чём заключается специфика аппроксимации корреляционных функций неэквидистантного временного ряда параметрическими моделями?

6. Каким образом производится аппроксимация спектральных плотностей мощности неэквидистантных временных рядов?

6.15. Аппроксимация корреляционных функций и спектральных плотностей мощности неэквидистантных временных рядов ортогональными функциями Лагерра

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности неэквидистантных временных рядов ортогональными функциями Лагерра.

6.15.1. Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделах 1.9, 1.10, 4.8, 5.2, 5.3.

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить АИС для аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик (см. 5.2, 5.3).

6.15.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать неэквидистантный временной ряд с заданными видом корреляционной функции и моделью нерегулярной дискретизации со следующими параметрами - $J_{max} = \text{ent}[\tau_{kmax} / \Delta\tau]$, $N=1000$, $\delta = 0,02$.
2. Вычислить корреляционную функцию.
3. Построить фазовый портрет корреляционной функции.
4. Определить оптимальные значения параметров аналитического выражения корреляционной функции $\alpha, b_0, \dots, b_m, m$, воспользовавшись методами Симпсона. Определить погрешности аппроксимации.
5. Определить спектральную плотность мощности и частоту, соответствующую максимуму спектральной плотности мощности.
6. Повторить пункты 1-5 для объёма выборки $N=5000$ (остальные параметры остаются без изменения).
7. Проанализировать зависимость погрешности оценки параметров корреляционной функции и аппроксимации от параметра нерегулярной дискретизации.
8. Повторить пункты 1-5 для объёма выборки $N=1000$, $J_{max1} = J_{max} / 2$.
9. Проанализировать зависимость погрешности аппроксимации корреляционной функции при заданном J_{max1} от значения параметра нерегулярной дискретизации.

6.15.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Методы и алгоритмы аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра.
3. Пример экранной формы построения фазового портрета.
4. Примеры экранных форм для аппроксимации корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Лагерра.
5. Зависимости оценки параметров аналитического выражения и погрешности аппроксимации от параметра нерегулярной дискретизации в табличной и графической формах.
6. Выводы по работе.

6.15.4. Контрольные вопросы

1. В каких случаях применяется аппроксимация корреляционных функций неэквидистантных временных рядов ортогональными функциями Лагерра?
2. Из каких соображений выбирается начальное приближение параметра α при аппроксимации корреляционных функций неэквидистантного временного ряда ортогональными функциями Лагерра?
3. В чём заключается специфика аппроксимации корреляционных функций неэквидистантного временного ряда ортогональными функциями Лагерра?

7. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ В ПАКЕТЕ СИСТЕМЕ MATHCAD

7. 1. Исследование свойств ортогональных полиномов

Цель работы: изучение основных свойств классических ортогональных полиномов, приобретение навыков работы с ними.

7.1.1. Теоретические основы лабораторной работы

Основные понятия и определения, необходимые для описания и исследования ортогональных полиномов, применяемых для построения функциональных вероятностных характеристик случайных процессов, приведены в подразделе 4.1.

В предлагаемой лабораторной работе, состоящей из пяти частей, рассматриваются только часть из перечисленных вопросов, характерных для ортогональных полиномов.

Первая часть посвящена представлению ортогональных полиномов различными способами. Одним из важнейших алгебраических свойств ортогональных полиномов является возможность представления через формулу Родрига [39]:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{K_n \mu(x)} \frac{d^n [\mu(x) X_n]}{dx^n}, \quad (7.1)$$

где K_n - постоянная; X_n - многочлен, коэффициенты которого не зависят от n .

Аналитические выражения для типовых ортогональных полиномов представлены в Приложении П.13.

Там же приводится иная форма представления ортогональных полиномов – в виде конечного ряда, которая получается с применением формулы Лейбница [39], выполнением дифференцирования.

Во второй части требуется определить интервал ортогональности ортогональных полиномов $[a, b]$, под которым понимается их интервал существования.

Находя значения полиномов на границах сегмента ортогональности, необходимо получить значения выражений $\psi_k(a)$ и $\psi_k(b)$.

В третьей части работы производится расчет нормы ортогональных многочленов, которая определяется выражением (4.21).

С другой стороны норма ортогональных полиномов $\|\psi_k\|^2$ рассчитывается по аналитическим выражениям, данным в Приложении П.13. Там же можно найти выражения для соответствующих весовых функций.

В четвертой части необходимо произвести проверку 1 – ого необходимого и достаточного условия ортогональности.

В пятой части необходимо произвести проверку 2 – ого условия ортогональности - все нули ортогонального многочлена $\psi_k(x)$ действительны, различны и расположены в интервале (a, b) .

В качестве исследуемых ортогональных полиномов предлагается исследовать ортогональные полиномы Якоби $[-1/2, 0]$, Якоби $[1/2, 0]$, Якоби $[1, 0]$, Якоби $[2, 0]$, Лагерра, Лежандра, Дирихле.

В результате проведенных исследований необходимо оформить отчет и сделать вывод по проделанной работе.

7.1.2. Задание на самостоятельную работу

1. Представление ортогональных полиномов k - ого порядка:
 - 1.1. Представить ортогональные полиномы в форме Родрига (если есть) и получить аналитические выражения и графики для первых шести порядков;
 - 1.2. Представить ортогональные полиномы в виде конечного ряда и получить аналитические выражения и графики для первых шести порядков. Сравнить результат с пунктом 1.1.
2. Определить интервал ортогональности $[a, b]$. Рассчитать ортогональные полиномы k - ого порядка на концах интервала ортогональности.
3. Определение нормы ортогональных полиномов:
 - 3.1. Определить значения нормы ортогональных полиномов из выражения (1.22). Результат представить в виде матрицы значений с разрядностью (k, m) , привести графическую интерпретацию $(j = \overline{0, k}, i = \overline{0, m})$.
 - 3.2. Определить значения нормы ортогональных полиномов k - ого порядка, используя выражения, приведенные в Приложении П.13. Результат представить в виде вектора значений. Сравнить полученный результат с диагональными значениями матрицы (k, m) , полученной в пункте 3.1.
4. Проверить выполняемость 1 – ого условия ортогональности;
5. Проверить выполняемость 2 – ого условия ортогональности.
6. Оформить отчет.

7.1.3. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
5. Аналитические выражения ортогональных полиномов в форме Родрига и графики для первых шести порядков
6. Аналитические выражения ортогональных полиномов в виде конечного ряда и графики для первых шести порядков.
7. Значения интервал ортогональности $[a, b]$ и значения ортогональных полиномов k -ого порядка на концах интервала ортогональности.
8. Выражения для нормы ортогональных полиномов
9. Значения нормы ортогональных полиномов k -ого порядка, используя выражение, приведенное в Приложении. Результат представить в виде вектора значений
10. Результаты проверки выполняемости 1-ого условия ортогональности.
11. Результаты проверки выполняемости 2-ого условия ортогональности.
12. Выводы.

7.1.4. Контрольные вопросы

1. Что называют интервалом ортогональности ортогональных многочленов? От чего зависит его значение?
2. Что такое весовая функция и как она влияет на поведение ортогонального многочлена?

3. Каким образом можно получить ортогональную систему функций? Что для этого необходимо?
4. Чем ортогональная линейно независимая система функций отличается от линейно независимой системы функций? Что понимают под матрицей ортогонализации?
5. Что такое ортогональный многочлен и каковы его основные характеристики?
6. Каким важным алгебраическим свойством обладают ортогональные многочлены? Что оно дает?
7. Назовите 1 – ое и 2 – ое условия ортогональности. О чем говорит их выполнение?

7.2. Исследование свойств ортогональных функций

Цель работы: исследование свойств ортогональных функций и определение их основных характеристик.

7.2.1. Теоретические основы лабораторной работы

При решении значительного количества прикладных задач наиболее часто применяются ортогональные функции, определенные на интервале $[0, \infty)$ [112]. Как правило, они получаются из соответствующих ортогональных полиномов путем введения замены:

$$x = 1 - ae^{-c\gamma\tau}, \quad (7.2)$$

где γ – параметр масштаба; c – целое число, определяемое для каждого ортогонального базиса; a – параметр, который зависит от заданного сегмента ортогональности (см. таблицу П.14).

С учетом введенной замены (7.2) выражение для определения нормы примет следующий вид:

$$\int_0^{\infty} \psi_k(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \psi_m(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \mu(1 - ae^{-c\gamma\tau}) d(1 - ae^{-c\gamma\tau}) = \begin{cases} \|\psi_k\|^2, & k = m; \\ 0, & k \neq m. \end{cases} \quad (7.3)$$

Проделав ряд преобразований, получим:

$$\int_0^{\infty} \psi_k(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \psi_m(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \mu(1 - ae^{-c\gamma\tau}) e^{-c\gamma\tau} d\tau = \begin{cases} \frac{\|\psi_k\|^2}{ac\gamma}, & k = m; \\ 0, & k \neq m. \end{cases} \quad (7.4)$$

Выражение (7.4) показывает, что ортогональные полиномы $\psi_k(x)$ преобразуются в ортогональные функции:

$$\psi_{k,f}(\tau, \gamma) = \psi_k(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \sqrt{\mu(1 - ae^{-c\gamma\tau})} e^{-\frac{c\gamma\tau}{2}}, \quad (7.5)$$

определенные на интервале $[0, \infty)$ с весом $\mu(\tau, \gamma) = 1$ и нормой

$$\|\psi_{k,f}\|^2 = \frac{\|\psi_k\|^2}{ac\gamma}. \quad (7.6)$$

Ортогональные функции k - ого порядка в различных базисах и их основные характеристики представлены в Приложении П.14. По аналогии с импульсной переходной характеристикой можно ввести понятие длительности ортогональной функции, применяемое в различных приложениях [111]:

$$\tau_{k,u}^{(2)} = \int_0^{\infty} \psi_{k,f}(\tau, \gamma) d\tau. \quad (7.7)$$

$$\tau_{k,u}^{(4)} = \int_0^{\infty} \psi_{k,f}^2(\tau, \gamma) d\tau = \|\psi_{k,f}\|^2. \quad (7.8)$$

В дальнейшем при рассмотрении только ортогональных функций индекс f будет опущен.

В качестве примера рассмотрим ортогональные полиномы Дирихле на интервале $[0, 1]$ с весом $\mu(x) = 1$

$$D_k(x) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} (1-x)^{\frac{s}{2}} \quad (7.9)$$

и преобразуем их в ортогональные функции на интервале $[0, \infty)$.

Отметим, что значение ортогональных полиномов в «нуле»

$$D_k(0) = 1, \quad (7.10)$$

а

$$\|D_k\|^2 = \int_0^1 D_k(x) D_m(x) \mu(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & m = k; \\ 0, & m \neq k. \end{cases} \quad (7.11)$$

В соответствии с (7.2) для преобразования интервала $[0, 1]$ в диапазон $[0, \infty)$ введем замену переменных $x = 1 - e^{-2\alpha\tau}$. С учетом введенной замены выражение (7.11) примет вид:

$$2\alpha \int_0^{\infty} D_k(1 - e^{-2\alpha\tau}) D_m(1 - e^{-2\alpha\tau}) e^{-2\alpha\tau} \mu(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & m = k; \\ 0, & m \neq k. \end{cases} \quad (7.12)$$

Соотношение (7.12) показывает, что ортогональные полиномы преобразуются в функции, ортогональные на интервале $[0, \infty)$ с весом $\mu(\tau) = 1$.

$$D_k(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau} D_k(1 - e^{-2\alpha\tau}) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} e^{-(s+1)\alpha\tau}. \quad (7.13)$$

Квадрат нормы с учетом (7.6) и (7.11) имеет вид:

$$\int_0^{\infty} D_k(\tau, \alpha) D_m(\tau, \alpha) \mu(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha(k+1)}, & m = k; \\ 0, & m \neq k, \end{cases} \quad (7.14)$$

а

$$\tau_{k,u}^{(2)} = \int_0^{\infty} D_k(\tau, \alpha) d\tau = \frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha}. \quad (7.15)$$

7.2.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получение ортогональных функций k -ого порядка:

1.1. Получить ортогональные функции из ортогональных полиномов k -ого порядка путем введения соответствующей замены, приведенной в Приложении П.14, и использования выражения (7.4). Найти аналитические выражения и графики для первых шести порядков.

1.2. Получить ортогональные функции, используя представление, приведенное в Приложении П.14. Найти аналитические выражения и графики для первых шести порядков. Полученный результат сравнить с пунктом 1.1.

2. Рассчитать значения ортогональных функций k - о го порядка в «нуле».

3. Определение нормы ортогональных функций:

3.1. Определить значение нормы ортогональных функций из выражения (7.6). Результат представить в виде матрицы значений с разрядностью (k, m) , привести графическую интерпретацию $(j = \overline{0, k}, i = \overline{0, m})$.

3.2. Определить значения нормы ортогональных функций k - о го порядка, используя выражения, приведенные в Приложении П.14. Результат представить в виде вектора значений. Сравнить полученный результат с диагональными значениями матрицы (k, m) , полученной в пункте 3.1.

4. Рассчитать длительности ортогональных функций, используя выражения (7.7) и (7.8). Построить графические зависимости $\tau_{k,u}^{(2)}$ и $\tau_{k,u}^{(4)}$ ортогональных функций k - о го порядка от параметра масштаба. Спроектировать двумерную зависимость длительности от порядка и параметра масштаба для каждого из выражений.

5. Оформить отчет.

7.2.3. Содержание отчета

1. Цель работы.

2. Задание.

3. Исходный текст программы, написанный в MathCad.

4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.

5. Аналитические выражения и графики для первых шести порядков ортогональных функций.

6. Аналитические выражения и графики для первых шести порядков ортогональных функций, используя представление, приведенное в тПриложении .

7. Значения нормы ортогональных функций k -ого порядка, используя выражение, приведенное в Приложении представить в виде аналитического выражения и вектора значений

8. Построить графическую зависимость длительности ортогональной функции k -ого порядка от параметра масштаба. Спроектировать двумерную зависимость от k и параметра масштаба.

9. Значения ортогональных функций k -ого порядка в «нуле».

10. Выводы

7.2.4. Контрольные вопросы

1. Почему при решении ряда прикладных задач ортогональные полиномы предпочитают ортогональным функциям?

2. При решении каких задач целесообразно использовать ортогональные полиномы, ортогональные функции?

3. Что дает получение ортогонального многочлена с единичной весовой функцией?

4. Для каких целей вводят параметр масштаба ортогональных функций? Какие значения он может принимать?

5. Что понимают под длительностью ортогональной функции, и какой смысл она имеет?
6. Чем отличаются два введенных определения длительности? Для чего введено второе определение, и в каких случаях его целесообразно использовать.
7. О чем говорит полученная двумерная зависимость?

7.3. Определение максимальной длительности и интервала дискретизации ортогональных функций

Цель работы: изучение методов и приобретение навыков в определении максимальной длительности и интервала дискретизации ортогональных функций.

7.3.1. Теоретические основы лабораторной работы

Длительность ортогональной функции k -ого порядка $\tau_{k \max}$ определяется в результате решения уравнения:

$$|\psi_k(\tau > \tau_{k \max}, \alpha)| \leq \Delta, \quad (7.16)$$

где Δ – заданная погрешность,
 α – параметр масштаба ортогональных функций.

Таким образом, под длительностью ортогональной функции понимается временной интервал от начала координат до точки пересечения с линиями Δ или $-\Delta$, после которой функция не выходит из коридора $[-\Delta, \Delta]$. На рисунке 3.1 показан пример определения длительности ортогональной функции k -ого порядка. Также, с заданной погрешностью можно считать, что вне интервала $[0, \tau_{k \max}]$ функция тождественно равна 0.

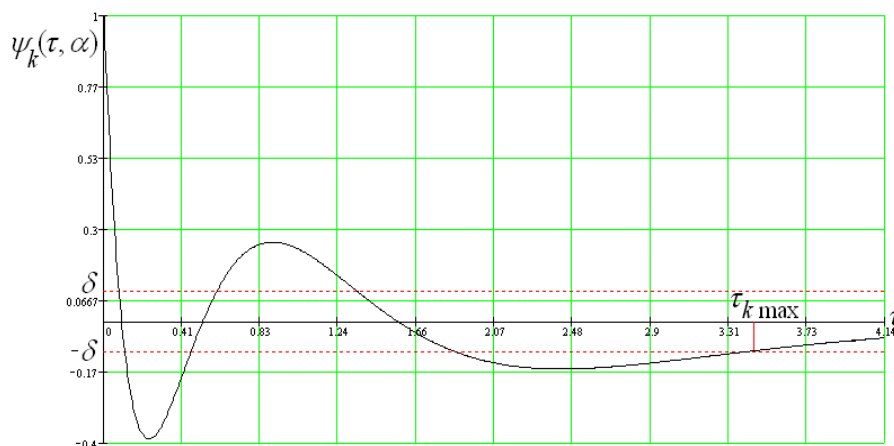


Рисунок 7.1 – Длительность ортогональной функции

Интервал дискретизации при линейной интерполяции с заданной погрешностью можно вычислить по формуле [111]:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{8\delta}{\|\psi_k''\|_{\max}}}, \quad (7.17)$$

где δ – заданная погрешность восстановления,

$\|\psi_k''\|_{max}$ – максимальное по модулю значение второй производной соответствующей функции.

Число интервалов дискретизации:

$$n = \text{ent} \left[\frac{\tau_{k \max}}{\Delta t} + 0,5 \right], \quad (7.18)$$

где $\text{ent}[\]$ – целая часть от числа,

$\tau_{k \max}$ – максимальная длительность ортогональной функции k -ого порядка,

Δt – интервал дискретизации.

7.3.2. Задание на самостоятельную работу

1. Задать вид ортогональных функций;
2. Задать порядок ортогональной функции;
3. Задать значение параметра масштаба;
4. Задать погрешность приближения $\delta = 0,02, 0,05, 0,1$;
5. Построить график ортогональной функции;
6. На основании графика приблизительно определить интервал, внутри которого находится значение $\tau_{k \max}$ для данной функции и заданном значении погрешности приближения;
7. Получить на основании общей формулы ортогональных функции частные формулы функции, ее первой, второй и третьей производных;
8. Вычислить максимум второй производной;
9. Вычислить интервал дискретизации для ортогональной функции;
10. Определить максимальную длительность ортогональной функции;
11. Вычислить количество интервалов дискретизации;
12. Занести все полученные значения (максимум второй производной, длительность функции, интервал дискретизации, число интервалов дискретизации) в таблицу;
13. Повторить п. 1.4-1.12 для каждого из заданных значений погрешности приближения;
14. Повторить п. 1.3-1.13 для каждого заданного значения параметра масштаба;
15. Повторить п. 1.2-1.14 для каждого заданного порядка ортогональных функций;
16. Построить зависимость $\tau_{k \max} = f_1(k / \alpha)$;
17. Построить зависимость $\tau_{k \max} = f_2(\alpha / k)$;
18. Построить зависимость $\Delta t = f_3(k / \alpha)$;
19. Оформить отчет.

7.3.3. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Задание.

3. Исходный текст программы, написанный в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в математическом пакете MathCad.
5. Метод и алгоритм нахождения интервала дискретизации и длительности функции.
6. Графики заданных ортогональных функций.
7. Формулы заданных ортогональных функций и их трех первых производных.
8. Выводы.

7.3.4. Контрольные вопросы

1. Поясните физический смысл длительности ортогональной функции?
2. Какой информацией необходимо располагать для определения интервала дискретизации ортогональных функций?
3. Как изменяется длительность ортогональной функции с увеличением её порядка?
4. Как изменяется число интервалов дискретизации с увеличением погрешности восстановления?

7.4. Частотные характеристики ортогональных функций

Цель работы: исследование частотных характеристик ортогональных функций.

7.4.1. Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделе 4.2.

7.4.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданных систем ортогональных функций для $m = 0 - 4$ и $\alpha = const$ построить частотные характеристики соответствующие выражениям (4.6) - (4.9).
2. Для заданных систем ортогональных функций и $\alpha / \gamma = const$ построить $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_1(m / \alpha)$ для $m = 0 - 4$.
3. Для заданных систем ортогональных функций и $m = const$ построить $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_2(\alpha / m)$.
4. Построить зависимость полосы пропускания ортогонального фильтра k -го порядка от параметра.
5. Оформить отчет.

7.4.3. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.

5. Графические зависимости $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_1(m/\alpha)$ для $m = 0 - 4$.
6. Графические зависимости $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_2(\alpha/m)$.
7. Графические зависимости полосы пропускания ортогонального фильтра k -ого порядка от параметра масштаба.
8. Выводы.

7.4.4. Контрольные вопросы

1. Поясните физический смысл полосы пропускания ортогонального фильтра?
2. Для какой ортогональной системы функций полоса пропускания не зависит от порядка функций?
3. Что такое соотношение неопределенности для ортогонального фильтра?
4. Как определить порядок ортогональной функции по виду вещественной частотной характеристики?

7.5. Ортогональные модели корреляционных функций

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций случайных процессов ортогональными функциями.

7.5.1. Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделах 4.3 – 4.4.

7.5.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции и показателя колебательности μ определить коэффициенты разложения $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$. Построить графическую зависимость $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$.

2. Построить зависимость $\delta^{(1)}(m/\chi, \mu) = \sqrt{\frac{\Delta(m/\chi, \mu)}{\tau_k^{(4)}}}$. Значение параметра χ выбрать произвольно, $\mu = 0 \div 5$. Убедиться в справедливости равенства Парсеваля (см. подраздел 4.1).

3. Построить зависимость $\delta^{(2)}(\chi/m, \mu)$, $m = 2 \div 6$, $\mu = 0 \div 5$ (Результаты представить аналогично результатам таблицы 4.10 – 4.11). Определить количество локальных минимумов $\delta(\chi/m, \mu)$, их численные значения $\bar{\chi}_{opt}$ и соответствующие им значения погрешностей.

4. Построить зависимость $\delta_{min}^{(3)}(\mu/m, \chi_{opt})$ и $\delta_{min}^{(1)}(m/\mu, \chi_{opt})$.

5. Сравнить результаты оценки $\delta_1^{(3)}(\mu/t, \chi_1)$, $\delta_2^{(3)}(\mu/t, \chi_2)$, $\delta_1^{(1)}(t/\mu, \chi_1)$, $\delta_2^{(1)}(t/\mu, \chi_2)$ с соответствующими минимальными оценками погрешности. Значение параметра χ_1 и χ_2 определяется по таблице 4.12.

6. Построить модели корреляционной функции, соответствующие выражению 4.32, для $\lambda = 1$, $\mu = 5$, χ_1 , χ_2 , χ_{opt} , $m = 5, 10$.

7. Оформить отчет.

7.5.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
5. Ортогональная модель корреляционной функции в заданном ортогональном базисе.
6. Аналитическое выражение для оценки коэффициентов разложения $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$.
7. Аналитические выражения для оценки χ_1 и χ_2 .
8. Графические зависимости $\delta^{(1)}(t/\chi, \mu)$ (пункт 2).
9. Графические зависимости $\delta^{(2)}(\chi/t, \mu)$ (пункт 3).
10. Графические зависимости $\delta_{min}^{(3)}(\mu/t, \chi_{opt})$ и $\delta_{min}^{(1)}(t/\mu, \chi_{opt})$ (пункт 4).
11. Графические зависимости $\delta_1^{(3)}(\mu/t, \chi_1)$, $\delta_2^{(3)}(\mu/t, \chi_2)$, $\delta_1^{(1)}(t/\mu, \chi_1)$, $\delta_2^{(1)}(t/\mu, \chi_2)$ (пункт 5).
12. Графики моделей корреляционной функции (пункт 6).
13. Выводы.

7.5.4. Контрольные вопросы

1. Какие параметры входят в ортогональную модель корреляционной функции?
2. Как параметры ортогональной модели влияют на вид оцениваемой корреляционной функции?
3. Как количество локальных экстремумов погрешности аппроксимации связаны с m и μ ?

7.6. Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями при ограничении на её модель

Цель работы: изучение метода и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций случайных процессов ортогональными функциями при ограничении на её модель.

7.6.1. Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделе 4.5.

7.6.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции и показателя колебательности μ и m определить коэффициенты разложения $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$ и $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$. Параметр α задать произвольно. Построить графическую зависимость $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$ и $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$.
2. Построить зависимость $\delta_b^{(2)}(\chi/t, \mu)$, $m = 2 \div 6$, $\mu = 0 \div 5$ (Результаты представить аналогично результатам таблицы 5.6). Определить количество локальных минимумов $\delta_b^{(2)}(\chi/t, \mu)$, численные значения параметров $\bar{\chi}_{opt}$ и соответствующие им значения погрешностей.
3. Построить зависимость $\delta_{b,min}^{(1)}(\mu/t, \chi_{opt})$ и $\delta_{b,min}^{(2)}(m/\mu, \chi_{opt})$ и сравнить их с соответствующими $\delta_{\beta,min}^{(1)}(\mu/t, \chi_{opt})$ и $\delta_{\beta,min}^{(2)}(m/\mu, \chi_{opt})$.
4. Сравнить результаты оценки $\delta_{b,1}^{(1)}(\mu/t, \chi_1)$, $\delta_{b,2}^{(1)}(\mu/t, \chi_2)$, $\delta_{b,1}^{(2)}(m/\mu, \chi_1)$, $\delta_{b,2}^{(2)}(m/\mu, \chi_2)$ с соответствующими минимальными оценками погрешности. Значение параметра χ_1 и χ_2 определяется по таблице 4.12.
5. Построить модели корреляционной функции, соответствующие выражению 6.3, для $\lambda = 1$, $\mu = 5$, χ_1 , χ_2 , χ_{opt} , $m = 5, 10$.
6. Оформить отчет.

7.6.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad
5. Ортогональная модель корреляционной функции в заданном ортогональном базисе.
6. Аналитическое выражение для оценки коэффициентов разложения $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$, χ_1 и χ_2 .
7. Графические зависимости $\delta_b^{(2)}(\chi/t, \mu)$ (пункт 2).

8. Графические зависимости $\delta_{b,min}^{(1)}(\mu/t, \chi_{opt})$, $\delta_{b,min}^{(2)}(t/\mu, \chi_{opt})$, $\delta_{\beta,min}^{(1)}(\mu/t, \chi_{opt})$ и $\delta_{\beta,min}^{(2)}(t/\mu, \chi_{opt})$ (пункт 3).

9. Графические зависимости $\delta_{b,1}^{(1)}(\mu/t, \chi_1)$, $\delta_{b,2}^{(1)}(\mu/t, \chi_2)$, $\delta_{b,1}^{(2)}(t/\mu, \chi_1)$, $\delta_{b,2}^{(2)}(t/\mu, \chi_2)$ (пункт 5).

10. Графики моделей корреляционной функции (пункт 6).

11. Выводы.

7.6.4. Контрольные вопросы

1. Какие параметры входят в ортогональную модель корреляционной функции?

2. Из каких соображений выбирается значение параметра масштаба ортогональных функций?

3. Как количество локальных экстремумов погрешности аппроксимации связаны с t и μ ?

7.7. Аппроксимация спектральных плотностей мощности

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации спектральных плотностей мощности случайных процессов ортогональными функциями.

7.7.1. Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделе 4.10.

7.7.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции, показателя колебательности μ , воспользовавшись средствами Mathcad найти выражения для оценки α , коэффициентов разложения $\{\beta_k\}_{k=0,...,m}$ и $\delta_{min}(\alpha, t)$ (см. лабораторную работу 7.5).

2. Найти модель спектральной плотности мощности для определенных параметров нормированной корреляционной функции, проверить условие нормировки.

3. Найти модель спектральной плотности мощности для параметров $\{b_k\}_{k=0,...,m}$ нормированной корреляционной функции, проверить условие нормировки.

4. Определить корректирующие коэффициенты ζ_k и построить модель спектральной плотности мощности. Проверить условие нормировки.

5. Построить зависимость $M[\delta] = f_2(m/\gamma_k)$.

6. Оформить отчет.

7.7.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.

2. Задание.

3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
5. Основные соотношения.
6. Результаты расчета, представленные в графической форме.
7. Выводы.

7.7.4. Контрольные вопросы

1. Что такое условие нормировки для спектральной плотности мощности?
2. Из каких соображений определяются корректирующие коэффициенты?

8. ПРИМЕНЕНИЕ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

8.1. Анализ гидрологических параметров в открытой части Балтийского моря

Получение гидрологической и гидрохимической информации по акватории Балтийского моря производится на достаточно разветвленной наблюдательной сети, объединяющей стандартные океанографические станции и разрезы, рейдовые и береговые станции и посты, плавмаяки и эпизодические станции [94, 95]. Эта информация собирается как с равномерной, так и неравномерной дискретностью. Если для первой категории наблюдений методы обработки и анализа гидрометеорологической и гидрохимической информации достаточно хорошо разработаны [94, 95], то для второй - требуется применение специализированных методов расчёта вероятностных характеристик. Разработанные методы вероятностного анализа по данным с неравномерной дискретизацией (см. раздел 4.8) открывают широкие возможности изучения гидрологического режима в открытой части Балтийского моря [117].

Рассмотрим пример обработки данных эпизодических наблюдений на международной станции ВУ-5, расположенной в Борнхольмском бассейне, для анализа характерных особенностей годовой цикличности временных рядов поверхностной температуры воды, солёности, плотности и содержания кислорода [99].

Поверхностный горизонт был выбран потому, что именно в верхнем слое наиболее ярко прослеживается годовая ритмика, обусловленная солнечной радиацией для температуры воды, процессами ледотаяния и годовой ритмикой стока рек для солёности, а следовательно и для плотности, и тепловым режимом вод для кислорода.

В качестве исходных данных использованы все имеющиеся наблюдения, выполненные в период с 1909 по 1983 г.г. и опубликованные в различных литературных источниках, каталогах и рейсовых отчётах (см. таблицу 8.1).

Объём выборки и время измерения гидрологических параметров станции ВУ-5

Таблица 8.1

Глубина параметр	0	10	20	40	50	60	70	80	90	Время измерения
O_2	340	308	319	284	327	329	295	337	349	07.04.25 05.12.83
$t^0 C$	464	419	427	430	441	423	401	433	423	01.04.09 05.12.83
S	464	410	419	426	459	431	398	432	419	01.04.09 05.12.83
σ	257	240	253	261	264	263	241	262	243	01.04.09 27.09.83

Данные наблюдений сформированы по следующему принципу. В информационный массив включены все эпизодические наблюдения, дополненные выборкой из данных многосуточных станций. Из многосуточных наблюдений бралось только по одному наблюдению в каждые сутки, например, в срок, когда выполняется полный комплекс гидрологических и гидрохимических наблюдений. Если в течение суток наблюдения проводились дважды по разным судам, то использовались оба наблюдения. Так как время наблюдений внутри суток не различалось, все наблюдения были отнесены к середине суток.

Таким образом, для исследования годовой ритмики гидрологических и гидрохимических параметров в качестве основного интервала дискретности были выбраны 1 сутки, что могло бы дать 365 наблюдений в год при условии ежесуточных наблюдений всем научно-исследовательским флотом прибалтийских стран, что, естественно, нереально.

В соответствии с изложенным принципом формирования временных рядов к расчёту было принято 464 значения по температуре (t^0 C) и солёности (S), 340 – по кислороду (O_2) и 257 – по плотности (σ). Некоторое различие в количестве значений температуры, солёности и плотности связано с тем, что обычно в литературных источниках приводятся только первые две характеристики, а плотность, как их функция, рассчитывается по специальным таблицам. Мы не стали приводить недостающие расчёты, так как предлагаемая методика предназначена для расчёта вероятностных характеристик с неравномерной дискретностью.

Как правило, выводы о характере годовой ритмики гидрологических элементов по данным эпизодических наблюдений на сети станций открытого моря исследователь проводит по оценкам математического ожидания и дисперсии годового хода. Для этой цели ансамбль значений элементов сводится на годовой период, образуя «облако» точек, по которому тем или иным методом проводится кривая математического ожидания. Аналогично образуется «облако» квадратов значений, по которому вычисляется дисперсия годового хода.

Анализ видов графиков годового хода математического ожидания температуры и кислорода, опубликованных в различных источниках, свидетельствует о наличии ярко выраженной годовой ритмики, поэтому оценки среднего образа этих элементов, вычисленные различными авторами, близки между собой. Для плотности воды полной ясности о характере годовой ритмики из-за многофакторности механизма формирования годового хода и методических погрешностей расчёта вероятностных характеристик этого элемента нет. Так, встречающиеся в научной литературе оценки характеристик годового хода плотности воды рассчитываются, исходя из среднемесячных значений температуры и солёности, что даёт искажённое представление о режиме этого элемента. Существенные расхождения в оценках математического ожидания отмечается и в солёности. Здесь точки зрения на наличие годовой ритмики в колебаниях этого элемента порой принципиально различаются. Следует отметить, что все вышесказанное относится к открытой части Балтийского моря. В прибрежной зоне моря, где влияние режимобразующих факторов прослеживается четко, оценки среднего образа гидрологических и гидрохимических элементов достаточно однотипны.

Наиболее показательными характеристиками, свидетельствующими о наличии годовой ритмики в изменениях исследуемых элементов, является корреляционная функция $K_x(\tau)$ и спектральная плотность мощности $S_x(\tau)$. С учётом нерегулярности входных данных оценка корреляционной функции определялась с использованием интервальной корреляционной функции в соответствии с выражением (4.100), а спектральная плотность мощности – в соответствии с выражением (4.147) после аппроксимации корреляционной функции параметрической моделью.

Так как процесс идентификации корреляционных функций затруднен, в таблице 8.2 приведены результаты аппроксимации корреляционных функций t^0 C, σ и O_2 различными колебательными моделями.

Результаты аппроксимации

Таблица 8.2

	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau)$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau)$		
	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ
$t^0 C$	$9 \cdot 10^{-4}$	0,0159	0,2522	$9,3 \cdot 10^{-4}$	0,0160	0,2335	$8,7 \cdot 10^{-4}$	0,0158	0,2743
σ	0,0030	0,0159	0,4638	0,0035	0,0165	0,4252	0,0029	0,0157	0,5323
O_2	0,0011	0,0155	0,3132	0,0012	0,0157	0,2871	0,0011	0,0154	0,3427

Анализ результатов, представленных в таблице 8.2, показывает, что:

1. как и следовало ожидать, погрешности аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями принимают большие значения, что объясняется малым объёмом выборки и непредсказуемым характером дискретизации;
2. погрешности аппроксимации принимают меньшие значения для $t^0 C$ ($M=464$), большие - для O_2 ($M=341$) и самые большие – для σ ($M=257$);
3. несмотря на небольшой объём выборки, разброс параметров α и ω_0 у разных моделей небольшой, особенно у частоты колебания ω_0 , что объясняется большим значением показателя колебательности μ (см. таблицу 8.3);
4. из рассмотренных моделей корреляционных функций с точки зрения минимизации квадратической погрешности аппроксимации наиболее целесообразно выбирать модель в виде $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|)$;
5. для рассмотренных гидрологических параметров характерна сезонная изменчивость (КФ имеет колебательный характер, т.е. присутствует косинусоидальная составляющая).

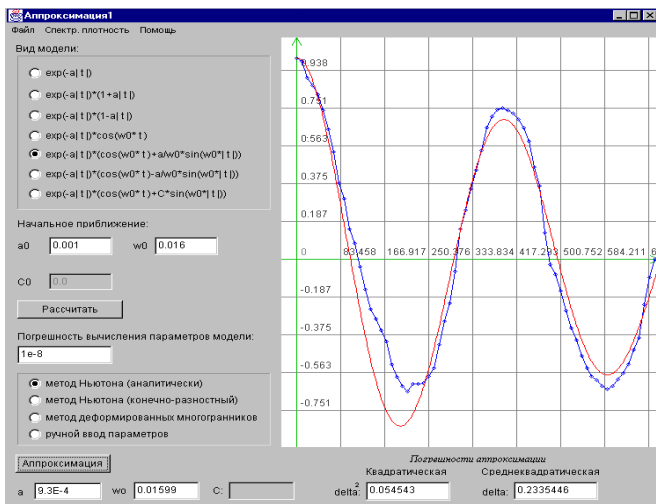
Значения показателя колебательности для гидрологических параметров

Таблица 8.3

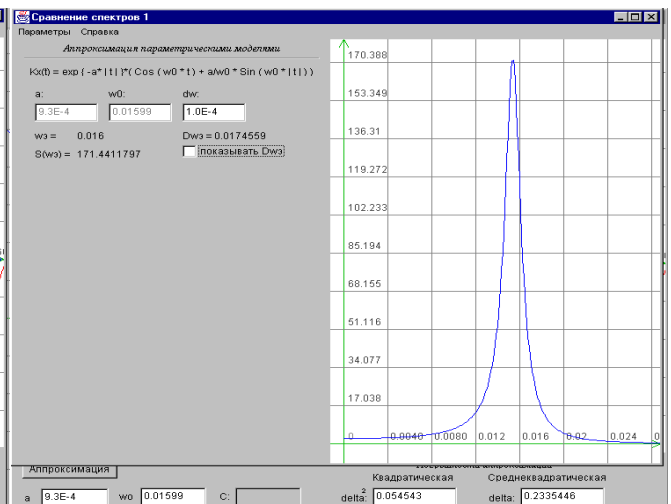
	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau)$	$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau)$
$t^0 C$	17,667	17,194	18,161
σ	5,233	5,232	5,422
O_2	13,946	13,494	14,538

На рис. 8.1-8.2 приведены результаты аппроксимации нормированных корреляционных функций и спектральных плотностей мощности температуры, плотности воды, содержания кислорода моделью вида $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|)$ и солёности - $e^{-\alpha|\tau|}$.

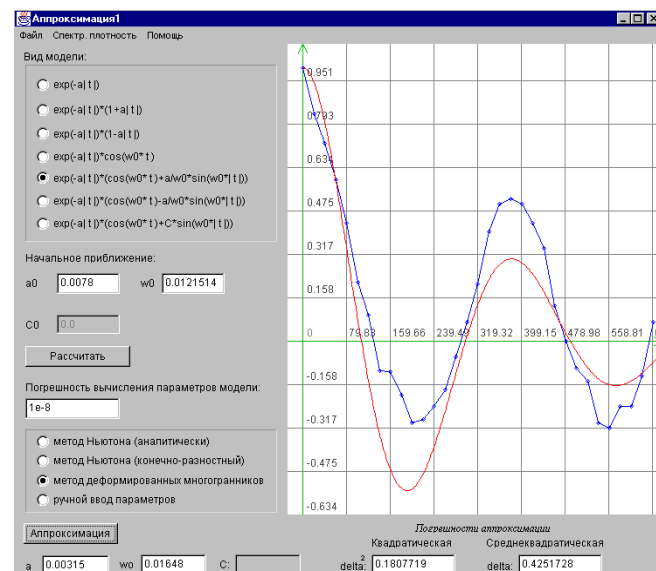
Из представленных на рис. 8.1-8.2 графиков (особенно для спектральных плотностей мощности) видно, что для температуры воды и содержания кислорода достаточно ярко выражен годовой период. Спектры температуры и содержания кислорода имеют острый пик на частоте годового периода ($T=1$ год), который свидетельствует о принадлежности этих процессов к классу периодически коррелированных и необходимости применения к исследованию этих элементов методов анализа периодически коррелированных случайных процессов [162].



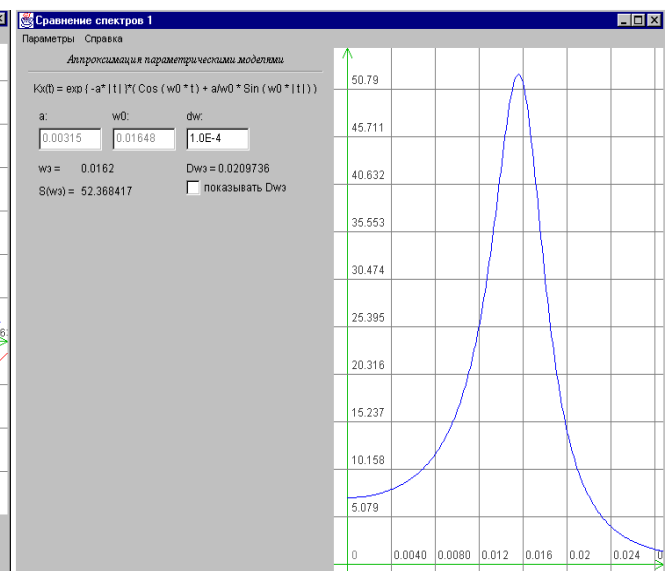
а) Корреляционная функция t^0 С



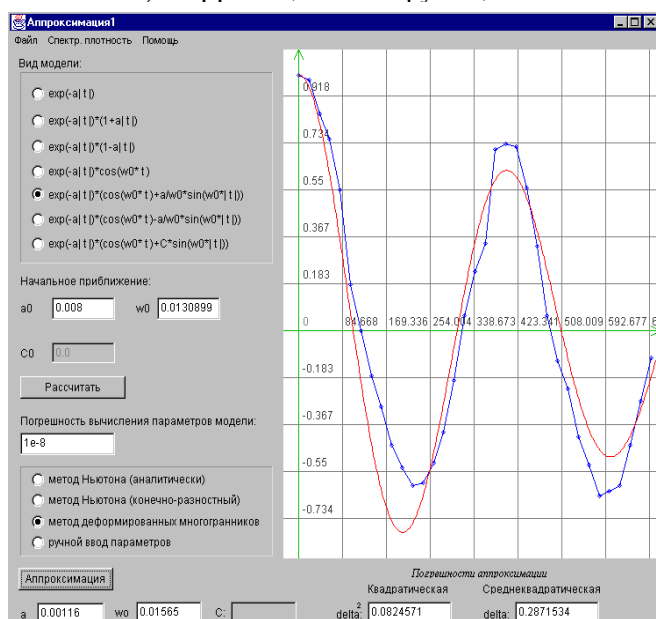
б) Спектральная плотность мощности t^0 С



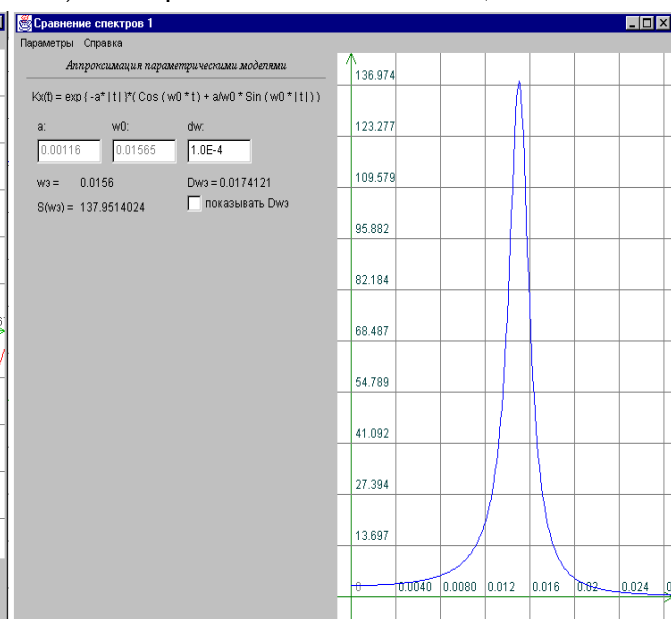
в) Корреляционная функция σ



г) Спектральная плотность мощности σ

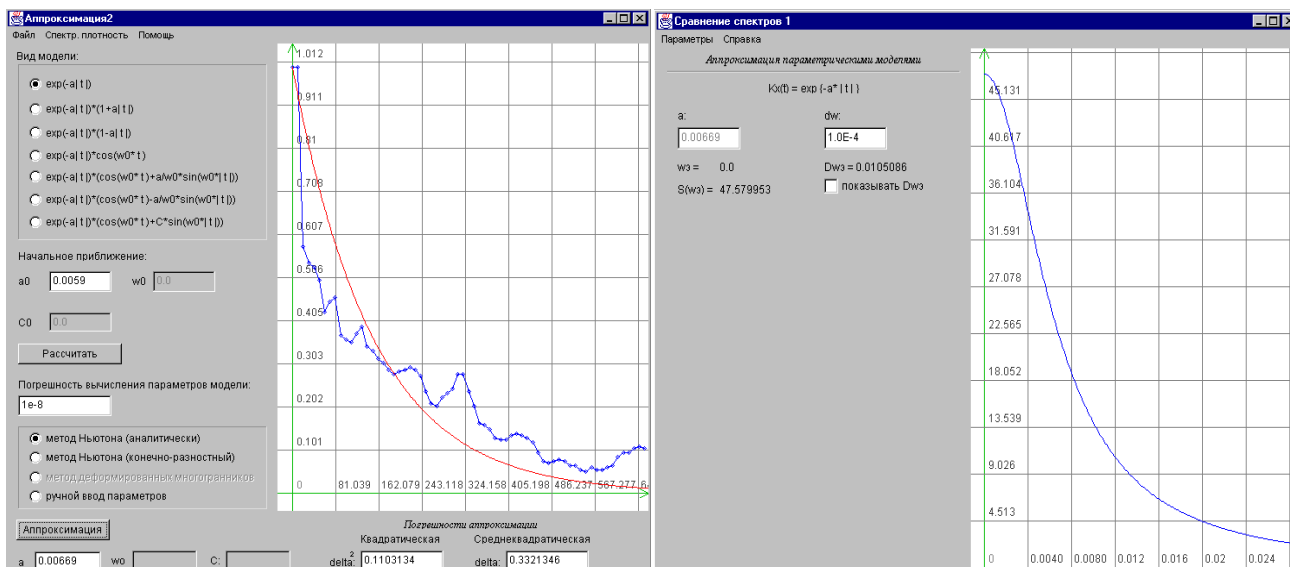


д) Корреляционная функция O_2



е) Спектральная плотность мощности O_2

Рисунок 8.1 - Результаты обработки гидрологических параметров



а) Корреляционная функция S

б) Спектральная плотность мощности S

Рисунок 8.2 -Результаты обработки гидрологических параметров

Корреляционная функция солёности затухает без ярко выраженных биений с периодом 1 год, а спектр не имеет всплеска на частоте $\omega = 2\pi / 1$ год. Если аппроксимировать корреляционную функцию солёности воды затухающей экспонентой $e^{-\alpha|t|}$, то $\alpha = 0,007$. Т.е. для солёности воды нет периодичности, называемой годовым ходом, но тем не менее масштаб изменчивости, равный одному году, существует. Такой вид корреляционной функции свидетельствует о перемодулированности годовой ритмики. Отсутствие пика на спектре солёности подтверждает интерпретацию о том, что изменчивость с годовым масштабом существует, но процесс нельзя отнести к классу периодически коррелированных. Поэтому применение методов ПКСП анализа к солёности воды в открытых районах Балтийского моря, удаленных от влияния режимобразующих факторов, имеющих годовую ритмику, не дадут физически правильной информации.

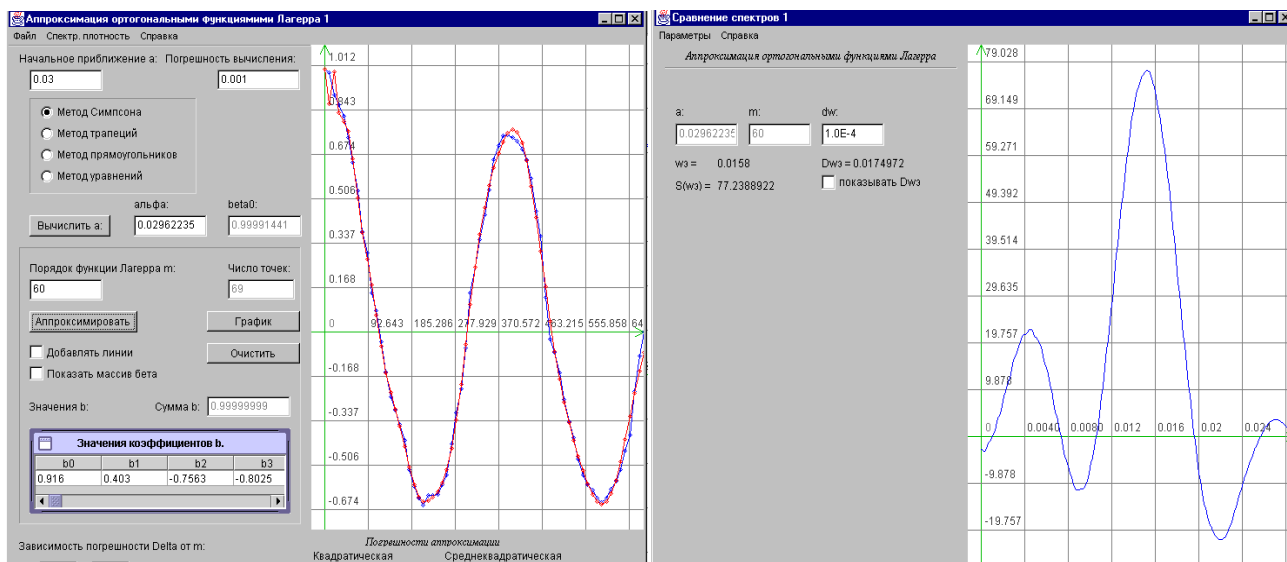
Относительно плотности морской воды следует отметить, что корреляционная функция и спектральная плотность мощности занимают промежуточное положение между температурой и солёности ($\mu = 5,232$) с наличием периода коррелированности $T=1$ год. Это связано с тем, что на формирование изменчивости плотности в поверхностном слое оказывает влияние температура воды, для которой характерна годовая ритмика.

Вместе с тем, географическое положение анализируемой станции ВУ-5 указывает и на влияние подтока солёных североморских вод, что и накладывает свой отпечаток на характер этих функций.

Рассматриваемую задачу можно решить, воспользовавшись аппроксимацией корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Лагерра. На рис. 8.3 представлены результаты аппроксимации корреляционных функций и спектральной плотности ортогональными функциями Лагерра.

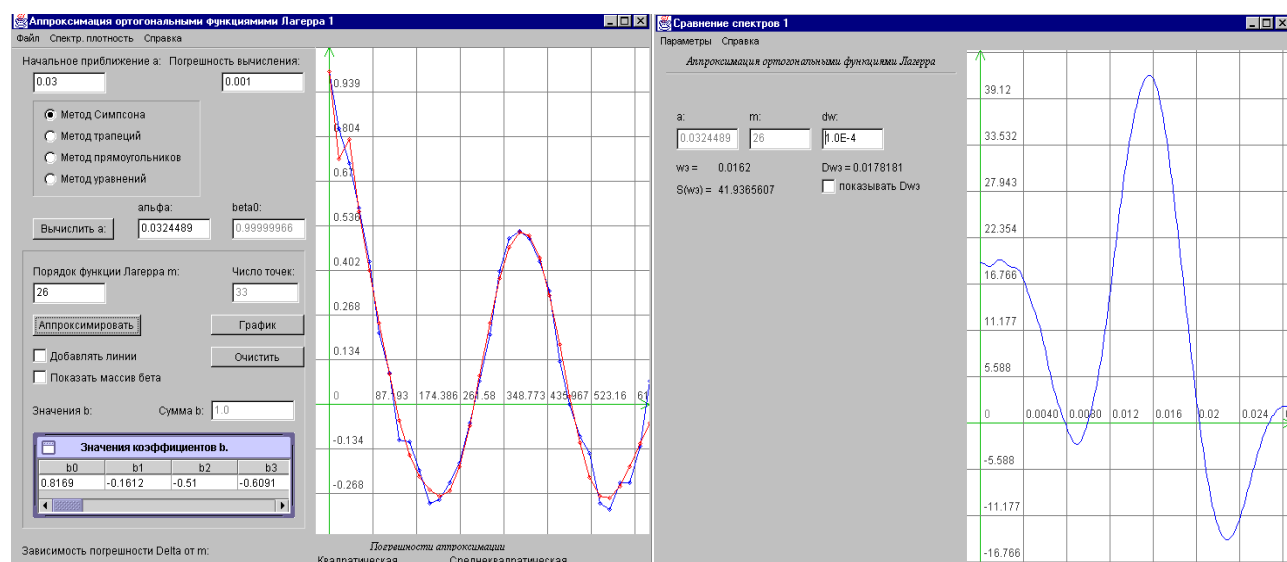
Анализ результатов показывает, что:

1. погрешность аппроксимации корреляционной функции меньше у ортогонального разложения;
2. ширина спектра меньше у параметрической модели;
3. частоты, соответствующие максимуму спектральной плотности мощности, практически совпадают (см. таблицу 8.4).



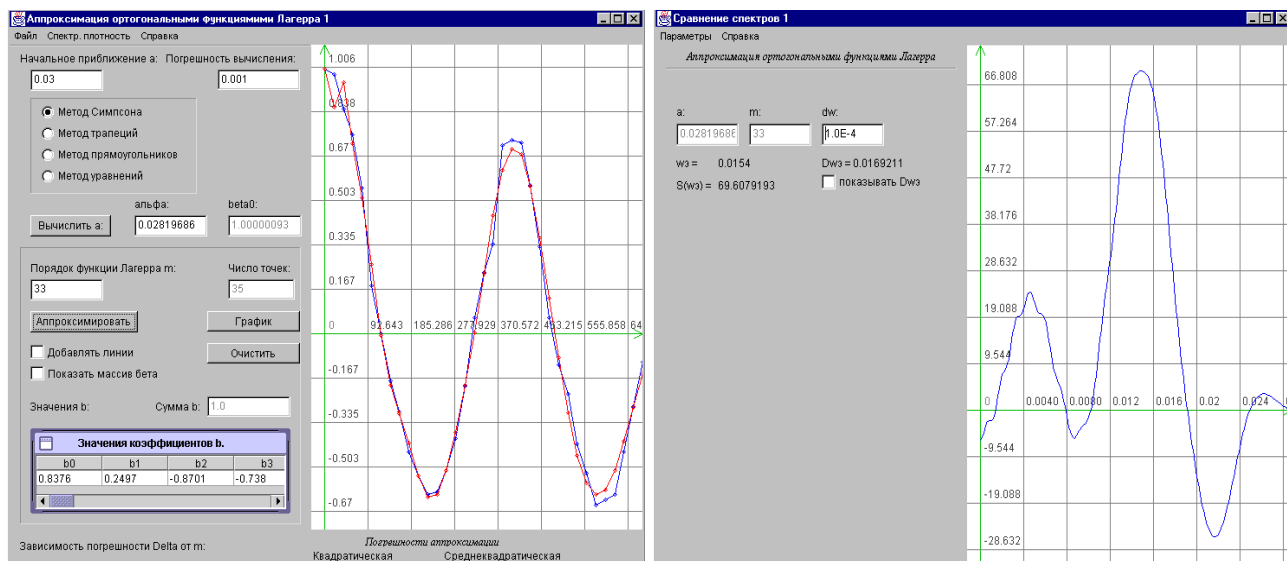
а) Корреляционная функция $t^0 C$

б) Спектральная плотность мощности $t^0 C$



в) Корреляционная функция σ

г) Спектральная плотность мощности σ



д) Корреляционная функция O_2

е) Спектральная плотность мощности O_2

Рисунок 8.3 - Результаты обработки временных рядов

$\rho_x(\tau)$	$e^{-\alpha \tau }(\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau)$		$\sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau)$	
	ω_0	δ	ω_0	δ
$t^0 C$	0,0160	0,2522	0,0157	0,0600
σ	0,0162	0,4638	0,0158	0,1082
O ₂	0,0156	0,3132	0,0154	0,0984

Рассмотрим задачу определения сезонной изменчивости указанных параметров в зависимости от глубины. Исходными данными (см. табл. 8.1) являются неэквидистантные временные ряды, представляющие собой результаты измерений параметров на различных глубинах (0-90 м) с 1909 по 1983 г. Средние коэффициенты сжатия для измеряемых параметров равны:

- кислорода - 67,13;
- температуры - 63,15;
- солености - 63,26;
- плотности - 106,64.

Отсюда видно, что большая часть информации об измеряемых параметрах безвозвратно потеряна.

Характер неравномерности, обусловленный случайными моментами измерений, позволяет отнести модель потока к модели аддитивной случайной дискретизации. Так как алгоритм восстановления процесса на интервале дискретизации неизвестен, то, как и в предыдущем случае, наиболее целесообразно применять алгоритм с использованием интервальной корреляционной функции (см. подраздел 4.8) с усреднением по времени (располагаем для каждого параметра на определенной глубине одной реализацией). Следует отметить, что минимальный интервал дискретизации $\Delta t_{min}=1$ день. Поэтому, учитывая ограниченный набор выборочных данных, и что для выявления сезонной изменчивости диапазон изменения аргумента КФ должен быть больше 2-3 лет, ширина дифференциального окна $\Delta \gg \Delta t_{min}$. В случае сезонной изменчивости КФ имеет колебательный характер, т.е. присутствует косинусоидальная составляющая, а у спектральной плотности мощности наблюдается пик на частоте, соответствующей периоду в один год. Тогда, с учетом рекомендаций [97] для обеспечения методической погрешности интерполяции КФ 2% число отсчетов КФ на периоде колебаний $n=16$, $\Delta=20 \div 25$.

Результаты оценки параметров корреляционных функций $e^{-\alpha|\tau|}(\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|)$ и спектральных характеристик представлены в таблице 8.5, а соответствующие графики спектральных плотностей мощности – на рис. 8.4-8.5.

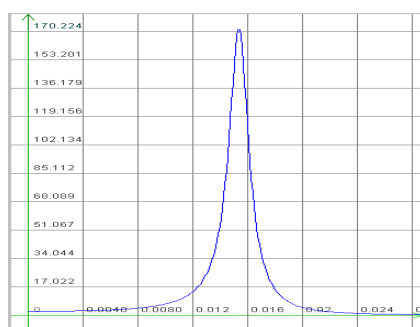
Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы:

- сезонная изменчивость наблюдается у всех параметров, кроме солености;
- с увеличением глубины мощность колебательной составляющей уменьшается, что свидетельствует об уменьшении сезонной изменчивости;
- переходные глубины (где еще наблюдается сезонная изменчивость) для: кислорода - 50 м, температуры - 50 м, плотности - 30 м.

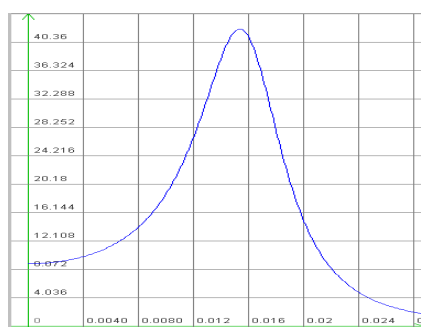
Параметры аппроксимирующих выражений корреляционных функций
и спектральные характеристики

Таблица 8.5

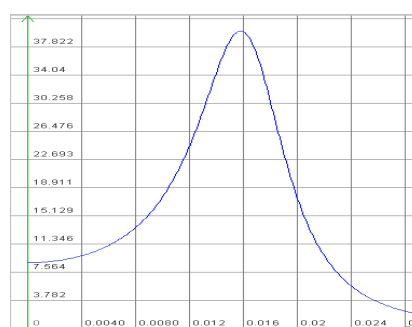
	h м	α	ω_0	$\mu = \omega_0 / \alpha$	ω_3	$S(\omega_3)$	$\Delta\omega_3$
$t^0 \text{ } ^\circ\text{C}$	0	0,00093	0,01598	17,1828	0,016	171,28	0,0175
	40	0,00399	0,01645	4,1228	0,016	42,23	0,0219
	50	0,00423	0,01694	4,0047	0,0164	39,97	0,0237
	90	0,00409	0	0	0	77,83	0,0064
σ	0	0,00315	0,01648	5,2317	0,0162	52,37	0,02097
	20	0,00262	0,01547	5,9046	0,0152	62,47	0,0192
	30	0,00715	0	0	0	44,52	0,0112
O_2	0	0,00116	0,01565	13,4914	0,0156	68,54	0,0200
	20	0,00237	0,01644	6,9367	0,0163	36,04	0,0233
	50	0,00475	0,01707	0	0,0164	30,64	0,0163



а) 0 м

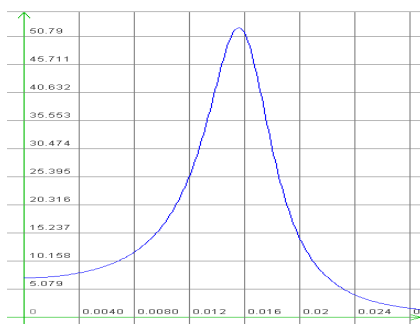


б) 40 м

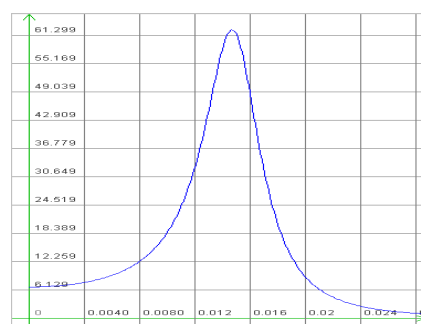


в) 50 м

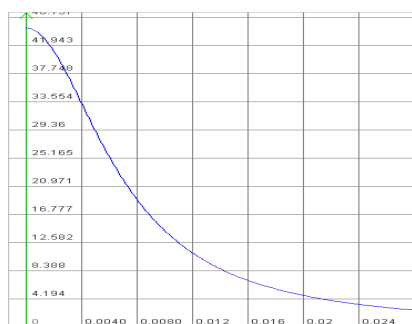
Рисунок 8.4 - Спектральные плотности мощности температуры



а) 0 м

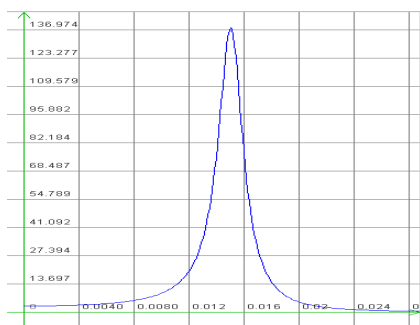


б) 20 м

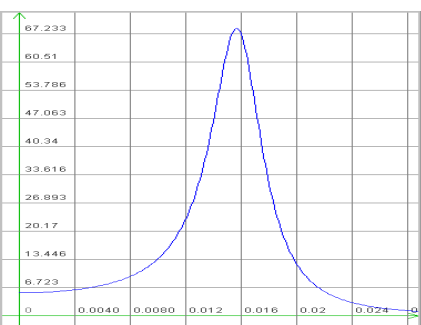


в) 30 м

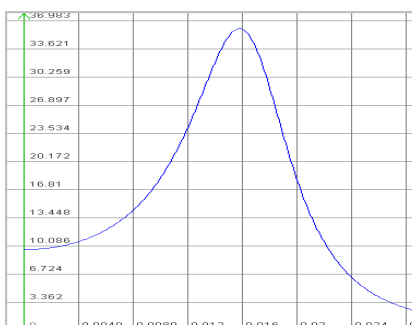
Рисунок 8.5 - Спектральные плотности мощности σ



а) 0 м



б) 20 м



в) 50 м

Рисунок 8.6 - Спектральные плотности мощности кислорода

На рис. 8.7-8.9 для большей наглядности приведены результаты наложения спектров.

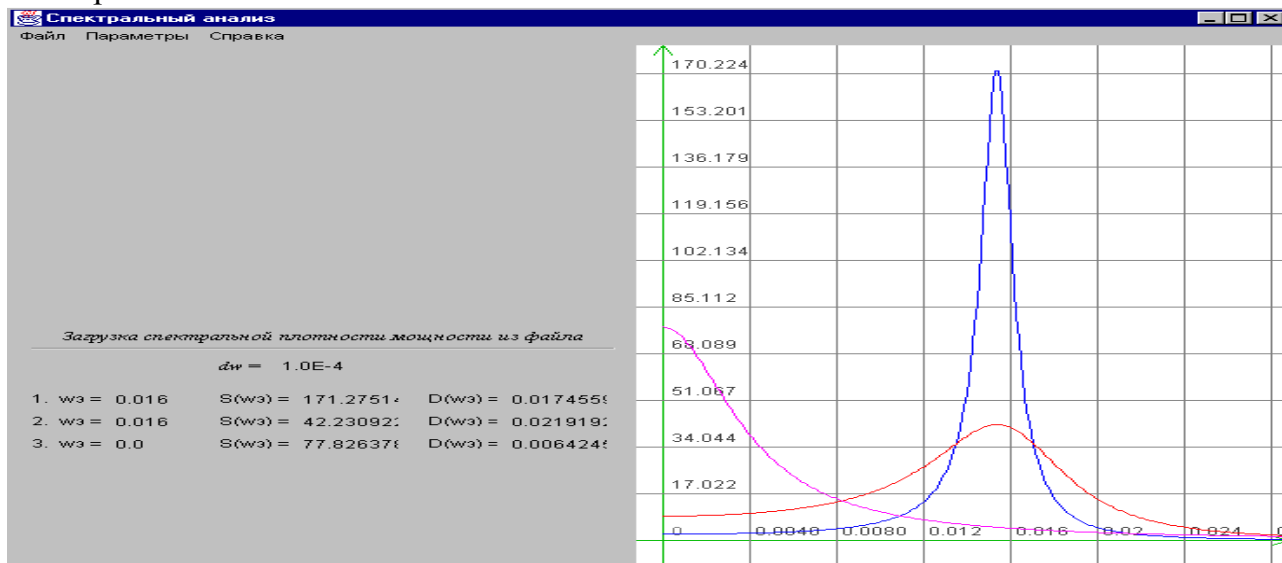


Рисунок 8.7 - Спектральные плотности мощности температуры

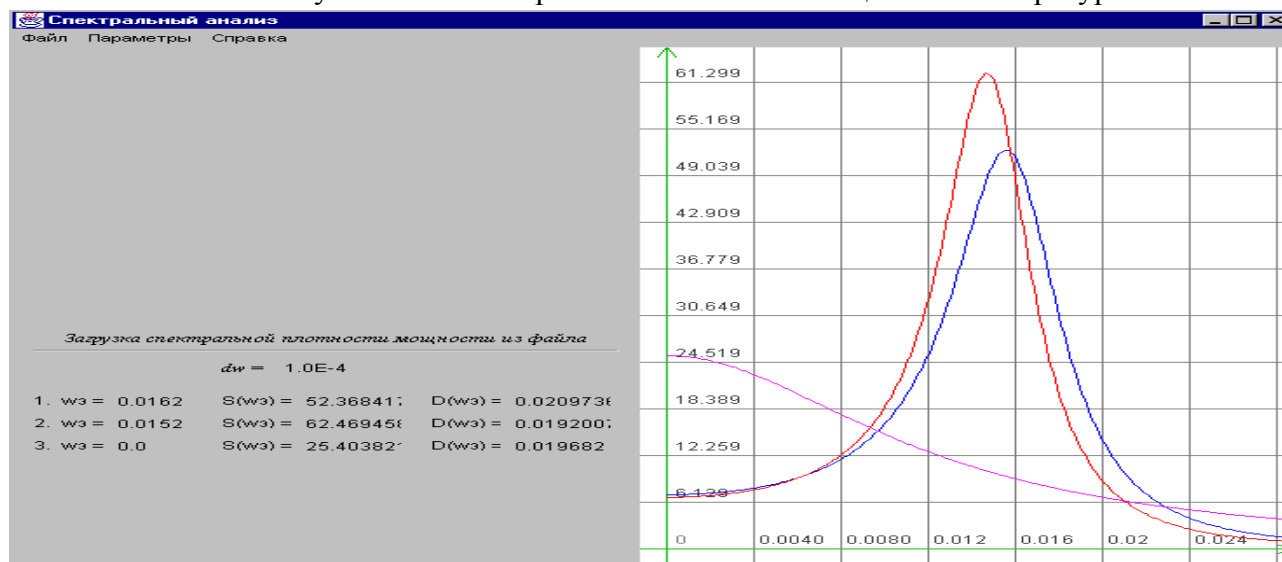


Рисунок 8.8 - Спектральные плотности мощности σ

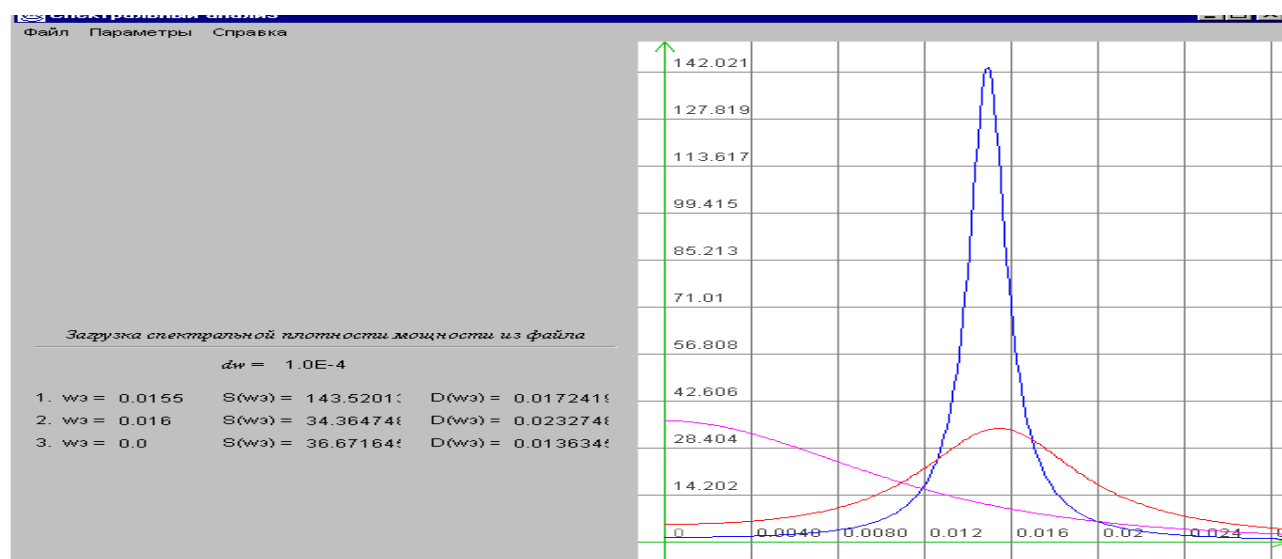


Рисунок 8.9 - Спектральные плотности мощности кислорода

8.2. Анализ звукопоглощающих характеристик самолетных конструкций

Исследование характеристик самолетных конструкций является достаточно сложной задачей, связанной с необходимостью производить эксперименты в натуральных условиях. Одной из задач подобного исследования является определение звукопоглощающих характеристик конструкций [176].

Шумы, встречающиеся на практике, чаще всего представляют собой случайные процессы, поэтому многие задачи борьбы с шумом не могут быть решены без привлечения методов теории случайных функций. Особый интерес представляют методы исследований, основанные на корреляционно-спектральном анализе случайных процессов. Знание корреляционных функций позволяет определить все представляющие практическую ценность физические характеристики шума.

Измерение звукоизоляции и звукопоглощения можно рассматривать как частные случаи общей задачи, состоящей в определении компонент звукового давления, соответствующих различным источникам шума, временам распространения и различным полосам частот.

Особенно метод полезен для оценки звукоизолирующей способности отдельных элементов конструкций. Очевидно, что для определения звукоизоляции панели достаточно установить её между громкоговорителем и микрофоном (см. рис. 8.10). При этом максимальное значение участка кривой функции взаимной корреляции

$$K_{qp}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} q(t)p(t-\tau)dt, \quad (8.1)$$

между излучаемым сигналом $q(t)$ и давлением $p(t)$, воспринимаемым микрофоном, пропорциональное интенсивности прямого звука, уменьшится на величину звукоизоляции панели.

Оптимизирование измерения звукоизоляции может быть достигнуто путем введения спектрального разложения предварительно отредактированных взаимных корреляционных функций, измеренных без образца и с образцом

$$S_{qp}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{qp}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (8.2)$$

и вычисления по ним передаточной функции, характеризующей звукоизолирующую способность образца:

$$H(f) = \frac{S_{qp_2}(f)}{S_{qp_1}(f)}, \quad (8.3)$$

где $f = \frac{\omega}{2\pi}$ – частота в Дб,

S_{qp_1} , S_{qp_2} – взаимные спектральные плотности мощности излучаемого случайного процесса $q(t)$ и принимаемых процессов $p_1(t)$ и $p_2(t)$ с образцом и без образца соответственно.

Если значения снимаются через равные промежутки времени взаимную корреляционную функцию сигналов q и p , принимаемых на двух микрофонах, можно определить, как

$$K_{qp}(i\Delta\tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_j \cdot p_{j+i}, \quad (8.4)$$

где N – число отсчетов принимаемого сигнала,

$\Delta\tau$ – интервал дискретизации.

Ширина полосы измерительного сигнала определяется, как

$$\Delta f = \frac{1}{\Delta\tau}. \quad (8.5)$$

Если интервал дискретизации измеряемых случайных процессов, а следовательно и взаимной корреляционной функции – $\Delta\tau$, а количество отсчетов взаимной корреляционной функции – N' , интервал дискретизации спектральной плотности мощности будет определяться как $\frac{2\pi}{N'\Delta\tau}$.

В случае неравномерной дискретизации принимаемого сигнала необходимо применять алгоритмы определения взаимной корреляционной функции с использованием интервальной корреляционной функции.

Запись аудиосигналов, вычисление взаимных спектров, передаточных функций являются стандартными функциями современных цифровых двухканальных анализаторов, основанных на использовании алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ). Больших вычислительных затрат можно избежать с помощью аппроксимации взаимной корреляционной функции и определения спектральной плотности мощности по параметрам аппроксимирующего выражения. Достаточно хороший результат можно получить, аппроксимируя взаимные корреляционные функции ортогональными функциями Лагерра (см. подраздел 4.3).

Взаимная корреляционная функция при этом представляется в виде (4.84), а коэффициенты разложения определяются выражениями (4.81), (4.82) и (4.84) (см. таблицу 4.16).

На рисунке 8.10 представлена измерительная система для экспериментального определения величины звукоизоляции. Динамик, приводимый в действие генератором белого шума, используется в качестве источника звука. Данная система интересна тем, что при использовании двух микрофонов исключаются искажения корреляционной функции, обусловленные фазочастотными характеристиками динамика.

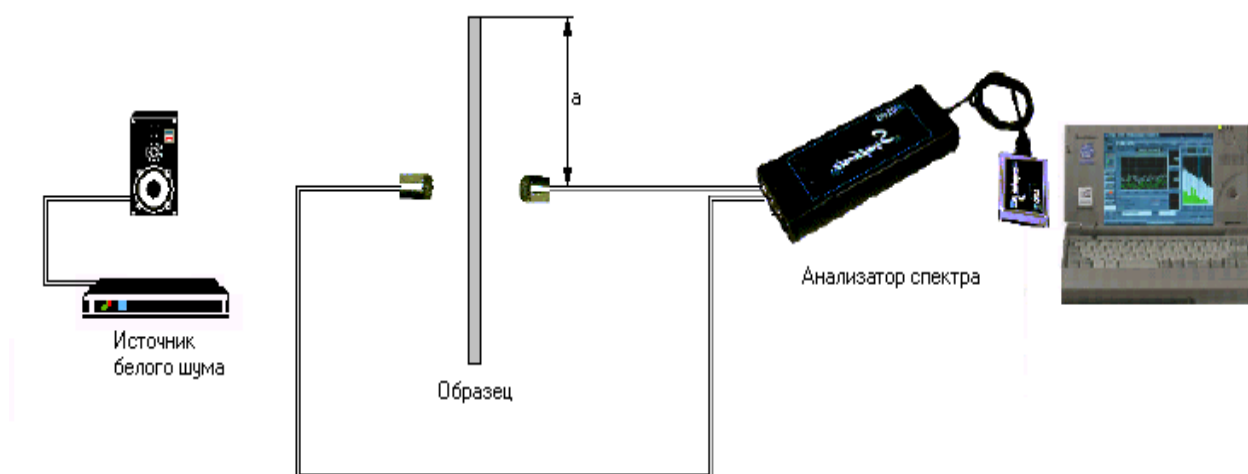


Рисунок 8.10 – Структура измерительной системы

Сигналы записываются с помощью цифрового магнитофона, встроенного в двухканальный анализатор спектра "Symphonie" компании 01dB-Steel (Франция) (см. таблицу 8.6).

Основные параметры

Таблица 8.6

соединение с компьютером	PC CARD Type II (PCMCIA)
питание	от компьютера
размеры	85x35x220 мм
Масса	560 г
запись аудиосигналов	частота выборки 51200 Гц

Микрофоны «Type 40AK» компании G.R.A.S. (Дания). Основные параметры:

номинальная чувствительность на 250 Гц	25 мВ/Па
частотный отклик	2.5 Гц – 10 кГц
напряжение поляризации	200 В
Масса	10 г

Для обеспечения возможности разделения прямого звука с групповым распространением τ_1 и следующего за ним сигнала τ_2 необходимо выполнить условие

$$\tau_2 - \tau_1 > \frac{1}{\Delta f}. \quad (8.6)$$

путем выбора геометрии эксперимента и ширины полосы измерительного сигнала. Для узкополосных и синусоидальных сигналов это условие становится невыполнимым. Чем шире полоса f , тем выше временная разрешающая способность метода. Длина волны минимальной частоты должна составлять половину максимального размера панели; выше этой частоты можно разделить звуковой сигнал, прошедший через панель от сигнала, который огибает её по краям.

Фронт сигнала, огибающего панель, придет к микрофону примерно на $\frac{a}{c}$ сек позже, чем фронт прямого сигнала, где c – скорость звука, a – расстояние от микрофона до края панели.

Алгоритм определения передаточной функции, соответствующей частотной зависимости звукоизоляции, состоит в последовательном измерении взаимных корреляционных функций сигналов без образца и с образцом, и вычислении по ним передаточной функции образца. На рис. 8.11 приведены взаимные корреляционные функции полученные при использовании в качестве преграды фанерной панели.

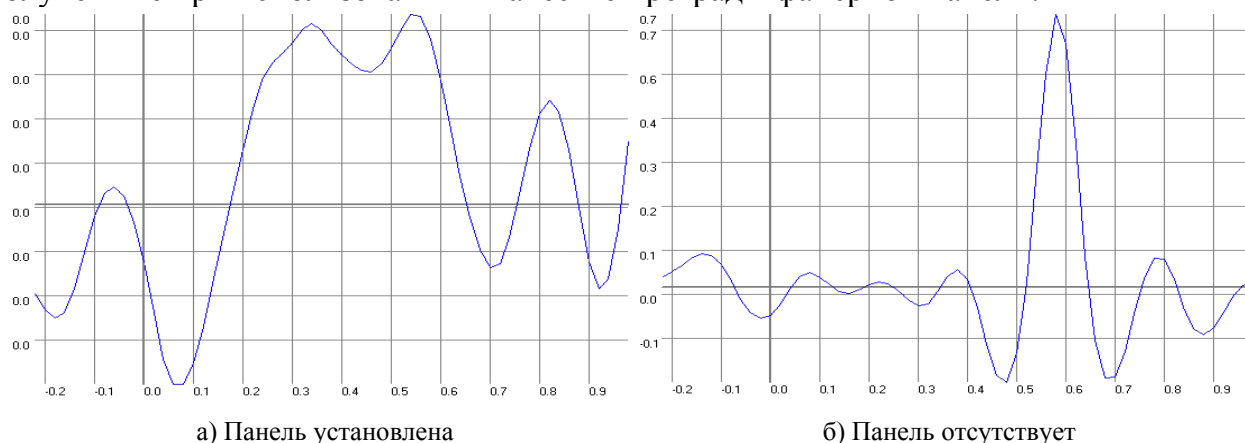


Рисунок 8.11 – Взаимные корреляционные функции

После сравнения функций возможно выделение пика, обусловленного прямым звуком ($\tau=0,5-0,6$ мс). Для определения спектральной плотности мощности при анализе исключались другие интенсивные составляющие, обусловленные дифракцией звука. В результате аппроксимации взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра были получены выражения для спектральной плотности мощности, представленные на рис. 8.12.

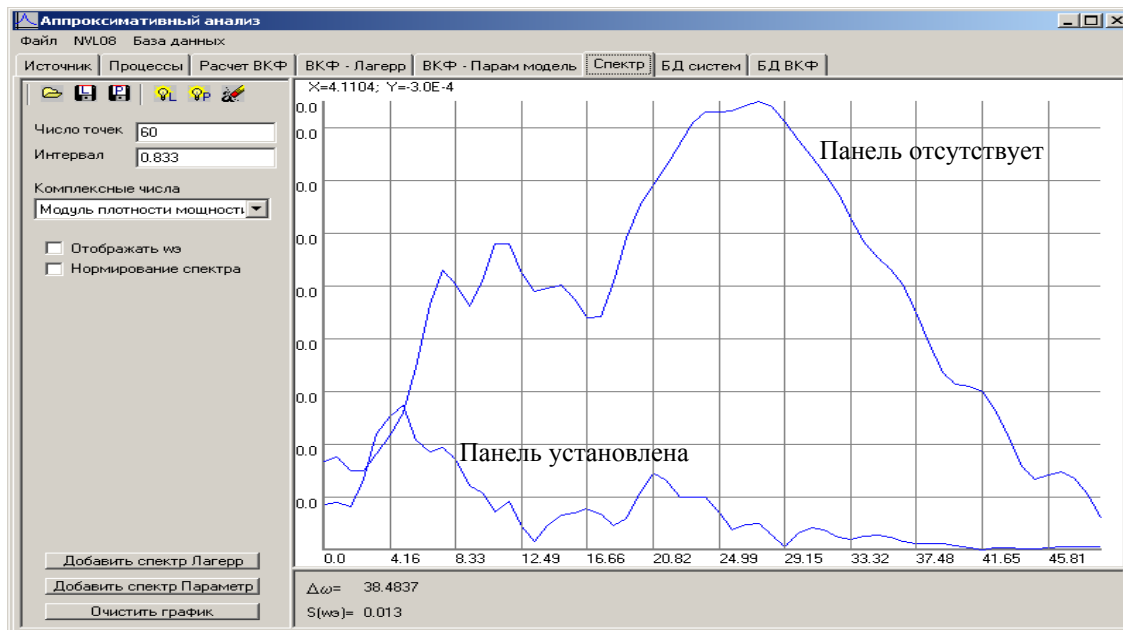


Рисунок 8.12 – Взаимные спектральные плотности мощности при установленной панели и в ее отсутствии

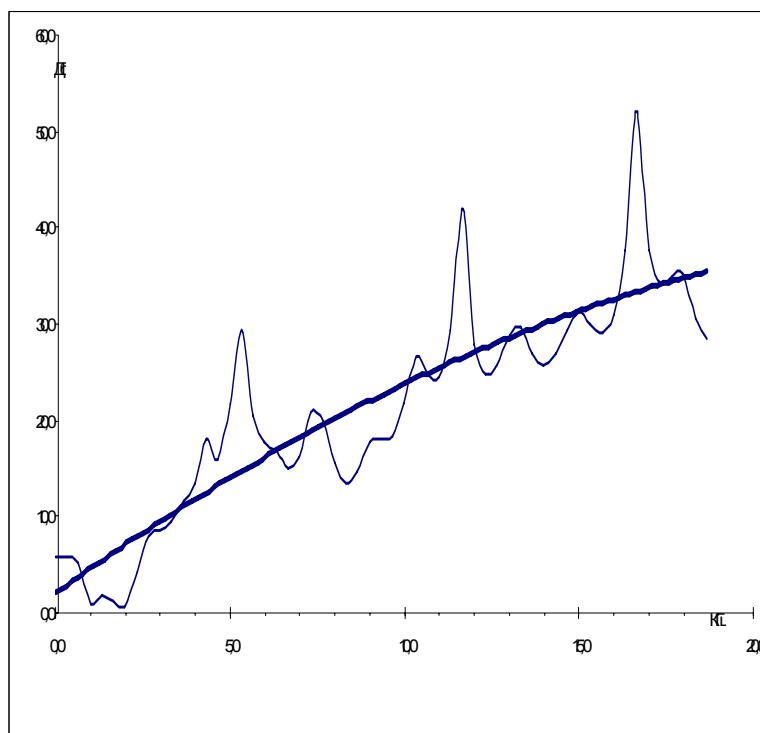


Рисунок 8.13 – Функция звукопоглощения фанерной панели

Частотная зависимость звукоизоляции преграды для фанерной и стальной панелей приведены на рис. 8.13.

При использовании предлагаемого метода измерения звукоизоляции не требуется сооружения специальных заглушенных или реверберационных камер. Измерения могут производиться в непригодных помещениях в условиях фонового шума. Метод удобен для измерения звукоизоляции элементов самолетных конструкций (панелей) как в лабораторных, так и в натуральных условиях.

8.3. Диагностика амортизаторов передней подвески автомобилей

Исправные амортизаторы являются ведущим элементом активной безопасности автомобиля. Однако для правильного диагностирования неисправности амортизатора, исследование его характеристик необходимо производить в условиях лаборатории с привлечением дорогостоящего оборудования.

Методы проверки состояния амортизаторов делятся на два основных класса - не требующие снятия амортизатора с автомобиля и требующие разборки подвески и снятия амортизатора.

Одним из объективных методов диагностики является Шок-тест (shock-test). Он проводится на стенде, состоящем из небольшого пневматического подъемника и устройства с подпружиненными рычагами, отслеживающего вертикальные перемещения кузова. Колеса испытуемой оси приподнимаются на высоту 10 см, а затем резко опускаются, вызывая колебания кузова. По результатам измерения колебаний компьютер стенда вычисляет коэффициент затухания колебаний для каждого амортизатора испытуемой оси и сравнивает с предельно допустимой разницей. Однако этот метод не дает информацию о реальном состоянии амортизаторов. Поэтому, чаще используют возможности стендовой диагностики подвески. При этом применяют два основных метода - резонансный метод измерения амплитуды колебаний BOGE/МАНА и метод EUSAMA – анализирует вибрационные колебания измерительной пластины с заданной частотой.

Принцип работы стендов использующих резонансный метод заключается в том, что на каждой оси автомобиля поочередно производится возбуждение колебаний измерительной платы. Частота колебаний увеличивается до достижения резонанса подвески, при котором достигается максимальный ход амортизаторов. Затем принудительное возбуждение колебаний прекращается, и производится анализ картины затухающих колебаний. Данный метод позволяет определить степень износа амортизаторов относительно эталона.

Второй, также широко распространенный метод EUSAMA заключается в использовании вибрационных колебаний измерительной пластины с заданной частотой. В результате тестируется вся подвеска целиком, а стенд показывает алгоритмически вычисленный коэффициент сцепления с дорогой колес автомобиля. Данный метод в своих стендах используют такие фирмы, как BOSCH, HOFMANN, Muller Bem, SUN.

Основными недостатками методов стендовой диагностики является то, что стенд диагностирует не столько состояние амортизаторов, сколько общее состояние подвески автомобиля. Поэтому некоторые производители амортизаторов не признают результаты такого тестирования как диагностику амортизаторов. Еще одним недостатком, вызывающим разногласия между автовладельцами и сервисными службами является то, что положительный результат проверки на стенде означает только то, что амортизатор удовлетворяет соответствующим нормам завода изготовителя, но не позволяет выявить некоторые дефекты (например «стук»).

Учитывая выше сказанное, возникла необходимость в создании методики диагностики амортизаторов, выявляющей дефекты типа «стук» и позволяющей диагностировать их в короткое время и, по возможности, без снятия амортизатора с автомобиля.

Большую часть в методах диагностики занимает виброакустическая диагностика. Встречающиеся при этом сигналы представляют собой случайные процессы, поэтому многие задачи выявления дефектов могут быть решены с привлечением мето-

дов теории случайных функций. Особый интерес представляют методы исследований, основанные на корреляционно-спектральном анализе случайных процессов. Знание корреляционных функций позволяет определить все представляющие практическую ценность физические характеристики амортизатора, что позволит выявить дефект.

Знание аппроксимативной модели КФ и численных значений ее параметров позволяет легко вычислить интервалы корреляции, спектральную плотность мощности, а также позволяет существенно сократить объем хранимой о корреляционной функции информации. Благодаря наличию аналитической связи между корреляционной функцией и спектральной плотностью мощности вопросы их аппроксимации оказываются взаимосвязанными.

Для определения состояния амортизатора необходима разработка адекватной математической модели функциональных вероятностных характеристик (ВКФ, СПМ и т.д.) виброакустических процессов. Модель должна диагностировать дефекты, возникающие в амортизаторе и оценивать амплитудные и фазовые соотношения.

Выявление дефектов амортизатора можно рассматривать как частные случаи общей задачи, состоящей в определении компонент вибрации, соответствующих различным дефектам и различным полосам частот. Для определения компонент вибрации достаточно установить два датчика акселерометра, один в верхней части амортизатора, на его штоке, другой - в нижней части на «юбке» корпуса амортизатора. Схема расположения датчиков приведена на рисунке 8.14. При этом функция взаимной корреляции между воздействием на «юбку» корпуса амортизатора $q(t)$ и воздействием на шток амортизатора $p(t)$, воспринимаемое акселерометром определяется как:

$$K_{qp}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T q(t)p(t-\tau)dt, \quad (8.7)$$

Данная система интересна тем, что при использовании двух датчиков акселерометров, расположенных в верхней и нижней части амортизатора, отпадает необходимость в разборке подвески и снятии амортизатора при этом измерительная система оценивает воздействия непосредственно на амортизатор автомобиля, что недоступно при стендовой диагностике.



Рисунок 8.14 – Структура измерительной системы

Исследования установили, что диагностика исправности амортизатора может быть произведена путем введения спектрального разложения для вибрационных процессов, измеренных на исправном и неисправном амортизаторе

$$S_{qp}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{qp}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (8.8)$$

Если значения регистрируются через равные промежутки времени взаимная корреляционная функция сигналов q и p , принимаемых на двух датчиках, определяется, как

$$K_{qp}(i\Delta\tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_j \circ p_{j+i}, \quad (8.9)$$

где N – число отсчетов принимаемого сигнала,

$\Delta\tau$ – интервал дискретизации.

Ширина полосы измерительного сигнала определяется, как

$$\Delta f = \frac{1}{\Delta\tau}. \quad (8.10)$$

Если интервал дискретизации измеряемых случайных процессов, следовательно и взаимной корреляционной функции – $\Delta\tau$, а количество отсчетов взаимной корреляционной функции – N' , интервал дискретизации спектральной плотности мощности будет определяться как $\frac{2\pi}{N'\Delta\tau}$.

Запись сигналов, вычисление взаимных спектров, передаточных функций являются стандартными функциями современных цифровых двухканальных анализаторов, основанных на использовании алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ). При этом от пользователя требуются навыки подбора параметров моделей, позволяющих оценить СПМ.

Альтернативой может служить метод, основанный на аппроксимативном анализе корреляционно-спектральных характеристик [111]. Этот метод позволяет облегчить оценку вероятностных характеристик измеряемого сигнала, а также автоматизировать подбор параметров модели. На первом этапе оценивается корреляционная функция, после чего находится аппроксимативная модель КФ. Знание аппроксимативной модели и численных значений ее параметров позволяет легко вычислять интервалы корреляции, спектральную плотность мощности, а также позволяет существенно сократить объем хранимой о корреляционной функции информации. При этом достигается автоматизация определения моделей, позволяющих оценить вероятностные характеристики измеренных сигналов, связанные с КФ.

Достаточно хороший результат оценки вероятностных характеристик можно получить, аппроксимируя взаимные корреляционные функции в ортогональных базисах экспоненциального типа (Лагерра, Лежандра, Дирихле).

В рамках проводимой в институте акустики машин при СГАУ научно-исследовательской работы проведены экспериментальные исследования по диагностике состояния амортизаторов на ООО «Самара-Лада» и ОАО «АвтоВАЗ».

Измерения проведены с помощью двухканальной системы сбора и обработки информации и двух датчиков акселерометров. Датчики крепятся на «юбке» корпуса амортизатора (рисунок 8.15 а) и на его штоке (рисунок 8.15 б).



а) Крепление на корпусе амортизатора



б) Крепление на штоке амортизатора

Рисунок 8.15 – Крепление датчика

Сигналы регистрируются с помощью цифрового магнитофона, встроенного в двухканальный анализатор спектра «Symphonie» компании 01dB-Steel.

Основные параметры анализатора

Таблица 8.7

Соединение с компьютером	PC CARD Type II (PCMCIA)
Питание	от компьютера
Размеры	85x35x220 мм
Масса	560 г
Запись сигналов	частота выборки 51200 Гц
АЦП	18 бит, сигма-дельта

Основные технические характеристики вибропреобразователя «AP2037»

Таблица 8.8

Наименование	Значение	Размерность
Осевая чувствительность ($\pm 10\%$)	10	мВ/г* ¹
Относительная поперечная чувствительность	<5	%
Максимальный удар (пиковое значение)	$\pm 5\,000$	г* ¹
Частотный диапазон (неравномерность ± 1 дБ)	0,5...15 000	Гц
Собственная частота в закрепленном состоянии	>45	кГц
Выходное сопротивление	<500	Ом
Питание: напряжение / ток	+(15...30) / (2...20)	В / мА
Масса	10	г

Измерения вибрационных процессов проводились при различных способах воздействия на подвеску автомобиля:

- наезд на препятствие, имитирующее импульсное воздействие (рис. 8.16);
- наезд на препятствие, имитирующее единичное воздействие (рис. 8.17);
- проезд по дороге с тяжёлым булыжником (рис. 8.18);
- проезд по дороге с импульсными препятствиями типа «стиральная доска» (рис. 8.19).

При испытаниях поддерживалась скорость движения автомобиля 10 км/ч.

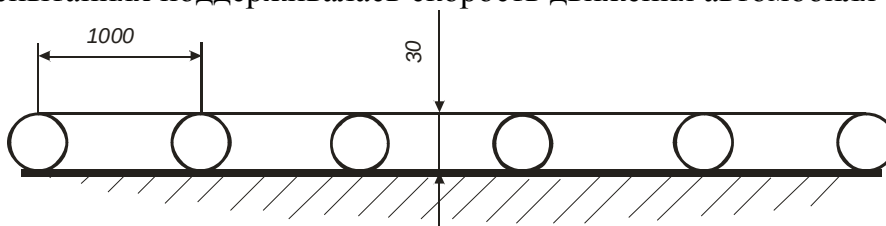


Рисунок 8.16 – Препятствие, имитирующее импульсное воздействие

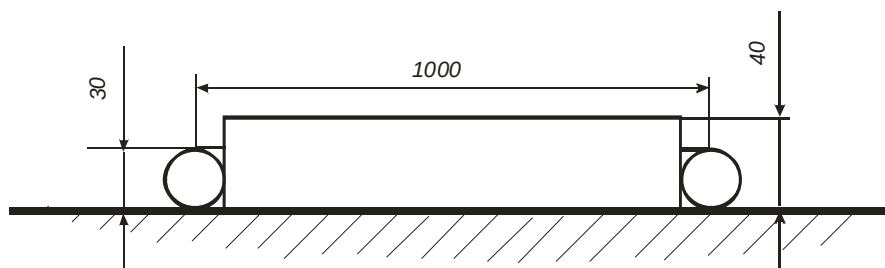


Рисунок 8.17 – Препятствие, имитирующее единичное воздействие



Рисунок 8.18 – Дорога с тяжёлым булыжником

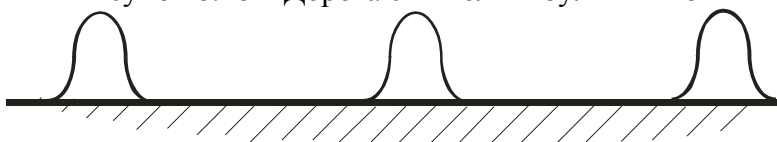
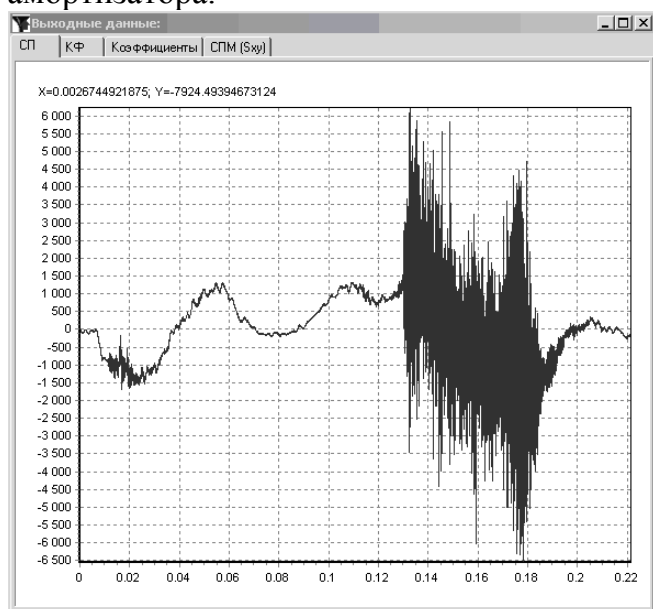
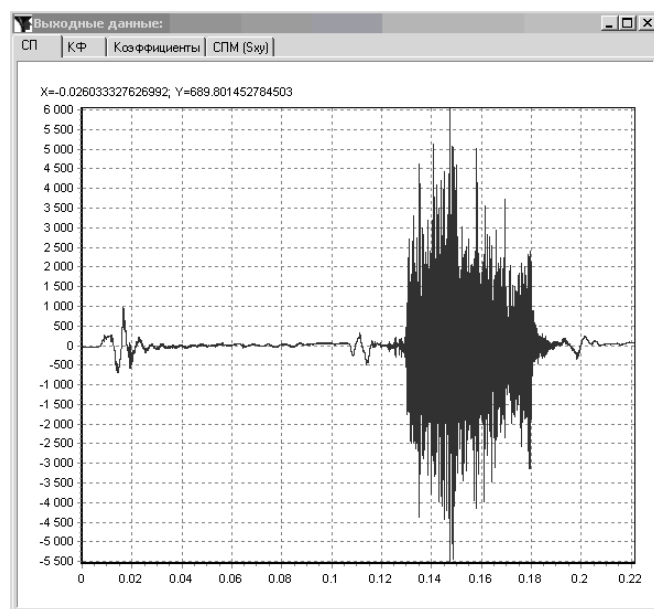


Рисунок 8.19 – Препятствие типа стиральная доска

При проведении экспериментов были измерены вибрации на штоке амортизатора и на его «юбке». На рис. 8.20 приведены вибрационные процессы исправного амортизатора.



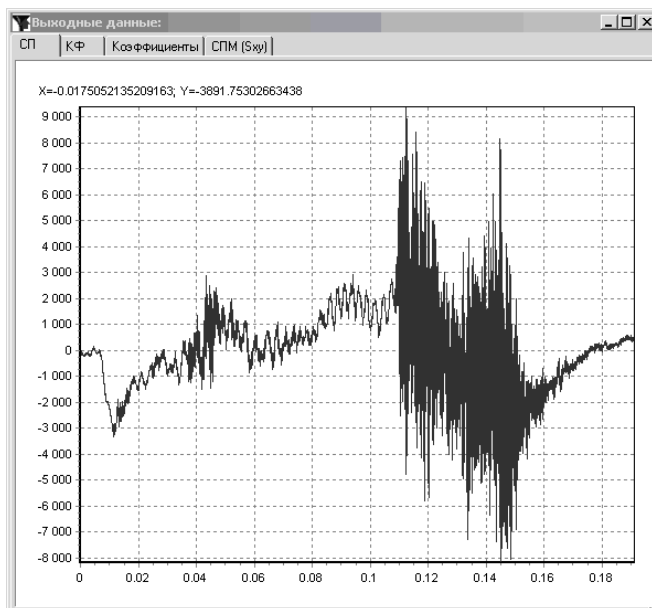
а) Вибрации на «юбке» амортизатора



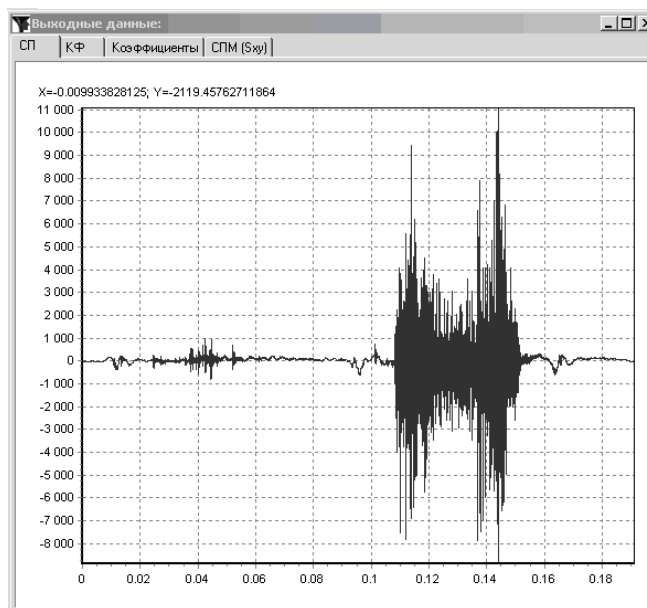
б) Вибрации на штоке амортизатора

Рисунок 8.20 – Вибрационные процессы исправного амортизатора

На рисунке 8.21 показаны процессы для амортизатора, имеющего дефекты.



а) Вибрации на «юбке» амортизатора



б) Вибрации на штоке амортизатора

Рисунок 8.21 – Вибрационные процессы амортизатора имеющего дефекты

С целью устранения шума вызванного креплением датчиков, в полезном сигнале перед обработкой полученных в результате измерений данных необходимо воспользоваться фильтром нижних частот с частотой среза 2500 Гц. При проведении экспериментов применялся цифровой фильтр нижних частот с конечной импульсной характеристикой, спроектированный с использованием окна Кайзера. Цифровой фильтр имеет следующие характеристики: частота среза – 2500 Гц, полоса перехода – 500 Гц, длина – 229. После этого из полученного сигнала устраняется тренд. В данной работе для устранения тренда применялись ортогональные полиномы Лежандра (10-го порядка) и Чебышева 1-ого рода (12-го порядка).

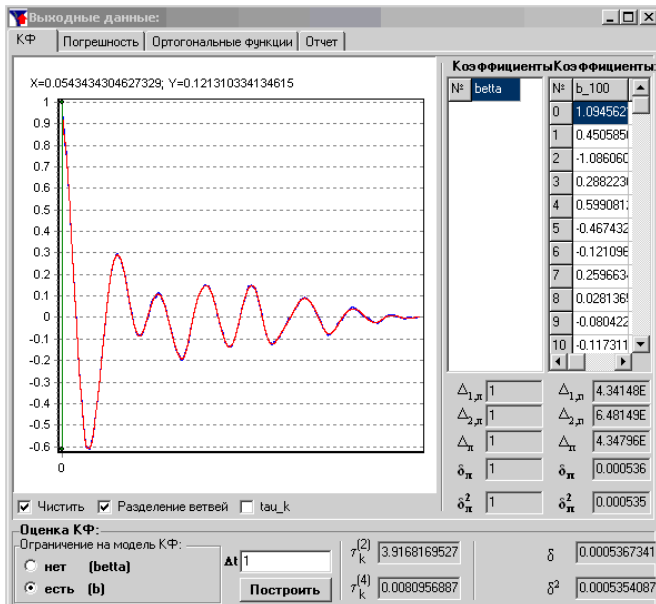
Алгоритм определения демпфирующей способности амортизатора, состоит в последовательной оценке автокорреляционных функций сигналов, и вычислении по ним спектральных плотностей мощности сигналов, поступающих от датчиков. На рисунке 8.22, 8.23 приведены вероятностные характеристики сигналов, полученные для исправных амортизаторов и амортизаторов, имеющих дефекты.

У исправного амортизатора наблюдается периодичность автокорреляционной функции, при этом в частотной области спектр имеет явно выраженный максимум на частоте 160 Гц.

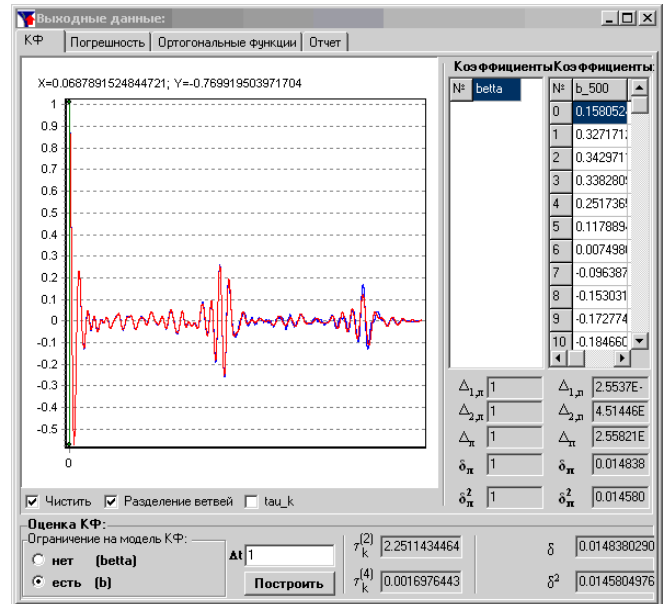
В случае неисправного амортизатора автокорреляционная функция сигнала теряет периодичность. При этом на спектральной плотности мощности появляются частоты, которые характеризуют неисправности амортизатора. По частотам можно попытаться определить физику дефекта, возникающего в амортизаторе. Так, например «стук» характеризуется низкими частотами.

Выявленные аналитические зависимости вибраций на входе и выходе могут быть подтверждены экспериментальными данными, полученными при различных способах воздействия на подвеску автомобиля. Вибрационные процессы на входе измерительной системы во всех режимах практически не изменяются. А пульсации на выходе существенно зависят от демпфирующей способности амортизатора.

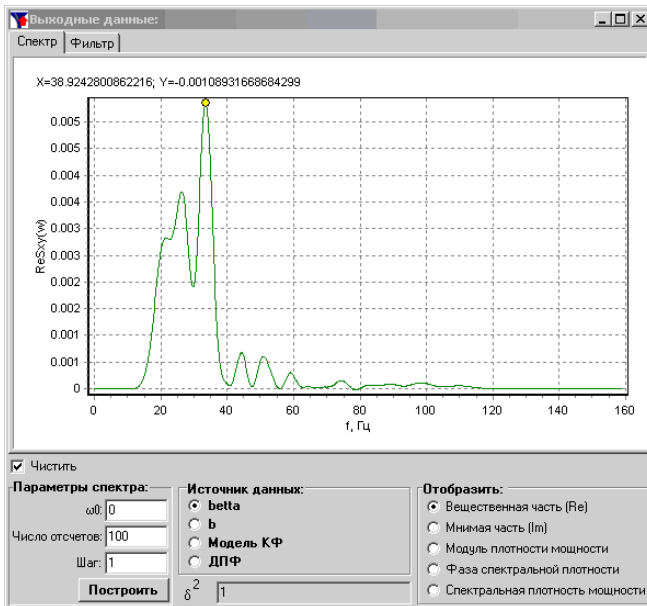
Дальнейшее исследование полученных взаимных спектральных плотностей мощности позволяет выявить дефекты амортизатора, при которых наиболее вероятны резонансные явления или возникновение «стука», описать моменты возникновения этих явлений и разработать методику их устранения.



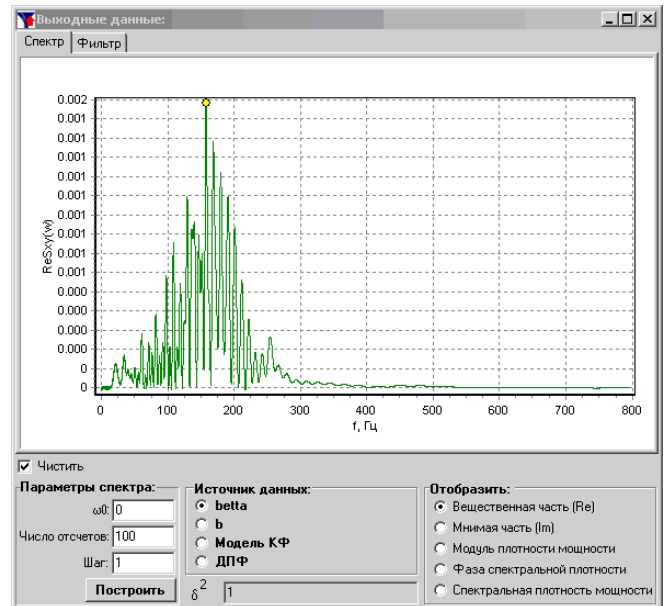
а) АКФ вибраций на «юбке» амортизатора



б) АКФ вибрации на штоке амортизатора

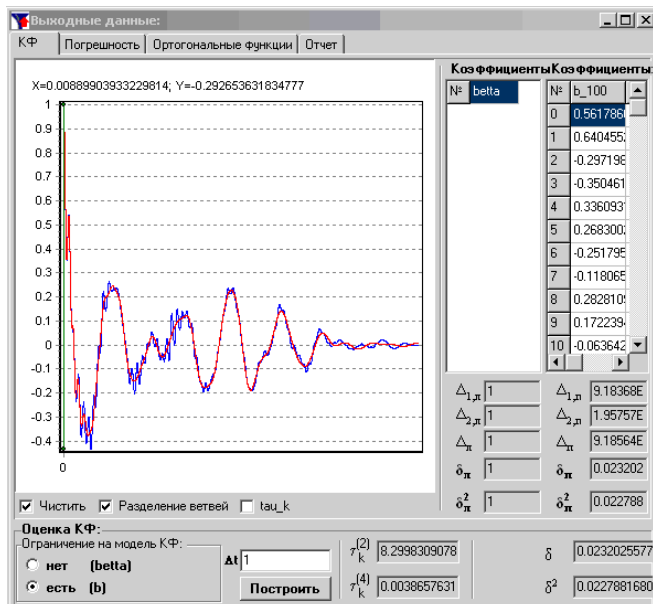


в) СПМ вибраций на «юбке» амортизатора

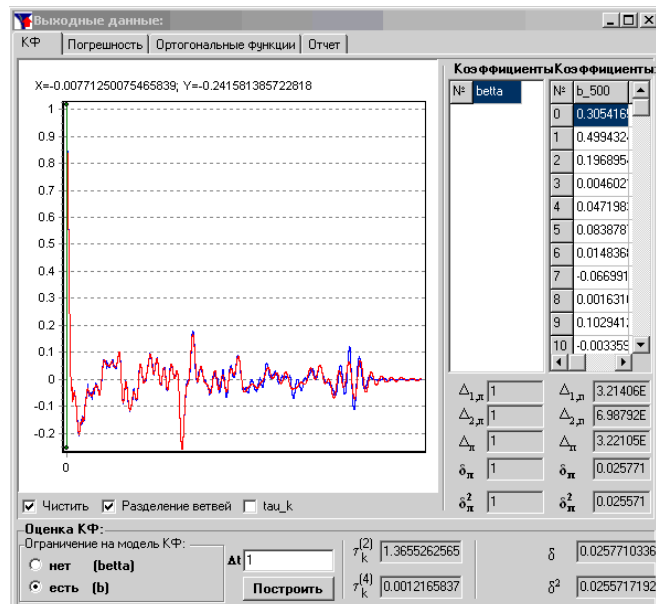


г) СПМ вибрации на штоке амортизатора

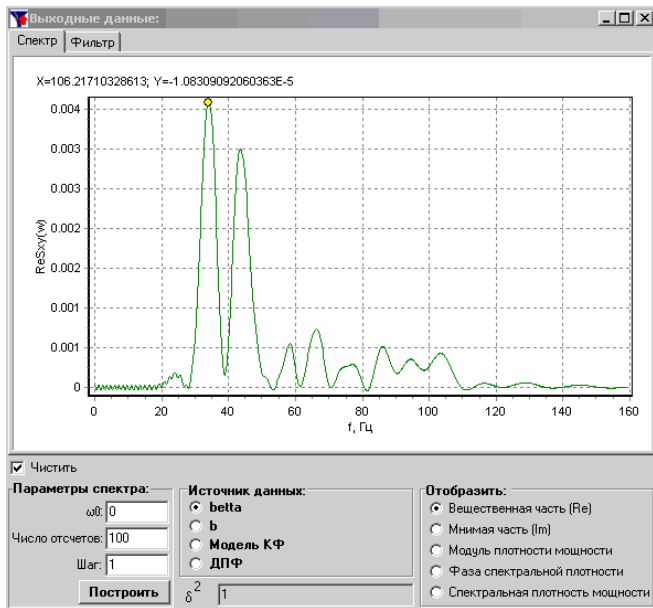
Рисунок 8.22 – Вероятностные характеристики вибрационных процессов исправного амортизатора



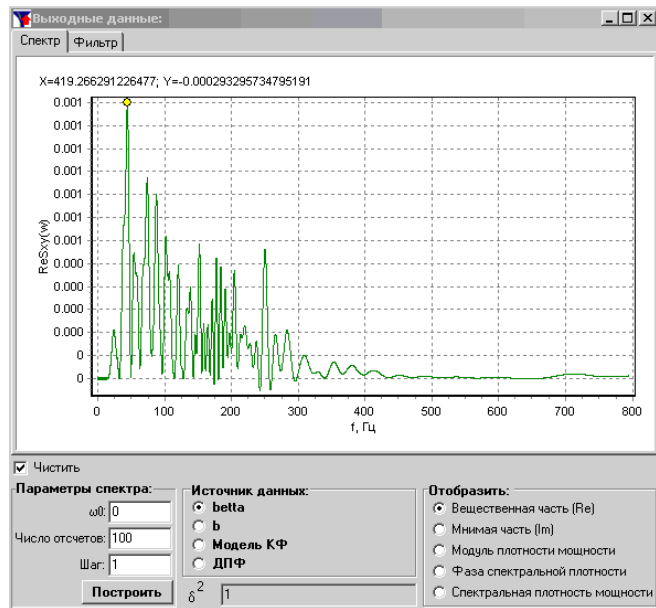
а) АКФ вибраций на «юбке» амортизатора



б) АКФ вибрации на штоке амортизатора



в) СПМ вибраций на «юбке» амортизатора



г) СПМ вибрации на штоке амортизатора

Рисунок 8.23 – Вероятностные характеристики вибрационных процессов амортизатора имеющего дефекты

8.4. Анализ электрических сигналов нейронов, нервов и мышц

Другое применение разработанные алгоритмы и программный комплекс нашли при исследовании нейронных механизмов регуляции дыхания, где обработке подвергалась первичная информация, полученная путем регистрации электрических сигналов нейронов, электрической активности нервов и мышц млекопитающих. [75, 92, 93, 94, 97].

У млекопитающих паттерн дыхания *in vivo* регулируется при участии нейронных структур пневмотоксического центра моста [92]. В исследованиях *in vitro* обнаруживается тормозное и возбуждающее модулирующее влияние структур моста на ритмгенерирующие процессы в дыхательном центре [97], физиологические механизмы которых остаются до настоящего времени не изученными.

Целью проведенных исследований являлось изучение роли NO в регуляции функционального влияния моста на процессы генерации дыхательного ритма и центральную хемочувствительность понтобульбоспинальных препаратов новорожденных крыс *in vitro*.

Исследование выполнено на 33 изолированных понтобульбоспинальных препаратах мозга новорожденных крыс в возрасте от первых секунд после рождения до 3 суток. Для приготовления бульбоспинального препарата новорожденных крысят наркотизировали эфиром. Препаровка осуществлялась способом, описанным ранее [75]. Ствол мозга пересекался на межколликкулярном уровне, а спинной мозг на уровне C_7 . Во время препаровки мозг орошали искусственной спинномозговой жидкостью с температурой $+7\text{ }^{\circ}\text{C}$. По ее окончании температура перфузата постепенно повышалась до $+24-25\text{ }^{\circ}\text{C}$, после чего препарат помещался вентральной поверхностью вверх в камеру, объемом 3 мл. Перфузию препарата в камере проводили со скоростью 3 мл/мин. В экспериментах использовали раствор искусственной спинномозговой жидкости следующего состава (ммоль/л): NaCl - 124.0; KCl - 5.0; CaCl_2 - 2.4; MgSO_4 - 1.3; NaHCO_3 - 26.0; KH_2PO_4 - 1.2; d -глюкоза - 30.0 [75]. Раствор насыщали смесью 5% CO_2 и 95% O_2 , pH раствора составлял 7.3-7.4.

В исследовании применяли донор NO нитропруссид натрия (SNP) в дозировке 100 мкМ/л, производства фирмы RBI, Natick, MA, USA.

Электрическая активность вентральных корешков сегментов $C_3 - C_5$ отводилась с помощью всасывающего электрода (внутренний диаметр 100 мкм) и через усилитель переменного тока подавалась на вход устройства сбора и обработки информации персонального компьютера, где записывалась на жесткий диск в файлы формата *.wav. В качестве устройства сбора и обработки информации использовалось устройство E14-440 производства ЗАО «Л-Кард», Россия.

При обработке нейрограмм измеряли продолжительность цикла респираторной активности, время и амплитуду респираторных разрядов. Спектральный анализ электрических разрядов проводили с использованием алгоритмов аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа. Для построения спектральной плотности мощности использовались ортогональные базисы Лагерра ($\alpha=4410$; $m=59$; $\delta^2=0.02537902$), Лежандра ($\alpha=57,2727$; $m=33$; $\delta^2=0,02077553$) и Дирихле ($\alpha=107,561$; $m=40$; $\delta^2=0,01584308$). Определение спектральных плотностей мощности производилось на основании данных, полученных по 10 последовательным респираторным разрядам. Полученные данные представлены в виде средних величин и

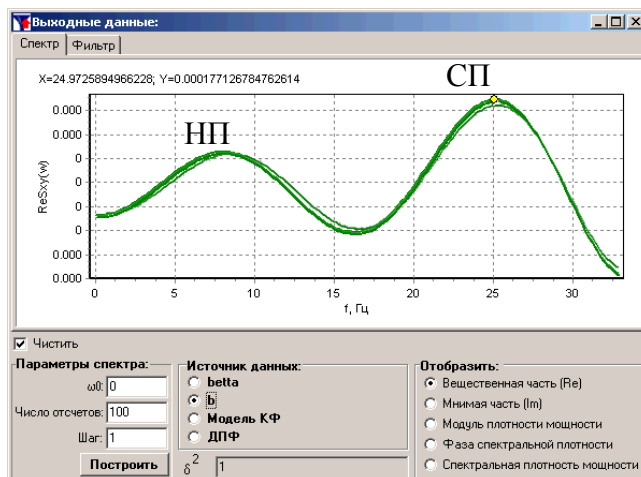
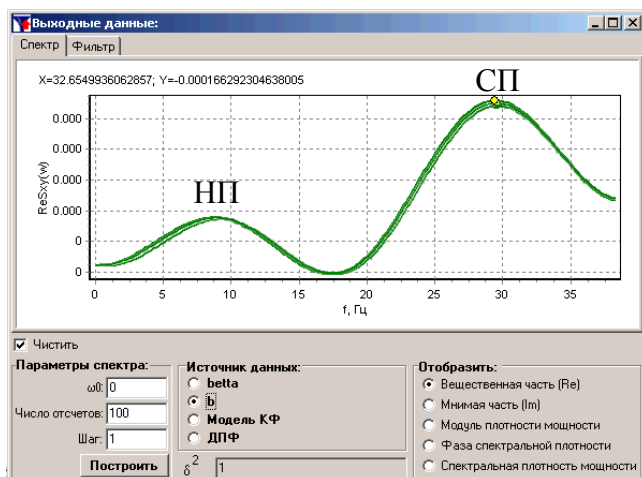
их значений. Анализ статистических различий производился с помощью t-теста Стьюдента для средних величин. Различия считались достоверными при $P < 0,05$.

При анализе результатов выявлено, что в первые секунды после отсечения моста от ПБСП частота генерации респираторных залпов возрастает от 2 - 6 до 10 - 20 в мин. В последующие 5 мин происходит постепенное снижение частоты генерации респираторных залпов с последующей стабилизацией на более высоком уровне, чем в фоне. Отсечение моста от ПБСП вызывает следующие изменения в генерации дыхательного ритма: на пятой минуте регистрации достоверно уменьшается длительность респираторных разрядов в корешках $C_3 - C_4$; в два раза увеличивается коэффициент их вариабельности; достоверно увеличивается отношение мощности низко- (0-10 Гц) и среднечастотного (11-50 Гц) пиков [75] без существенных сдвигов в их частотных параметрах (см. рис. 5.11).

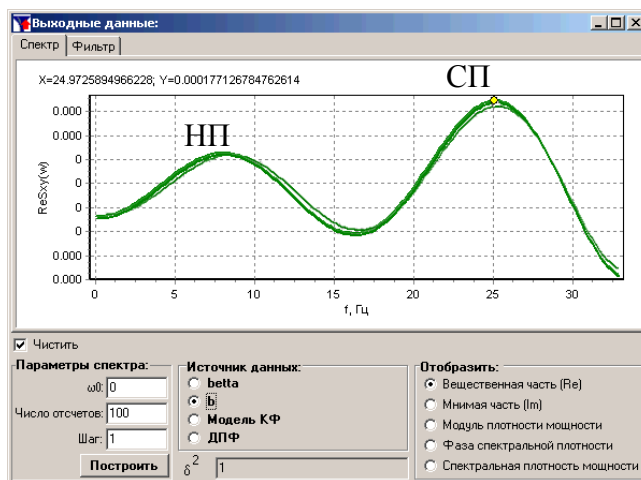
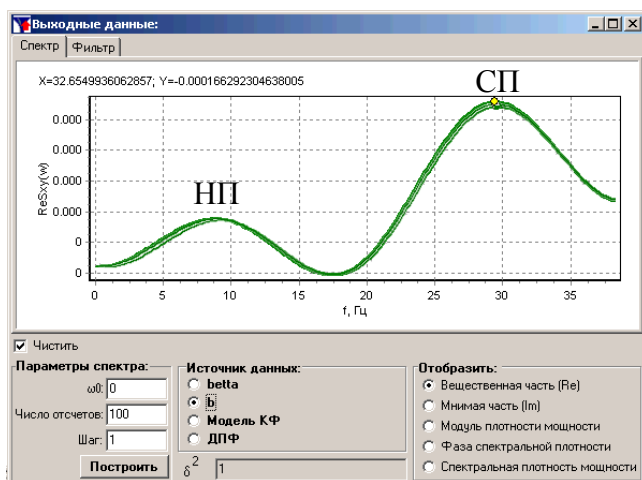
Полученные данные являются экспериментальным подтверждением факта существования феномена активации структур, генерирующих респираторные разряды, после отсечения структур моста от ПБСП [94]. Гипотетически предполагается, что возникновение данного феномена связано с устранением тонического ингибирующего влияния моста на генератор дыхательного ритма в продолговатом мозге [97]. Формирование данного механизма завершается в пренатальном периоде на поздних сроках гестации [93]. Экспериментальные данные, полученные как в условиях *in vitro*, так и *in vivo*, свидетельствуют о наличии в структурах моста различных нейронных и нейромедиаторных механизмов, посредством которых может реализовываться его ингибирующее влияние на ритмическую активность бульварного дыхательного центра.

Игибирующим влиянием на бульбарный дыхательный центр обладают такие структуры моста, как адренергическая область A5 [94], холинергические структуры ретикулярной формации [75], а также глутаматергические нейроны парабрахсиальных ядер [75]. Есть все основания предполагать, что пул нейронов, содержащих NO-синтазу, в различных отделах моста также участвует в модуляции респираторного понтобульбарного механизма дыхательного ритмогенеза. В пользу этого мнения свидетельствуют данные о том, что экзогенный и эндогенный NO вызывают уменьшение частоты генерации респираторных разрядов в ПБСП новорожденных крыс [75]. Предположение о вовлечении NO-ергических структур моста в контроль бульбарных респираторных нейронов подтверждается тем, что отсечение моста от ПБСП устраняет угнетающее действие NO на бульбарный генератор дыхательного ритма. В реализации ингибирующих эффектов NO могут вовлекаться холинергические механизмы ретикулярной формации моста, поскольку известно, что NO участвует в регуляции секреции ацетилхолина на уровне моста. Показано, что микроинъекции блокатора NO-синтазы (N^G -nitro-L-arginine) в структуры ретикулярной формации моста предотвращает вызываемую неостигмином депрессию дыхания [75].

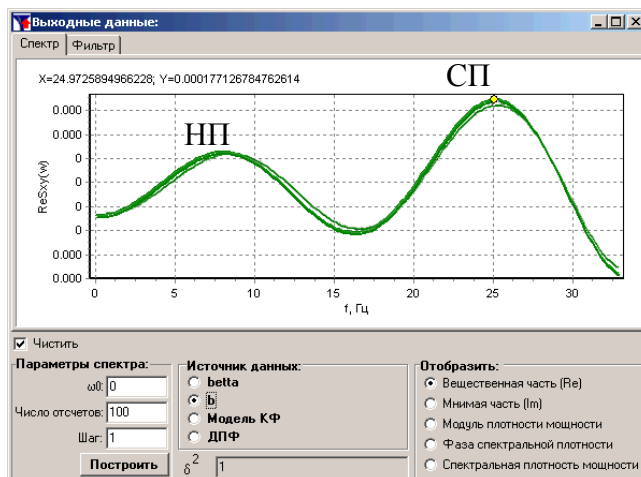
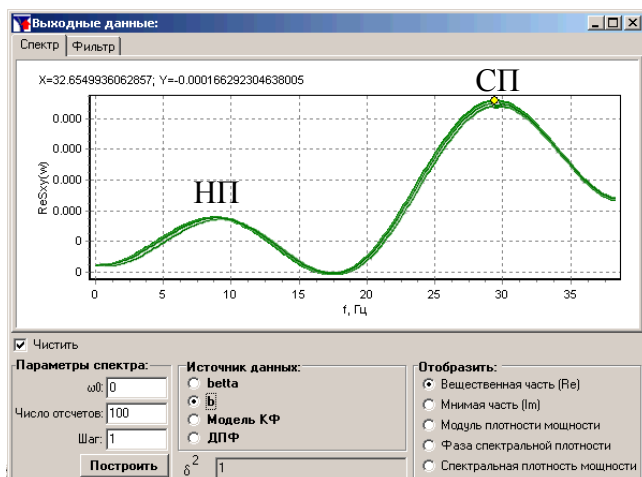
В процессе экспериментального исследования установлено, что NO модулирует тормозное влияние структур моста на генерацию респираторного ритма. При этом разрушение популяций нейронов моста приводит не просто к устранению блокирующего действия NO на вызываемое CO_2 увеличение частоты генерации респираторных разрядов, а инициирует инверсию эффекта NO в потенцирующий. Нельзя исключить, что этот механизм является одним из путей вовлечения NO-ергической системы ствола головного мозга в процессы потенцирования хемочувствительности бульбарного дыхательного центра.



а) СПМ, полученная в ортогональном базисе Лагерра



б) СПМ, полученная в ортогональном базисе Дирихле



в) СПМ, полученная в ортогональном базисе Дирихле

Рисунок 8.24 - Изменения респираторной активности в вентральном корешке С₄, возникающие после отсечения структур моста от понтобульбоспинального препарата

Наличие высокой степени синхронизации осцилляции различных моторных эфферентов дыхательного центра является важной функциональной особенностью центрального аппарата регуляции дыхания, позволившей выдвинуть гипотезу о существовании центрального генератора респираторных осцилляции, который к моменту рождения уже сформирован.

Представленные экспериментальные данные позволяют заключить о сложном взаимодействии респираторной нейрональной системы моста с элементами бульбарного дыхательного центра. Это взаимодействие реализуется лишь в условиях баланса активирующих и угнетающих влияний в каудальных отделах ствола головного мозга и характеризуется наличием понтобульбарного тонического ингибиторного влияния на генератор дыхательного ритма, и одновременно тонического возбуждающего влияния структур моста на генератор респираторных осцилляций. Одним из необходимых факторов модуляции центральной респираторной активности, участвующим в механизмах контроля за функциональной активностью дыхательного центра, является *NO*. В частности, *NO*-ергические механизмы моста играют ключевую роль в регуляции реакций дыхательного центра на CO_2 .

8.5. Методика и результаты обработки variability сердечного ритма

Вариабельность сердечного ритма (ВСР) - одно из фундаментальных физиологических свойств нашего организма. *Организма*, а не просто сердечно-сосудистой системы (ССС), и, тем более, - сердца. Она с большой точностью отражает состояние именно *регуляторных процессов* в нашем организме, и ее изучение потому доставляет действительно неocenимую для качественных диагностики, прогнозирования, лечения и предупреждения болезней информацию [1].

Существовавшая до последнего времени проблема отсутствия стандартов измерения variability сердечного ритма в современной клинике в значительной мере решена рекомендациями, разработанными и предложенными для практического применения в 1996 г. Рабочей Группой Европейского Общества Кардиологов и Северо-Американского Общества Стимуляции и Электрофизиологии [2].

Все множество методов исследования ВСР разделяется на три большие группы:

1. пространственно-временные и статистические методы;
2. пространственно-спектральные;
3. нелинейные;

Две первые группы методов должны использоваться в комплексе. Третья группа методов продолжает оставаться предметом научных изысканий и четкие указания по их применению пока дать трудно. Рабочей Группой [2] анализ ВСР рекомендуется проводить на двух временных промежутках - 5-минутном и 24-часовом. Их предлагают называть *кратковременным* и *долговременным*. В кратковременных измерениях показатели ВСР ниже, чем в долговременных.

Суть пространственно - временных методов вытекает из их названия. Анализу подвергается участок ЭКГ с происходящими из синусового узла комплексами. На выбранном участке определяются длины **RR-интервалов**. По этой последовательности на декартовой плоскости строят *интервалограмму*. В ней по оси абсцисс откладывают номера **RR-интервалов**, а по оси ординат - их длины. Интервалограмма дает хорошее представление об изменениях сердечного ритма и у специалиста со временем накапливается опыт качественной оценки ВСР на основе этого метода.

Мощным средством анализа изменения функции **RR(t)** является построение ее спектра **a(f)**, т.е. зависимости квадрата амплитуды от частоты. Обычно строят плотность мощности спектра (Power Spectrum Density - **PSD**), измеряемую в $msec^2/Гц$ в зависимости от частоты в Гц и получаемую делением **a(f)** на $1/T$.

Типичная кривая спектра RR-интервалов при разложении ЭКГ методом БПФ приведена на рисунке 1. Важными характеристиками спектра являются его мощность

и мощности его отдельных участков. Они представляют собой интегралы по частоте f от $a(f)$. Заметим, что мощность всего спектра равна дисперсии D RR-интервалов ЭКГ.

в) Спектральные компоненты сердечного ритма

При спектральном разложении суточной ЭКГ в ней можно выделить четыре характерные зоны *повышения амплитуд*:

1. Ultra Low Frequency (**ULF**) - зона сверх низких частот (0 - 0.0033 Гц)
2. Very Low Frequency (**VLF**) - зона очень низких частот (0.0033 - 0.05 Гц)
3. Low Frequency (**LF**) - зона низких частот (0.05 - 0.15 Гц)
4. High Frequency (**HF**) - зона высоких частот (0.15 - 0.5 Гц)

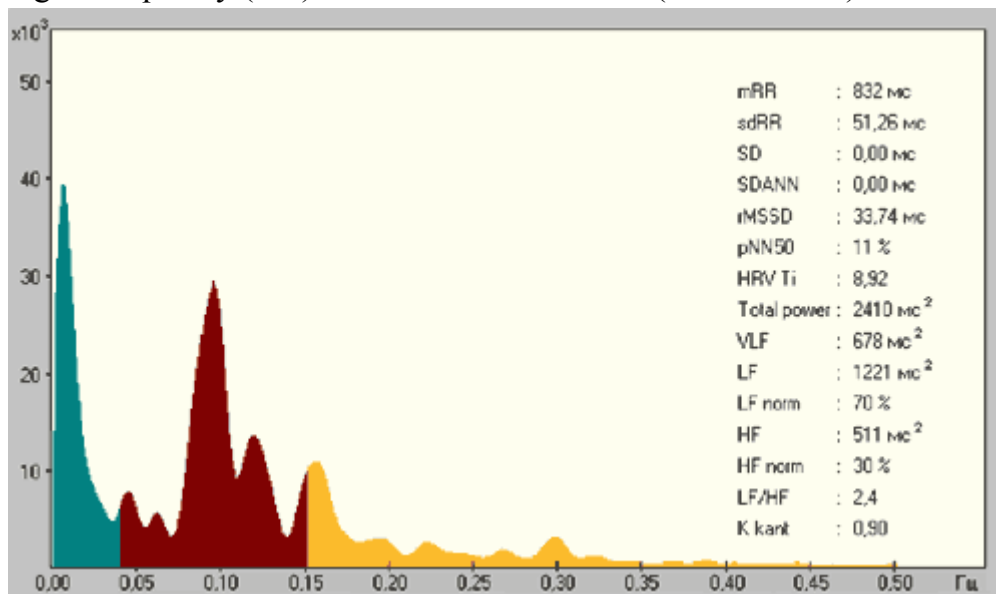


Рисунок 8.25 - Спектральная плотность мощности вариабельности сердечного ритма

Частотную зону **ULF** включают в анализ только при разложении в ряд *Фурье* результатов суточного мониторингирования ЭКГ. Она не связана с проявлениями быстрой регуляции и ее происхождение до сих пор неизвестно. Диагностически значимыми являются мощности остальных трех зон спектра, отвечающих 5-минутной ЭКГ, а также отношение мощности **LF** к мощности зоны **HF** и значение частоты, при которой амплитуда спектра имеет максимум в зоне **LF**.

Мощность **VLF** связана с *терморегуляцией* и *гуморальными* системами, такими, например, как ренин-ангиотензиновая. Мощности **LF** и **HF** определяются симпато-парасимпатическим балансом и *парасимпатической регуляцией*. На мощность **HF** существенным образом влияет *дыхательный* центр [3]. Непосредственная подчиненность дыхательного центра корковым функциям опосредует прямые центральные влияния на сердечный спектр.

Применяют различные способы оценки мощностей зон спектра: в абсолютных и относительных (при делении на мощность всего спектра) единицах [4, 5]. Эти различия могут быть причиной неправильной интерпретации результатов анализа, разумеется, если их не учитывать.

Чаще всего для спектрального анализа ВРС используется быстрое преобразование Фурье, так называемое БПФ. После обработки кардиоинтервалограммы образуется ряд спектральных характеристик, которые состоят из двух характеристик: частоты и амплитудного значения спектра. Частота выражается в герцах, амплитуда в миллисекундах.

Ряд значений спектра дискретный, то есть характеризует не все присущие сигналу частоты, только выборочные, что является слабым местом метода БПФ.

В соответствии с известным международным стандартом принято соглашение о разделении всего измеряемого диапазона на четыре: ультранизкие частоты ($<0,003$

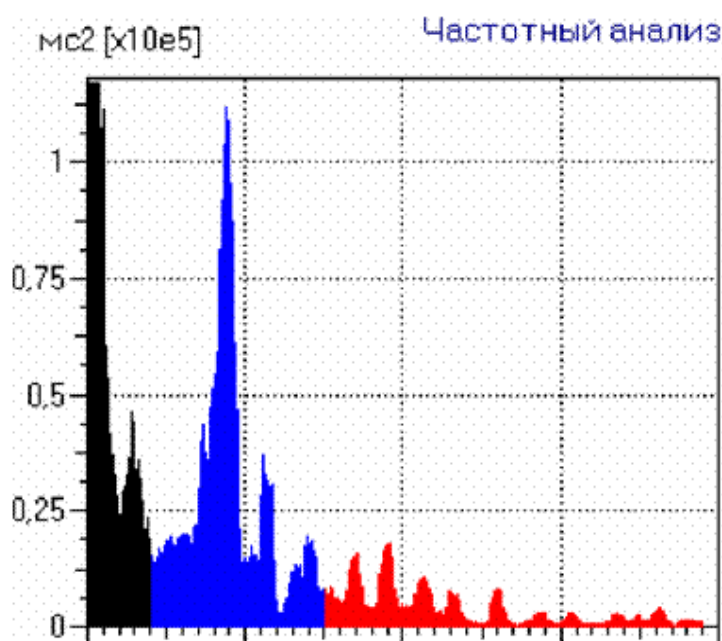


Рисунок 8.26 - Типичное представление спектрального анализа кардиоинтервалограммы.

Гц), очень низкие частоты ($0,003-0,04$ Гц), низкие частоты ($0,04-0,15$ Гц) и высокие частоты ($0,15-0,4$ Гц). Клиническое значение определено, в основном, для последних трех диапазонов. Типичный график спектрального анализа кардиоинтервалограммы представлен на рис. 8.26.

На этом графике выделены характеристики соответствующих трех исследуемых диапазонов. Для придания кривым графика благообразный вид иногда используют специальные виды обработки, которые позволяют получить более плавный вид огибающей кривой графика.

Метод БПФ по отношению к кардиоинтервалограмме имеет определенную математическую некорректность, т.к. по оси абсцисс откладывается не время а номер последующего кардиоинтервала. Эту неточность пытаются устранить, предлагая анализировать методом БПФ не кардиоинтервалограмму, а функцию – $x(t)$, которая строится из исходной кардиоинтервалограммы методом сплайновой кубической интерполяции, при квантовании функции $x(t)$ с шагом 250 мс [1].

Другим способом устранения указанного недостатка является применение теории неэквидистантных временных рядов (НВР) для оценки корреляционной функции variability сердечного ритма с последующим использованием аппроксимативного подхода для вычисления спектральной плотности мощности [6-8].

Предлагаемая методика обработки результатов экспериментальных исследований включает в себя следующие этапы:

1. Центрирование НВР с использованием ортогональных полиномов;
2. Оценку корреляционной функции НВР;
3. Аппроксимацию корреляционной функции НВР ортогональными функциями Лагерра;
4. Оценку спектральной плотности мощности НВР по параметрам ортогональных разложений корреляционной функции НВР в базисе Лагерра;

Рассмотрим подробно особенности реализации каждого этапа.

Этап 1

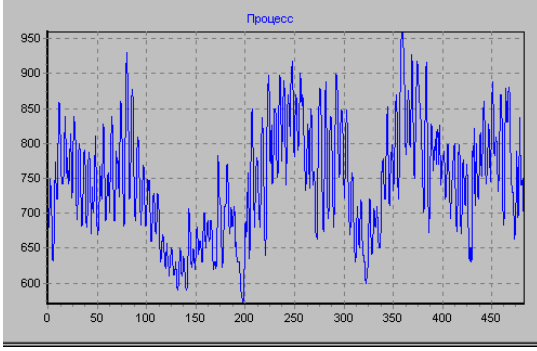


Рисунок 8.27 - Реализация НВР

Предположим, что в результате эксперимента получена совокупность НВР, j -ая реализация которого представлена на рис. 8.27:

$$\left[x_{ji}(t_{ji}) \right]_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, Mj}, \quad (8.11)$$

где x_{ji} - значение i -го RR-интервал;

t_{ji} - время измерения i -го RR-интервала.

Интервал дискретизации НВР является величиной случайной:

$$\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = random.$$

Длительность j -реализации ряда равна

$$T_j = \sum_{i=1}^{Mj-1} \Delta t_{ji}. \quad (8.12)$$

Отметим, что в неэквидистантном временном ряду значение второго индекса i не определяет время прихода существенного отсчёта, а определяет лишь его место в массивах данных, подлежащих обработке.

Учитывая, что временной ряд ВСР, как правило, представляет собой нестационарный временной ряд (см. рис. 8.27), его математическое ожидание является функцией времени $\hat{m}(t)$. Оценим математическое ожидание, воспользовавшись каким-либо ортогональным разложением:

Рассмотрим возможность аппроксимации функции произвольного вида ортогональными полиномами. Дана функция вида $f(x)$, определенная на интервале $[a, b]$. Она может быть разложена в абсолютно сходящийся ряд вида [9]:

$$f(t) = \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(t), \quad (8.13)$$

где β_k - коэффициенты Фурье, $\psi_k(x)$ - семейство базисных функций, ортонормированных на интервале $[a, b]$ с весом $\mu(x)$.

Коэффициенты разложения, обеспечивающие минимум среднеквадратической погрешности аппроксимации с весом $\mu(t)$:

$$\Delta = \int_a^b \left[f(t) - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(t) \right]^2 \mu(\tau) dt = \min, \quad (8.14)$$

определяются формулой:

$$\beta_k = \int_a^b f(t) \psi_k(t) \mu(\tau) dt. \quad (8.15)$$

В соответствии с определением центрированная реализация НВР будет равна:

$$x_{ji}(t_{ji}) = x_{ji}(t_{ji}) - \sum_{k=0}^m \beta_{jk} \psi_{jk}(t_{ji}). \quad (8.16)$$

На практике при решении задач статистической обработки данных наиболее часто применяются ортогональные полиномы Лежандра, Чебышева, Лагерра и Эрмита [9]. Какой же из ортогональных базисов лучше? Для ответа на этот вопрос на рисунках 8.28 -8.32 приведены результаты оценивания математических ожиданий одной и той же реализации НВР в различных ортогональных базисах: ортогональных на конечном (Лежандра, Чебышева), полубесконечном (Лагерра) и бесконечном (Эрмита) интервалах. На правых рисунках для удобства сравнения качества центрирования приведены результаты повторного центрирования в тех же ортогональных базисах.

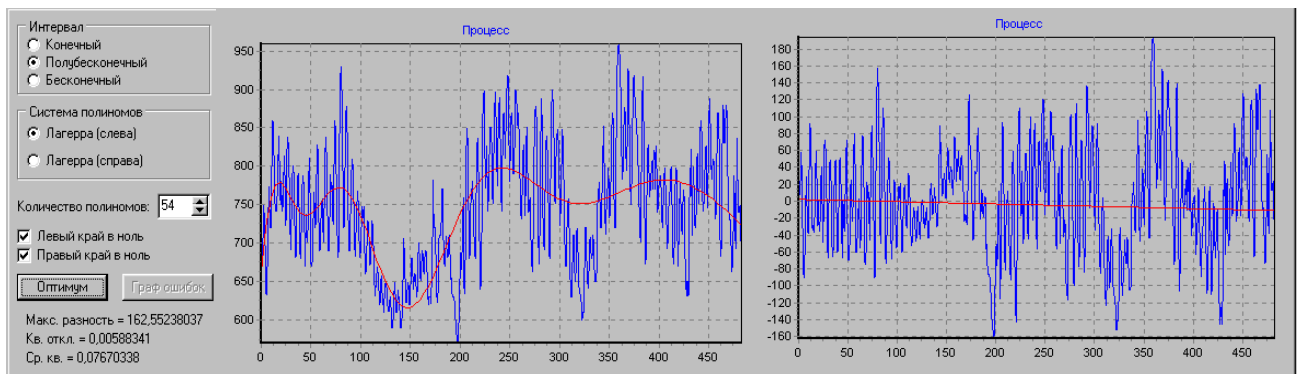


Рисунок 8.28 - Оценка математического ожидания в ортогональном базисе Лагерра 1

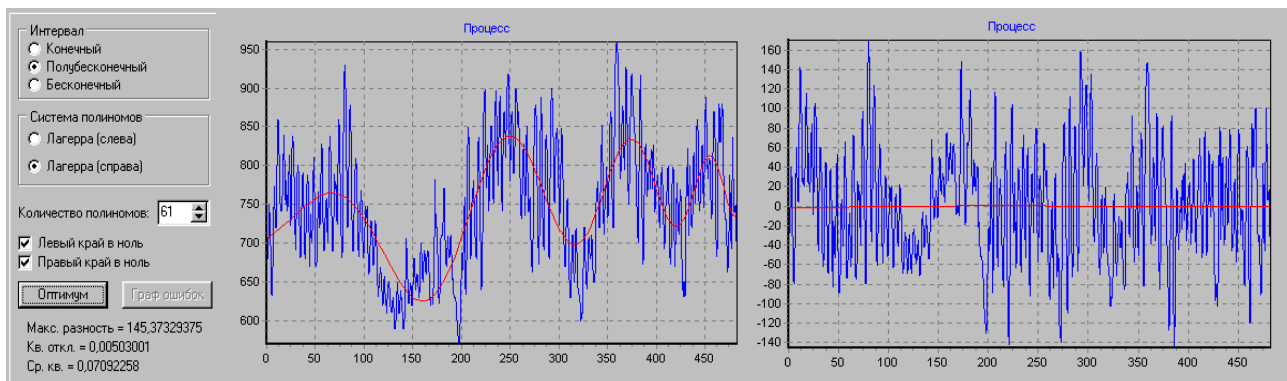


Рисунок 8.29 - Оценка математического ожидания в ортогональном базисе Лагерра 2

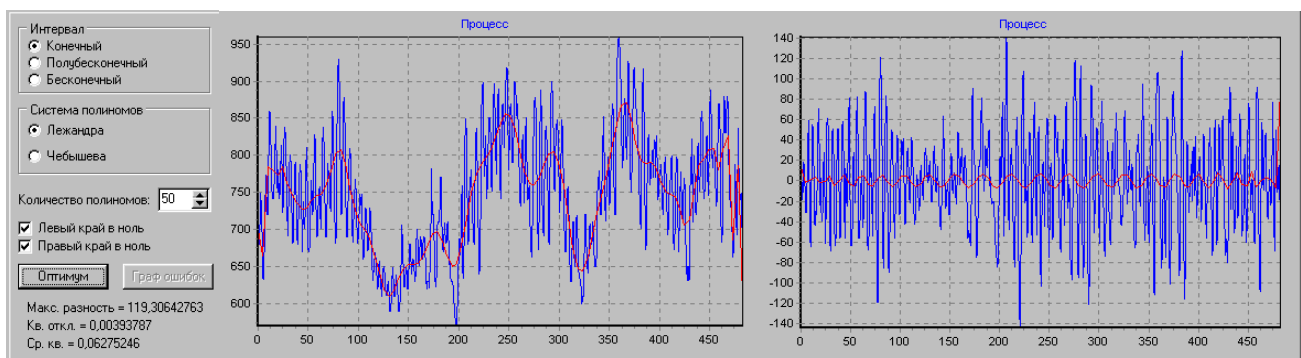


Рисунок 8.30 - Оценка математического ожидания в ортогональном базисе Лежандра

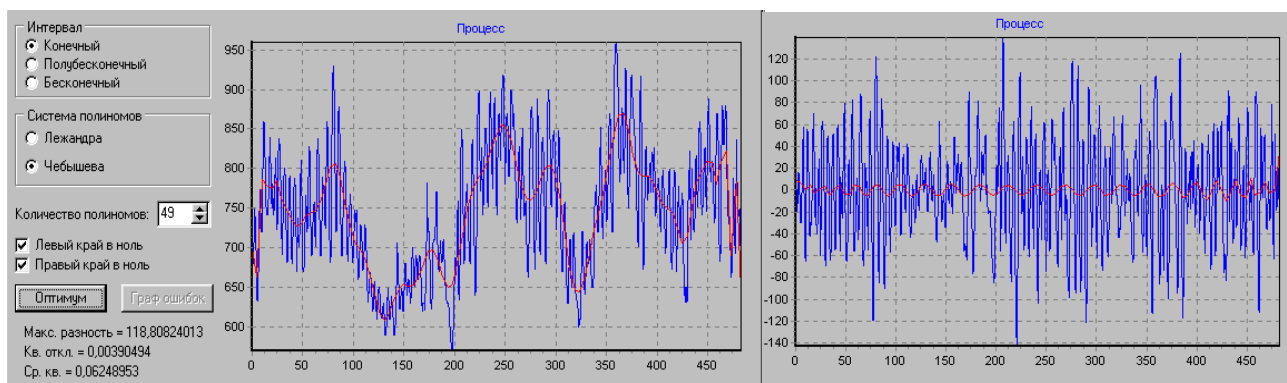


Рисунок 8.31 - Оценка математического ожидания в ортогональном базисе Чебышева

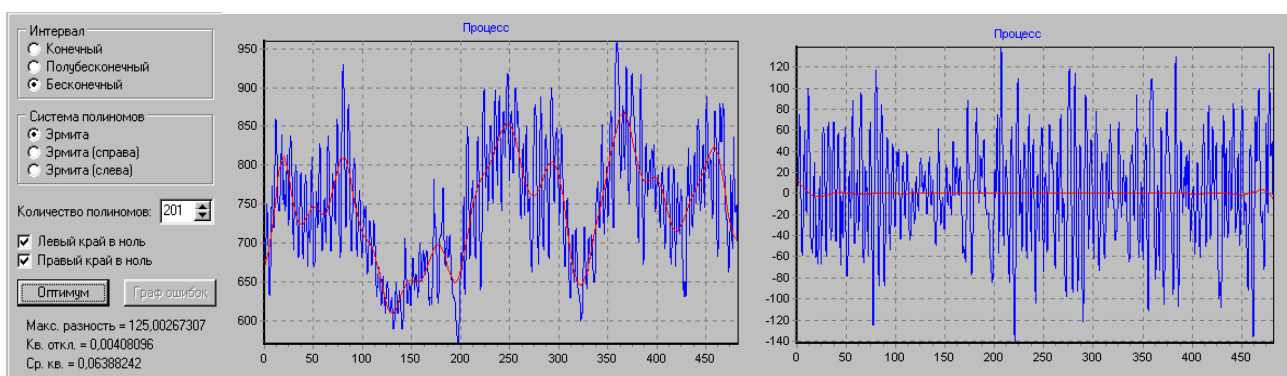


Рисунок 8.32 - Оценка математического ожидания в ортогональном базисе Эрмита

Анализ полученных результатов показывает:

1. Неоднозначность (по внешнему виду) результатов центрирования НВР в различных базисах;
2. Количество членов разложения ортогонального ряда модели математического ожидания НВР в различных ортогональных базисах сильно отличаются друг от друга: от 49 для ортогонального базиса Чебышева до 201 для ортогонального базиса Эрмита;
3. При повторном центрировании НВР с использованием ортогональных базисов Лежандра и Чебышева в модели математического ожидания возникают осцилляции;
4. Центрированная реализация НВР с использованием ортогонального базиса Лагерра по внешнему виду напоминает нестационарный процесс по математическому ожиданию;
5. Лучшие результаты следует ожидать при использовании ортогонального базиса Эрмита;
6. Окончательные выводы следует сделать после решения задачи построения модели спектральной плотности мощности в различных ортогональных базисах и сравнении полученных результатов.

Этап 2

Напомним, что в неэквидистантном временном ряду значение второго индекса i не определяет время прихода существенного отсчёта, а определяет лишь его место в массивах данных, подлежащих обработке. В связи с этим классические алгоритмы

корреляционно-спектрального анализа применять невозможно. Для решения задачи корреляционного анализа необходимо воспользоваться специальным алгоритмом [6]:

$$\hat{K}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} x_{ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{Mj} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}, \quad (8.17)$$

$$\text{где } \delta_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ если } \left[\frac{t_{j,i+s} - t_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J, \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

L – количество отсчетов НВР, определяемое из условия [6]

$P\left(\tau_{k\max} \leq \sum_{i=1}^L \Delta t_{ji} \cap \sum_{i=1}^{L-1} \Delta t_{ji} \leq \tau_{k\max}\right) \geq 1 - \delta$, т.е. сумма L интервалов должна с заданной доверительной вероятностью перекрывать максимальный интервал корреляции $\tau_{k\max}$; $\Delta\tau$ – интервал дискретизации аргумента корреляционной функции.

Результаты оценки корреляционных функций и интервальной корреляционной функций для рассмотренных центрированных реализаций НВР с помощью различных ортогональных полиномов приведены на рисунках 8.33 – 8.35.

Сравнительный анализ результатов оценки корреляционной функции НВР показывает, что наиболее близкие результаты получены при центрировании НВР с использованием ортогональных полиномов Лежандра, Чебышева и Эрмита, корреляционные функции, вычисленные для реализации центрированной НВР с использованием ортогональных полиномов Лагерра больше напоминают ковариационную, а не корреляционную функцию [11]. Интервальные корреляционные функции идентичны (метки времени для всех реализаций одни и те же).

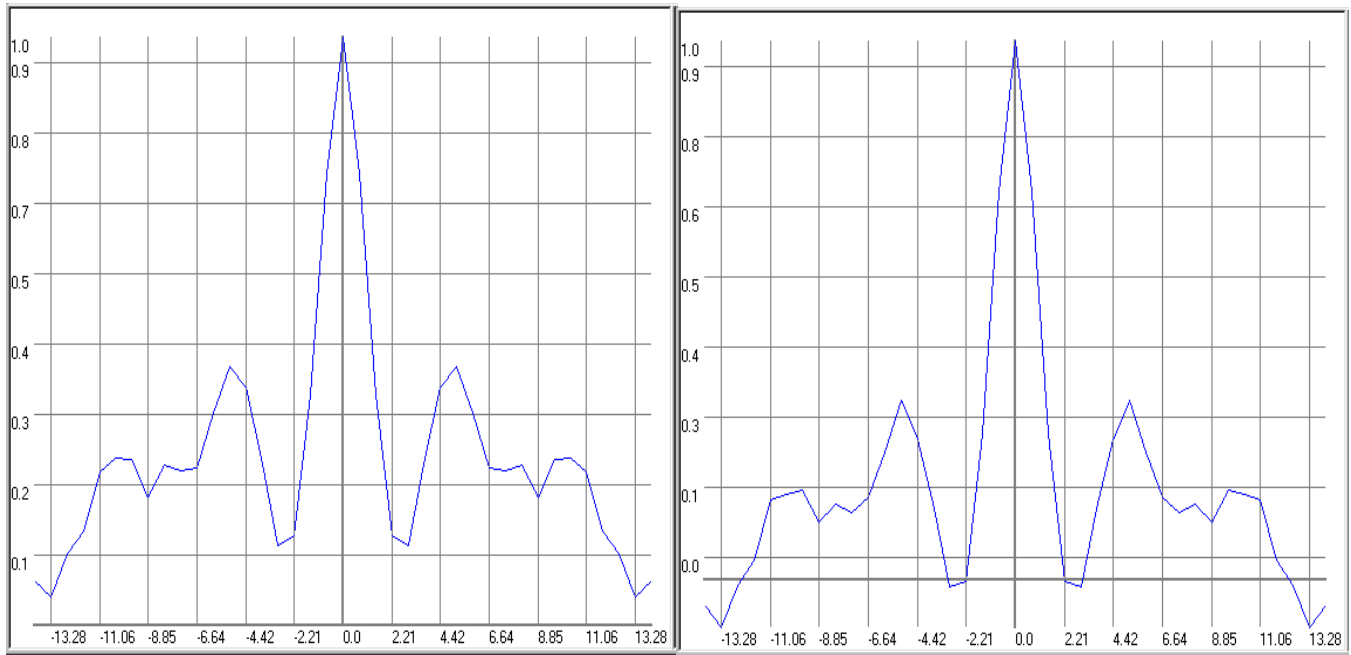


Рисунок 8.33 - Центрирование НВР с помощью полиномов Лагерра 1, 2

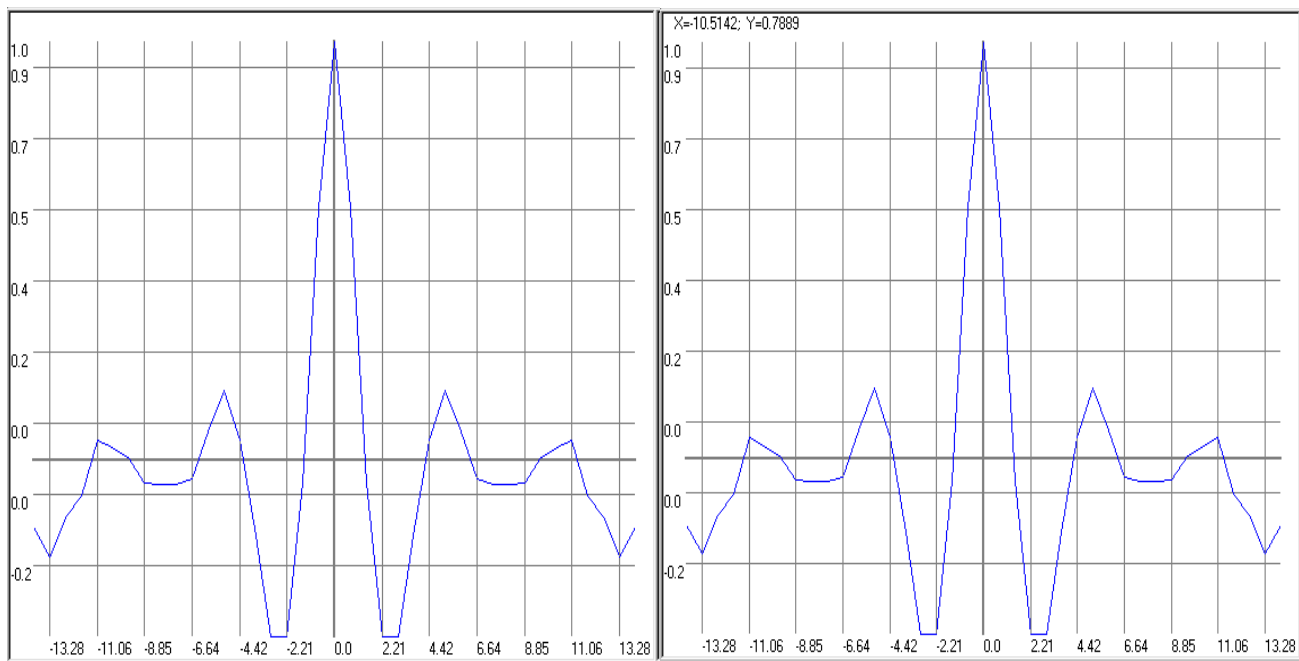


Рисунок 8.34 - Центрирование НВР с помощью полиномов Лежандра, Чебышева

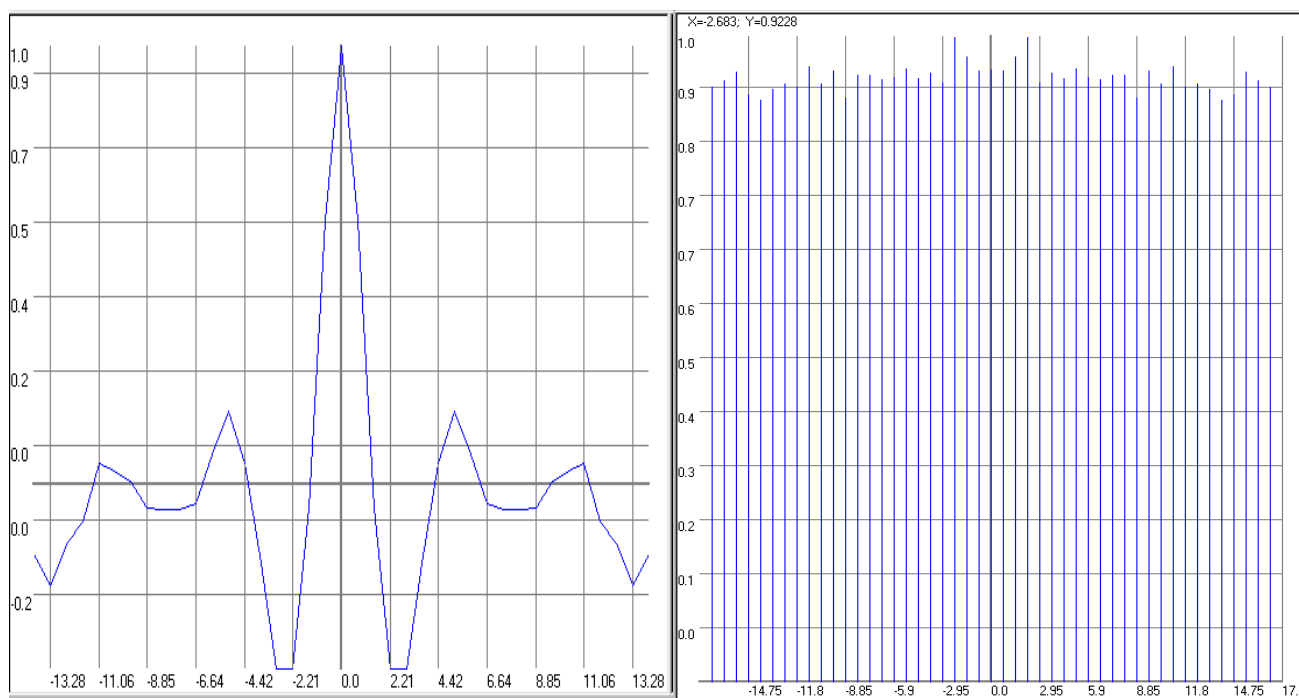


Рисунок 8.35 - Центрирование НВР с помощью полиномов Эрмита

Этап 3

В качестве модели корреляционной функции при отсутствии априорной информации о свойствах исследуемого процесса и виде корреляционной функции целесообразно применять разложение корреляционной функции в ряд по некоторой системе ортогональных функций (см. подраздел 4.3):

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k(\tau). \quad (8.18)$$

Результаты аппроксимации корреляционных функций реализаций НВР приведены на рис. 8.36 - 8.38.

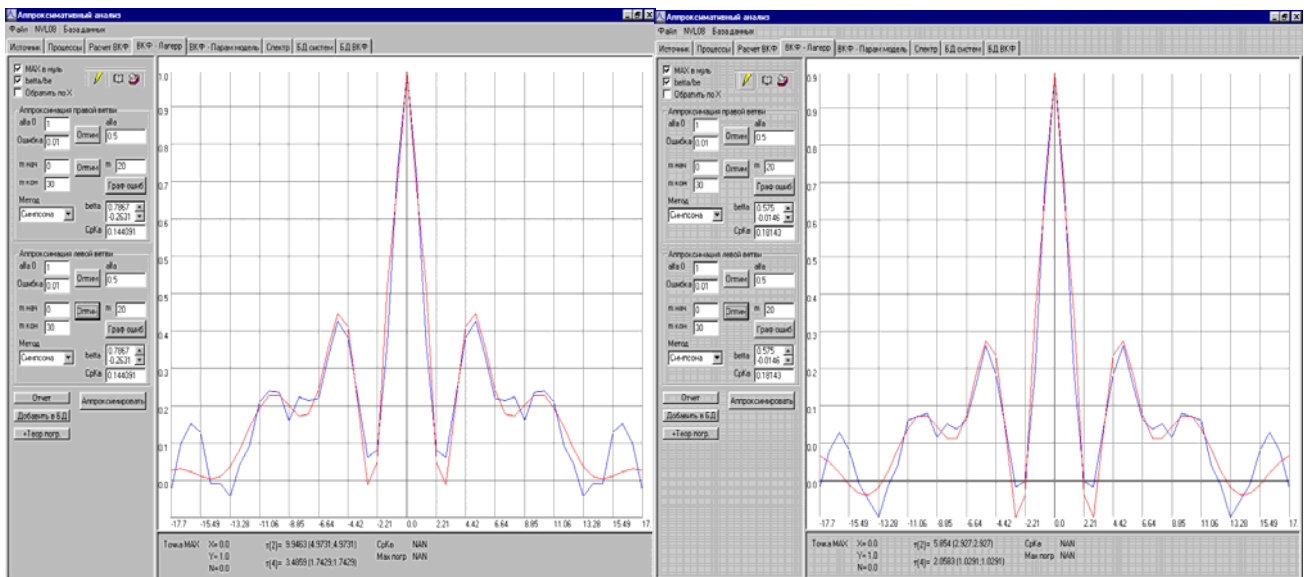


Рисунок 8.36 - Результаты аппроксимации корреляционной функции (Лагерра 1, 2)

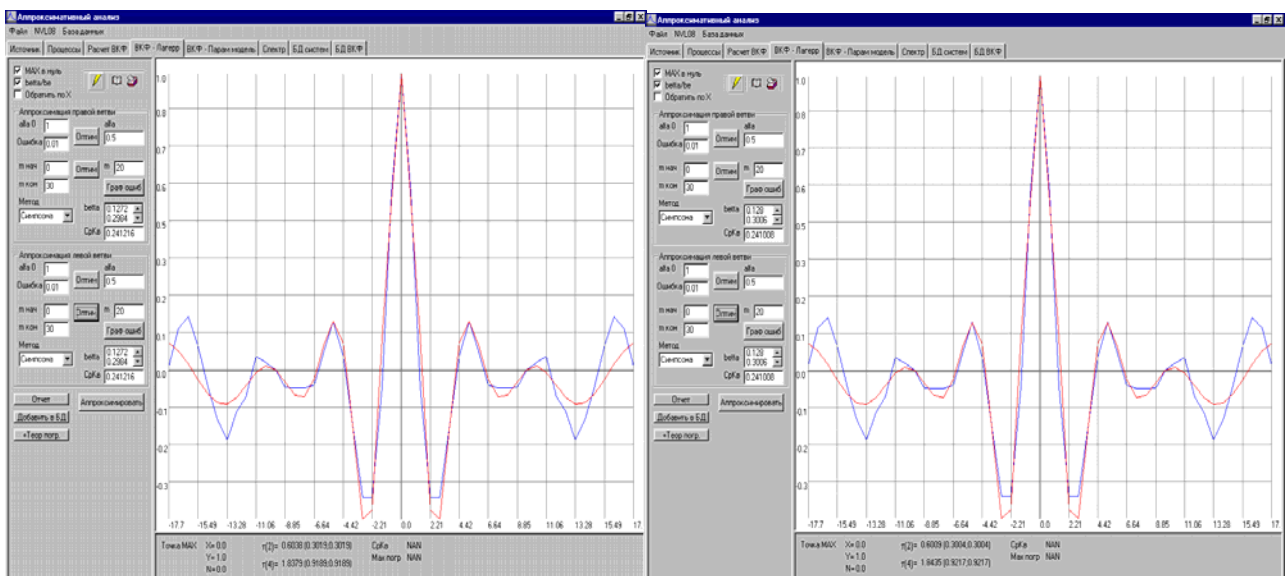


Рисунок 8.37 - Результаты аппроксимации корреляционной функции (Лежандра, Чебышева)

Сравнительный анализ результатов аппроксимации показывает, что:

1. наименьшая среднеквадратическая погрешность аппроксимации КФ наблюдается при обработке центрированной реализации НВР, полученной с помощью ортогональных полиномов Лагерра;
2. среднеквадратические погрешности аппроксимации КФ центрированных реализаций НВР, полученных с помощью ортогональных полиномов Лежандра, и Чебышева больше, чем при использовании полиномов Лагерра;
3. окончательный вывод о наилучшем ортогональном базисе, применяемом для центрирования НВР сделать нельзя.

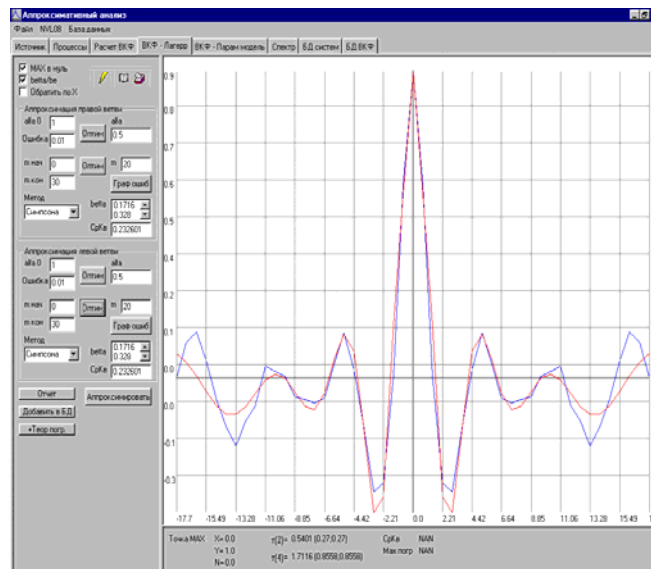


Рисунок 8.38 - Результаты аппроксимации корреляционной функции (Эрмита)

Этап 4

Определив параметры модели корреляционной функции $c_0, \dots, c_m, \dots, \alpha$ оценим спектральную плотность мощности случайного процесса (см. подраздел 4.10):

$$S_a(\omega) = \frac{2 \cos \varphi}{\alpha \pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \cos(2k+1)\varphi, \quad (8.19)$$

где $\varphi = \arctg \frac{2\omega}{\alpha}$.

Приведем результаты аппроксимации спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Лагерра, вычисленными по параметрам моделей корреляционных функций (см. рис. 8.39 – 8.40, в скобках указан полином центрирования).

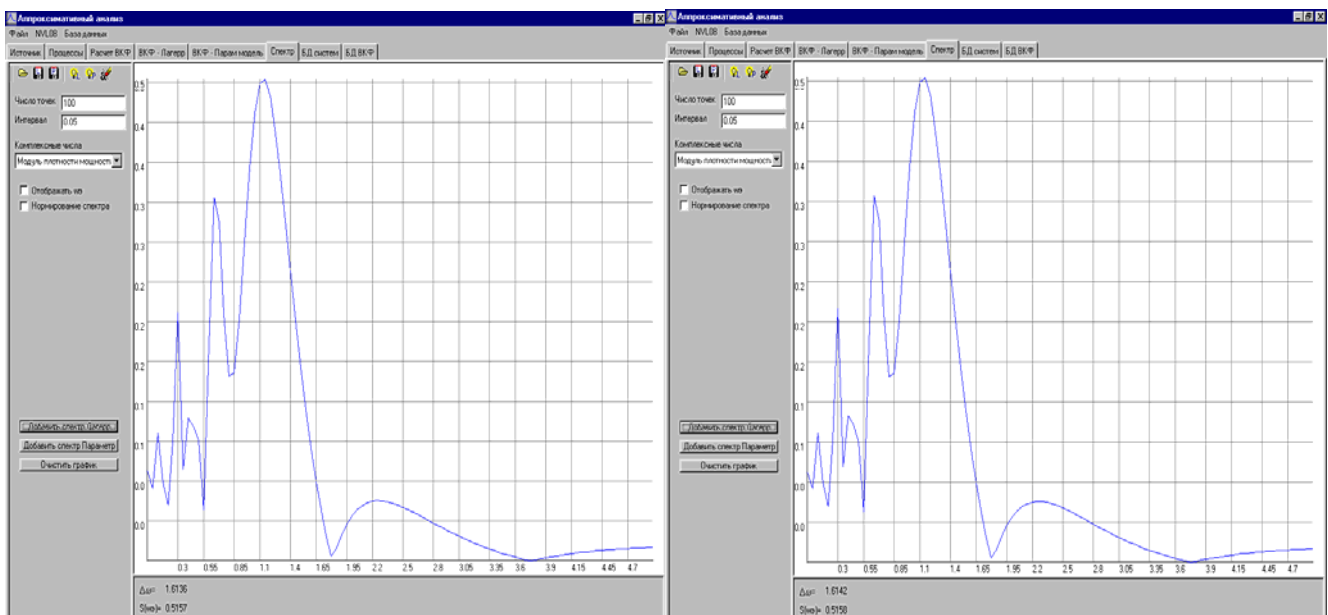


Рисунок 8.39 - Результаты аппроксимации спектральной плотности мощности (Лежандра, Чебышева)

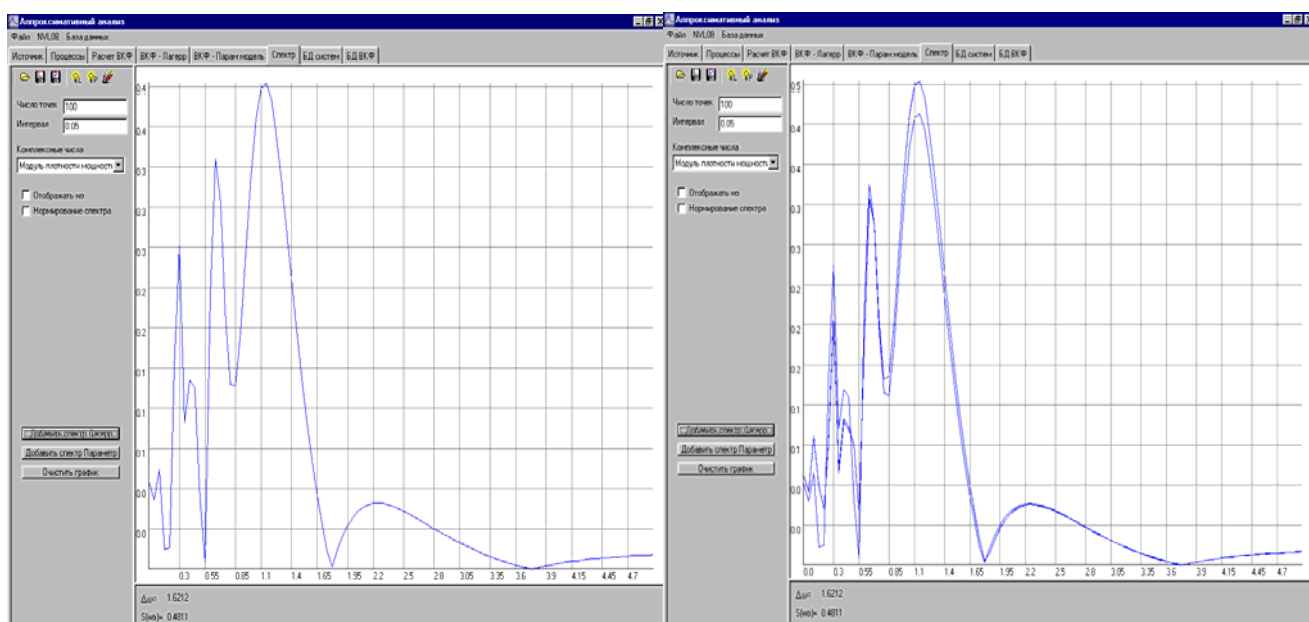


Рисунок 8.40 - Результаты аппроксимации спектральной плотности мощности (Эрмита и сравнительного анализа Лежандра, Чебышева, Эрмита)

Анализ полученных результатов аппроксимации спектральных плотностей мощности показывает, что:

1. в моделях спектральной плотности мощности при использовании для центрирования НВР ортогональных функций Лагерра, как и следовало ожидать, присутствуют нулевые частоты, т. е. максимум спектральной плотности мощности наблюдается на нулевой частоте;
2. от этого недостатка свободны результаты, представленные на рис. 8.40;
3. модели спектральных плотностей мощности при использовании для центрирования НВР ортогональных полиномов Лежандра, Чебышева и Эрмита близки (см. рис. 8.40);

Таким образом, с учётом результатов повторного центрирования, следует вывод, что при центрировании НВР наиболее целесообразно примерять ортогональные полиномы Эрмита.

Приведем результаты оценки спектральных плотностей мощности при обследовании больного в различных стандартных положениях: 1, 2- положение лежа (фон), 3- сидя, 4- проба "6 дыханий в мин", 5- стоя (см. рис. 8.41 – 8.42). Характеристики неэквилибрированных временных рядов для рассматриваемых случаев приведены в таблице 8.9.

Результаты исследований

Таблица 8.9

	лежа-1	лежа-2	сидя	6 дыханий в минуту	стоя
N	655	621	680	812	781
T сек	482.55	454.9	450.71	559.702	473.83
Δt_0 сек	0.7378	0.7337	0.6637	0.6901	0.6074

Так как рассматриваемые НВР являются нестационарными по математическому ожиданию, при центрировании реализации НВР качестве модели математического ожидания НВР примем модель ортогонального разложения с использованием полиномов Эрмита.

Отметим, что для первого положения (лежа 1) спектральная плотность мощности приведена на рис. 8.40.

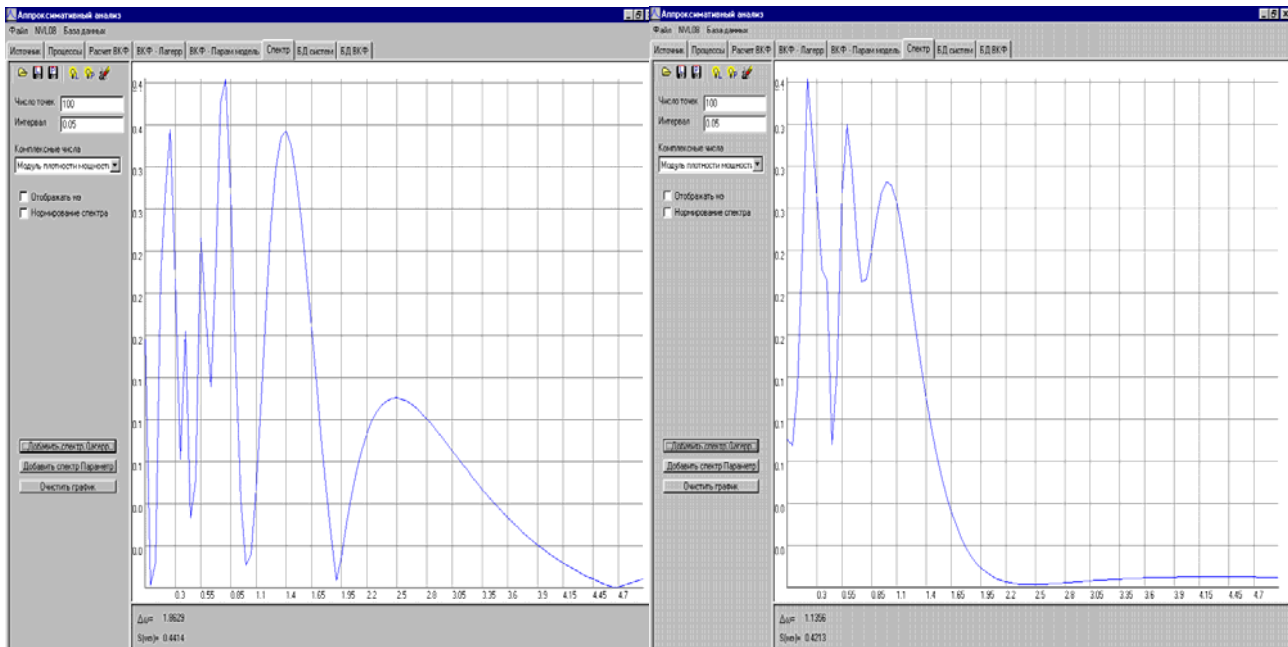


Рисунок 8.41 - Результаты аппроксимации спектральной плотности мощности (положения лежа 2, сидя)

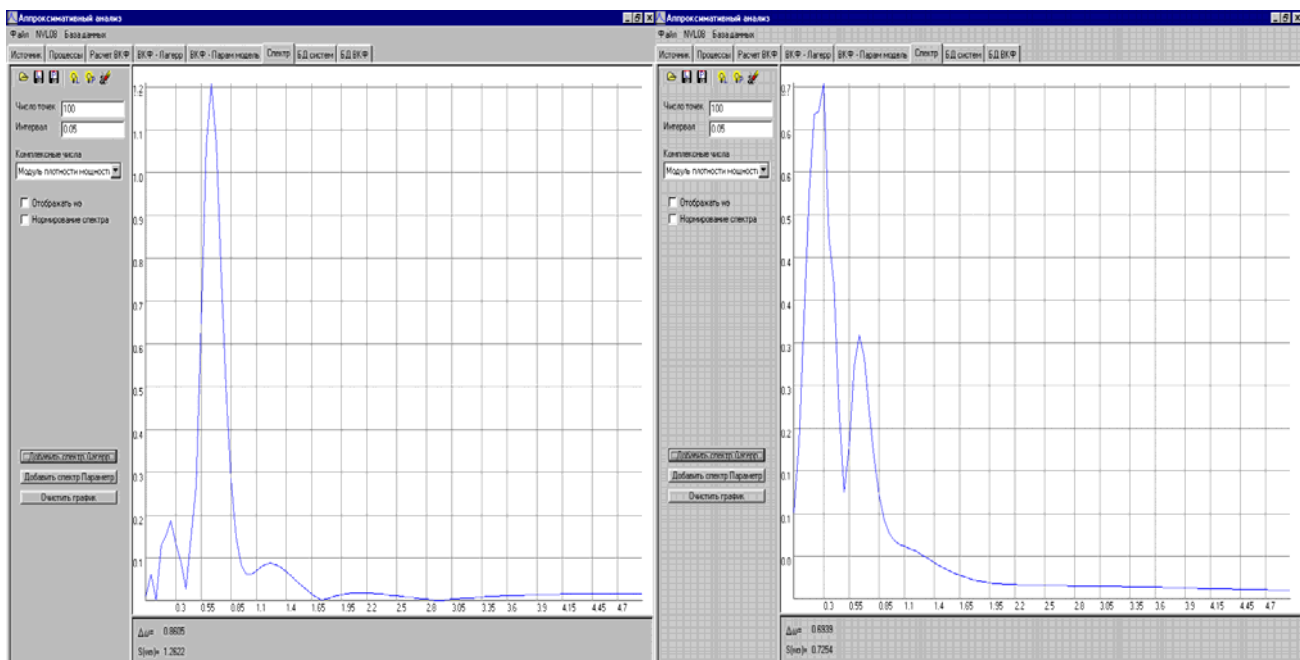


Рисунок 8.42 - Результаты аппроксимации спектральной плотности мощности (положения – 6 вдохов в минуту, стоя)

8.6. Аппроксимация импульсных и частотных характеристик ортогональными функциями Лагерра

Импульсные и частотные характеристики являются одним из основных средств описания динамических свойств линейных систем с постоянными параметрами. Получение аналитических выражения для этих характеристик позволяет определить основные особенности и соотношения, описывающие характер динамических систем, например, после получения аналитического выражения для частотной характеристики фильтра появляется возможность моделирования преобразования случайного или синусоидального сигнала. Существует широкое разнообразие методов интерполяции и аппроксимации, выбор наилучшего среди которых может быть осуществлен, например, после идентификации характеристики. В случае, когда идентификация трудоемка или невозможна по каким-либо причинам, в качестве аппроксимирующих выражений можно предложить, например, ортогональные функции Лагерра.

В разработанной на кафедре информационных систем и технологий СГАУ автоматизированной системе аппроксимативного анализа используются оригинальные методы аппроксимации функций параметрическими моделями – функциями заданного вида и ортогональными функциями Лагерра. С помощью разработанных алгоритмов производится аппроксимация импульсных и частотных характеристик фильтров. При этом получение аналитического выражения для частотной характеристики возможно двумя способами. Первый основан на аппроксимации импульсной характеристики фильтра и построении частотной характеристики по параметрам аппроксимирующего выражения, второй – на непосредственной аппроксимации вещественной и мнимой составляющей частотной характеристики.

При аппроксимации импульсных характеристик фильтров ортогональными функциями Лагерра используется следующий подход: выделяется максимум и функция разбивается на две ветви. После подбора оптимальных параметров импульсная характеристика может быть представлена в виде:

$$h(\tau) = A_m \left(\sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} 1(\tau - \tau_m) L_k(\tau - \tau_m, \alpha_n) + \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,l} 1(\tau_m - \tau) L_k(\tau_m - \tau, \alpha_l) \right), \quad (8.20)$$

где A_m – значение максимума импульсной характеристики,

$$\beta_{k,n} = \alpha_n \int_0^{\infty} h(\tau) L_k(\tau, \alpha_n) d\tau, \quad (8.21)$$

$$\beta_{k,l} = \alpha_l \int_0^{\infty} h(\tau) L_k(\tau, \alpha_l) d\tau. \quad (8.22)$$

При этом критерием выбора параметров аппроксимирующего выражения служит минимум квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[h(\tau) - A_m \left(\sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} 1(\tau - \tau_m) L_k(\tau - \tau_m, \alpha_n) + \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,l} 1(\tau_m - \tau) L_k(\tau_m - \tau, \alpha_l) \right) \right]^2 d\tau. \quad (8.23)$$

Коэффициенты разложения определяются, исходя из требований к минимуму этой погрешности

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = -(m+1) \left(\frac{1}{\alpha_n^2} \beta_{m,n} \beta_{m+1,n} + \frac{1}{\alpha_l^2} \beta_{m,l} \beta_{m+1,l} \right). \quad (8.24)$$

Для повышения точности рекомендуется вместо коэффициентов $\beta_{k,n}$ $\beta_{k,l}$ использовать коэффициенты $b_{k,n}$ $b_{k,l}$, определяемые в виде:

$$b_{k,n(l)} = \beta_{k,n(l)} + \frac{1 - \sum_{k=0}^{m_{n(l)}} \beta_{k,n(l)}}{m_{n(l)} + 1}. \quad (8.25)$$

Отметим, что для ряда функций погрешность может быть незначительно уменьшена при отступлении от определенных в автоматизированной системе значений, что связано с увеличением числа членов разложения – параметров ортогональной функции Лагерра.

В данной работе приведем пример для импульсной характеристики фильтра (см. рис. 8.43)

$$h(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \alpha \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}}{\omega_0} e^{-\alpha\tau} \sin \omega_0 \tau. \quad (8.26)$$

Отметим, что при уменьшении интервала дискретизации импульсной характеристики удастся улучшить результаты аппроксимации.

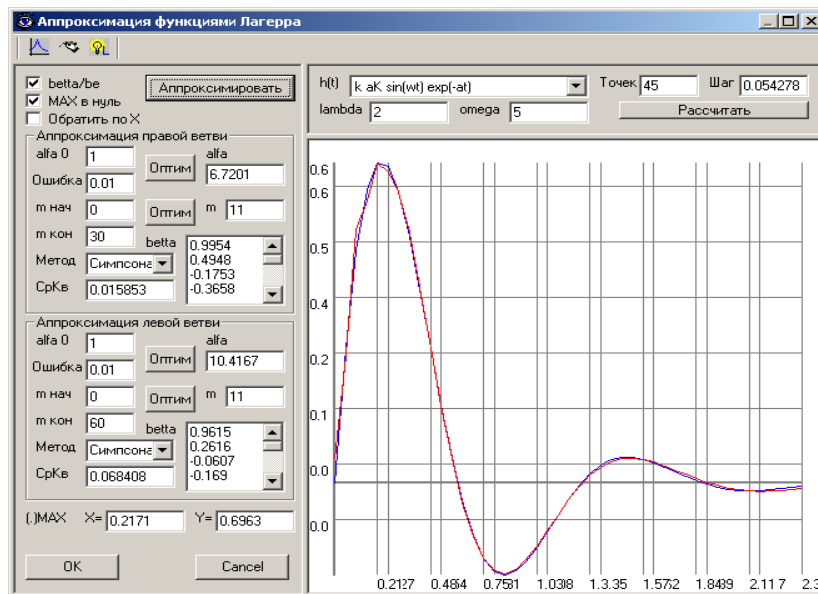


Рисунок 8.43 – Аппроксимация импульсной характеристики

По полученным аналитическим выражениям удастся построить выражение для частотных характеристик. Отметим, что частотная характеристика – величина комплексная и может быть представлена в виде вещественной и мнимой частотных характеристик (ВЧХ и МЧХ)

$$W(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = ReW(j\omega) - j ImW(j\omega). \quad (8.27)$$

Также возможно представление частотной характеристики через модуль и аргумент в виде амплитудной и фазовой частотных характеристик (АЧХ и ФЧХ):

$$W(j\omega) = A(\omega) \exp[j\varphi(\omega)], \quad (8.28)$$

где

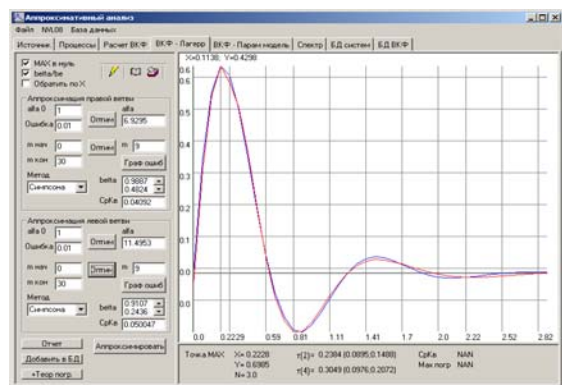
$$A(\omega) = \sqrt{|W(j\omega)|^2} = \sqrt{(ReW(j\omega))^2 + (ImW(j\omega))^2}, \quad (8.29)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{ImW(j\omega)}{ReW(j\omega)}. \quad (8.30)$$

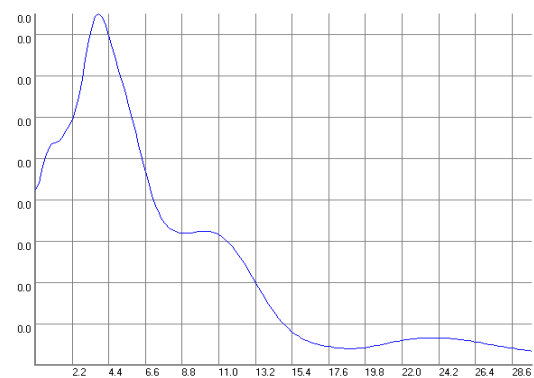
Используя найденный для импульсной характеристики выражения, получим формулы для частотной характеристики

$$ReW(j\omega) = A_m \frac{\cos\omega\tau_m}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi_n}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} (-1)^k b_{k,n} \cos(2k+1)\varphi_n + \right. \\ \left. + \frac{\cos\varphi_n}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} (-1)^k b_{k,n} \cos(2k+1)\varphi_n \right] - A_m \frac{\sin\omega\tau_m}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi_n}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} (-1)^k b_{k,n} \sin(2k+1)\varphi_n - \right. \\ \left. - \frac{\cos\varphi_n}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} (-1)^k b_{k,n} \sin(2k+1)\varphi_n \right]; \quad (8.31)$$

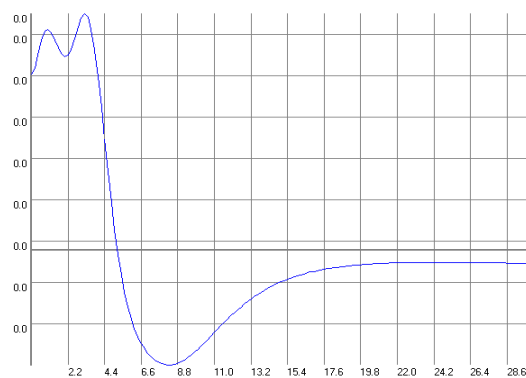
$$ImW(j\omega) = A_m \frac{\cos\omega\tau_m}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi_n}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} (-1)^k b_{k,n} \cos(2k+1)\varphi_n - \right. \\ \left. - \frac{\cos\varphi_n}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} (-1)^k b_{k,n} \cos(2k+1)\varphi_n \right] - A_m \frac{\sin\omega\tau_m}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi_n}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} (-1)^k b_{k,n} \cos(2k+1)\varphi_n + \right. \\ \left. + \frac{\cos\varphi_n}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} (-1)^k b_{k,n} \cos(2k+1)\varphi_n \right]. \quad (8.32)$$



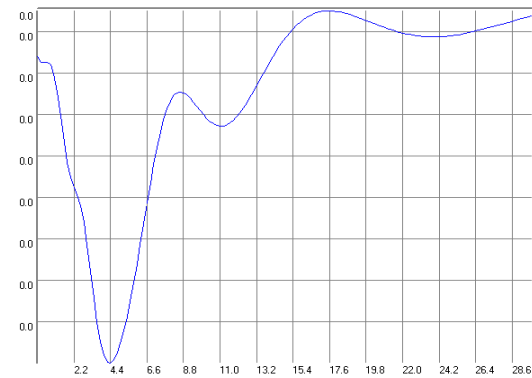
а) Импульсная характеристика



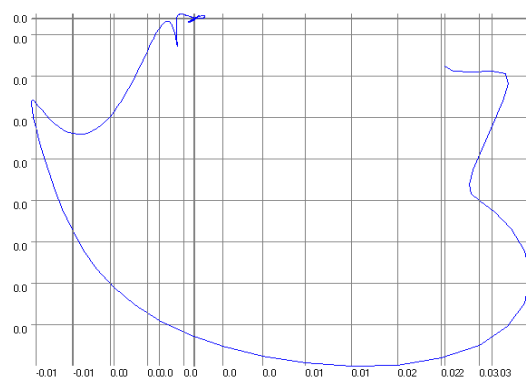
б) Амплитудная частотная характеристика



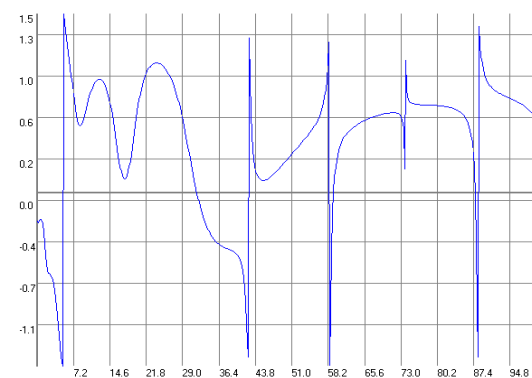
в) Вещественная частотная характеристика



г) Мнимая частотная характеристика



д) Частотная характеристика



е) Фазовая частотная характеристика

Рисунок 8.44 – Импульсные и частотные характеристики фильтра

Результаты – определенные импульсные и частотные характеристики, представлены на рис. 8.44. Уменьшение интервала дискретизации (при увеличении числа отсчетов) позволяет получить более точную аппроксимирующую модель. Результаты при уменьшенном интервале дискретизации в 2 раза приведены на рис. 8.45. Отметим незначительное расхождение частотных характеристик в этих случаях, что позволяет сделать вывод о существовании некоторого значения, меньше которого при применении алгоритмов аппроксимации ортогональными функциями Лагерра задавать интервал дискретизации импульсной характеристики нецелесообразно.

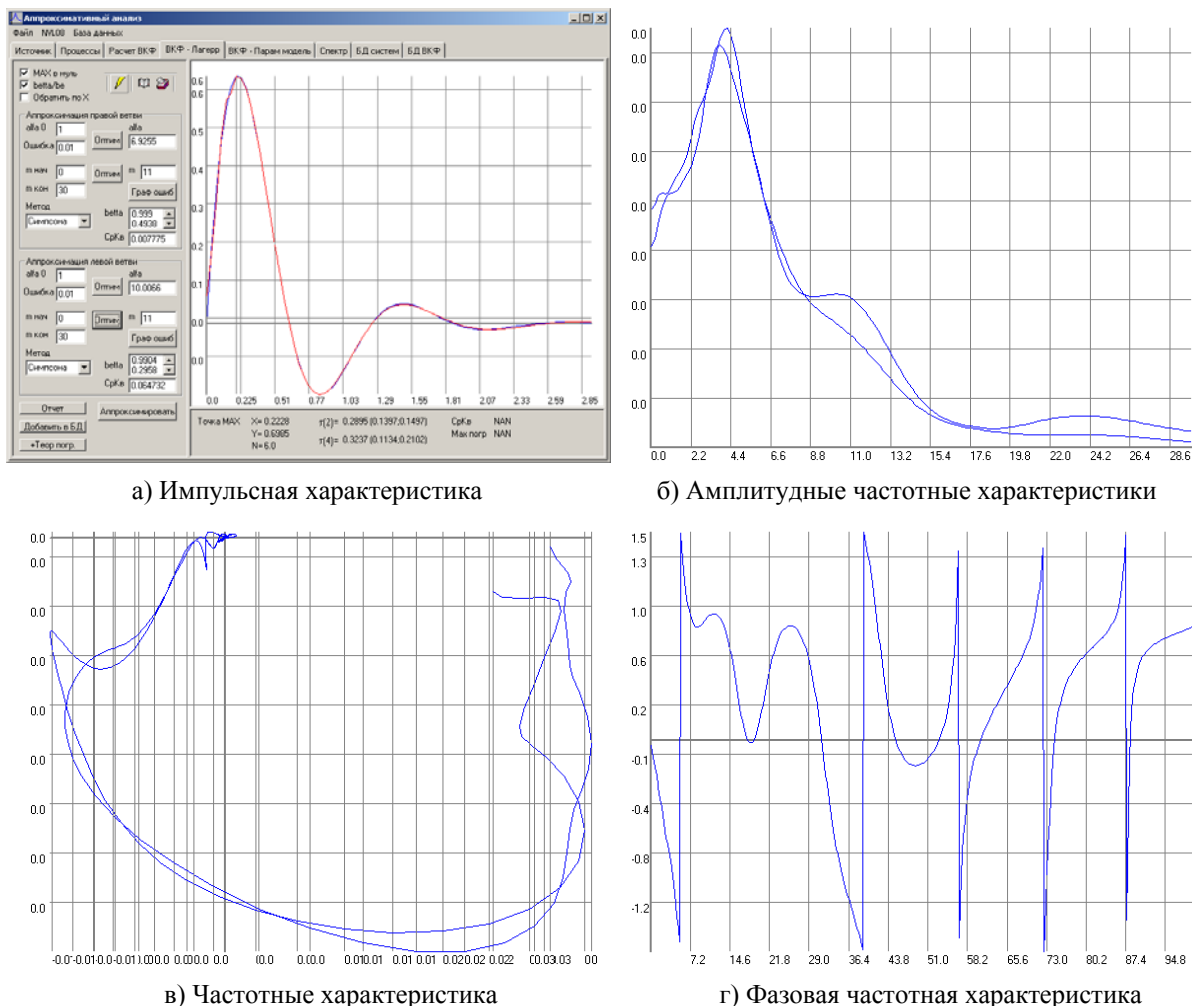


Рисунок 8.45 – Изменение интервала дискретизации аппроксимируемой функции

На рис. 8.46 приведены частотные характеристики, полученные в результате аппроксимации импульсной характеристики в сравнении с частотными характеристиками, полученными аналитически (8.31). Для вещественной частотной характеристики СКО составило 0,0348, максимальная погрешность – 0,0013. Для мнимой частотной характеристики погрешности составили 0,2888 и 0,096 соответственно. Отметим, что с помощью ручной корректировки параметров аппроксимирующих выражений и видоизменения метода аппроксимации результат можно улучшить (для вещественной частотной характеристики СКО 0,0077 и максимальная погрешность 0,0003) (см. рис. 8.48).

$$W(j\omega) = \frac{1}{2\omega_0} \sqrt{\frac{\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}{2\pi^3}} \left[\left(\frac{\omega_0 + \omega}{\alpha^2 + (\omega_0 + \omega)^2} + \frac{\omega_0 - \omega}{\alpha^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \right) + \right. \\ \left. + j \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega_0 + \omega)^2} - \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \right) \right]. \quad (8.33)$$

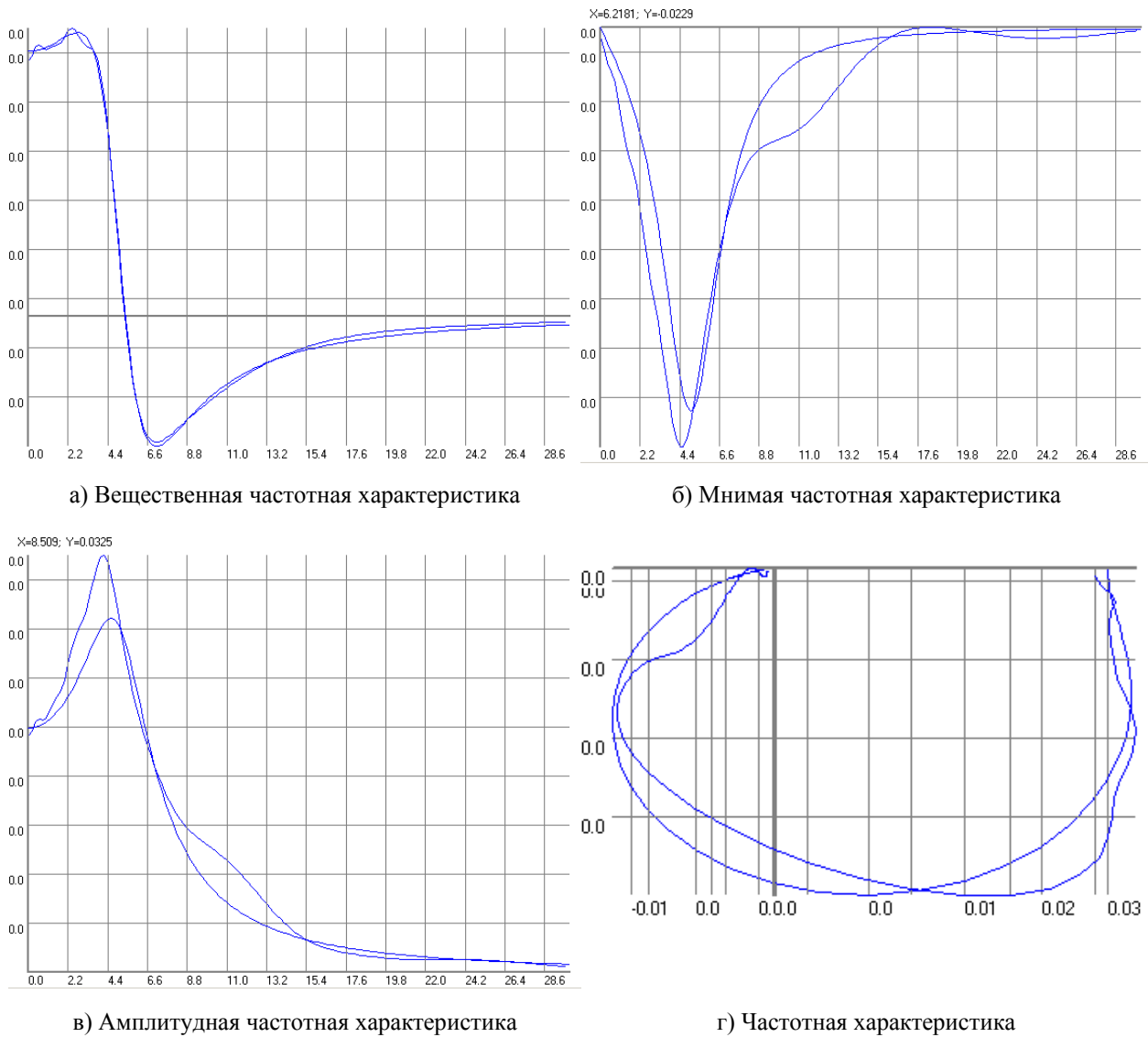
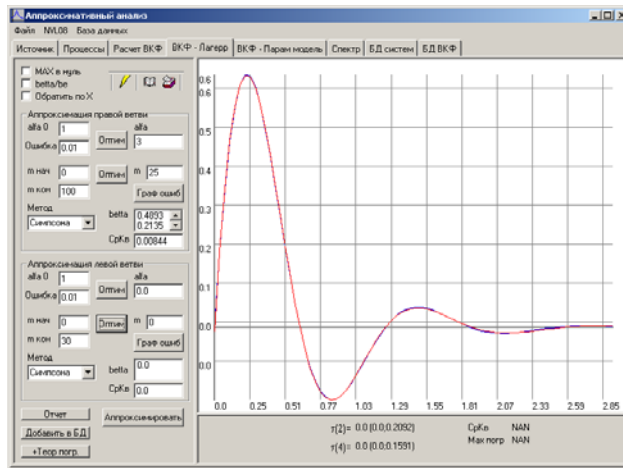
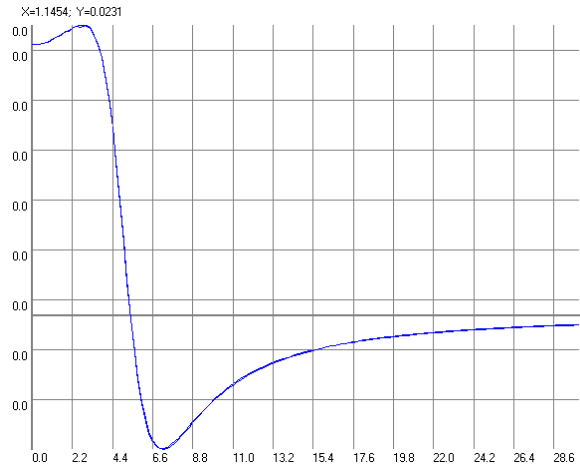


Рисунок 8.46 – Сравнение с аналитическими выражениями

Аналогично описанному выше случаю возможна аппроксимация частотной характеристики и построение по результату аппроксимации импульсной характеристики. В этом случае необходима раздельная аппроксимация вещественной и мнимой частей частотной характеристики. Особенность процедура аппроксимации в этом случае состоит в положительной определенности вещественной и мнимой частей частотных характеристик. Поэтому при использовании подхода с разделением функции на две ветви относительно максимума правая ветвь определена на интервале $[\tau_{max}, \infty]$, а левая – $[0, \tau_{max}]$.



а) Аппроксимация функциями Лагерра



б) Вещественная частотная характеристика

Рисунок 8.47 – Подбор параметров и метода аппроксимации

Получив аппроксимирующие выражения для вещественной и мнимой частей частотной характеристики

$$ReW(j\omega) = \sum_{k=0}^{m_{Re}} \beta_{k Re} L_k(\omega, \alpha_{Re}). \quad (8.34)$$

$$ImW(j\omega) = \sum_{k=0}^{m_{Im}} \beta_{k Im} L_k(\omega, \alpha_{Im}), \quad (8.35)$$

где

$$\beta_{k Re} = \alpha_{Re} \int_0^{\infty} ReW(j\omega) L_k(\omega, \alpha_{Re}) d\omega; \quad (8.36)$$

$$\beta_{k Im} = \alpha_{Im} \int_0^{\infty} ImW(j\omega) L_k(\omega, \alpha_{Im}) d\omega, \quad (8.37)$$

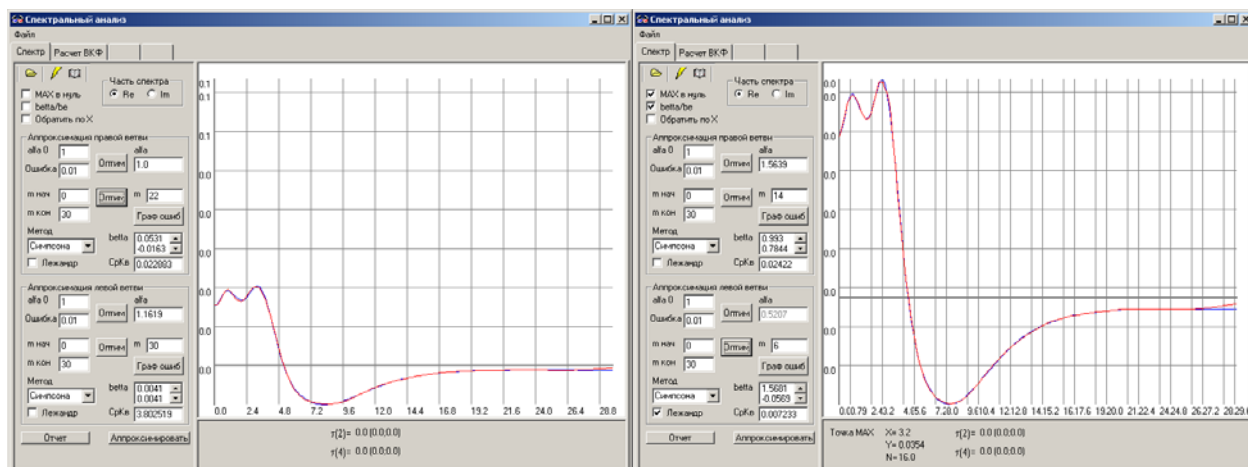
определим выражение для импульсной характеристики

$$h(\tau) = \frac{4 \cos \varphi_{Re}}{\alpha_{Re}} \sum_{k=0}^{m_{Re}} \beta_{k Re} (-1)^k \cos(2k+1)\varphi_{Re} + \frac{4 \cos \varphi_{Im}}{\alpha_{Im}} \sum_{k=0}^{m_{Im}} \beta_{k Im} (-1)^k \sin(2k+1)\varphi_{Im}, \quad (8.38)$$

где

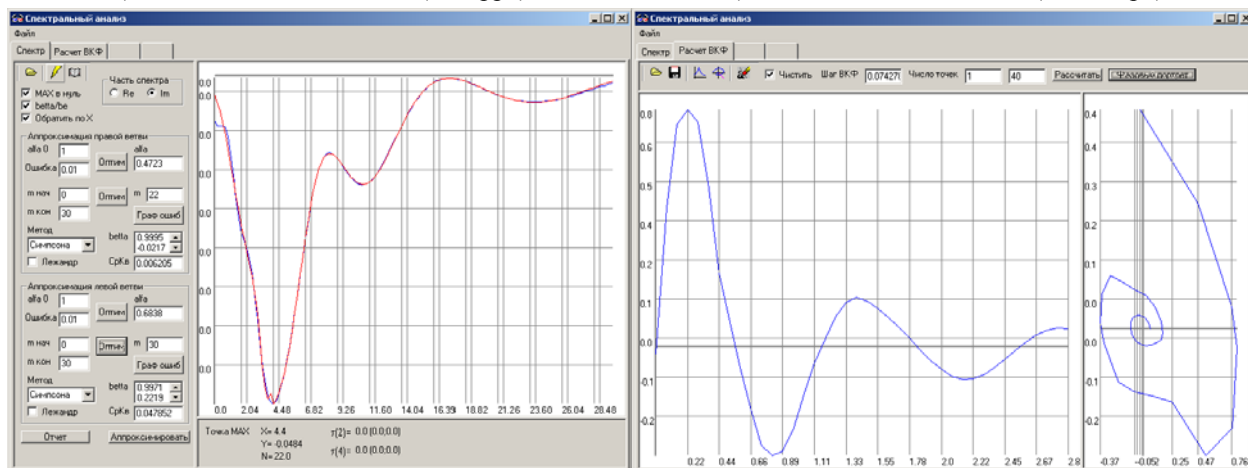
$$\varphi_{Re} = \arctg \frac{2\tau}{\alpha_{Re}}, \quad \varphi_{Im} = \arctg \frac{2\tau}{\alpha_{Im}}. \quad (8.39)$$

Функции Лагерра ортогональны на интервале $[0, \infty]$, поэтому необходимо либо аппроксимировать функцию без разбиения на ветви, либо использовать другие функции для аппроксимации. В примере на рис. 8.48 а приведен первый случай, на рис. 8.48 б – левая ветвь аппроксимируется с помощью ортогональных функций Лежандра, ортогональных на интервале $[0, \tau_{max}]$. Восстановленная импульсная характеристика приведена на рисунке 8г. После цикла аппроксимации импульсной характеристики, построения частотной характеристики, аппроксимации частотной характеристики и построения импульсной характеристики удастся получить достаточно неплохое соответствие исходной характеристики и восстановленной (СКО 0,1363, максимальная погрешность 0,0849) (см. рис. 8.49) Отметим, что определение импульсной характеристики по аналитическим выражениям вещественной и мнимой частотных характеристик с помощью аппроксимации ортогональными функциями Лагерра производится с СКО 0,0574 и максимальной погрешностью 0,0472.



а) Вещественная часть ЧХ (Лагерра)

б) Вещественная часть ЧХ (Лежандра)



в) Мнимая часть частотной характеристики

г) Восстановленная импульсная характеристика

Рисунок 8.48– Аппроксимация частотной характеристики

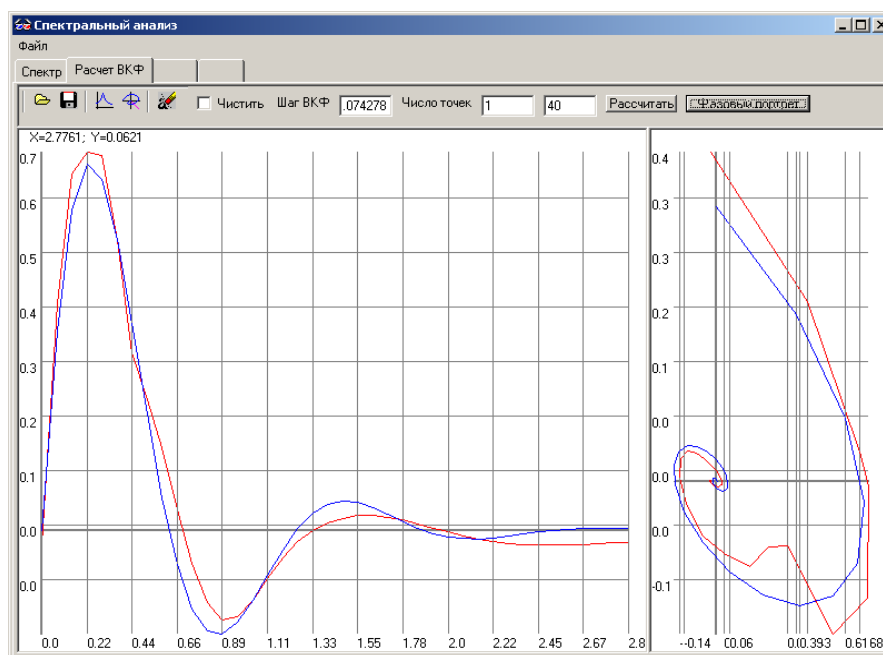


Рисунок 8.49 – Исходная и восстановленная частотные характеристики

8.7. Корреляционно-спектральный анализ котировок акций топливно-энергетических компаний

Разработанные модели и системы для анализа вероятностных характеристик случайных процессов (см. подразделы 4.18, 5.5, 5.12) позволяют проанализировать ход котировок акций ведущих топливно-энергетических компаний России. Характеристики часовых и дневных котировки акций в момент закрытия приведены в таблице 8.10.

Таблица 8.10

ЛУКОЙЛ	Наименование	Начало	Окончание	N	Δt_0	τ_k^4
	Часовая	01.05.00	03.12.04	7857	1 час	62,46 час.
	Дневная	29.05.97	22.03.04	1697	1 день	6,01 дней
РАО ЕЭС	Наименование	Начало	Окончание	N	Δt_0	τ_k^4
	Часовая	29.05.97	22.03.04	7997	1 час	25,42 час.
	Дневная	29.05.97	22.03.04	1697	1 день	5,34 дней
ЮКОС	Наименование	Начало	Окончание	N	Δt_0	τ_k^4
	Часовая	01.05.00	03.12.04	7997	1 час	26,08 час.
	Дневная	03.02.00	22.03.03	966	1 день	7,11 дней

На рис. 8.50 -8.55 приведены временные ряды, характеризующие часовые и дневные котировки акций в момент закрытия торгов и их центрированные реализации с использованием полиномов Лежандра (см. подраздел 4.18).

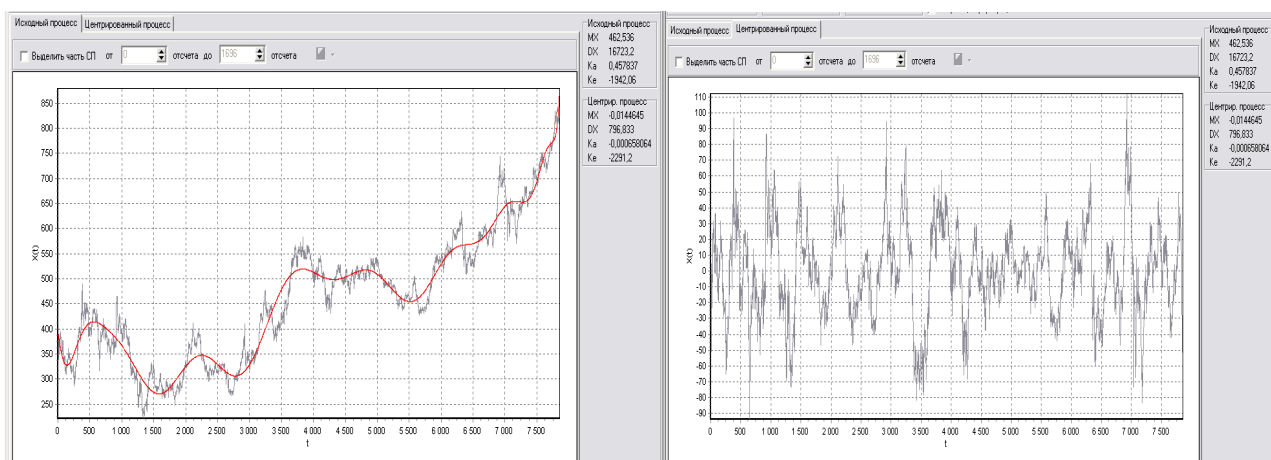


Рисунок 8.50 – Часовая котировка акций компаний ЛУКОЙЛ

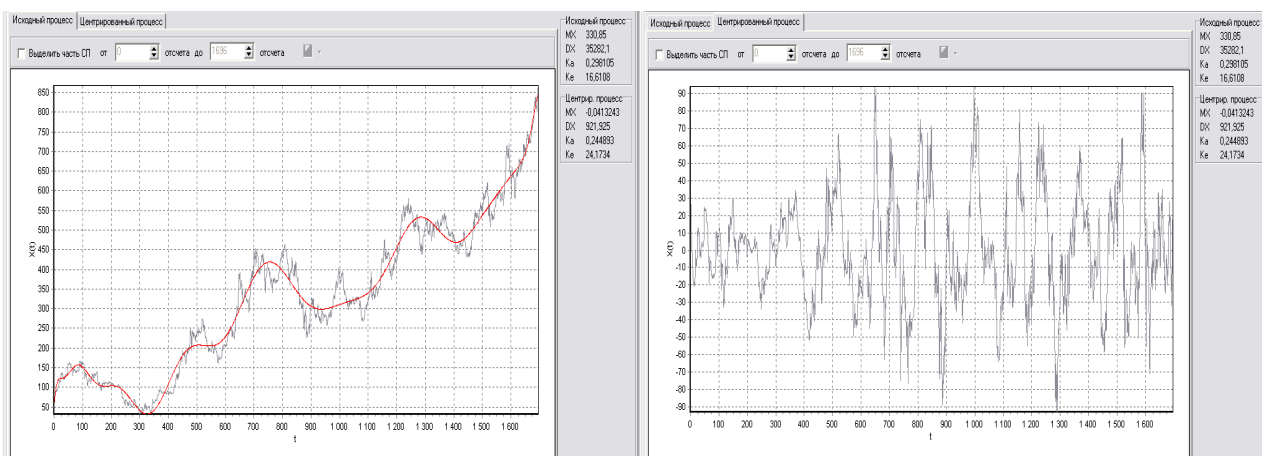


Рисунок 8.51 – Дневная котировка акций компаний ЛУКОЙЛ

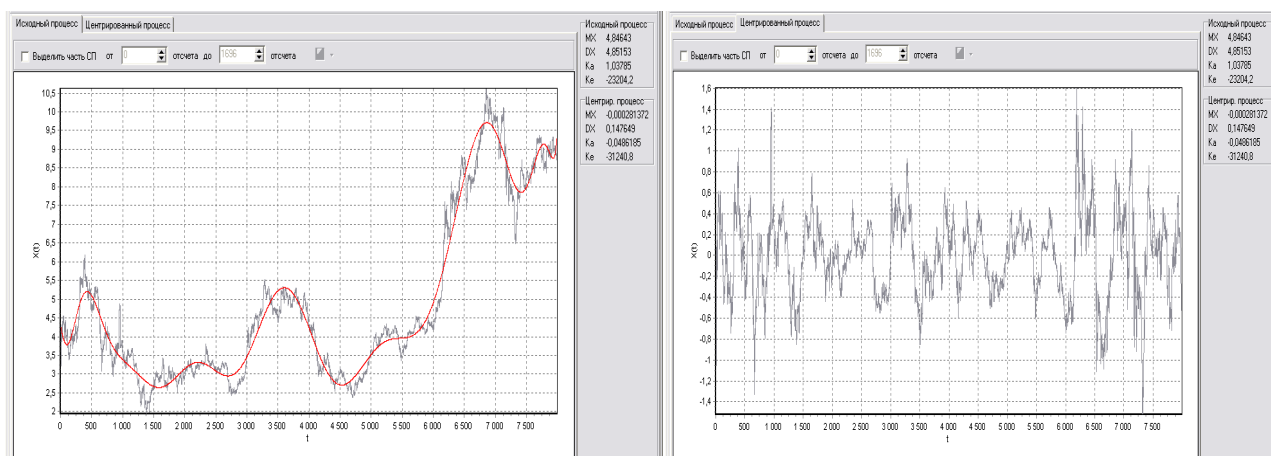


Рисунок 8.52 – Часовая котировка акций компаний РАО ЕЭС (заккрытие)

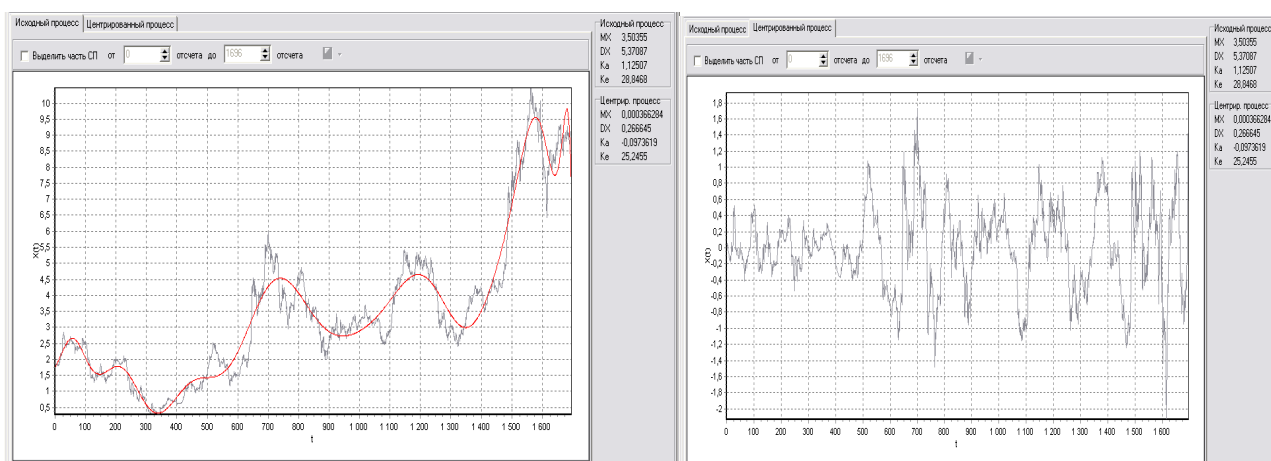


Рисунок 8.53 – Дневная котировка акций компаний РАО ЕЭС (заккрытие)

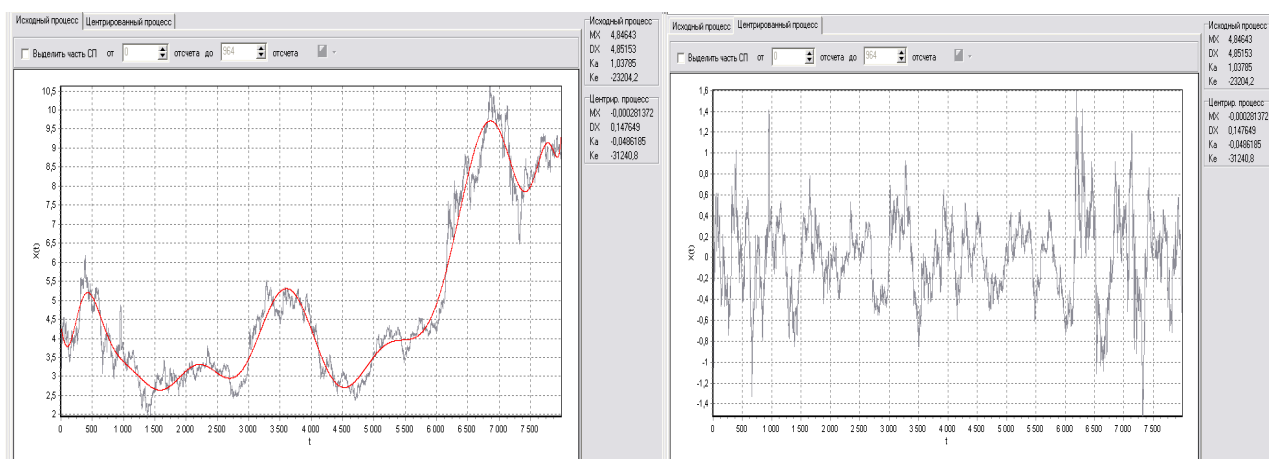


Рисунок 8.54 – Часовая котировка акций компаний ЮКОС (заккрытие)

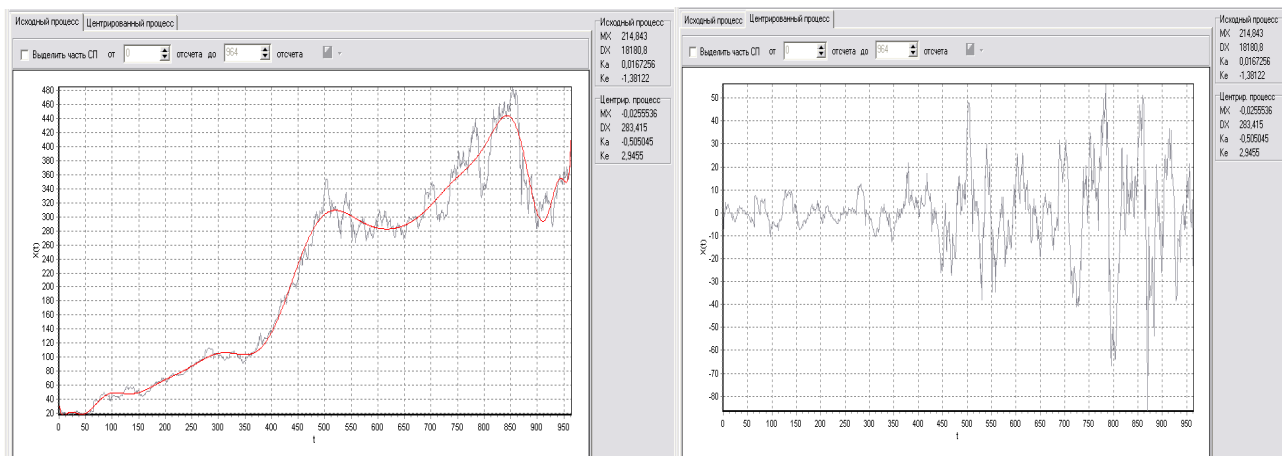


Рисунок 8.55 – Дневная котировка акций компаний ЮКОС (заккрытие)

На рис. 8.50 – 8.55 сплошной линией обозначены тренды соответствующих котировок.

На рис. 8.56 – 8.61 приведены результаты аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональном базисе Лагерра.

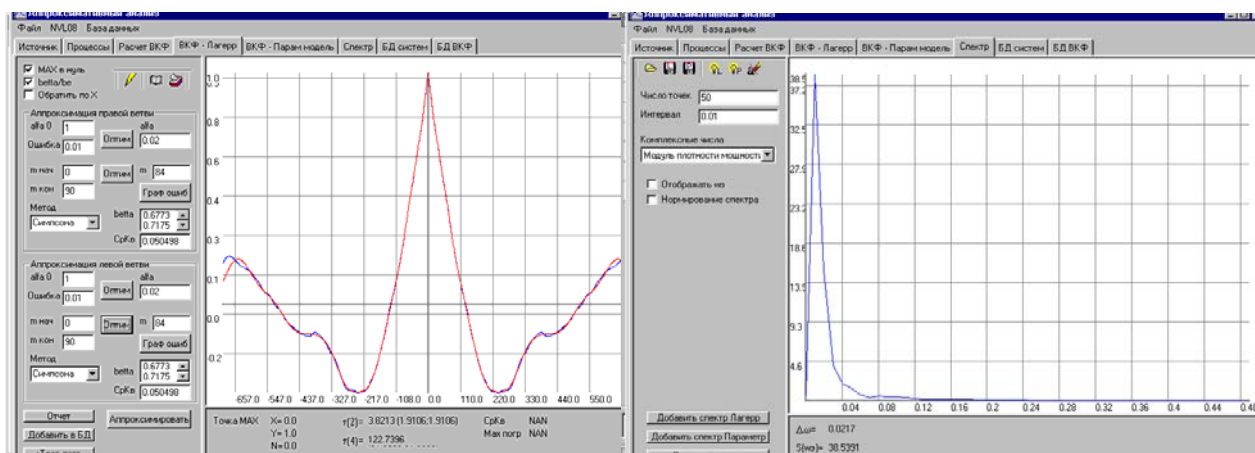


Рисунок 8.56 - Часовая котировка акций компании ЛУКОЙЛ (заккрытие)

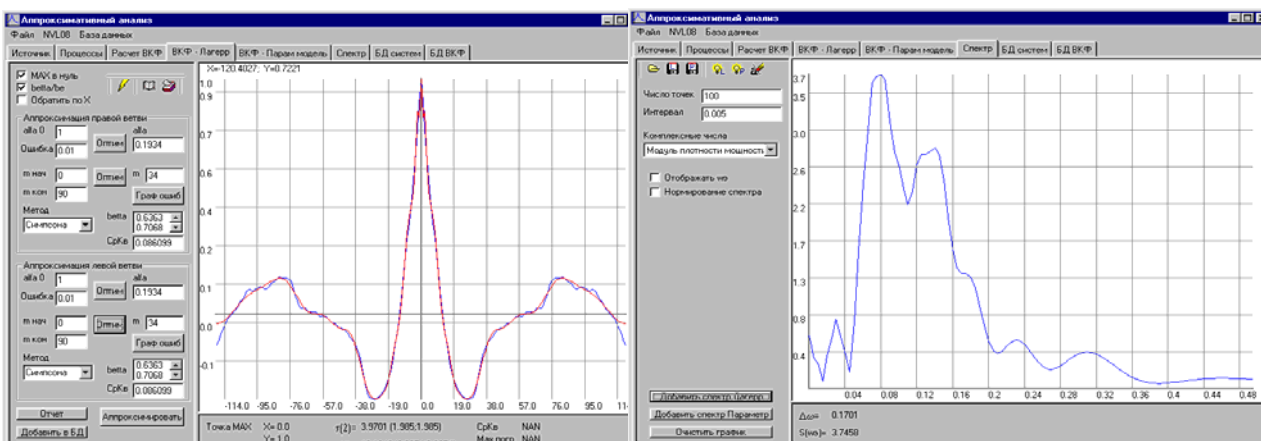


Рисунок 8.57 - Дневная котировка акций компании ЛУКОЙЛ (заккрытие)

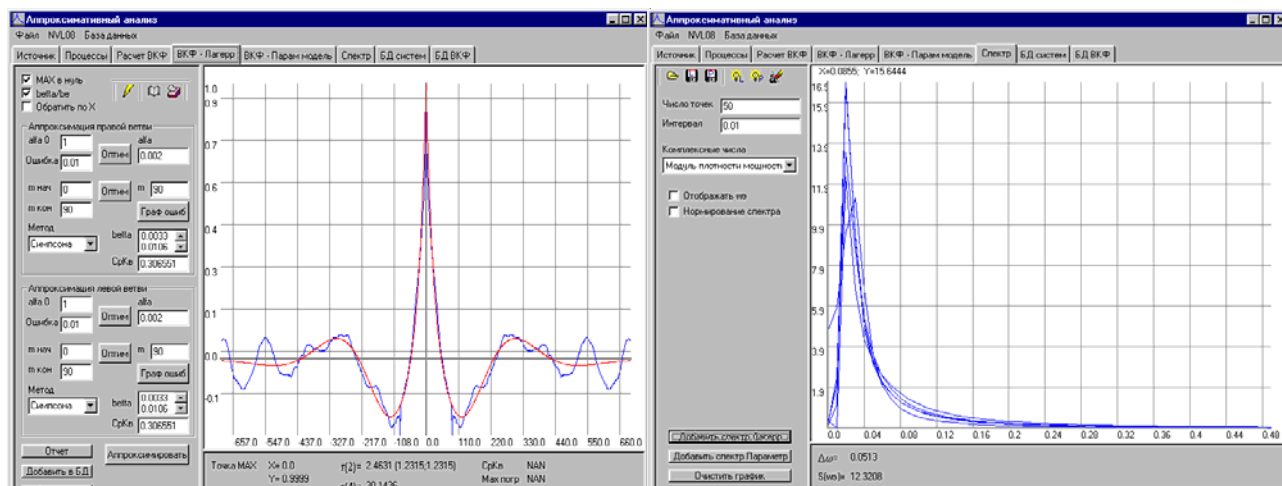


Рисунок 8.58 - Часовая котировка акций компании РАО ЕЭС (закрытие)

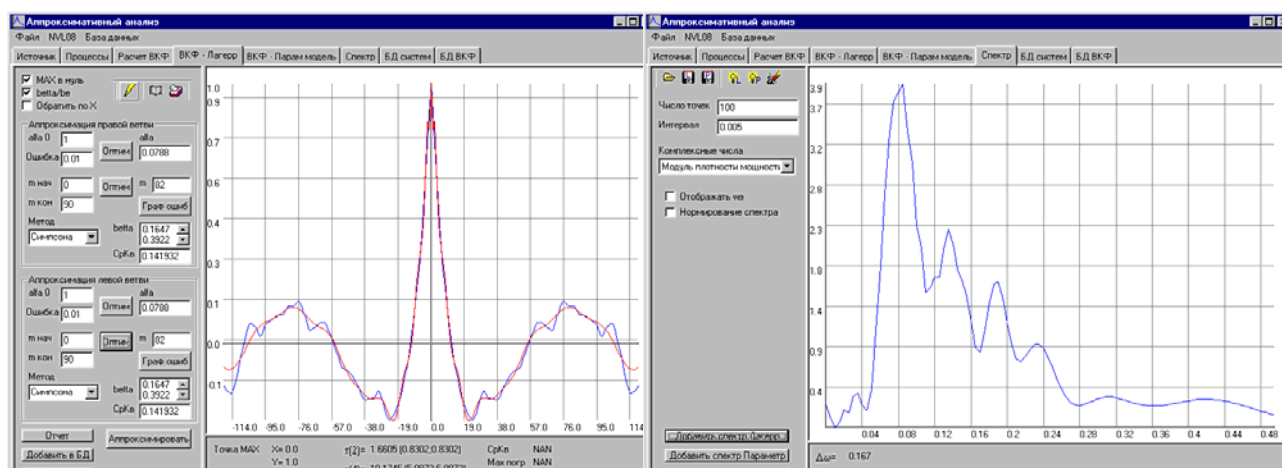


Рисунок 8.59 - Дневная котировка акций компании РАО ЕЭС (закрытие)

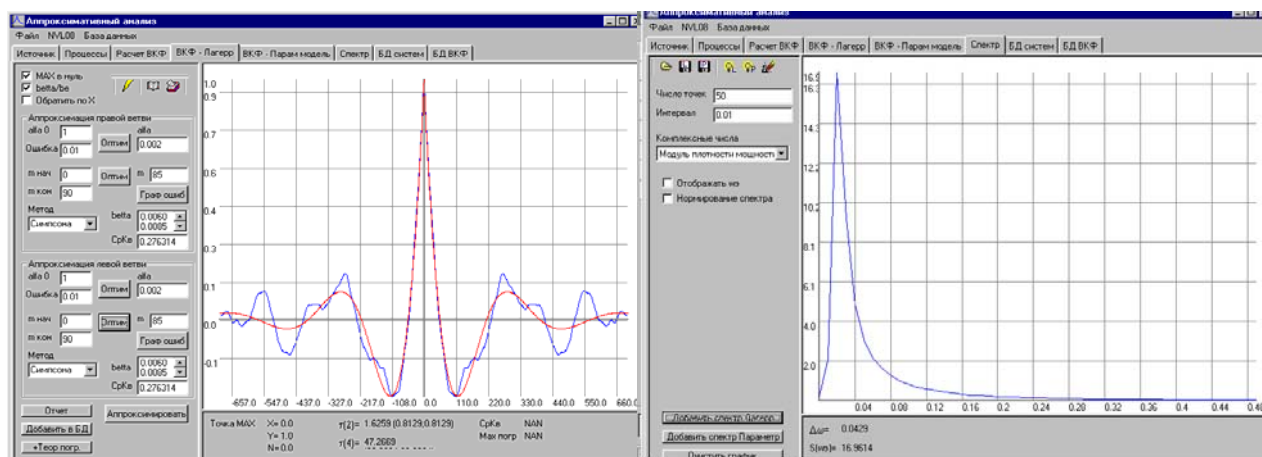


Рисунок 8.60 - Часовая котировка акций компании ЮКОС (закрытие)

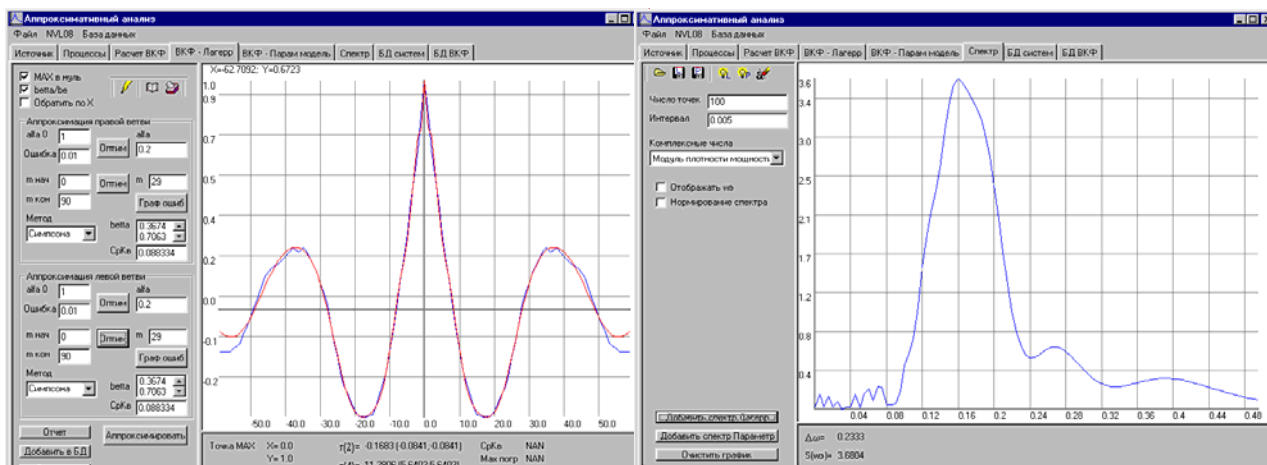


Рисунок 8.61 - Дневная котировка акций компании ЮКОС (закрытие)

Из анализа полученных результатов видно, что:

1. стоимость акций подвержена колебаниям; особенно это заметно по флуктуирующим составляющим, корреляционным функциям и спектральным плотностям мощности;
2. интервалы корреляции дневных котировок для рассматриваемых компаний приблизительно одинаковые (см. таблицу 8.10) - 5-7 дней;
3. интервалы корреляции часовых котировок у компании ЛУКОЙЛ более чем в 2 раза больше, чем у компаний РАО ЕЭС и ЮКОС.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены следующие задачи прикладного анализа случайных процессов:

- математического описания сигналов;
- моделирования временных рядов с заданными характеристиками, включая потоки событий и неэквидистантные временные ряды;
- аппроксимативного анализа случайных процессов функциями заданного вида;
- разработаны ортогональные модели вероятностных характеристик случайных процессов;
- приведено описание разработанных автоматизированных систем аппроксимативного анализа вероятностных характеристик случайных процессов;
- разработан лабораторный практикум на базе автоматизированных систем;
- разработан лабораторный практикум в системе Mathcad;
- с помощью разработанных автоматизированных систем решен ряд прикладных задач.

Полученные результаты показывают перспективность данного подхода для решения разнообразных задач науки и техники, так как позволяют:

1. идентифицировать случайные процессы по виду функциональной вероятностной характеристики с использованием её фазового портрета;
2. получить аналитические выражения вероятностных функциональных характеристик в виде параметрических моделей как при регулярной, так и при нерегулярной дискретизации, удобные для дальнейших исследований и хранения результатов, что особенно важно при большом объёме статистических испытаний;
3. без существенных вычислительных затрат определить обобщенные корреляционно-спектральные характеристики: интервалы корреляции, корреляционные моменты, эквивалентную ширину спектра мощности и. т.д. — по параметрам модели;
4. в сомнительных случаях с помощью разработанных автоматизированных систем произвести аппроксимацию функциональной характеристики различными параметрическими моделями с использованием различных численных методов, включая аппроксимацию ортогональными функциями и полиномами Лагерра, Лежандра, Дирихле, Эрмита;
5. за счёт встроенных подсистем имитации случайных процессов с заданными вероятностными характеристиками отладить и включить в системы новые алгоритмы аппроксимации;
6. сравнить результаты аппроксимации корреляционно-спектральных характеристик как при регулярной, так и при нерегулярной дискретизации случайных процессов;
7. за счёт визуализации имитации случайных процессов, идентификации и аппроксимации функциональных характеристик, использования ручного и автоматизированного режимов работы применять автоматизированные системы в учебном процессе при подготовке специалистов по специальностям, связанным со статистической обработкой информации, автоматизацией научных исследований.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. А.С. № 446884 СССР, G 06g 7/19. Устройство для определения показателя затухания аппроксимирующей экспоненциальной корреляционной функции случайного процесса /Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 1801835/18-24, Заявлено 27.06.72; Оpubл. 10.07.75, Бюл. № 38. - С.4.
2. А.С. № 463121 СССР, G 06g 7/19. Коррелятор /Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 1932239/18-24, Заявлено 14.06.73; Оpubл. 05.03.75, Бюл. № 9. - С.3.
3. А.С. № 504206 СССР, G 06g 7/19. Коррелятор /Волков И.И., Прохоров С.А., Батищев В.И., Мотов В.В. /СССР/.-№ 2074908/18-24, Заявлено 14.11.74; Оpubл. 25.02.76, Бюл. № 7. - С.5.
4. А.С. № 517027 СССР, G 06g 7/19. Устройство для определения интервала корреляции /Волков И.И., Прохоров С.А., Мотов В.В., Токарев А.П., Батищев В.И. /СССР/.-№ 2099351/24, Заявлено 14.11.74; Оpubл. 05.06.76, Бюл. № 21. - С.6.
5. А.С. № 522507 СССР, G 06g 7/52. Устройство для оценки интервала корреляции /Волков И.И., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 2085136/24, Заявлено 18.12.74; Оpubл. 25.07.76, Бюл. № 27. - С.5.
6. А.С. № 529462 СССР, G 06g 7/19. Коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра /Волков И.И., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 2160031/24, Заявлено 28.07.75; Оpubл. 25.09.76, Бюл. № 35. - С.5.
7. А.С. № 550647 СССР, G 06g 7/19. Двухканальный коррелятор /Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 2158430/24, Заявлено 18.07.75; Оpubл. 21.03.77, Бюл. № 10. - С.5.
8. А.С. № 552619 СССР, G 06g 7/19. Коррелометр /Волков И.И., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 2305064/24, Заявлено 29.12.75; Оpubл. 30.03.77, Бюл. № 12. - С.4.
9. А.С. № 583453 СССР, G 06g 7/19. Взаимный коррелятор /Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 2302741/18-24, Заявлено 24.12.75; Оpubл. 20.12.77, Бюл. № 45. - С.6.
10. А.С. № 584311 СССР, G 06g 7/19. Устройство для определения параметров аппроксимирующей экспоненциально-косинусной корреляционной функции /Волков И.И., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 2407400/18-24, Заявлено 27.09.76; Оpubл. 10.02.78, Бюл. № 46. - С.5.
11. А.С. № 619931 СССР, G 06g 7/52. Взаимный коррелятор /Волков И.И., Мотов В.В., Батищев В.И., Прохоров С.А. /СССР/.-№ 2429377/18-24, Заявлено 15.12.76; Оpubл. 15.08.78, Бюл. № 30. - С.6.
12. А.С. № 643906 СССР, G 06g 7/19. Коррелятор с аппроксимацией двухпараметрическими моделями /Волков И.И., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 2406333/18-24, Заявлено 27.09.77; Оpubл. 25.01.79, Бюл. № 3. - С.6.
13. А.С. № 658493 СССР, G 01g 23/16. Устройство для измерения составляющих взаимной спектральной плотности /Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 2304740/18-21, Заявлено 29.12.75; Оpubл. 25.04.79, Бюл. № 15. - С.6.
14. А.С. № 684559 СССР, G 06g 7/19. Взаимный коррелятор /Волков И.И., Мотов В.В., Батищев В.И., Прохоров С.А. /СССР/.-№ 2406332/18-24, Заявлено 27.09.76; Оpubл. 05.09.79, Бюл. № 33. - С.6.
15. А.С. № 832560 СССР, G 06f 15/336. Цифровой коррелятор/Прохоров С.А., Сухинин В.П. /СССР/.-№ 2798902/18-24; Заявлено 17.07.79; Оpubл. 23.05.81, Бюл. № 19. - С.4.
16. А.С. № 960864 СССР, G 06g 15/336. Устройство для определения интервала корреляции/Прохоров С.А., Сухинин В.П., Белолипецкий В.Н., Мартовой В.П. /СССР/.-№ 3250532/18-24, Заявлено 18.02.81; Оpubл. 23.09.82, Бюл. № 35. - С.5.
17. А.С. № 962976 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления корреляционной функции импульсной последовательности/Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 3250521/18-24, Заявлено 18.02.81; Оpubл. 30.09.82, Бюл. № 36. - С.7.
18. А.С. № 968819 СССР, G 06f 15/336. Цифровой автокоррелятор/Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3291998/18-24, Заявлено 25.02.81; Оpubл. 23.10.82, Бюл. № 39. - С.7.
19. А.С. № 980101 СССР, G 06f 15/336. Цифровой коррелятор/Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 3306092/18-24, Заявлено 26.06.81; Оpubл. 07.12.82, Бюл. № 45. - С.5.
20. А.С. № 982011 СССР, G 09f 15/336. Устройство для вычисления взаимокорреляционной функции импульсной последовательности/Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 3292246/18-24, Заявлено 21.05.81; Оpubл. 15.12.82, Бюл. № 46. - С.4.

21. А.С. № 1020835 СССР, G 06f 15/336. Цифровой автокоррелятор/Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3393333/18-24, Заявлено 15.02.82; Оpubл. 30.05.83, Бюл. № 20.- С.7.
22. А.С. № 1022167 СССР, G 06f 15/336. Автокоррелятор/Прохоров С.А., Мартовой В.П., Белолипецкий В.Н., Сухинин В.П. /СССР/.-№ 3380810/18-24, Заявлено 16.11.81; Оpubл. 07.06.83, Бюл. № 21. - С.5.
23. А.С. № 1042030 СССР, G 06f 15/336. Коррелятор/Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3402977/18-24, Заявлено 23.02.82; Оpubл. 15.09.83, Бюл. № 34. - С.5.
24. А.С. № 1072057 СССР, G 06f 15/336. Цифровой коррелятор/Прохоров С.А., Сухинин В.П., Белолипецкий В.Н., Мартовой В.П. /СССР/.-№ 3402502/18-24, Заявлено 23.02.82; Оpubл. 07.02.84, Бюл. № 5. - С.6.
25. А.С. № 1104529 СССР, G 06f 15/336. Цифровой автокоррелятор/Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н., Мартовой В.П. /СССР/.-№ 3565484/18-24; Заявлено 18.03.83; Оpubл. 23.07.84, Бюл. № 27. - С.8.
26. А.с. № 1166135 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления структурной и интервальной функции /Прохоров С.А., Иванов С.Г., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3693028/24-24; 3694521/24; Заявлено 24.01.84; Оpubл. 07.07.85, Бюл. № 25. - С.8.
27. А.С. № 1173419 СССР, G 06f 15/336. Коррелятор/Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3703968/24-24, 3701886/24-24; Заявлено 20.02.84; Оpubл. 16.08.85, Бюл. № 30. - С.5.
28. А.С. № 1183985 СССР, G 06f 15/336. Устройство для определения моментов k-го порядка /Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3745812/24-24; Заявлено 29.05.84; Оpubл. 07.10.85, Бюл. № 37. - С.5.
29. А.С. № 1224806 СССР, G 06f 15/336. Коррелометр /Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3747492/24-24; 3745813/24-24; Заявлено 29.05.84; Оpubл. 15.04.86, Бюл. № 14. - С.6.
30. А.С. № 1257663 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления производной корреляционной функции /Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 3750867/24-24; Заявлено 04.06.84; Оpubл. 15.09.86, Бюл. № 34. - С.5.
31. А.С. № 1288715 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления производной взаимоструктурной функции /Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 3750851/24-24; Заявлено 06.06.84; Оpubл. 07.02.87, Бюл. № 5. - С.10.
32. А.С. № 13005710 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления производной корреляционной функции /Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 3954265/24-24; Заявлено 16.09.85; Оpubл. 23.04.87, Бюл. № 15. - С.6.
33. А.С. № 1355978 СССР, G 06f 15/336. Устройство для определения производной структурной функции /Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 4007833/24-24; Заявлено 15.01.86; Оpubл. 30.11.87, Бюл. № 44. - С.6.
34. А.С. № 1361577 СССР, G 06f 15/336. Устройство для определения взаимной корреляционной функции /Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 4101653/24-24; Заявлено 26.05.86; Оpubл. 23.12.87, Бюл. № 47. - С.6.
35. А.С. № 1387012 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления интервальной взаимокорреляционной функции /Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 4139478/24-24; Заявлено 28.10.86; Оpubл. 07.04.88, Бюл. № 13. - С.5.
36. А.С. № 1444813 СССР, G 06f 15/336. Коррелятор /Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 4253803/24-24; Заявлено 28.04.87; Оpubл. 15.12.88, Бюл. № 46. - С.6.
37. Автоматизированные системы научных исследований /Прохоров С.А., Фурсов В.А., Кривошеев А.О., и др. Под ред. Прохорова С.А.: НППЦ «Авиатор», Самара, 1995. - 137 с.
38. Адаптивные телеизмерительные системы /Авдеев Б.Я., Антонюк Е.М., Долинов С.Н., Журавин Л.Г., Семенов Е.И., Фремке А.В./ Л.: Энергоатомиздат, 1981. - 246 с.
39. Анго А. Математика для электро и радиоинженеров. М.: Мир, 1965.
40. Артамонов Г.Т., Тюрин В.Д. Анализ информационно-управляющих систем со случайным интервалом квантования сигнала по времени. - М.: Энергия, 1977. - 112 с.
41. Бабкин В.Ф., Крюков А.Б., Штарьков Ю.М. Сжатие данных //Аппаратура для космических исследований. -М.:Наука,1972.-С.172-209.
42. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учеб. пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 600 с.
43. Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применения. -М.:Наука,1965.-464с.
44. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. -М.:Мир,1974.-464с.

45. Билинский И.Я., Микелсон А.К. Стохастическая цифровая обработка непрерывных сигналов. -Рига:Зинатне,1983.-292с.
46. Бобнев М.П. Генерирование случайных сигналов. Изд. 2-е перераб. и доп. М.: «Энергия», 1971, 239.
47. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1968 – 355 с.
48. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1971.
49. Величкин А.И. Теория дискретной передачи непрерывных сообщений. - М.:Сов.радио,1970.-294с.
50. Венедиктов М.Д., Марков В.В., Эйдуз Г.С. Асинхронные адресные системы связи. - М.:Связь,1968.-271с.
51. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1969. - 576 с.
52. Вероятностный анализ и моделирование океанологических процессов//Сб. статей п/р Рожкова В.А. - Л.: Гидрометеиздат, 1984. – 164 с.
53. Виленкин С.Я. Статистические методы исследования систем автоматического регулирования. -М.:Сов.радио,1967.-200с.
54. Виттих В.А. Сжатие данных в информационно-измерительных системах: Синтез алгоритмов и проектирование устройств. -Дисс. ... д-ра техн. Наук - Куйбышев,1975.-291с.
55. Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А. К вопросу построения аппаратуры для аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида //Информационно-измерительные системы и их элементы. - Куйбышев, 1974.- С.151-156.
56. Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А. Корреляторы с аппроксимацией параметрическими моделями //Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей. Тез. докладов VII Всесоюзного симпозиума. - Л. - 1975.- С.60-64.
57. Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А. Об одном методе аппаратурной аппроксимации корреляционных функций стационарных случайных процессов.//ИВУЗов СССР «Радиофизика». - т. XVI.- №11. - 1973. - С.1770-1771.
58. Волков И.И., Прохоров С.А. Анализ статистических погрешностей при аппаратурной аппроксимации корреляционных функций однопараметрическими моделями //Информационно-измерительные системы и их элементы. - Куйбышев, 1974. - С.151-156.
59. Волков И.И., Прохоров С.А. Батищев В.И. Способ построения аппаратуры для определения методических погрешностей аппроксимации корреляционных функций //ИВУЗов СССР «Приборостроение». - т. XXI. - №8- 1978. - С.24-29.
60. Волков И.И., Прохоров С.А. Способ повышения точности аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра //ИВУЗов СССР «Приборостроение». - т. XVII. - №7- 1974. - С.66-72.
61. Волков И.И., Прохоров С.А., Батищев В.И. Методы и аппаратура для аппроксимативной оценки корреляционных характеристик с применением функций Лагерра. - Куйбышев, КПТИ, 1977. - 55 с.
62. Гайдышев И. Анализ и обработка данных: специальный справочник – СПб: Питер, 2001. – 752 с.: ил.
63. Галушкин А.И., Зотов Ю.Я., Шикун Ю.А. Оперативная обработка экспериментальной информации. -М.:Энергия,1972.-360с.
64. Голд Б., Рейдер Ч. Цифровая обработка сигналов. – М.: Сов. Радио, 1973. - 368 с.
65. Гома Х. UML. Проектирование систем реального времени, параллельных и распределенных приложений: Пер. с англ. – М.: ДМК Пресс, 2002. – 704 с.: ил. (Серия «Объектно-ориентированные технологии в программировании»).
66. Горбачевич Е.Д. Коррелометры с аппроксимацией. - М., «Энергия», 1971. - 125с.
67. Горелов Г.В. Нерегулярная дискретизация сигналов. - М.: Радио и связь, 1982. - 256 с., ил. (стат. теория связи. Вып. 17).
68. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Физматгиз, 1963. - 1100 с.
69. Графкин А.В. Моделирование автоматизированных систем научных исследований с использованием семантических сетей./ Материалы докладов часть II. VIII Всероссийская научно-техническая конференция «Повышение эффективности средств обработки информации на базе математического моделирования», Тамбов, 2006. – с. 65-75.

70. Грибанов Ю. И., Веселова Г.П., Андреев В.Н. Автоматические цифровые корреляторы. – М.: Энергия, 1971. – 240 с., ил.
71. Грибанов Ю.И., Мальков В.Л. Погрешности и параметры цифрового корреляционного анализа. -М.:Радио и связь,1984.-160с.
72. Грибанов Ю.И., Мальков В.Л. Спектральный анализ случайных процессов. -М.: Энергия, 1974. - 240 с., ил.
73. Губарев В.В. Алгоритмы статистических измерений. - М.: Энергоатомиздат, 1985. - 272 с.
74. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы.-М.:Наука.-228с.
75. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970.
76. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Ч.1. - М.: Мир, 1971. - 320 с.
77. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения.Ч.2. - М.: Мир, 1972. - 288 с.
78. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – М.: Наука, 1971, 327 с.
79. Заездный А.М. Основы расчётов по статистической радиотехнике. – М.: Связь, 1969. - 447 с.
80. Иващенко А.В. Исследование возможности автоматизации взаимного корреляционно-спектрального анализа./ Электронный журнал "Исследовано в России", 002, стр. (10-15), 2004 г. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2004/002.pdf>.
81. Инженерные изыскания на континентальном шельфе. ВНН 51.2- 84. Рига: 1985. - 72 с.
82. Калашников И.Д., Степанов В.С., Чуркин А.В. Адаптивные системы сбора и передачи информации. -М.: Энергия,1975. - 240 с.
83. Карпов И.Г. Модификация уравнений Пирсона для односторонних законов распределения непрерывной случайной величины. - Радиотехника, 1999, №3, С. 22 – 26.
84. Кей С.М., Марил С.Л. Современные методы спектрального анализа. ТИИЭР т. 69, № 11, 1981, С. 3-47.
85. Кнут Д.Е. Искусство программирования для ЭВМ. – М.: Мир, 1976, 724 с.
86. Коварцев А.Н. Автоматизация разработки и тестирования программных средств/Самар. гос. аэрокосм.ун- т. Самара, 1999. - 150 с.: ил.
87. Козлов А.Н. Автоматизированная информационная система аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов. Дипломная работа. каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2000.- 94 с.
88. Котюк А.Ф., Цветков Э.И. Спектральный и корреляционный анализ нестационарных случайных процессов. -М.:Изд-во стандартов,1970..-104с.
89. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. //Перевод с нем. – М.: Издательство иностранной литературы, 1963. – 466 с.
90. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Ч.1 - М.:Сов.радио,1965.-552с.
91. Лезин И.А., Лезина И.В., Прохоров С.А. Автоматизированный комплекс аппроксимации функций ортогональными полиномами и нейронными сетями/ Труды научно-технической конференции с международным участием «Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении (ПИТ-2006)». Том 1. – Самара, 2006. – с. 106-112.
92. Леоненков А.В. Самоучитель UML – СПб.: БХВ - Петербург, 2001. – 304 с., ил.
93. Метод повышения точности аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра. /Батищев В.И., Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А. //Тезисы докладов VIII Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей» Л., 1975, С.60-64.
94. Методика обработки и анализа данных измерений течений АЦИИТ применительно к задачам темы П17 а.05 «Провести комплексное исследование океанографических, метеорологических и экологических условий в перспективных районах освоения минерального сырья в мировом океане» - Л.: ЛОГОИН.- 1987. - 46 с.
95. Методическое письмо по вероятностному анализу векторных временных рядов скоростей течений и ветра. Л.: Гидрометеиздат. - 1984.- 62 с.
96. Методы нормирования метрологических характеристик, оценки и контроля характеристик погрешностей средств статистических измерений. РТМ 25 139-74//Минприбор. – 1974. – 76 с.

97. Мирский Г.Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. - М.: Энергия, 1972. - 456 с., ил.
98. Мирский Г.Я. Характеристика стохастической взаимосвязи и их измерения. - М.: Энергоиздат, 1982. - 319 с.
99. Михайлов А.С., Прохоров С.А., Трапезников Ю.А. Применение метода расчета вероятностных характеристик к данным с неравномерной дискретностью для изучения гидрологического режима в открытой части Балтийского моря//Труды ВНИИГМИ-МЦД, 1989, вып.152.
100. Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. - М.: Наука, 1985.
101. Овсянников А.С., Прохоров С.А., Широков О.Ю. Алгоритмы одномерного быстрого преобразования Фурье/ Сб. «Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении», Самара, СГАУ, 2001. - с.109-118.
102. Ольховский Ю.Б., Новоселов О.Н., Мановцев А.П. Сжатие данных при телеизмерениях. -М.:Сов.радио,1971.-303с.
103. Ольшевский В.В. Основы теории статистических измерений. -Таганрог: ТРТИ,1976.-107с.
104. Орищенко В.И., Санников В.Г., Свириденко В.А. Сжатие данных в системах сбора и передачи информации. - М.: Радио и связь, 1985. - 184 с., ил.
105. Перспективные средства вычислительной техники и автоматизации для создания интеллектуальных АСНИ /Прохоров С.А., Дерябкин В.П., Кривошеев А.О. и др. Под ред. Прохорова С.А.: НПЦ «Авиатор», Самара, 1994. - 99 с.
106. Полляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. - М.: Сов. радио, 1971 400 с.
107. Попов Ю.П., Самарский А.А. Вычислительный эксперимент. - Новое в жизни, науке и технике. Сер. Мат-ка, киб., 1983, №11, М.: Знание. - 64 с.
108. Прохоров С. А., Графкин А. В. Программный комплекс корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах. / СНЦ РАН, 2005. 198 с., ил.
109. Прохоров С. А., Графкин А.В. Применение ортогональных функций для аппроксимации спектральных плотностей мощности / Труды Всероссийской межвузовской научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании» / Секция «Компьютерные технологии в науке». Самара: СамГТУ, - 2005. 241 с. - с. 50-54.
110. Прохоров С. А., Графкин А.В., Графкин В.В. Автоматизированный комплекс корреляционно-спектрального анализа методом аппроксимации ортогональными функциями / Вестник Самарского государственного технического университета, серия «Технические науки», №33. - Самара, 2005. - 360 с. - с. 329-334.
111. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. - 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. 380 с., ил.
112. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. - Самара, СНЦ РАН, 2001 329 с.
113. Прохоров С.А. Дегтярева О.А. Аппроксимация плотности вероятности ортогональными функциями Лагерра и получение аналитических выражений для характеристических функций по параметрам модели. / Электронный журнал "Исследовано в России", 117, стр. 1184-1189, 2005.
114. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. - Уральск, 2001. 209 с.: ил.
115. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум./Самар. гос. аэрокосм. ун-т, Уральск, 2001. 191 с.: ил.
116. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум. - 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. 277 с., ил.
117. Прохоров С.А. Прикладной анализ неэквидистантных временных рядов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. - Уральск, 2001. 374 с.: ил.
118. Прохоров С.А., А.В. Иващенко, А.В. Графкин.; Под ред. Прохорова С.А. Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа случайных процессов. - СНЦ РАН, 2003. 286 с., ил.
119. Прохоров С.А., Графкин А.В. Применение ортогональных функций для аппроксимации спектральной плотности мощности/ Труды 5 Всероссийской межвузовской научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании», СГТУ, Самара, 2006. - с. 50-54.

120. Прохоров С.А., Графкин А.В., Графкин В.В. Автоматизированный комплекс корреляционно-спектрального анализа методом аппроксимации ортогональными функциями/ Вестник Самарского государственного технического университета. Выпуск 33. Серия «Технические науки». 2005. – с. 329-324.
121. Прохоров С.А., Графкин В.В. Автоматизированная система аппроксимативного анализа случайных процессов со стационарными приращениями/ Материалы докладов часть II. VIII Всероссийская научно-техническая конференция «Повышение эффективности средств обработки информации на базе математического моделирования», Тамбов, 2006. – с. 299-308.
122. Прохоров С.А., Графкин В.В. Аппроксимация структурных функций случайных процессов/ Труды 3 Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи», Самара, 2006. – с. 82-85.
123. Прохоров С.А., Графкин В.В. Определение спектральной плотности мощности случайного процесса по аппроксимации структурной функции/ Материалы третьей международной научно-технической конференции «Радиотехника и связь», Саратов, 2006. – с. 13-17.
124. Прохоров С.А., Графкин В.В. Оценка структурной функции по параметрам модели спектральной плотности мощности в ортогональных базисах экспоненциального типа/ Труды научно-технической конференции с международным участием «Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении (ПИТ-2006)». Том 1. – Самара, 2006. – с. 151-153.
125. Прохоров С.А., Графкин В.В. Подсистема спектрального анализа случайных процессов/ Труды 5 Всероссийской межвузовской научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании», СГТУ, Самара, 2006. – с. 53-55.
126. Прохоров С.А., Дегтярева О.А. Автоматизированная система аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов. / Вестник Самарского Государственного Технического Университета. Выпуск 33. Серия «Технические науки». Самара: СамГТУ, - 2005, 360 с. – с. 335-340.
127. Прохоров С.А., Дегтярева О.А. Аппроксимация плотностей распределения вероятности стационарных случайных процессов ортогональными функциями Лагерра. / Труды международного симпозиума "Надежность и качество-2005" / Под ред. Н.К. Юркова, В.А. Трусова, В. Я. Баннова, Пенза: издательство Пензенского гос. университета, 2005, 530 с., ил. – с. 101-103.
128. Прохоров С.А., Дегтярева О.А. Подсистема генерирования псевдослучайных последовательностей автоматизированной системы аппроксимативного анализа законов распределения//Вестник СГАУ. Серия: актуальные проблемы радиоэлектроники. – Самара, СГАУ, 2001. – С. 100-110.
129. Прохоров С.А., Дегтярева О.А. Подсистема генерирования псевдослучайных последовательностей автоматизированной системы аппроксимативного анализа законов распределения. / Актуальные проблемы радиоэлектроники. Выпуск 6. Самара: СГАУ 2001, - с. 100-110.
130. Прохоров С.А., Дегтярева О.А. Получение аналитических выражений для плотности распределения вероятностей по параметрам аппроксимации характеристических функций ортогональными функциями Лагерра / Материалы научно-практической конференции «Проблемы качества, безопасности и диагностики в условиях информационного общества КБД-инфо-2005» / Под ред. В.Г. Домрачева, С.У. Увайсова. МИЭМ, 2005, 461 с., ил. – с. 169-175.
131. Прохоров С.А., Иващенко А.В. Автоматизированная информационная система для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик// Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении. – Самара, СГАУ, 2001. – С. 135-141.
132. Прохоров С.А., Иващенко А.В. Автоматизированная информационная система для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик / Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении. Самара: СГАУ, 2001. – с. 135-141.
133. Прохоров С.А., Иващенко А.В. Автоматизированная система для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик временных рядов// Труды международного симпозиума «Надежность и качество», Пенза, 2002. -. С. 146-149.
134. Прохоров С.А., Иващенко А.В. Автоматизированная система для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик временных рядов / Труды международного симпозиума "Надежность и качество" / Под ред. Н.К. Юрьева. Пенза: Информационно-издательский центр Пензенского гос. университета, 2002. – с. 146-149.

135. Прохоров С.А., Иващенко А.В. Аппроксимативный корреляционно-спектральный анализ / В сб. Надежность и качество: Труды международного симпозиума "Надежность и качество" 2003" / Под ред. Н.К. Юркова. Пенза: Изд-во Пенз. гос. университета, 2003. – 545 с., илл. – 312; табл. – 92; библи. – 813 назв. – с. 187-189. г.
136. Прохоров С.А., Иващенко А.В. Ортогональные разложения корреляционно-спектральных функций. Математическое моделирование информационных и технологических систем: Сб. науч. тр. Вып. 6 / Воронеж. гос. технол. акад. – Воронеж, 2003. – 228 с.
137. Прохоров С.А., Иващенко А.В., Графкин А.В. Автоматизация корреляционно-спектрального анализа временных рядов / "Датчики и преобразователи информации систем измерения, контроля и управления": Сб. материалов XV Научно-технической конференции с участием зарубежных специалистов / Под ред. проф. В.Н. Азарова. М.: МГИЭМ, 2003. – 337 с. – с. 313-314.
138. Прохоров С.А., Кудрина М.А., Кудрин К.А. Автоматизированная система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа/ Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета № 1 (5), 2004. с. 117-123.
139. Прохоров С.А., Кудрина М.А., Новиченкова И.Ю., Шевченко Д.В. Автоматизированная учебно-исследовательская система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа // Сборник научных трудов, посвященных 25-летию факультета информатики "Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении". – Самара, 2001. – С. 142-156.
140. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Автоматизированная система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах Якоби/ Труды 5 Всероссийской межвузовской научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании», СГТУ, Самара, 2006. – с. 50-53.
141. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Корреляционно-спектральный анализ в ортогональных базисах Якоби/ Труды Всероссийской межвузовской научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании», СГТУ, Самара, 2005. – с. 54-59.
142. Прохоров С.А., Лабораторный практикум по моделированию и анализу случайных процессов/ Материалы XIV научно-технической конференции с участием зарубежных специалистов «Датчики и преобразователи информации систем измерения, контроля и управления «Датчик-2002»». – с. 305-306.
143. Прохоров С.А., Лезин И.А. Лезина И.В. Сравнение качества восстановления функций различными нейросетевыми моделями/ Труды Всероссийской межвузовской научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании», СГТУ, Самара, 2005. – с. 59-62.
144. Прохоров С.А., Лезин И.А., Лезина И.В. Аппроксимация законов распределения ортогональными полиномами/ Вестник Самарского государственного технического университета. Выпуск 34. Серия «Физико-математические науки». 2005 – с. 128-136.
145. Прохоров С.А., Лезин И.А., Лезина И.В. Определение функциональных характеристик случайных процессов методами аппроксимации и нейросетевого анализа и их сравнение/ Вестник Самарского государственного технического университета. Выпуск 33. Серия «Технические науки» 2005. Вестник Самарского государственного технического университета. Выпуск 33. Серия «Технические науки». 2005. – с. 340-346.
146. Прохоров С.А., Москаленко И.С. Автоматизированная система аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик временных рядов/ Надежность и качество. Труды международного симпозиума/под ред. Н.К. Юркова. - Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2005. с. 98-101.
147. Прохоров С.А., Москаленко И.С. Автоматизированная система для аппроксимации взаимных корреляционно-спектральных характеристик временных рядов/ Материалы международной научно-технической конференции, посвященной 110-летию изобретения радио и 75-летию Саратовского государственного технического университета, СГТУ, Саратов, 2005. – с. 21-26.
148. Прохоров С.А., Москаленко И.С. Анализ методических погрешностей оценок спектральных характеристик в ортогональных базисах/ Надежность и качество. Труды международного симпозиума/под ред. Н.К. Юркова. - Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2006, том 1. – 62-65.
149. Прохоров С.А., Москаленко И.С. Аппроксимация спектральной плотности мощности ортогональными функциями и оценка моделей корреляционных функций/ Труды 3 Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи», Самара, 2006. – 86-89.

150. Прохоров С.А., Москаленко И.С. Оценка взаимной корреляционной функции по параметрам ортогональных моделей спектральных характеристик/ Материалы третьей международной научно-технической конференции «Радиотехника и связь», Саратов, 2006. – с. 39-43.
151. Прохоров С.А., Москаленко И.С. Подсистема имитационного моделирования автоматизированной учебно-исследовательской системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах/ Материалы докладов часть II. VIII Всероссийская научно-техническая конференция «Повышение эффективности средств обработки информации на базе математического моделирования», Тамбов, 2006. – с. 98-
152. Прохоров С.А., Солдатова И.В., Лезин И.А. Автоматизированные системы аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов/ Труды международного симпозиума «Надежность и качество», Пенза 2004. – с. 57-63.
153. Прохоров С.А., Станкевич А.И. Автоматизированная информационная учебно-исследовательская система аппроксимативного анализа нестационарных случайных процессов в ортогональных базисах/ Материалы докладов часть II. VIII Всероссийская научно-техническая конференция «Повышение эффективности средств обработки информации на базе математического моделирования», Тамбов, 2006. – с.319-326.
154. Прохоров С.А., Станкевич А.И. Аппроксимация нестационарных случайных процессов в ортогональных базисах/ Труды 3 Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи», Самара, 2006. – 89-92.
155. Прохоров С.А., Станкевич А.И. Применение метода аппроксимации с использованием части интервала ортогональности для экстраполяции временного ряда/ Материалы третьей международной научно-технической конференции «Радиотехника и связь», Саратов, 2006. – с. 43-47.
156. Прохоров С.А., Частотные свойства ортогональных функций экспоненциального типа/ Труды научно-технической конференции с международным участием «Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении (ПИТ-2006)». Том 2. – Самара, 2006.- с. 55- 62.
157. Прохоров С.А., Широков О.Ю. Дискретное преобразование Фурье неэквидистантных временных рядов./ "Датчики и преобразователи информации систем измерения, контроля и управления": Сб. материалов XVI Научно-технической конференции с участием зарубежных специалистов / Под ред. проф. В.Н. Азарова. М.: МГИЭМ, 2004. – 355 с. – с. 74-76.
158. Пугачёв В.С. Введение в теорию вероятностей. - М.: Наука, 1968. - 368 с.
159. Пугачёв В.С. Теория случайных функций. - М.: Физматгиздат., 1962. – 884 с.
160. Пятин В. Ф., Мирошниченко И. В., Кульчицкий В. А. // Бюлл. экспер. биол. мед. 2001. Т. 132. № 8. С. 129-132.
161. Рабинер П., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов.//Пер. с англ./Под ред. Ю.Н. Александрова. - М.: Мир, 1978.-848 с.
162. Рожков В.А. Методы вероятностного анализа океанологических процессов. – Л.: Гидрометеиздат, 1979. – 280 с.
163. Романенко А.Ф. Сергеев Г.А. Аппроксимативные методы анализа случайных процессов. - М.: Энергия, 1974.-176 с., ил.
164. Романенко А.Ф., Сергеев Г.А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. - М.: Сов. радио, 1968. - 256 с.
165. Руководство по гидрологическим работам в океанах и морях. -Л.:Гидрометеиздат.- 1977.-752с.
166. Соучек Б. Мини-ЭВМ в системах обработки информации. - М.: Мир, 1976. – 520 с.
167. Сухинин В.П., Прохоров С.А. Идентификация стационарных случайных процессов по виду корреляционной функции //Идентификация и автоматизация технологических процессов и промышленных установок. Куйбышев. - 1982. - С. 25 - 29.
168. Сушков В.С. Синтез цифрового фильтра для моделирования на ЦВМ стационарных гауссовских процессов и корреляционной функции произвольного вида. В кн.: Всесоюзный симпозиум « Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей». Тезисы докладов. Секция 4. – Л., 1976, С. 35-39.
169. Техническое описание многофункционального устройства МФУ NVL08.
170. Хуснутдинов Г.Н., Яролошвили Р.В. Погрешность воспроизведения образцовой корреляционной функции. В кн.: Всесоюзный симпозиум « Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей». Тезисы докладов. Секция 4. – Л., 1971, С. 61-67.

171. Учватов С.В. Автоматизированная информационная система аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов. Дипломная работа, каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2000.- 69 с.
172. Цветков Э.И. Методические погрешности статистических измерений - Л: Ленинградское отделение Энергоатомиздата, 1984.-144с., ил.
173. Цветков Э.И. Нестационарные случайные процессы и их анализ. - М.: Энергия, 1973.-128с., ил.
174. Цветков Э.И. Основы теории статистических измерений. - 2-е изд., перераб. и доп. - Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отделение, 1982. - 256 с.
175. Численные методы: Курс лекций/ А.Н. Коварцев. Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2000, 177 с.
176. Шахматов Е.В., Прохоров С.А., Крючков А.Н., Иващенко А.В., Гаспаров М.С. Определение звукоизолирующей способности элементов конструкций: Сб. тр. международной научно-технической конференции "Проблемы и перспективы развития двигателестроения" / Самара: СГАУ, - 2003. - с. 318 – 323.
177. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. – М.: Мир, 1972.
178. Широков О. Ю., Прохоров С. А., Овсянников А. С. Deskriptorные алгоритмы преобразования Фурье // Вестник СГАУ. Актуальные проблемы радиоэлектроники. Вып. 6. Самара, ИПО СГАУ, 2001. - с.94–99.
179. Barros R. C., Branco L. G. // J Appl. Physiol. 1998. Vol. 85, № 3. P. 967-972.
180. DiPasqual E., Monteau R., Hilaire G. // Exp. Brain Res. 1992. Vol. 89. P. 459-464.
181. Heart rate variability. Standarts of measurement, physiological interpretation, and clinical use. Task Force of The European Society of Cardiology and The North American Society of Pacing and Electrophysiology (Membership of the Task Force listed in the Appendix). European Heart J, 1996; 17: 354-81.
182. Hilaire G., Monteu R., Errchidi S. // Brain Res. 1989. Vol. 485. P. 325-332.
183. Lampard D.G. A new Method of determining Correlation Function Stationary Time Series. "Proceedings of the Institution of Electrical Engineers", vol. 102, part. C. March, 1955, London, № 1.
184. Onimaru H., Arata A., Homma I. //Jap. J. Physiol. 1997. Vol 47, N 5. P. 385-403.
185. Prokhorov S. Manual for the Simulation of Random Processes and Dynamic Systems. - IRB.- Zagreb. - 1980. - 62 p.
186. Soucek B. and Carlson A.D. Computers in Neurobiology and Behaviour (John Wiley, New York, 1976).
187. Soucek B., Prokhorov S. Amplitude Correlator Based on Small Computers//Proceedings of the IV International Symp. «MIMI 80». - Budapest. - 1980. - P.264-267.
188. Soucek B., Prokhorov S. Event - Train Correlation and Real - Time Microcomputer Systems//Microprocessing and Microprogramming. - vol. 11 (1983).- № 1. - North Holland Publishing Company. - P. 23-29.
189. Soucek B., Prokhorov S. Event-Train Correlator Based on Small Computers//Proceedings of the IV International Symp. «MIMI 80». - Budapest. - 1980. - P.264-267.

Типовые законы распределения

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$
1	Равномерный	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < a); \\ \frac{1}{b-a}, (a < x < b); \\ 0, (b < x < \infty); \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < a); \\ \frac{x-a}{b-a}, (a < x < b); \\ 0, (b < x < \infty); \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры $F_x(x)$
	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	0; 0;	$(b-a)^4/80;$ -1,2;	$a = \alpha_1 - \sqrt{3\mu_2};$ $b = \alpha_1 + \sqrt{3\mu_2};$
2	Симпсона	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < a); \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, (a < x < (a+b)/2); \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, (b < x < \infty); \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < a); \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, (a < x < (a+b)/2); \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, (b < x < \infty); \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры $F_x(x)$
	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/24$	0; 0;	$(b-a)^4/240;$ -0,6;	$a = \alpha_1 - \sqrt{6\mu_2};$ $b = \alpha_1 + \sqrt{6\mu_2};$
3	Арксинуса	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, (-a < x < a), \\ 0, (a < x < \infty), \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a}, (-a < x < a), \\ 1, (a < x < \infty), \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры $F_x(x)$
	0	$a^2/2$	0; 0;	$3a^4/8;$ -1,5;	$a = \sqrt{2\mu_2}$
4	Коши	$\frac{a}{\pi[(x-\mu)^2 + a^2]}$			$\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-\mu}{a} + \frac{1}{2}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	
	Начальных и центральных моментов не существует, так как соответствующие интегралы расходятся				

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$
5	Лапласа	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x-\mu }$			$\begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda(x-\mu)}, (-\infty < x < \mu), \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda(x-\mu)}, (\mu < x < \infty), \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры $F_x(x)$
	μ	$2 / \lambda^2$	$6 / \lambda^3;$ $\approx 2,1;$	$24 / \lambda^4;$ $3;$	$\mu = \alpha_1;$ $\lambda = \sqrt{2 / \mu_2};$
6	Вейбулла	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \alpha \beta x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha); \\ \alpha > 0, \beta > 0 \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0), \\ 1 - \exp(-\beta x^\alpha), (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	
	$\Gamma(1+1/\alpha)\beta^{-1/\alpha}$	$[\Gamma(1+2/\alpha)) - \Gamma^2(1+1/\alpha)] \times \beta^{-2/\alpha}$	$[\Gamma(1+3/\alpha) - 3\Gamma(1+1/\alpha) \times \Gamma(1+2/\alpha) + 2\Gamma^3(1+1/\alpha)] \times \beta^{-3/\alpha};$ $\mu_3 / \mu_2^{3/2};$	$[\Gamma(1+4/\alpha) - 4\Gamma(1+3/\alpha) \times \Gamma(1+1/\alpha) + 6\Gamma(1+2/\alpha) \times \Gamma^2(1+1/\alpha) - 3\Gamma^4(1+1/\alpha)] \times \beta^{-4/\alpha};$ $\mu_4 / \mu_2^2 - 3;$	
7	Рэлея	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры $F_x(x)$
	$\frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \approx 1,25\sigma$	$\frac{4-\pi}{2} \sigma^2 \approx 0,43 \sigma^2$	$\frac{(\pi-3)\sqrt{\pi}}{2} \times \sigma^3 \sqrt{2};$ $\approx 0,63;$	$\frac{32-3\pi^2}{4} \sigma^4;$ $\approx -0,3;$	$\sigma \approx 0,8\alpha_1$
8	Экспоненциальный	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \alpha e^{-\alpha x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ 1 - e^{-\alpha x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры $F_x(x)$
	$1/\alpha$	$1/\alpha^2$	$2/\alpha^3;$ $2;$	$9/\alpha^4;$ $6;$	$\alpha = 1/\alpha_1$

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$
9	$\sec h^2 x$	$\frac{a}{2} \sec h^2 ax$			$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} ax$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры $F_x(x)$
	0	$\frac{\pi^2}{12a^2}$	0; 0;	$\frac{7\pi^4}{240a^4};$ 4,2;	$a = \frac{\pi}{2\sqrt{3\mu_2}}$
10	Нормальный	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp(-(x-a)^2 / 2\sigma^2)$			$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^x \exp(-(t-a)^2 / 2\sigma^2) dt$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры $F_x(x)$
	a	σ^2	0; 0;	$3\sigma^4;$ 0;	$a = \alpha_1;$ $\sigma = \sqrt{\mu_2};$
11	Односторонний нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp(-x^2 / 2\sigma^2), x > 0 \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \int_0^x \exp(-t^2 / 2\sigma^2) dt, x > 0 \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры $F_x(x)$
	$\approx 0,8\sigma$	$\approx 0,36\sigma^2$	$\approx 0,22\sigma^3;$ $\approx 1;$	$\approx 0,54\sigma^4;$ $\approx 0,85;$	$\sigma = 1,25\alpha_1$
12	Пирсона	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}; \\ \lambda = n/2 (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \frac{\Gamma(\lambda, \alpha x)}{\Gamma(\lambda)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры $F_x(x)$
	λ / α	λ / α^2	$2\lambda / \alpha^3;$ $2 / \sqrt{\lambda};$	$3\lambda(\lambda + 2) / \alpha^4;$ $6 / \lambda;$	$\alpha = \alpha_1 / \mu_2;$ $\lambda = \alpha_1^2 / \mu_2;$

№	Название закона	$f_x(x)$	$F_x(x)$
13	Распределение модуля нормальной случайной величины	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \left[e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma^2}} \right]; \\ (0 \leq x < \infty) \end{cases}$	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0) \\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, (0 \leq x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$
	$\frac{\sigma \sqrt{2\pi} (n-1)!!}{2^{n/2} \Gamma(n/2)};$ $\frac{\sigma \sqrt{2\pi} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\Gamma(n/2)};$ $(n = 2k)$ $(n = 2k + 1)$	$\sigma^2 \left[n - \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} - 2 \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \right]$	$\sigma_3 \sqrt{2} \left[(1-2n) \times \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + \frac{\Gamma^3\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^3\left(\frac{n}{2}\right)} + 4 \frac{\Gamma^3\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^3\left(\frac{n}{2}\right)} \right];$ $\mu_3 / \mu_2^{3/2};$
			$4\sigma^4 \left[\frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1\right) + \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} + (n+2) \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} - 3 \frac{\Gamma^4\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^4\left(\frac{n}{2}\right)} \right]$ $\mu_4 / \mu_2^2 - 3;$
14	Усечённый нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty < x \leq x_1); \\ \frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, (x_1 < x \leq x_2); \\ 0, (x_1 < x < x_2); \end{cases}$ $A = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [B(x_2) - B(x_1)]},$ $B(x_i) = \int_0^{\frac{x_i-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$	$\begin{cases} 0, (-\infty < x \leq x_1); \\ \frac{B(x) - B(x_1)}{B(x_2) - B(x_1)}, (x_1 < x \leq x_2); \\ 0, (x_1 < x < x_2); \end{cases}$
	α_1	μ_2	
	$a + E\sigma;$ $D(x) = \frac{x-a}{\sigma}; C(x) = \exp\left(-\frac{D^2(x)}{2}\right);$ $E = \frac{C(x_1) - C(x_2)}{B(x_2) - B(x_1)};$	$\sigma^2 \left\{ 1 - E^2 - \frac{A}{\sqrt{2\pi}} [D(x_2)C(x_2) - D(x_1)C(x_1)] \right\}$	

Продолжение приложения 1

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$
15	Эрланга	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\beta x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\beta x} (\beta x)^k}{k!}, \\ (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры $F_x(x)$
	α / β	α / β^2	$2\alpha / \beta^3;$ $2 / \sqrt{\alpha};$	$3\alpha(\alpha+2) / \beta^4;$ $6 / \alpha;$	$\alpha = \alpha_1^2 / \mu_2;$ $\beta = \alpha_1 / \mu_2;$
16	«Гамма-распределение»	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, (0 < x < \infty), \\ \alpha > -1, \beta > 0 \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\Gamma\left(\alpha+1; \frac{x}{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры $F_x(x)$
	$(\alpha+1)\beta$	$(\alpha+1)\beta^2$	$2(\alpha+1)\beta^3;$ $\frac{2}{\sqrt{\alpha+1}};$	$3(\alpha+3)(\alpha+1)\beta^4;$ $\frac{6}{\alpha+1};$	$\alpha = \frac{\alpha_1^2}{\mu_2} - 1;$ $\beta = \frac{\mu_2}{\alpha_1};$
17	Показательно-степенной	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{x^m}{m!} e^{-x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\Gamma(m+1, x)}{\Gamma(m+1)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры $F_x(x)$
	$m+1$	$m+1$	$2(m+1);$ $\frac{2}{\sqrt{m+1}};$	$3(m+3)(m+1);$ $\frac{6}{m+1};$	$m = \alpha_1 - 1$
18	Максвелла	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{4}{\sqrt{\pi} (2\sigma^2)^{3/2}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры $F_x(x)$
	$\approx 1,6\sigma$	$\approx 1,73\sigma^2$	$\approx 0,15\sigma^3;$ $\approx 0,07;$	$\approx 13,5\sigma^4;$ $\approx 1,55;$	$\sigma \approx 0,625\alpha_1$

Характеристические функции

№	Название закона	$f_x(x)$	$\varphi_x(u)$
1	Равномерный	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < a); \\ \frac{1}{b-a}, (a < x < b); \\ 0, (b < x < \infty); \end{cases}$	$\frac{e^{iub} - e^{iua}}{iu(b-a)}$
2	Симпсона	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < a); \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, (a < x < (a+b)/2); \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, (b < x < \infty); \end{cases}$	$-\frac{4}{u^2(b-a)^2}(e^{iub/2} - e^{iua/2})$
3	Арксинуса	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, (-a < x < a), \\ 0, (a < x < \infty), \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{e^{iux}}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$
4	Коши	$\frac{a}{\pi[(x-\mu)^2 + a^2]}$	$\exp[i\mu u - a u]$
5	Лапласа	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x-\mu }$	$\frac{\exp(iu\mu)}{1+u^2/\lambda^2}$
6	Вейбулла	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \alpha\beta x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha); \\ \alpha > 0, \beta > 0 \end{cases}$	$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iu)^2}{k!} \beta^{-k/\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right)$
7	Рэлея	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), (0 < x < \infty) \end{cases}$	$1 - \frac{(-1)^k k! (u\sigma\sqrt{2})^{2k+2}}{\sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)!} + i \frac{u\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \exp(-u^2\sigma^2/2)$
8	Экспоненциальный	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \alpha e^{-\alpha x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\alpha - iu}$
9	$\sec h^2 x$	$\frac{a}{2} \sec h^2 ax$	$\frac{u\pi}{2a \operatorname{sh} \frac{u\pi}{2a}}$
10	Нормальный	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-(x-a)^2/2\sigma^2\right)$	$\exp(iua - u^2\sigma^2/2)$

11	Односторонний нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp(-x^2 / 2\sigma^2), x > 0 \end{cases}$	$\exp(u^2 \sigma^2 / 2) \times$ $\times \left[1 + \Phi\left(\frac{i u \sigma}{\sqrt{2}}\right) \right];$ $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$
12	Пирсона	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}; \end{cases}$ $\lambda = n / 2 \ (n = 1, 2, \dots)$	$\frac{1}{(1 - i u / \alpha)^\lambda}$
13	Эрланга	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\beta x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\left(1 - \frac{i u}{\beta}\right)^{-\alpha}$
14	«Гамма-распределение»	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, (0 < x < \infty), \\ \alpha > -1, \beta > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{(1 - i u \beta)^{\alpha+1}}$
15	Показательно-степенной	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{x^m}{m!} e^{-x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\frac{1}{(1 - i u)^{m+1}}$

Обратные функции законов распределения

Закон распределения	Обратная функция
Симпсона	$\begin{cases} a, y = 0 \\ (b - a) \sqrt{\frac{y}{2}} + a, (0 < y < \frac{1}{2}) \\ b - \sqrt{\frac{1-y}{2}} * (b - a), [\frac{1}{2} < y < 1) \\ b, y = 1 \end{cases}$
Арксинуса	$\begin{cases} -a, y = 0 \\ -a * \cos(\pi y), (0 < y < 1) \\ a, y = 1 \end{cases}$
Коши	$a * \operatorname{tg}(\pi y - \frac{\pi}{2}) + \mu$
Лапласа	$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} * \ln(2y) + \mu, (0 < y < \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{\lambda} \ln(2 * (1 - y)) + \mu, [\frac{1}{2} < y < 1) \end{cases}$
Вейбулла	$\begin{cases} 0, y = 0 \\ \sqrt[\alpha]{-\frac{1}{\beta} \ln(1 - y)}, (0 < y < 1) \end{cases}$
Рэлея	$\begin{cases} 0, y = 0 \\ \sqrt{-2 * \sigma^2 \ln(1 - y)}, (0 < y < 1) \end{cases}$
Экспоненциальный односторонний	$\begin{cases} 0, y = 0 \\ -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y), (0 < y < 1) \end{cases}$
Равномерный	$y(b - a) + a$
$\operatorname{sech}^2 ax$	$\frac{1}{2 * a} \ln(\frac{y}{1 - y})$

Характеристики типовых законов распределения (Рд=0,999)

№	Название	$f_x(x)$	$ F''(x) $	dx
1	Нормальный	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{1}{2}}$	$6,8 \sigma_x$
2	Односторонний нормальный	$\sqrt{\frac{2}{\pi \sigma_x^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$	$\frac{1}{\sigma_x} \sqrt{\frac{2}{\pi \sigma_x^2}} e^{-\frac{1}{2}}$	$3,4 \sigma_x$
3	Усечённый нормальный	$\frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$ $A = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [B(x_2) - B(x_1)]},$ $B(x_i) = \int_0^{\frac{x_i-a}{\sigma_x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$	$\frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma_x^2} e^{-\frac{1}{2}}$	$(x_2 - x_1) \sigma_x$
4	Распределение модуля нормальной случайной величины	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \left[e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}} - e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma_x^2}} \right]$	X_3 определяется из уравнения $(x^2 + a^2 - \sigma_x^2) ch \frac{ax}{\sigma_x^2} - 2ax sh \frac{ax}{\sigma_x^2} = 0;$ $\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x^3} \left[(x-a) e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}} + (x+a) e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma_x^2}} \right]$	$3,15 \sigma_x$

№	Название	$f_x(x)$	$ F''(x) $	dx
5	Логарифмический нормальный	$\frac{1}{x\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma_x^2}}$	$-\frac{1}{\sigma_x^3\sqrt{2\pi}x^2} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma_x^2}} (\sigma_x^2 + \ln x - a),$ $x = e^{a-1,5\sigma_x^2 \mp \sqrt{0,25\sigma_x^4 + 1}}$	$e^{3,085\sigma_x + a}$
6	Экспоненциальный	$\alpha e^{-\alpha x}$	α^2	$\frac{6,9078}{\alpha}$
7	Пирсона	$\frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, \lambda = \frac{n}{2}, (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{\alpha^2 \sqrt{\lambda-1} (\lambda-1-\sqrt{\lambda-1})^{\lambda-2}}{\Gamma(\lambda)} e^{-(\lambda-1-\sqrt{\lambda-1})}$	$\frac{4}{\alpha}$
8	Гамма- распределение	$\frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, \alpha > -1, \beta > 0$	$\frac{\sqrt{\alpha}(\alpha-\sqrt{\alpha})^{\alpha-1}}{\beta^2 \Gamma(\alpha+1)} e^{-(\alpha-\sqrt{\alpha})}$	$9,5\beta$
9	Максвелла	$\frac{4}{\sqrt{\pi}(2\sigma_x^2)^{3/2}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$	$\frac{4,1357\sigma_x}{\sqrt{\pi}(2\sigma_x^2)^{3/2}} e^{-0,2192}$	$4,1\sigma_x$
10	Распределение модуля многомерного вектора	$\frac{2x^{n-1}}{(2\sigma_x^2)^{n/2} \Gamma(n/2)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{[\sigma_x \sqrt{n-0,5(1+\sqrt{8n-7})}]^{n-2}}{(2\sigma_x^2)^{n/2} \Gamma(n/2)} [\sqrt{8n-7}-1] \times$ $\times e^{-\frac{n-0,5(1+\sqrt{8n-7})}{2}}$	$3,8\sigma_x$
11	«m- распределение» (Накагами)	$\frac{2m^m x^{2m-1}}{\Gamma(m) \sigma_x^{2m}} e^{-\frac{mx^2}{\sigma_x^2}}, m \geq 1/2$	$m = 1/2, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-1/2}}{\sigma_x^2}$ $m = 1, \frac{6}{\sigma_x^2} e^{-3/2}$	$\frac{2,33\sigma_x}{\sqrt{m}}$

№	Название	$f_x(x)$	$ F''(x) $	dx
12	Показательно-степенной	$\frac{x^m}{m!} e^{-x}$	$\sqrt{m} \frac{(m - \sqrt{m})^{m+1}}{m!} e^{-(m - \sqrt{m})}$	
13	Эрланга	$\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\beta x}, \alpha = 1, 2, 3 \dots$	$\frac{\beta^2 \sqrt{\alpha-1} (\alpha-1 - \sqrt{\alpha-1})^{\alpha-2}}{(\alpha-1)!} e^{-(\alpha-1 - \sqrt{\alpha-1})}$	
14	Гиперэкспоненциальный	$\sum_{n=1}^N \alpha_n \lambda_n e^{-\lambda_n x}$	$\sum_{n=1}^N \alpha_n \lambda_n^2$	

Приложение 5

Таблица χ^2 распределения

r\p	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10
1	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60
3	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25
4	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78
5	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24
6	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64
7	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02
8	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36
9	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68
10	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99
11	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28
12	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55
13	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81
14	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,10
15	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,30
16	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,50	23,50
17	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,60	24,80
18	10,86	12,86	14,44	17,34	20,60	22,80	26,00

Приложение 6

Таблица значений коэффициента λ к критерию Колмогорова

$\delta \backslash N$	500	1000	2000	5000	8000	10000
0,0025	0,0559	0,0790	0,1118	0,1767	0,2236	0,25
0,005	0,1118	0,1581	0,2236	0,3535	0,4472	0,5
0,01	0,2236	0,3162	0,4472	0,7071	0,8944	1
0,02	0,4472	0,6324	0,8944	1,4142	1,7889	2
0,03	0,6708	0,9486	1,3416	2,1213	2,6833	3
0,04	0,8972	1,2648	1,7888	2,8284	3,5777	4
0,05	1,1208	1,5810	2,2360	3,5355	4,4721	5

Приложение 7

Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом нерекурсивной фильтрации

$K_x(\tau)$	$h(\tau)$	K
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	$k\alpha e^{-\alpha\tau}$	$\sigma_x \sqrt{\frac{1}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$k\alpha^2 \tau e^{-\alpha\tau}$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau)$	$k\alpha e^{-\alpha\tau} (1 - \alpha\tau)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$k\alpha^3 \tau^2 e^{-\alpha\tau}$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{3\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$k\alpha e^{-\alpha\tau} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} - \alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{1}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\frac{k\alpha \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}}{\omega_0} e^{-\alpha\tau} \sin \omega_0 \tau$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$k\alpha e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$

Алгоритмы рекурсивной фильтрации

Вид модели	Генерирующий алгоритм	Параметры алгоритма
1	2	3
$e^{-\lambda \tau }$	$y_0 = x_0$ $y_n = a_0 x_n + b_1 y_{n-1}$	$\gamma = \lambda \Delta t$; $p = e^{-\gamma}$; $a_0 = \sqrt{1-p^2}$; $b_1 = p$
$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau)$	$y_0 = x_0$ $y_1 = a_0 x_1 +$ $+ a_1 x_0 +$ $+ b_1 y_0$	$\gamma = \lambda \Delta t$; $p = e^{-\gamma}$; $\alpha_0 = p^3(1+\gamma) - p(1-\gamma)$; $\alpha_1 = 1 - 4p^2\gamma - p^4$; $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}$; $a_1 = \frac{\alpha_1}{a_0}$; $b_1 = 2p$; $b_2 = -p^2$
$e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau)$	$y_n = a_0 x_n +$ $+ a_1 x_{n-1} +$ $+ b_1 y_{n-1} +$ $+ b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \lambda \Delta t$; $p = e^{-\gamma}$; $\alpha_0 = p^3(1-\gamma) - p(1+\gamma)$; $\alpha_1 = 1 + 4p^2\gamma - p^4$; $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}$; $a_1 = \frac{\alpha_0}{a_0}$; $b_1 = 2p$; $b_2 = -p^2$
$e^{-\lambda \tau }\left(1 + \lambda \tau + \frac{\lambda^2 \tau^2}{3}\right)$	$y_0 = x_0$ $y_1 = a_0 x_1 +$ $+ b_1 y_0$ $y_2 = a_0 x_2 +$ $+ a_1 x_1 +$ $+ a_2 x_0 +$ $+ b_1 y_1 +$ $+ b_2 y_0$ $y_n = a_0 x_n +$ $+ a_1 x_{n-1} +$ $+ a_2 x_{n-2} +$ $+ b_1 y_{n-1} +$ $+ b_2 y_{n-2} +$ $+ b_3 y_{n-3}$	$\gamma = \lambda \Delta t$; $p = e^{-\gamma}$; $\alpha_0 = p^4(\gamma^2/3 + \gamma + 1) - p^2(\gamma^2/3 - \gamma + 1)$; $\alpha_1 = p^5(\gamma^2/3 - \gamma - 2) - 6\gamma p^3 - p(\gamma^2/3 + \gamma - 2)$; $\alpha_2 = p^6 - p^4(2\gamma^2 - 6\gamma - 3) + p^2(2\gamma^2 + 6\gamma - 3) - 1$; $y_{1,2} = \frac{-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2 + 8\alpha_0^2}}{2\alpha_0}$; $a_0 = \sqrt{-\alpha_0 \frac{(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4})(y_2 + \sqrt{y_2^2 - 4})}{2}}$; $a_2 = \sqrt{-\alpha_0 \frac{2}{(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4})(y_2 + \sqrt{y_2^2 - 4})}}$; $a_1 = -\alpha_2(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4})(y_2 + \sqrt{y_2^2 - 4})$; $b_1 = 3p$; $b_2 = -3p^2$; $b_3 = p^3$
$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$	$y_0 = x_0$ $y_1 = a_0 x_1 +$ $+ a_1 x_0 +$ $+ b_1 y_0$	$\gamma = \lambda \Delta t$; $p = e^{-\gamma}$; $\gamma_0 = \omega_0 \Delta t$; $\alpha_0 = p(p^2 - 1)\cos \gamma_0$; $\alpha_1 = 1 - p^4$; $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}$; $a_1 = \frac{\alpha_0}{a_0}$; $b_1 = 2p \cos \gamma_0$; $b_2 = -p^2$

1	2	3
$e^{-\lambda \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$y_n = a_0 x_n +$ $+ a_1 x_{n-1} +$ $+ b_1 y_{n-1} +$ $+ b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \lambda \Delta t; \quad p = e^{-\gamma}; \quad \gamma_0 = \omega_0 \Delta t;$ $\alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0 + \frac{\lambda}{\omega_0} p(p^2 + 1) \sin \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - p^4 - 4p^2 \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0;$ $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}; \quad a_1 = \frac{\alpha_0}{a_0};$ $b_1 = 2p \cos \gamma_0; \quad b_2 = -p^2$
$e^{-\lambda \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$		$\gamma = \lambda \Delta t; \quad p = e^{-\gamma}; \quad \gamma_0 = \omega_0 \Delta t;$ $\alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0 - \frac{\lambda}{\omega_0} p(p^2 + 1) \sin \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - p^4 + 4p^2 \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0;$ $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}; \quad a_1 = \frac{\alpha_0}{a_0};$ $b_1 = 2p \cos \gamma_0; \quad b_2 = -p^2$

Импульсные характеристики формирующих фильтров

Данное приложение содержит аналитические выражения для определения взаимных корреляционных функций процессов, полученных при прохождении «белого шума» через пару фильтров. Всего выбрано 7 типовых видов фильтров (см. табл. 1.1). Для их различных комбинаций найдены аналитические выражения и построены графики (см. П.3).

В первой таблице приведены импульсные характеристики формирующих фильтров $h_j(\tau)$ типовых моделей и корреляционные функции $K_{x(j)}(\tau)$, получаемые на выходе фильтра при прохождении через него «белого шума».

Далее приводятся аналитические выражения для взаимных корреляционных функций процессов, полученных при прохождении «белого шума» через пару фильтров. Они получены решением интеграла свертки (П2.1) для пары фильтров

$$K_{xy(ji)}(\tau) = 2\pi \int_0^{\infty} h_j(t + \tau) h_i(t) dt, \quad (\text{П9.1})$$

где j – номер модели первого фильтра, i – второго.

Для уменьшения объема записи взаимная корреляционная функция $K_{xy(ji)}(\tau)$ разбита на две ветви - $K_{xy(ji)}^{(1)}(\tau)$, определенную на интервале $(0, \infty)$, и $K_{xy(ji)}^{(2)}(\tau)$, определенную на $(-\infty, 0)$. Так как $K_{xy(ji)}^{(2)}(\tau) = K_{yx(ji)}^{(1)}(-\tau)$, приведены отдельно выражения для правой и левой ветвей. Взаимная корреляционная функция представляется в виде:

$$K_{xy(ji)}(\tau) = k_{(ji)} \cdot F_{(ji)}(\tau) \cdot e^{-\lambda_j \tau}.$$

j	$K_{x(j)}(\tau, \lambda_j, \omega_{0,j})$	k	$h_j(\tau)$
1	$\sigma_x e^{-\lambda_1 \tau }$	$\sigma_x \sqrt{\frac{1}{\lambda_1 \pi}}$	$k \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau}$
2	$\sigma_x e^{-\lambda_2 \tau } \cdot (1 + \lambda_2 \tau)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\lambda_2 \pi}}$	$k \lambda_2^2 \tau e^{-\lambda_2 \tau}$
3	$\sigma_x e^{-\lambda_3 \tau } \cdot (1 - \lambda_3 \tau)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\lambda_3 \pi}}$	$k \lambda_3 e^{-\lambda_3 \tau} \cdot (1 - \lambda_3 \tau)$
4	$\sigma_x e^{-\lambda_4 \tau } \cdot \left(1 + \lambda_4 \tau + \frac{\lambda_4^2 \tau^2}{3}\right)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{3 \lambda_4 \pi}}$	$k \lambda_4^3 \tau^2 e^{-\lambda_4 \tau}$
5	$\sigma_x e^{-\lambda_5 \tau } \cdot \cos(\omega_{0,5} \tau)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{1}{\lambda_5 \pi}}$	$k \lambda_5 e^{-\lambda_5 \tau} \left(\cos(\omega_{0,5} \tau) + \frac{\sqrt{\lambda_5^2 + \omega_{0,5}^2} - \lambda_5}{\omega_{0,5}} \sin(\omega_{0,5} \tau) \right)$
6	$\sigma_x e^{-\lambda_6 \tau } \cdot \left(\cos(\omega_{0,6} \tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6} \tau) \right)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\lambda_6 \pi}}$	$k \lambda_6 \frac{\sqrt{\lambda_6^2 + \omega_{0,6}^2}}{\omega_{0,6}} e^{-\lambda_6 \tau} \sin(\omega_{0,6} \tau)$
7	$\sigma_x e^{-\lambda_7 \tau } \cdot \left(\cos(\omega_{0,7} \tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7} \tau) \right)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\lambda_7 \pi}}$	$k \lambda_7 e^{-\lambda_7 \tau} \left(\cos(\omega_{0,7} \tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7} \tau) \right)$

1. ВКФ для модели:

$$K_{x(1)}(\tau, \lambda_1, \omega_{0,1}) = \sigma_x e^{-\lambda_1 |\tau|}$$

j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)}$
1	1	$\frac{2\sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{\lambda_j + \lambda_i}$	1
	2	$\frac{2\lambda_i \sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^2}$	1
	3	$\frac{2\lambda_j \sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^2}$	1
	4	$\frac{4\lambda_i^2 \sqrt{6\lambda_j \lambda_i}}{3(\lambda_j + \lambda_i)^3}$	1
	5	$\frac{2\sqrt{\lambda_j \lambda_i} (\lambda_j + \sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2})}{(\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2}$	1
	6	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j \lambda_i} (\lambda_i^2 + \omega_i^2)}{(\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2}$	1
	7	$\frac{2\lambda_j \sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2}$	1

2. ВКФ для модели:

$$K_{x(2)}(\tau, \lambda_2, \omega_{0,2}) = \sigma_x e^{-\lambda_2 |\tau|} \cdot (1 + \lambda_2 |\tau|)$$

j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)} = A_{(ji)} + B_{(ji)} \tau $
2	1	$\frac{2\lambda_j \sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^2}$	$A_{(ji)} = 1; B_{(ji)} = \lambda_j + \lambda_i$
	2	$\frac{4\lambda_j \lambda_i \sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^3}$	$A_{(ji)} = 2;$ $B_{(ji)} = \lambda_j + \lambda_i$
	3	$\frac{4\lambda_j \sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^3}$	$A_{(ji)} = \lambda_j - \lambda_i; B_{(ji)} = \lambda_j^2 + \lambda_j \lambda_i$
	4	$\frac{8\lambda_j \lambda_i^2 \sqrt{3\lambda_j \lambda_i}}{3(\lambda_j + \lambda_i)^4}$	$A_{(ji)} = 3; B_{(ji)} = \lambda_j + \lambda_i$
	5	$\frac{2\lambda_j \sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^2}$	$A_{(ji)} = \lambda_j^2 - \lambda_i^2 - \omega_i^2 + 2\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2}(\lambda_j + \lambda_i);$ $B_{(ji)} = (\lambda_j + \sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2})((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)$
	6	$\frac{4\lambda_j \sqrt{\lambda_j \lambda_i}(\lambda_i^2 + \omega_i^2)}{((\lambda_i + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^2}$	$A_{(ji)} = 2(\lambda_j + \lambda_i); B_{(ji)} = (\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2$
	7	$\frac{4\lambda_j \sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^2}$	$A_{(ji)} = \lambda_j^2 - \lambda_i^2 - \omega_i^2; B_{(ji)} = \lambda_j((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)$

3. ВКФ для модели:

$$K_{x(3)}(\tau, \lambda_3, \omega_{0,3}) = \sigma_x e^{-\lambda_3 |\tau|} \cdot (1 - \lambda_3 |\tau|)$$

j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)} = A_{(ji)} - B_{(ji)} \tau $
3	1	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j\lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^2}$	$A_{(ji)} = \lambda_i; B_{(ji)} = \lambda_j^2 + \lambda_j\lambda_i$
	2	$\frac{4\lambda_i\sqrt{\lambda_j\lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^3}$	$A_{(ji)} = \lambda_i - \lambda_j; B_{(ji)} = \lambda_j^2 + \lambda_j\lambda_i$
	3	$\frac{4\lambda_j\sqrt{\lambda_j\lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^3}$	$A_{(ji)} = 2\lambda_i; B_{(ji)} = \lambda_j^2 + \lambda_j\lambda_i$
	4	$\frac{8\lambda_i^2\sqrt{3\lambda_j\lambda_i}}{3(\lambda_j + \lambda_i)^4}$	$A_{(ji)} = \lambda_i - 2\lambda_j; B_{(ji)} = \lambda_j^2 + \lambda_j\lambda_i$
	5	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j\lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^2}$	$A_{(ji)} = \sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2}(\lambda_i^2 + \omega_i^2 - \lambda_j^2) + 2\lambda_j((\lambda_j + \lambda_i)\lambda_i + \omega_i^2);$ $B_{(ji)} = \lambda_j(\lambda_j + \sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2})((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)$
	6	$\frac{4\sqrt{\lambda_j\lambda_i}(\lambda_i^2 + \omega_i^2)}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^2}$	$A_{(ji)} = \lambda_i^2 + \omega_i^2 - \lambda_j^2; B_{(ji)} = \lambda_j((\lambda_i + \lambda_j)^2 + \omega_i^2)$
	7	$\frac{4\lambda_j\sqrt{\lambda_j\lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^2}$	$A_{(ji)} = 2(\lambda_i(\lambda_j + \lambda_i) + \omega_i^2); B_{(ji)} = \lambda_j((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)$

4. ВКФ для модели:

$$K_{x(4)}(\tau, \lambda_4, \omega_{0,4}) = \sigma_x e^{-\lambda_4 |\tau|} \cdot \left(1 + \lambda_4 |\tau| + \frac{\lambda_4^2 \tau^2}{3} \right)$$

j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)} = A_{(ji)} + B_{(ji)} \tau + C_{(ji)}\tau^2$
4	1	$\frac{2\lambda_j^2 \sqrt{6\lambda_j \lambda_i}}{3(\lambda_j + \lambda_i)^3}$	$A_{(ji)} = 2; B_{(ji)} = 2(\lambda_j + \lambda_i); C_{(ji)} = (\lambda_j + \lambda_i)^2$
	2	$\frac{4\lambda_j^2 \lambda_i \sqrt{3\lambda_j \lambda_i}}{3(\lambda_j + \lambda_i)^4}$	$A_{(ji)} = 6; B_{(ji)} = 4(\lambda_j + \lambda_i); C_{(ji)} = (\lambda_j + \lambda_i)^2$
	3	$\frac{4\lambda_j^2 \sqrt{3\lambda_j \lambda_i}}{3(\lambda_j + \lambda_i)^4}$	$A_{(ji)} = 2(\lambda_j - 2\lambda_i); B_{(ji)} = 2(\lambda_j^2 - \lambda_i^2); C_{(ji)} = \lambda_j(\lambda_j + \lambda_i)^2$
	4	$\frac{8\lambda_j^2 \lambda_i^2 \sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{3(\lambda_j + \lambda_i)^5}$	$A_{(ji)} = 12; B_{(ji)} = 6(\lambda_j + \lambda_i); C_{(ji)} = (\lambda_j + \lambda_i)^2$
	5	$\frac{2\lambda_j^2 \sqrt{6\lambda_j \lambda_i}}{3((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^3}$	$A_{(ji)} = 2(\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2} - \lambda_i)(3(\lambda_j + \lambda_i)^2 - \omega_i^2) + 2(\lambda_j + \lambda_i)((\lambda_j + \lambda_i)^2 - 3\omega_i^2);$ $B_{(ji)} = 2((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)(\lambda_j^2 - \lambda_i^2 - \omega_i^2 + 2\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2}(\lambda_j + \lambda_i));$ $C_{(ji)} = ((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^2(\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2} + \lambda_j)$
	6	$\frac{4\lambda_j^2 \sqrt{3\lambda_j \lambda_i}(\lambda_i^2 + \omega_i^2)}{3((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^3}$	$A_{(ji)} = 2(3(\lambda_j + \lambda_i)^2 - \omega_i^2);$ $B_{(ji)} = 4(\lambda_j + \lambda_i)((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2); C_{(ji)} = ((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^2$
	7	$\frac{4\lambda_j^2 \sqrt{3\lambda_j \lambda_i}}{3((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^3}$	$A_{(ji)} = 2(\lambda_j^3 - (3\lambda_j + 2\lambda_i)(\lambda_i^2 + \omega_i^2));$ $B_{(ji)} = 2((\lambda_j + \lambda_i)^3(\lambda_j - \lambda_i) - 2\omega_i^2 \lambda_i(\lambda_j + \lambda_i) - \omega_i^4);$ $C_{(ji)} = \lambda_j((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)^2$

5. ВКФ для модели:

$$K_{x(5)}(\tau, \lambda_5, \omega_{0,5}) = \sigma_x e^{-\lambda_5 |\tau|} \cdot \cos(\omega_{0,5} \tau)$$

j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)} = A_{(ji)} \cos(\omega_{0,j} \tau) + B_{(ji)} \sin(\omega_{0,j} \tau)$
5	1	$\frac{2\sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2}$	$A_{(ji)} = \lambda_i + \sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}; B_{(ji)} = (\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2} - \lambda_j)(\lambda_j + \lambda_i)/\omega_j - \omega_j$
	2	$\frac{2\lambda_i \sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2)^2}$	$A_{(ji)} = \lambda_i^2 - \lambda_j^2 - \omega_j^2 + 2(\lambda_j + \lambda_i)\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2};$ $B_{(ji)} = \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2} - \lambda_j}{\omega_j} ((\lambda_j + \lambda_i)^2 - \omega_j^2) - 2\omega_j(\lambda_j + \lambda_i)$
	3	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2)^2}$	$A_{(ji)} = 2\lambda_i(\omega_j^2 + \lambda_j(\lambda_j + \lambda_i)) + \sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}(\lambda_j^2 - \lambda_i^2 + \omega_j^2);$ $B_{(ji)} = \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2} - \lambda_j}{\omega_j} ((\lambda_j + \lambda_i)^2 \lambda_j + \omega_j^2(2\lambda_i + \lambda_j)) + \omega_j(\lambda_i^2 - \lambda_j^2 - \omega_j^2)$
	4	$\frac{4\lambda_i^2 \sqrt{6\lambda_j \lambda_i}}{3((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2)^3}$	$A_{(ji)} = \lambda_i^3 - (\omega_j^2 + \lambda_j^2)(2\lambda_j + 3\lambda_i) + \sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}(3(\lambda_j + \lambda_i)^2 - \omega_j^2);$ $B_{(ji)} = \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2} - \lambda_j}{\omega_j} (\lambda_j + \lambda_i)((\lambda_j + \lambda_i)^2 - 3\omega_j^2) + \omega_j(\omega_j^2 - 3(\lambda_j + \lambda_i)^2)$
	5	$\frac{2\sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2)((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2)}$	$A_{(ji)} = (\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2} - \sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2})(\omega_i^2 + \lambda_i^2 - \lambda_j^2 - \omega_j^2) + 2\lambda_i(\omega_j^2 + \lambda_j^2) +$ $+ 2\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2} \sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}(\lambda_j + \lambda_i) + 2\lambda_j(\lambda_i^2 + \omega_i^2);$ $B_{(ji)} = \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2} - \lambda_j}{\omega_j} (\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2}(\omega_i^2 - \omega_j^2 + (\lambda_j + \lambda_i)^2) + 2\lambda_i \omega_{0,j}^2 + \lambda_j(\omega_j^2 + \omega_i^2 + (\lambda_j + \lambda_i)^2)) +$ $+ \omega_j(\omega_i^2 + \lambda_i^2 - \lambda_j^2 - \omega_j^2 - 2\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2}(\lambda_j + \lambda_i))$

j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)} = A_{(ji)} \cos(\omega_{0,j} \tau) + B_{(ji)} \sin(\omega_{0,j} \tau)$
6	6	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j \lambda_i (\lambda_i^2 + \omega_i^2)}}{\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2\right) \left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2\right)}$	$A_{(ji)} = \omega_i^2 + \lambda_i^2 - \lambda_j^2 - \omega_j^2 + 2(\lambda_j + \lambda_i) \sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2};$ $B_{(ji)} = \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2} - \lambda_j}{\omega_j} \left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2 - \omega_j^2\right) - 2\omega_j (\lambda_j + \lambda_i)$
	7	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2\right) \left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2\right)}$	$A_{(ji)} = 2\lambda_j (\omega_i^2 + \lambda_i^2) + 2\lambda_i (\lambda_j^2 + \omega_j^2) + \sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2} (\lambda_j^2 + \omega_j^2 - \lambda_i^2 - \omega_i^2);$ $B_{(ji)} = \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2} - \lambda_j}{\omega_j} (\lambda_j (\omega_i^2 + \omega_j^2 + (\lambda_j + \lambda_i)^2) + 2\omega_j^2 \lambda_i) + \omega_j (\lambda_i^2 + \omega_i^2 - \lambda_j^2 - \omega_j^2)$

6. ВКФ для модели:

$$K_{x(6)}(\tau, \lambda_6, \omega_{0,6}) = \sigma_x e^{-\lambda_6 |\tau|} \cdot \left(\cos(\omega_{0,6} \tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6} \tau) \right)$$

j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)} = A_{(ji)} \cos(\omega_{0,j} \tau) + B_{(ji)} \sin(\omega_{0,j} \tau)$
6	1	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2\right)} \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}}{\omega_j}$	$A_{(ji)} = \omega_j; B_{(ji)} = \lambda_j + \lambda_i$
	2	$\frac{4\lambda_i \sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2\right)^2} \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}}{\omega_j}$	$A_{(ji)} = 2\omega_j (\lambda_j + \lambda_i); B_{(ji)} = (\lambda_j + \lambda_i)^2 - \omega_j^2$
	3	$\frac{4\sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2\right)^2} \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}}{\omega_j}$	$A_{(ji)} = \omega_j (\lambda_j^2 + \omega_j^2 - \lambda_i^2); B_{(ji)} = \lambda_j (\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2 (\lambda_j + 2\lambda_i)$
	4	$\frac{8\lambda_i^2 \sqrt{3\lambda_j \lambda_i}}{3\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2\right)^3} \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}}{\omega_j}$	$A_{(ji)} = \omega_j (3(\lambda_j + \lambda_i)^2 - \omega_j^2); B_{(ji)} = (\lambda_j + \lambda_i) \left((\lambda_j + \lambda_i)^2 - 3\omega_j^2\right)$

j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)} = A_{(ji)} \cos(\omega_{0,j} \tau) + B_{(ji)} \sin(\omega_{0,j} \tau)$
6	5	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2\right)\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2\right)} \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}}{\omega_j}$	$A_{(ji)} = \omega_j \left(\omega_j^2 + \lambda_j^2 - \lambda_i^2 - \omega_i^2 + 2\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2} (\lambda_j + \lambda_i) \right);$ $B_{(ji)} = 2\lambda_i \omega_j^2 + \lambda_j \left((\lambda_i + \lambda_j)^2 + \omega_i^2 + \omega_j^2 \right) + \sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2} \left((\lambda_i + \lambda_j)^2 - \omega_j^2 + \omega_i^2 \right)$
	6	$\frac{4\sqrt{\lambda_j \lambda_i} (\lambda_i^2 + \omega_i^2)}{\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2\right)\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2\right)} \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}}{\omega_j}$	$A_{(ji)} = 2\omega_j (\lambda_j + \lambda_i); B_{(ji)} = \omega_i^2 - \omega_j^2 + (\lambda_j + \lambda_i)^2$
	7	$\frac{4\sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2\right)\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2\right)} \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \omega_j^2}}{\omega_j}$	$A_{(ji)} = \omega_j (\lambda_j^2 + \omega_j^2 - \lambda_i^2 - \omega_i^2); B_{(ji)} = 2\lambda_i \omega_j^2 + \lambda_j \left((\lambda_i + \lambda_j)^2 + \omega_i^2 + \omega_j^2 \right)$

7. ВКФ для модели:

$$K_{x(7)}(\tau, \lambda_7, \omega_{0,7}) = \sigma_x e^{-\lambda_7 |\tau|} \cdot \left(\cos(\omega_{0,7} \tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7} \tau) \right)$$

j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)} = A_{(ji)} \cos(\omega_{0,j} \tau) - B_{(ji)} \sin(\omega_{0,j} \tau)$
7	1	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j \lambda_i}}{(\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2}$	$A_{(ji)} = \lambda_i; B_{(ji)} = \omega_j + \lambda_j (\lambda_j + \lambda_i) / \omega_j$
	2	$\frac{4\lambda_i \sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2\right)^2}$	$A_{(ji)} = \lambda_i^2 - \lambda_j^2 - \omega_j^2; B_{(ji)} = \omega_j (\lambda_j + 2\lambda_i) + \lambda_j (\lambda_j + \lambda_i)^2 / \omega_j$
	3	$\frac{4\sqrt{\lambda_j \lambda_i}}{\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2\right)^2}$	$A_{(ji)} = 2\lambda_i (\lambda_j^2 + \lambda_j \lambda_i + \omega_j^2); B_{(ji)} = \omega_j (2\lambda_j (\lambda_j + \lambda_i) + \omega_j^2 - \lambda_i^2) + \lambda_j^2 (\lambda_j + \lambda_i)^2 / \omega_j$
	4	$\frac{8\lambda_i^2 \sqrt{3\lambda_j \lambda_i}}{3\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_j^2\right)^3}$	$A_{(ji)} = \lambda_i^3 - (\omega_j^2 + \lambda_j^2) (2\lambda_j + 3\lambda_i); B_{(ji)} = \omega_j (3\lambda_i (\lambda_j + \lambda_i) - \omega_j^2) + \lambda_i (\lambda_j + \lambda_i)^3 / \omega_j$

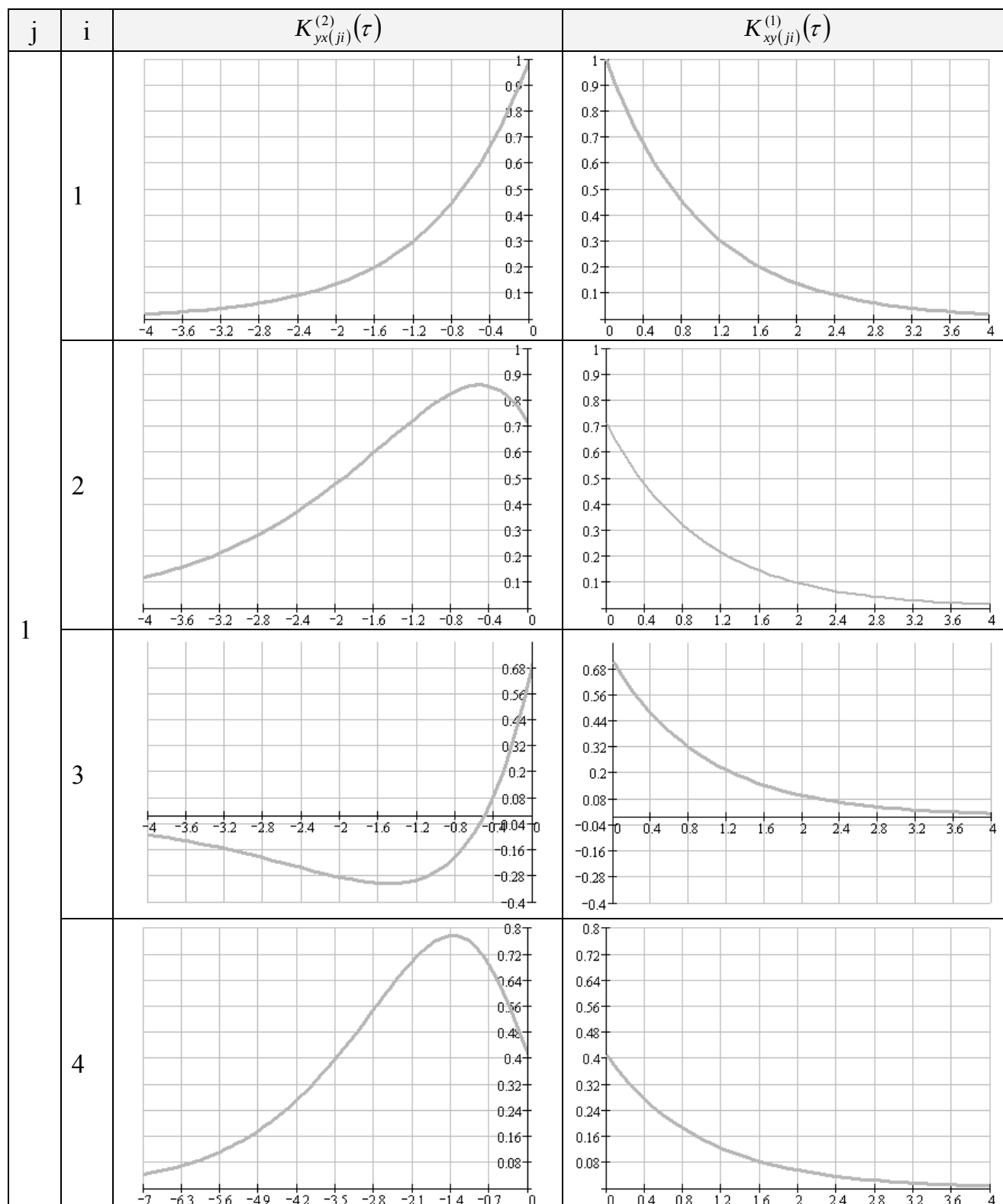
j	i	$k_{(ji)}$	$F_{(ji)} = A_{(ji)} \cos(\omega_{0,j} \tau) - B_{(ji)} \sin(\omega_{0,j} \tau)$
7	5	$\frac{2\sqrt{2\lambda_j\lambda_i}}{\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2\right)\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2\right)}$	$A_{(ji)} = 2\lambda_j(\omega_i^2 + \lambda_i^2) + 2\lambda_i(\lambda_j^2 + \omega_j^2) + \sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2}(\lambda_i^2 + \omega_i^2 - \lambda_j^2 - \omega_j^2);$ $B_{(ji)} = \omega_j(\omega_j^2 - \omega_i^2 - \lambda_i^2 + 2\lambda_j(\lambda_j + \lambda_i) + \sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2}(\lambda_j + 2\lambda_i)) +$ $+ \lambda_j(\lambda_j + \sqrt{\lambda_i^2 + \omega_i^2})(\omega_i^2 + (\lambda_j + \lambda_i)^2)/\omega_j$
	6	$\frac{4\sqrt{\lambda_j\lambda_i}(\lambda_i^2 + \omega_i^2)}{\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2\right)\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2\right)}$	$A_{(ji)} = \lambda_i^2 + \omega_i^2 - \lambda_j^2 - \omega_j^2; \quad B = \omega_0(2\lambda_6 + \lambda_0) + \lambda_0(\omega_6^2 + (\lambda_0 + \lambda_6)^2)/\omega_0$
	7	$\frac{4\sqrt{\lambda_j\lambda_i}}{\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j + \omega_i)^2\right)\left((\lambda_j + \lambda_i)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2\right)}$	$A_{(ji)} = 2\lambda_j(\omega_i^2 + \lambda_i^2) + 2\lambda_i(\lambda_j^2 + \omega_j^2);$ $B_{(ji)} = \omega_j(2\lambda_j(\lambda_j + \lambda_i) + \omega_j^2 - \omega_i^2 - \lambda_i^2) + \lambda_j((\lambda_j + \lambda_i)^2 + \omega_i^2)/\omega_j$

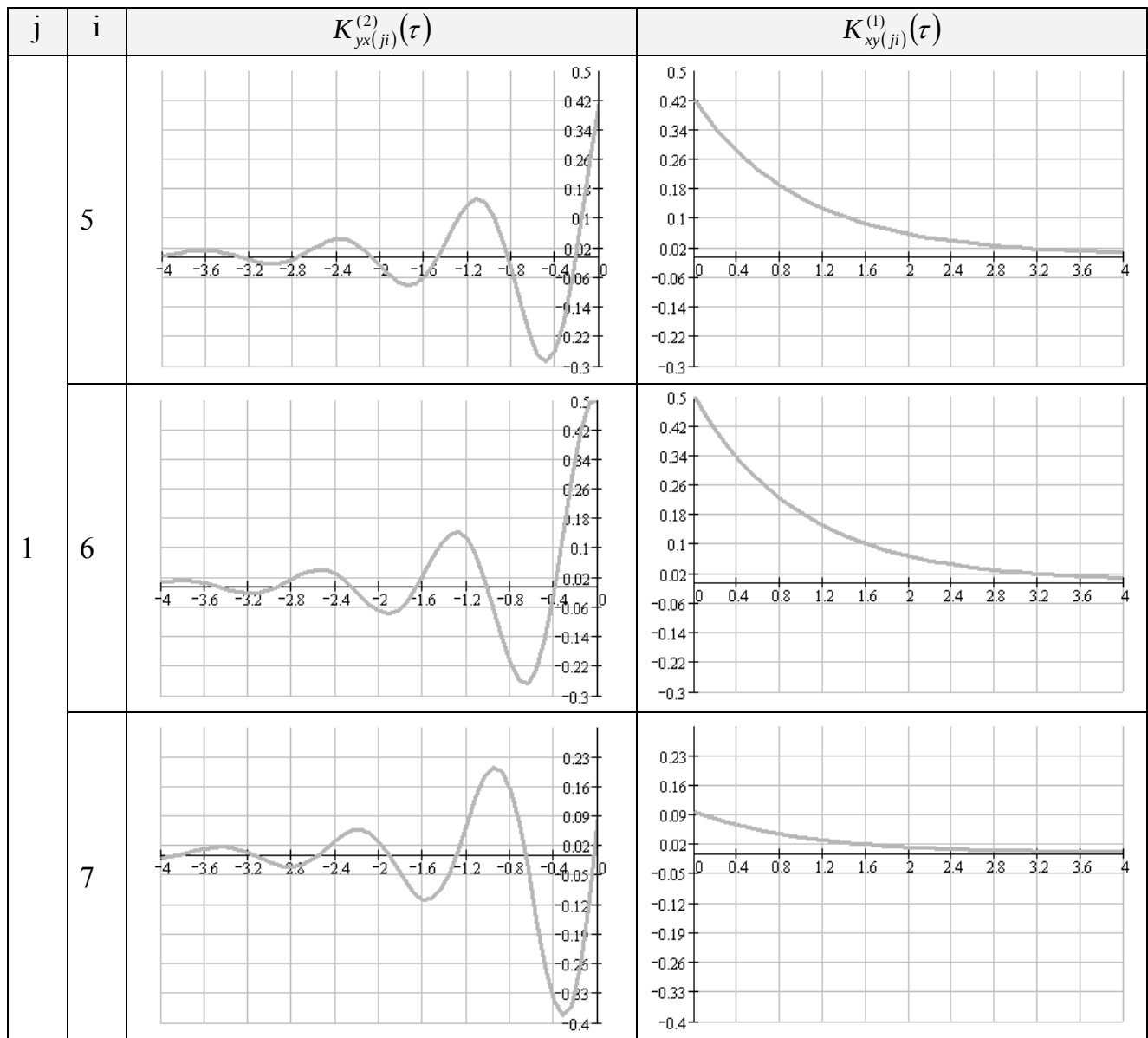
Графики взаимной корреляционной функции

В приложении приведены графики ВКФ при параметрах фильтров $\lambda_j = 1$, $\omega_{0,j} = 5$, $\lambda_i = 1$, $\omega_{0,i} = 5$.

1. ВКФ для модели:

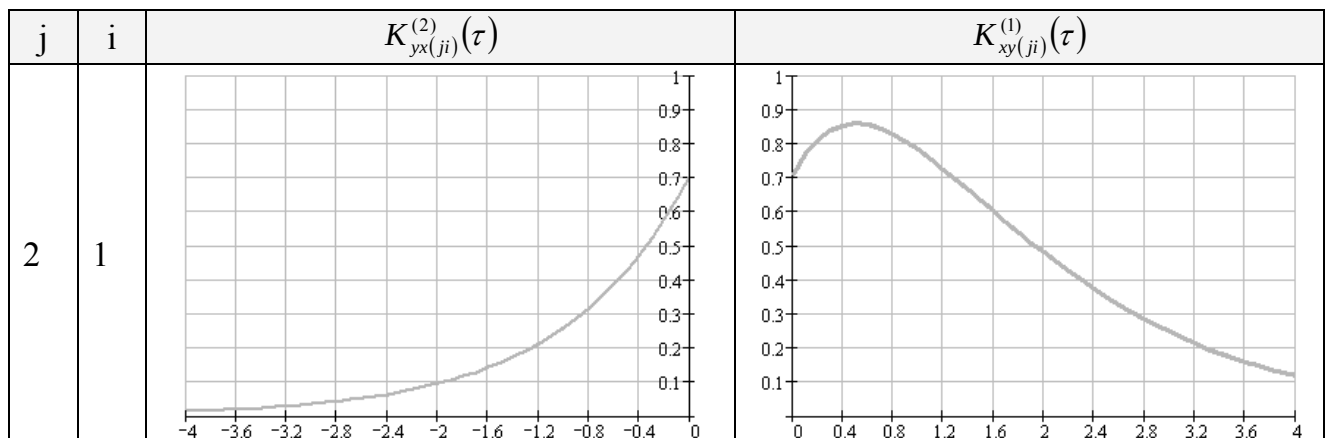
$$K_{x(1)}(\tau, \lambda_1, \omega_{0,1}) = \sigma_x e^{-\lambda_1 |\tau|}$$

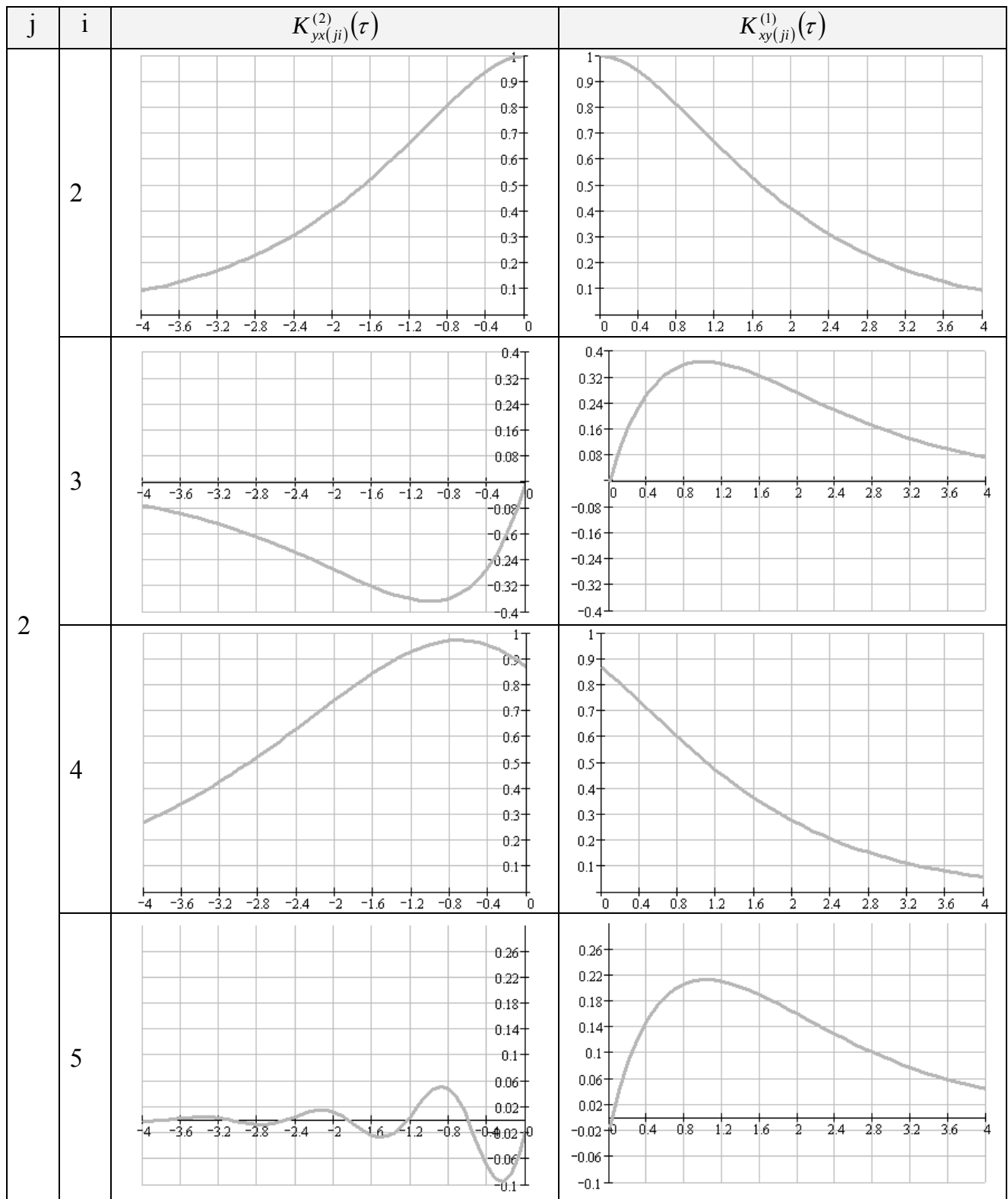


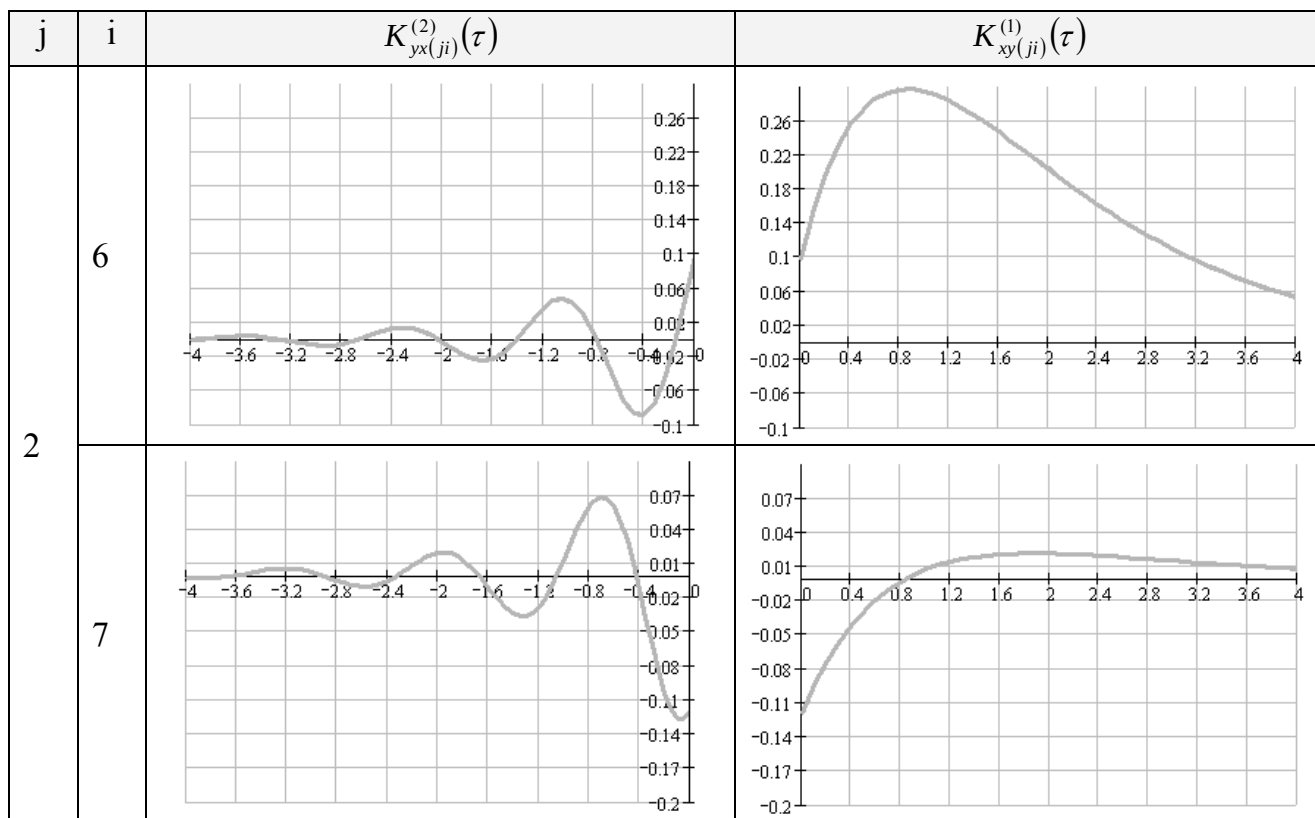


2. ВКФ для модели:

$$K_{x(2)}(\tau, \lambda_2, \omega_{0,2}) = \sigma_x e^{-\lambda_2 |\tau|} \cdot (1 + \lambda_2 |\tau|)$$

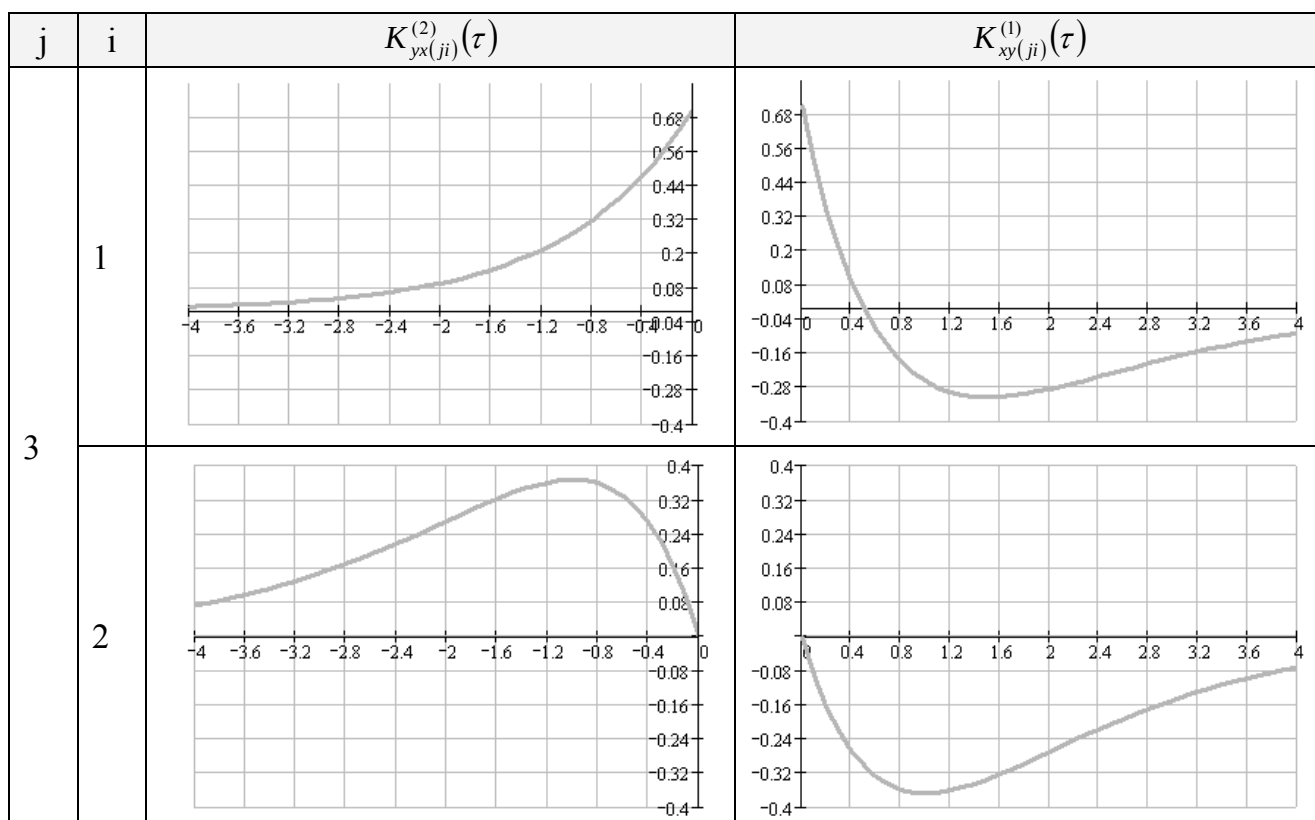


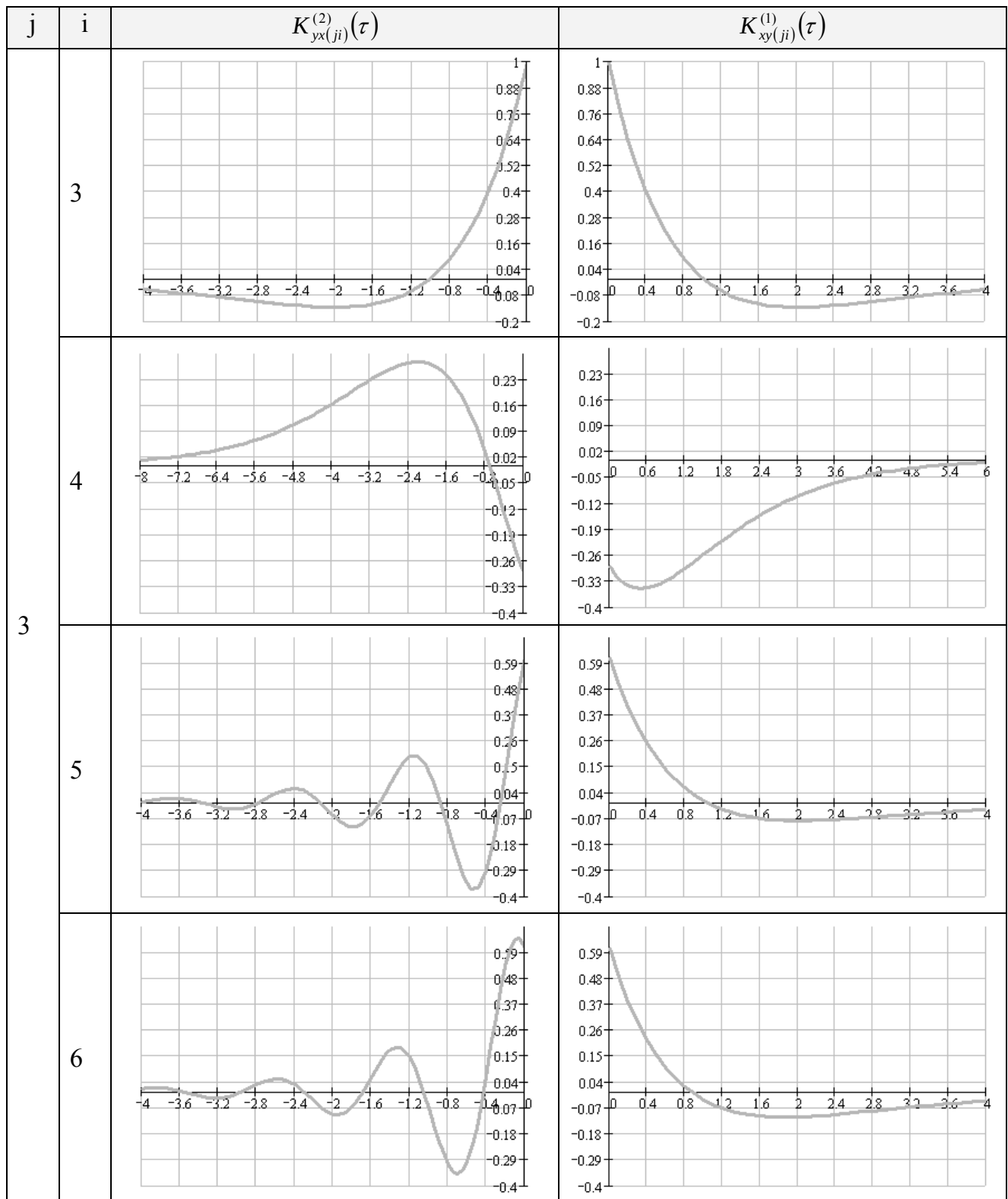


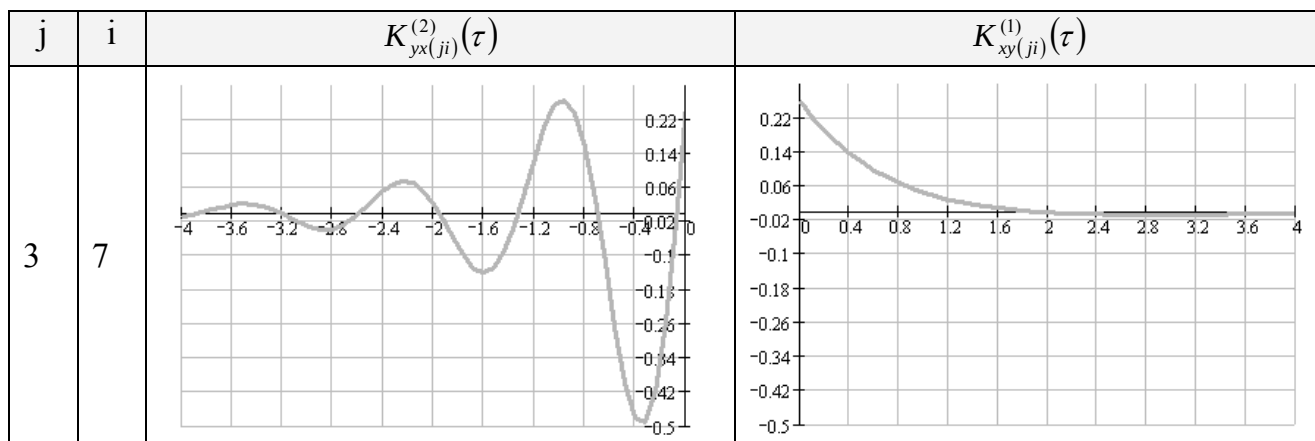


3. ВКФ для модели:

$$K_{x(3)}(\tau, \lambda_3, \omega_{0,3}) = \sigma_x e^{-\lambda_3 |\tau|} \cdot (1 - \lambda_3 |\tau|)$$

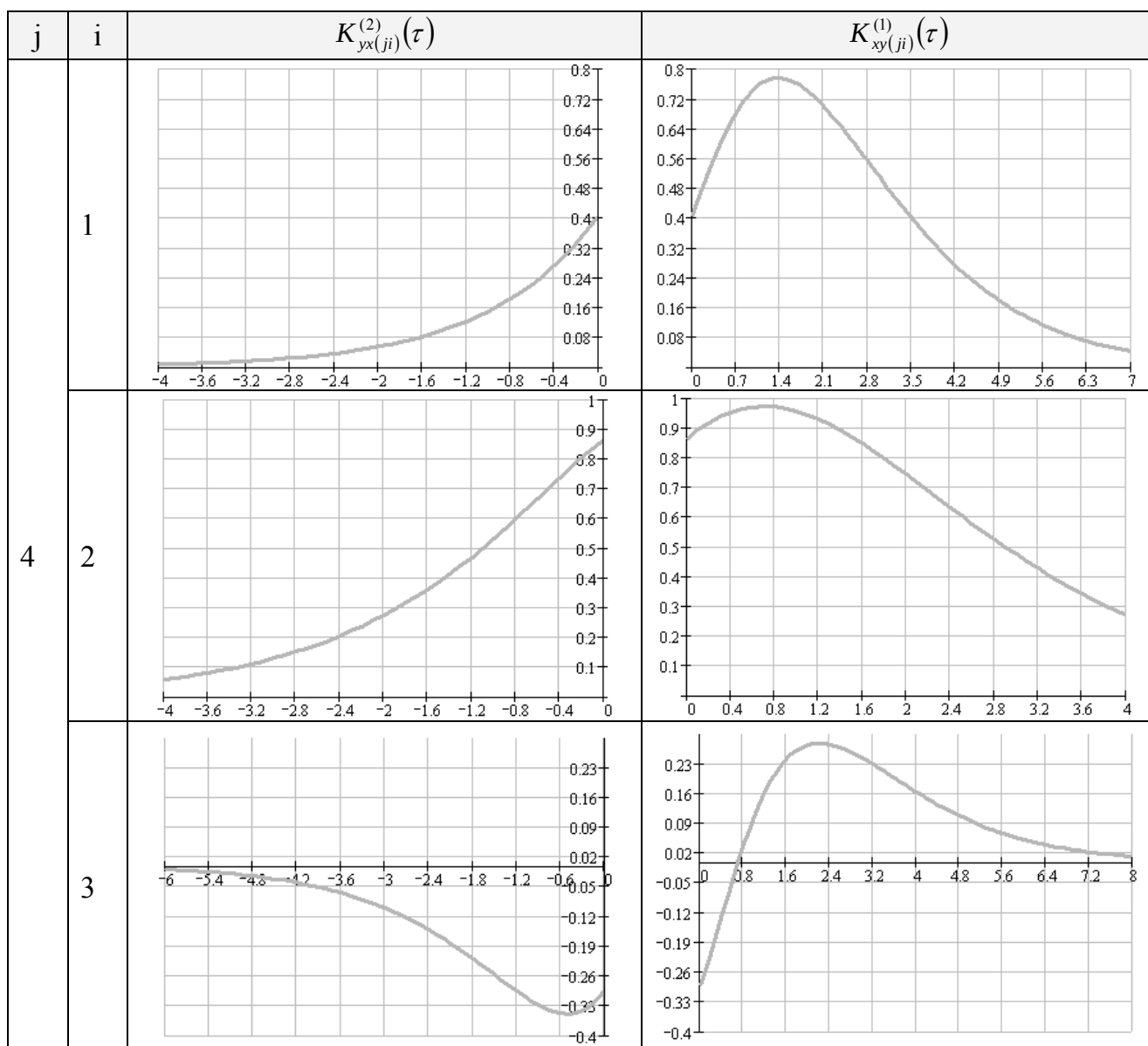


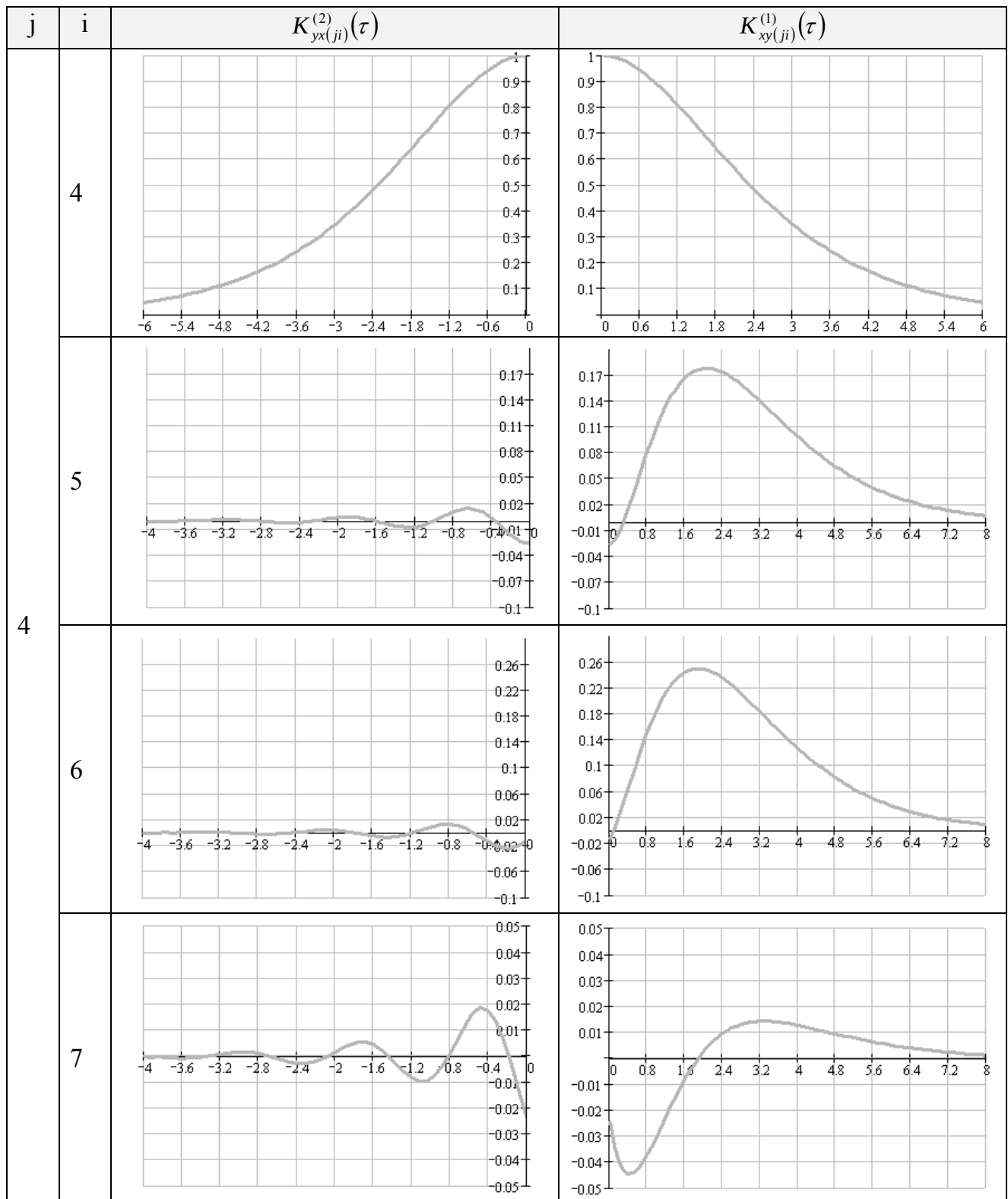




4. ВКФ для модели:

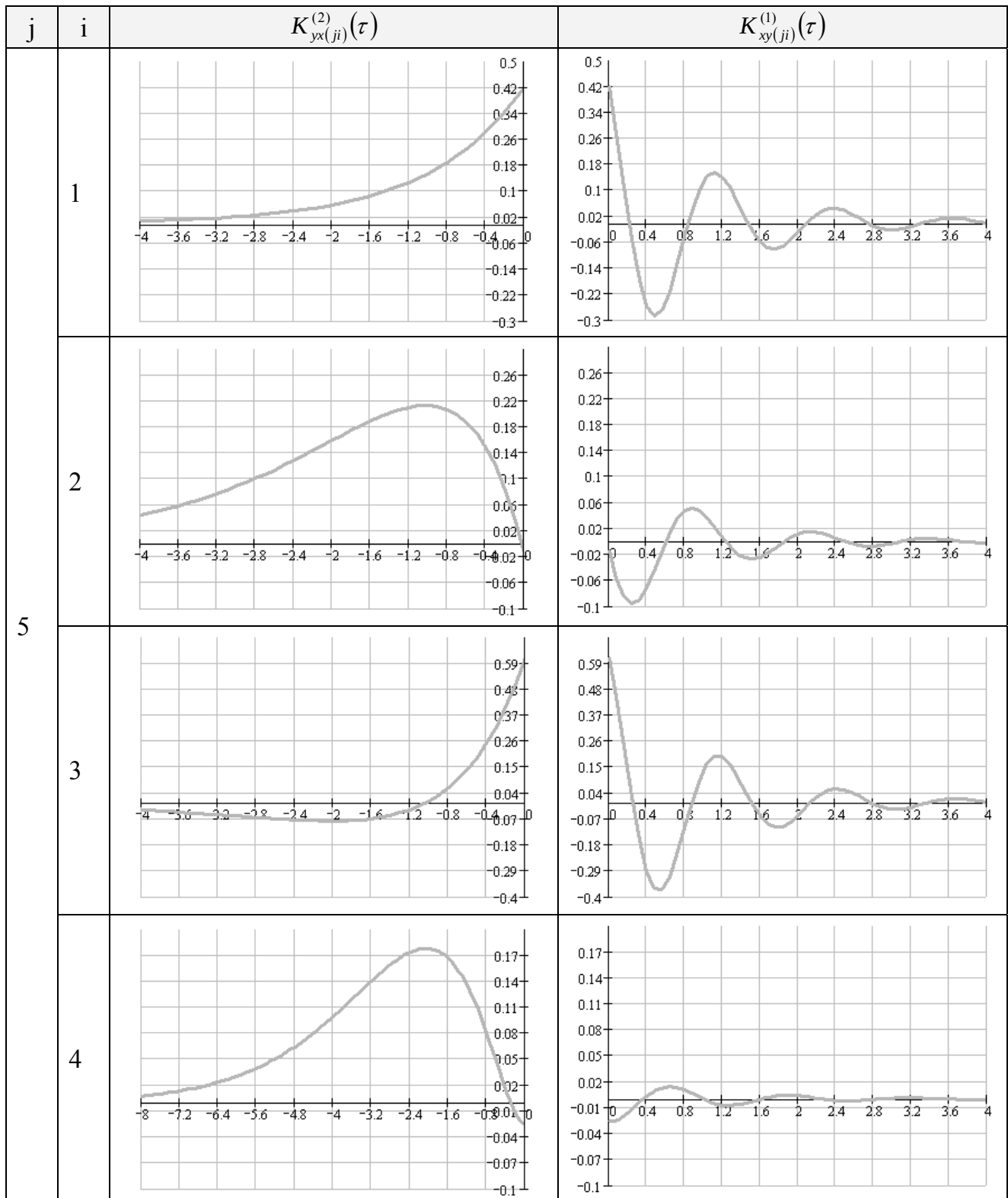
$$K_{x(4)}(\tau, \lambda_4, \omega_{0,4}) = \sigma_x e^{-\lambda_4 |\tau|} \cdot \left(1 + \lambda_4 |\tau| + \frac{\lambda_4^2 \tau^2}{3} \right)$$

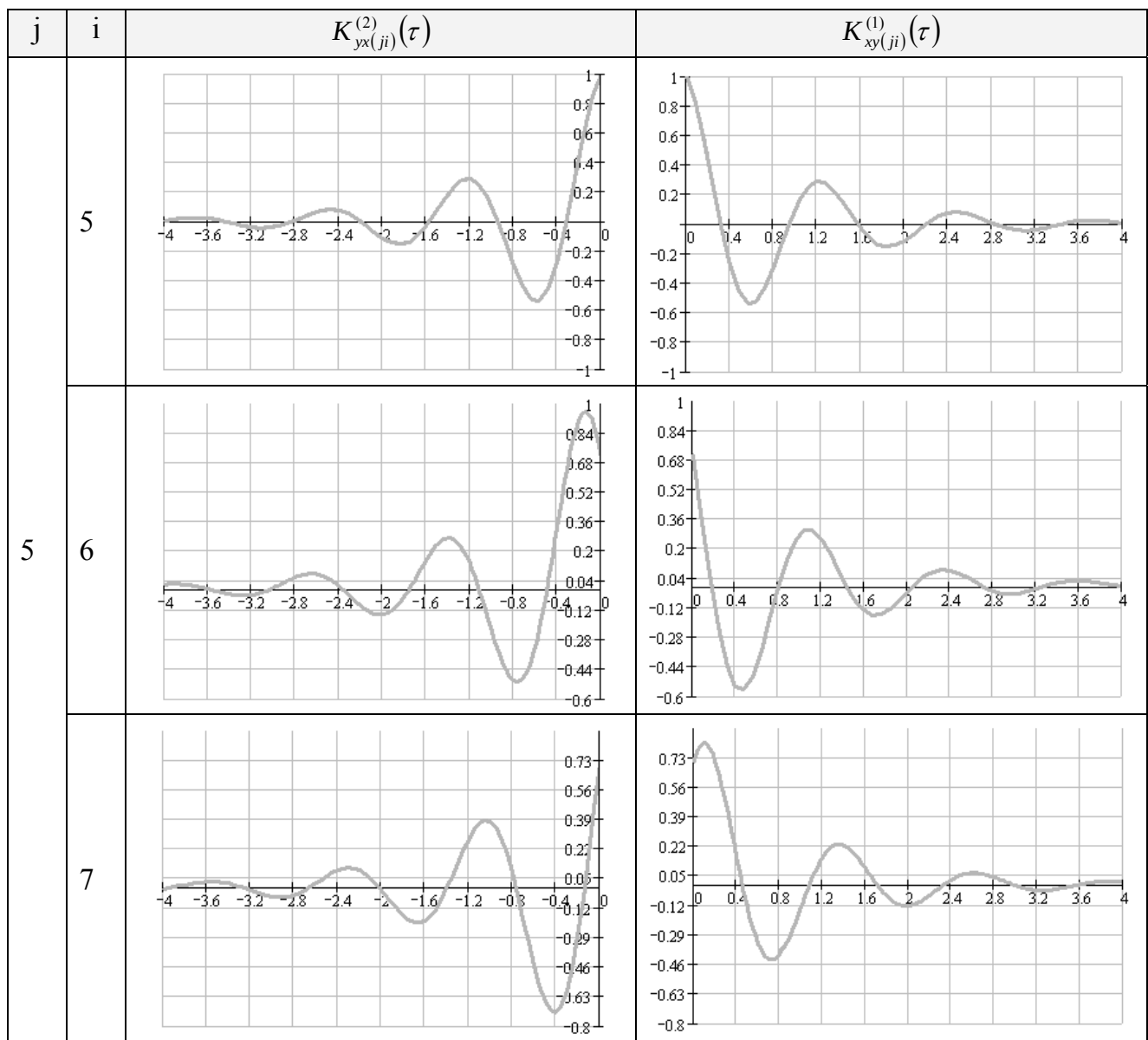




5. ВКФ для модели:

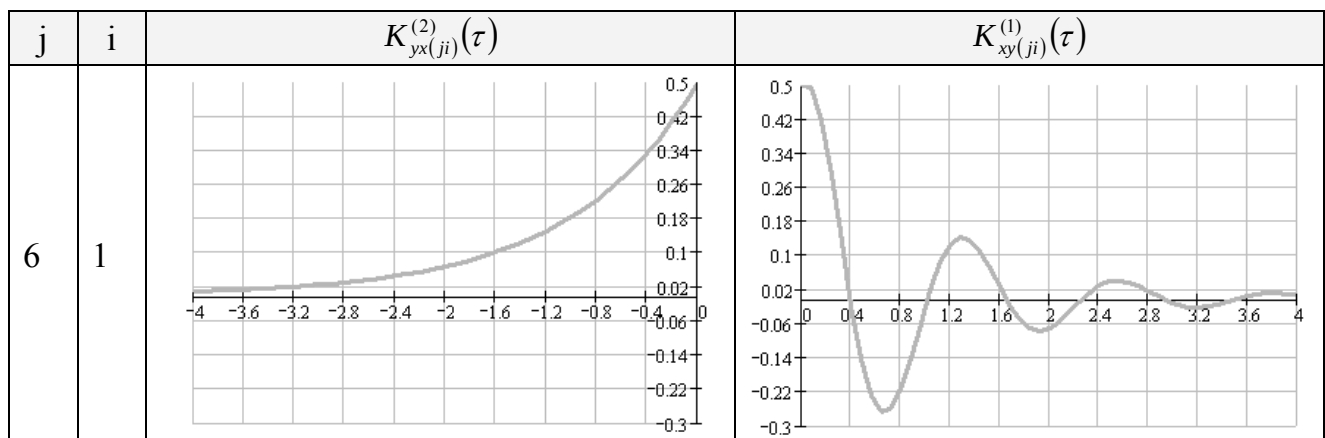
$$K_{x(s)}(\tau, \lambda_5, \omega_{0,5}) = \sigma_x e^{-\lambda_5 |\tau|} \cdot \cos(\omega_{0,5} \tau)$$

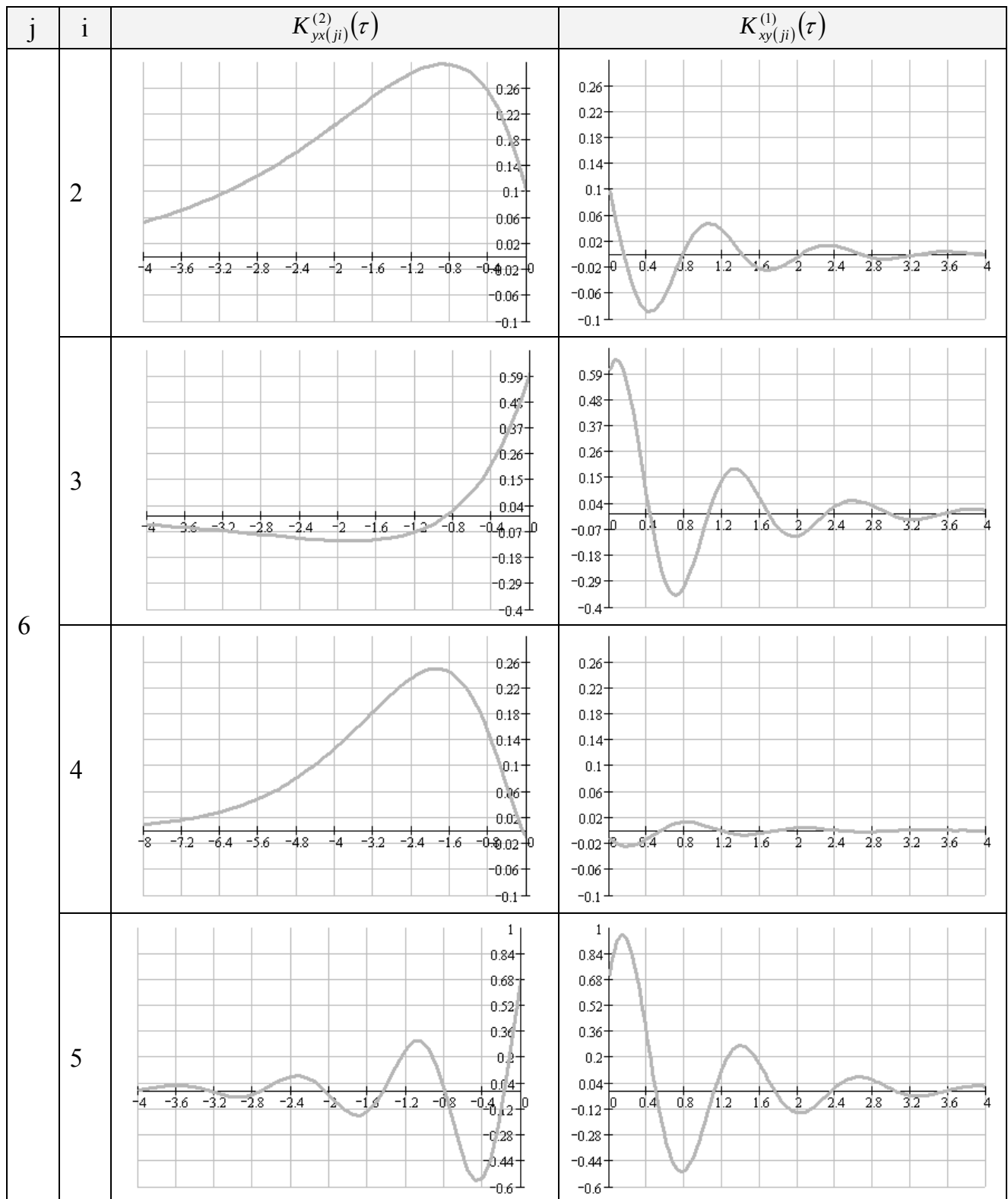


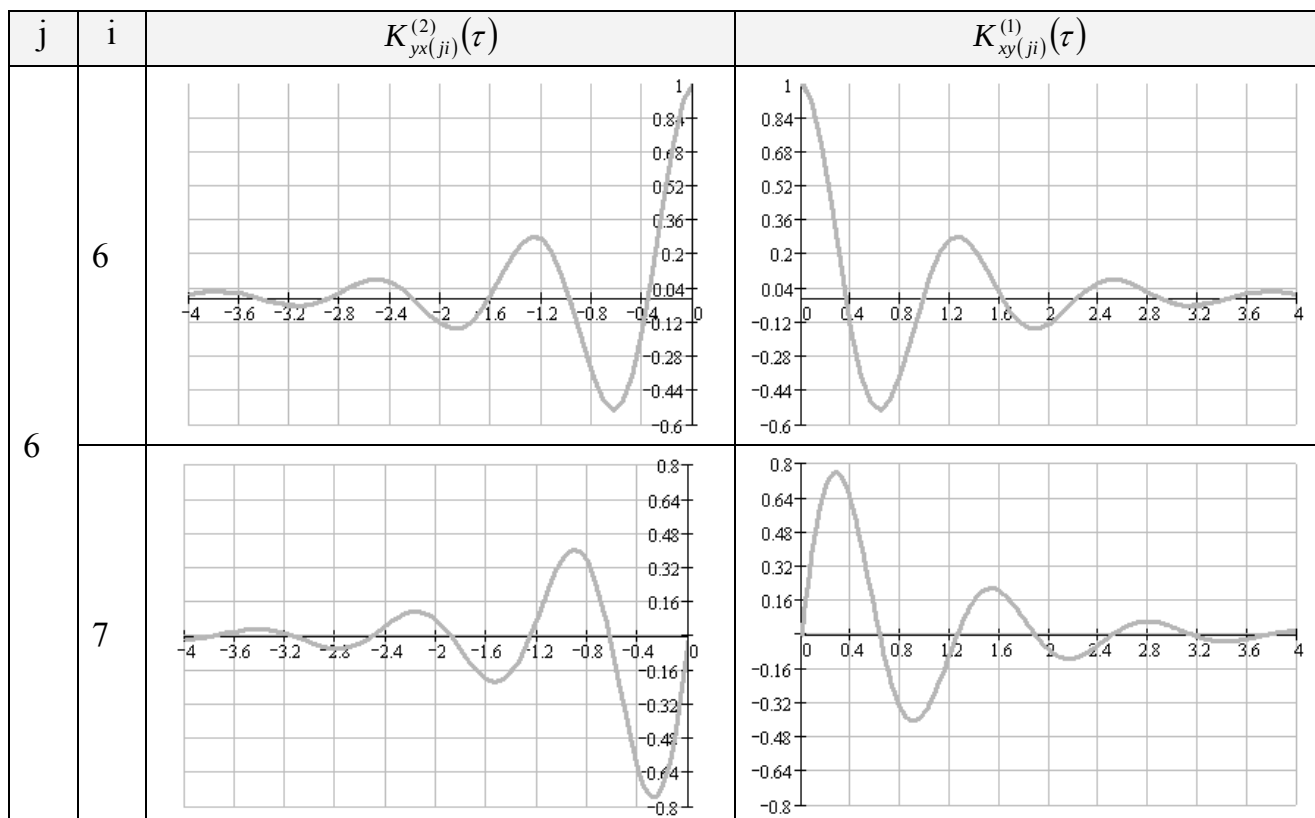


6. ВКФ для модели:

$$K_{x(6)}(\tau, \lambda_6, \omega_{0,6}) = \sigma_x e^{-\lambda_6 |\tau|} \cdot \left(\cos(\omega_{0,6} \tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6} \tau) \right)$$

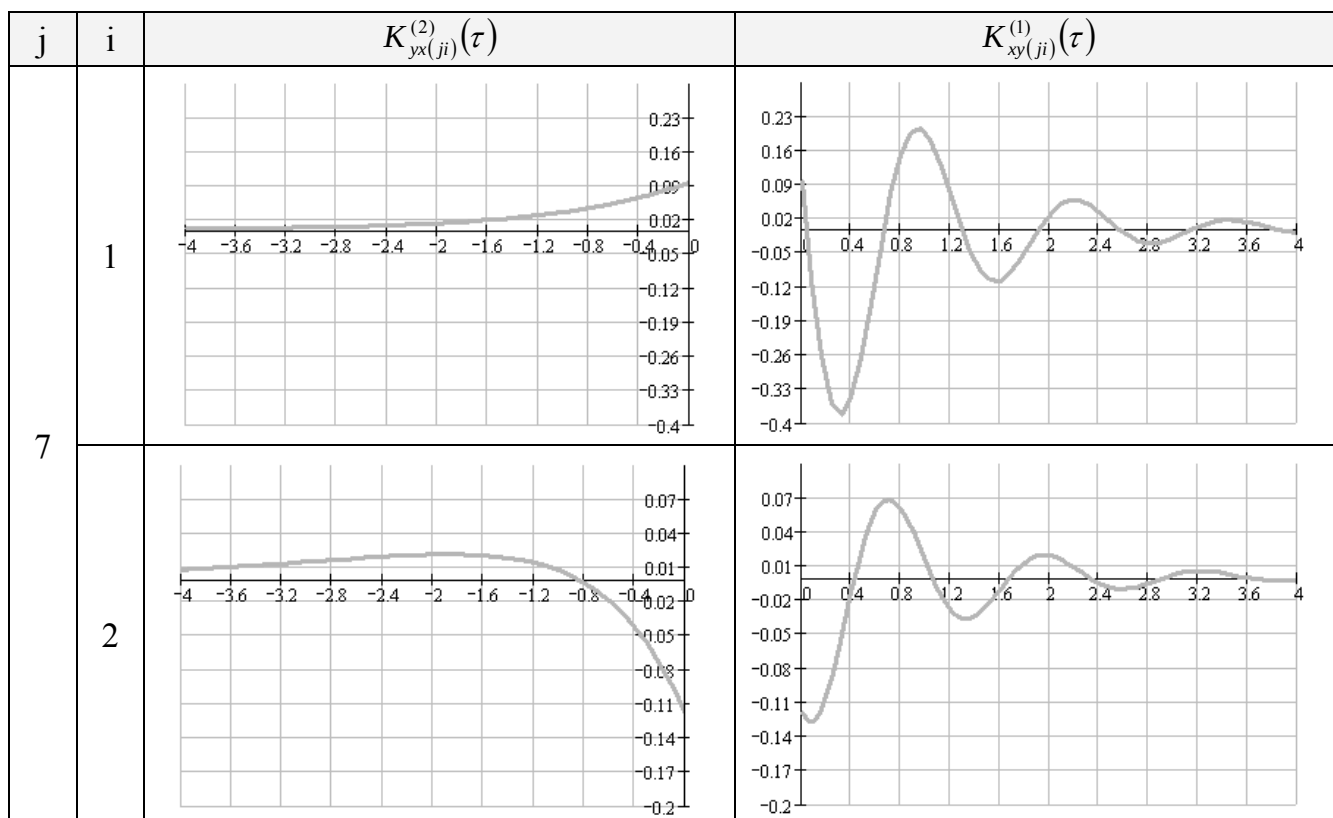


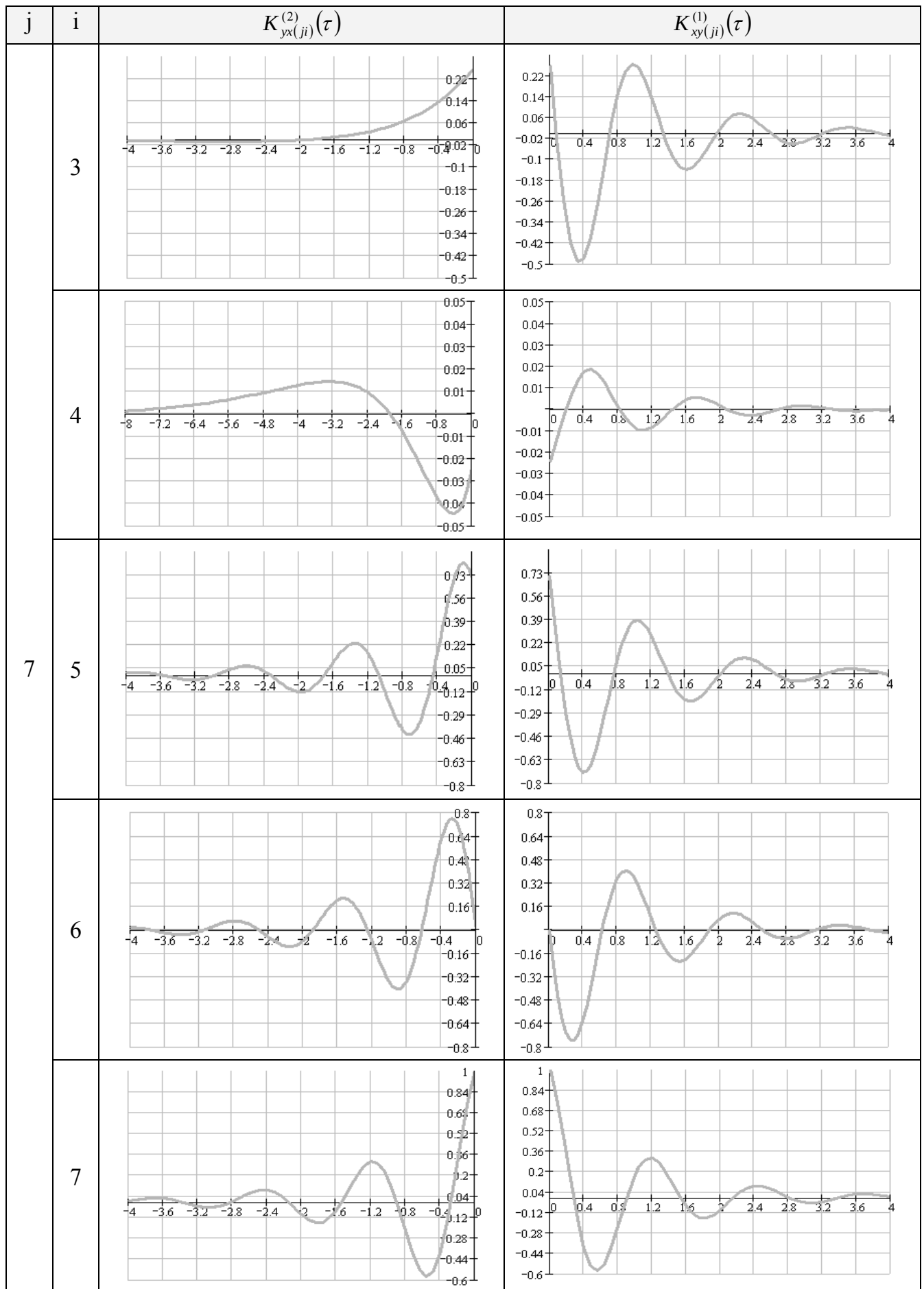




7. ВКФ для модели:

$$K_{x(7)}(\tau, \lambda_7, \omega_{0,7}) = \sigma_x e^{-\lambda_7 |\tau|} \cdot \left(\cos(\omega_{0,7} \tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7} \tau) \right)$$





Обобщенные спектральные характеристики

№	$K_x(\tau)$	ω_0	$S_x(\omega_0)$
1	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	0	$\frac{\sigma_x^2}{\pi\alpha}$
2	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau)$	0	$\frac{2\sigma_x^2}{\pi\alpha}$
3	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau)$	α	$\frac{\sigma_x^2}{2\pi\alpha}$
4	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	0	$\frac{8\sigma_x^2}{3\pi\alpha}$
5	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }\cos\omega_0\tau$	$\sqrt{2\omega_0\sqrt{\omega_0^2+\alpha^2}-\left(\omega_0^2+\alpha^2\right)}$	$\frac{\sigma_x^2\alpha}{\pi}\left\{\frac{\alpha^2+\omega_0^2+\omega_0^2}{\left[\alpha^2+(\omega_0-\omega_0)^2\right]\left[\alpha^2+(\omega_0+\omega_0)^2\right]}\right\}$
6	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }(\cos\omega_0\tau+\alpha/\omega_0\sin\omega_0\tau)$	$\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$	$\frac{2\sigma_x^2\alpha}{\pi}\frac{\alpha^2+\omega_0^2}{\left[\alpha^2+\left(\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}-\omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2+\left(\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}+\omega_0\right)^2\right]}$
7	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }(\cos\omega_0\tau-\alpha/\omega_0\sin\omega_0\tau)$	$\sqrt{\omega_0^2+\alpha^2}$	$\frac{2\sigma_x^2\alpha}{\pi}\frac{\alpha^2+\omega_0^2}{\left[\alpha^2+\left(\sqrt{\omega_0^2+\alpha^2}-\omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2+\left(\sqrt{\omega_0^2+\alpha^2}+\omega_0\right)^2\right]}$

№	$\Delta\omega'_3 = \frac{\sigma_x^2}{2S_x(\omega_3)}$	$\Delta\omega'_3 = \omega_3 + \frac{\Delta\omega'_3}{2}$
1	$\frac{\pi\alpha}{2}$	$\frac{\pi\alpha}{2}$
2	$\frac{\pi\alpha}{4}$	$\frac{\pi\alpha}{4}$
3	$\pi\alpha$	$(\pi + 1)\alpha$
4	$\frac{3\pi\alpha}{16}$	$\frac{3\pi\alpha}{16}$
5	$\frac{\pi[\alpha^2 + (\omega_3 - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega_3 + \omega_0)^2]}{2\alpha(\alpha^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2)}$	$\omega_3 + \frac{\pi[\alpha^2 + (\omega_3 - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega_3 + \omega_0)^2]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2)}$
6	$\frac{\pi\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$	$\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \pi\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{8\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
7	$\frac{\pi\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$	$\frac{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \pi\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{8\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$

Форма представления и характеристики ортогональных полиномов

Ортогональные полиномы	Представление в форме Родрига	Представление в виде конечного ряда
Якоби с параметрами $\alpha = -0,5$; $\beta = 0$ $P_k^{(-1/2,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} (1-x)^{1/2} \left(\frac{1}{(1-x)^{1/2}} (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} \left(\frac{x-1}{2} \right)^s$
Якоби с параметрами $\alpha = 0,5$; $\beta = 0$ $P_k^{(1/2,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1-x)^{1/2}} \left((1-x)^{1/2} (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} \left(\frac{x-1}{2} \right)^s$
Якоби с параметрами $\alpha = 1$; $\beta = 0$ $P_k^{(1,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1-x)} \left((1-x) (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} \left(\frac{x-1}{2} \right)^s$
Якоби с параметрами $\alpha = 2$; $\beta = 0$ $P_k^{(2,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1-x)^2} \left((1-x)^2 (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} \left(\frac{x-1}{2} \right)^s$
Лежандра $Leg_k(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \left((1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s \left(\frac{x-1}{2} \right)^s$
Лагерра $L_k(x)$	$\frac{1}{k!} e^x (x^k e^{-x})^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-x)^s}{s!}$
Дирихле 1 $D_k(x)$	отсутствует	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} (1-x)^{s/2}$
Дирихле 2 $Dir_k(x)$	отсутствует	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \left(\frac{1-x}{2} \right)^{s/2}$

Ортогональные полиномы	$\mu(x)$	$\ \psi_k\ ^2$
Якоби с параметрами $\alpha = -0,5; \beta = 0$	$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$	$\frac{2\sqrt{2}}{4k+1}$
Якоби с параметрами $\alpha = 0,5; \beta = 0$	$\sqrt{1-x}$	$\frac{4\sqrt{2}}{4k+3}$
Якоби с параметрами $\alpha = 1; \beta = 0$	$1-x$	$\frac{2}{k+1}$
Якоби с параметрами $\alpha = 2; \beta = 0$	$(1-x)^2$	$\frac{8}{2k+3}$
Лежандра	1	$\frac{2}{2k+1}$
Лагерра	e^{-x}	1
Дирихле 1	1	$\frac{1}{k+1}$
Дирихле 2	1	$\frac{2}{k+1}$

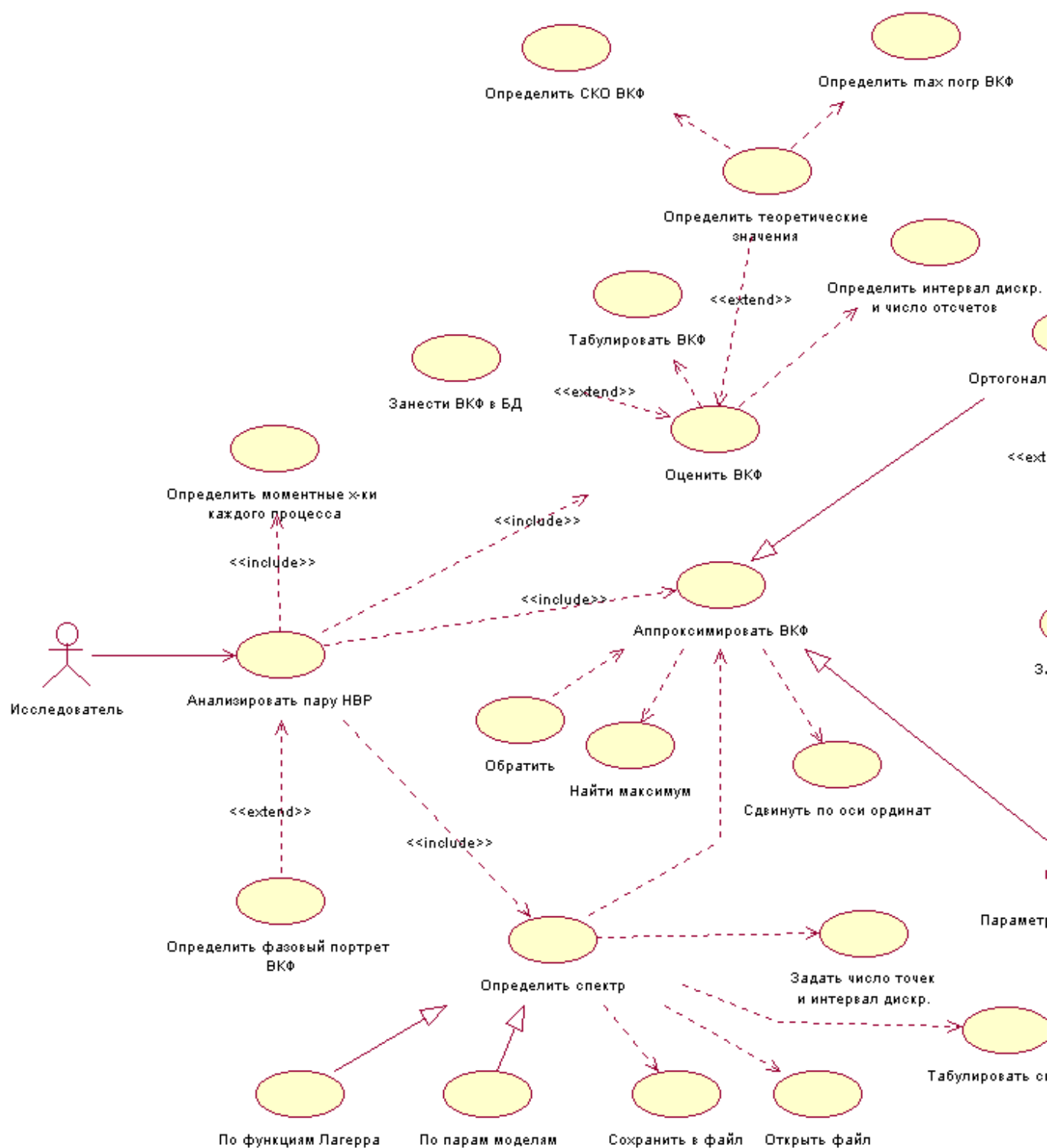
Форма представления и характеристики ортогональных функций

Ортогональные функции	Представление в виде конечного ряда	(a, c)	$\ \psi_k\ ^2$	$\psi(0)$
Якоби с параметрами $\alpha = -0,5; \beta = 0$	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s e^{\frac{(4s+1)\gamma\tau}{2}}$	$(2,2)$	$\frac{1}{\gamma(4k+1)}$	$(-1)^k$
Якоби с параметрами $\alpha = 0,5; \beta = 0$	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s e^{-\frac{(4s+3)\gamma\tau}{2}}$	$(2,2)$	$\frac{1}{\gamma(4k+3)}$	$(-1)^k$
Якоби с параметрами $\alpha = 1; \beta = 0$	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s e^{-(s+1)\gamma\tau}$	$(2,1)$	$\frac{1}{2\gamma(k+1)}$	$(-1)^k$
Якоби с параметрами $\alpha = 2; \beta = 0$	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s e^{-(2s+3)\gamma\tau}$	$(2,2)$	$\frac{1}{2\alpha(2k+3)}$	$(-1)^k$
Лежандра	$Leg_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s e^{-(2s+1)\alpha\tau}$	$(2,2)$	$\frac{1}{2\alpha(2k+1)}$	$(-1)^k$
Лагерра	$L_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-\alpha\tau)^s}{s!} e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}$	$\left(1, -\frac{\ln(1-\alpha\tau)}{\gamma\tau}\right)$	$\frac{1}{\alpha}$	1
Дирихле	$D_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} e^{-(s+1)\alpha\tau}$	$(1,2)$	$\frac{1}{2\alpha(k+1)}$	1
Дирихле	$Dir_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} e^{-(s+1)\alpha\tau}$	$(2,2)$	$\frac{1}{2\alpha(k+1)}$	1

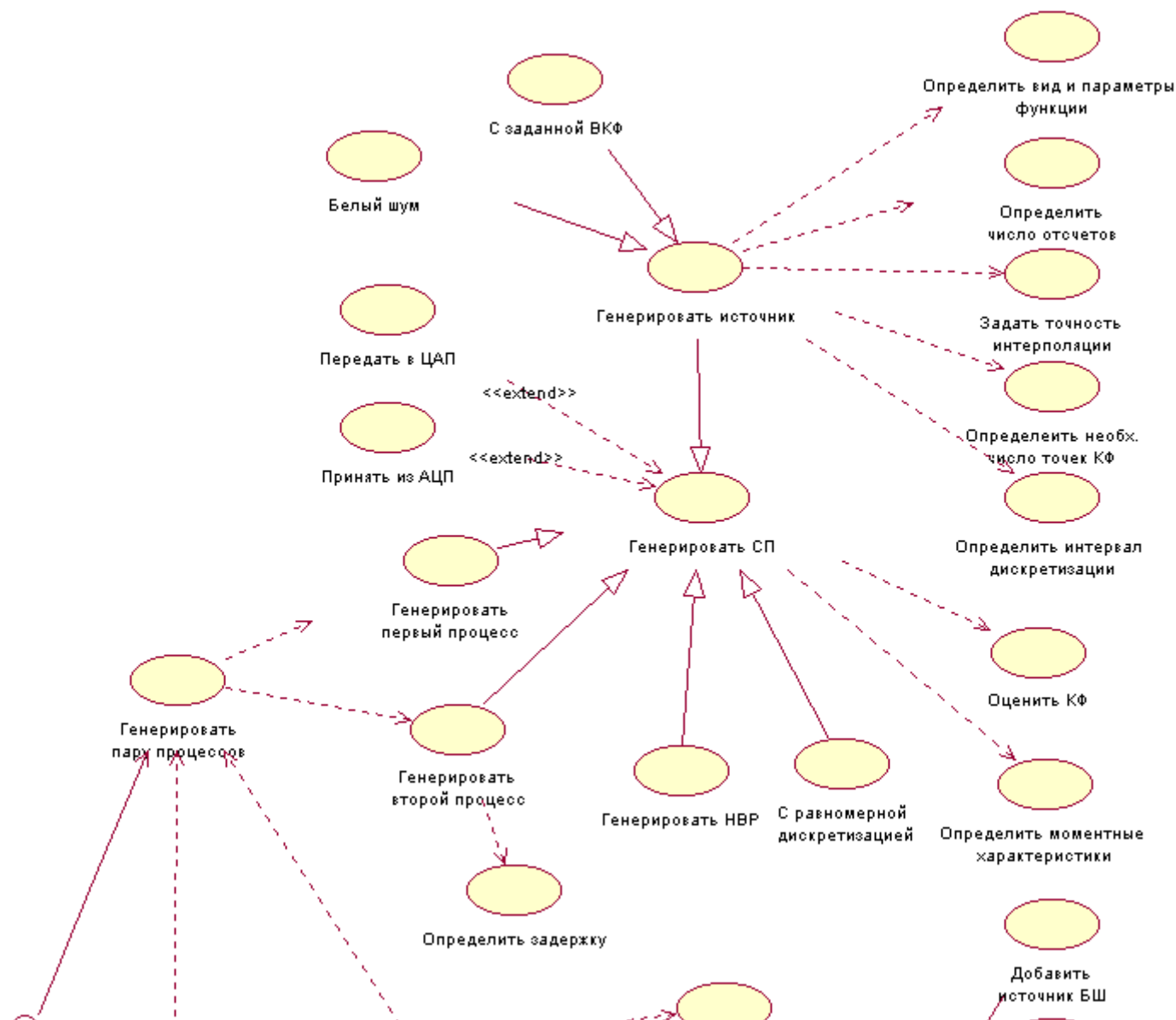
Формат вводимых и выводимых файлов

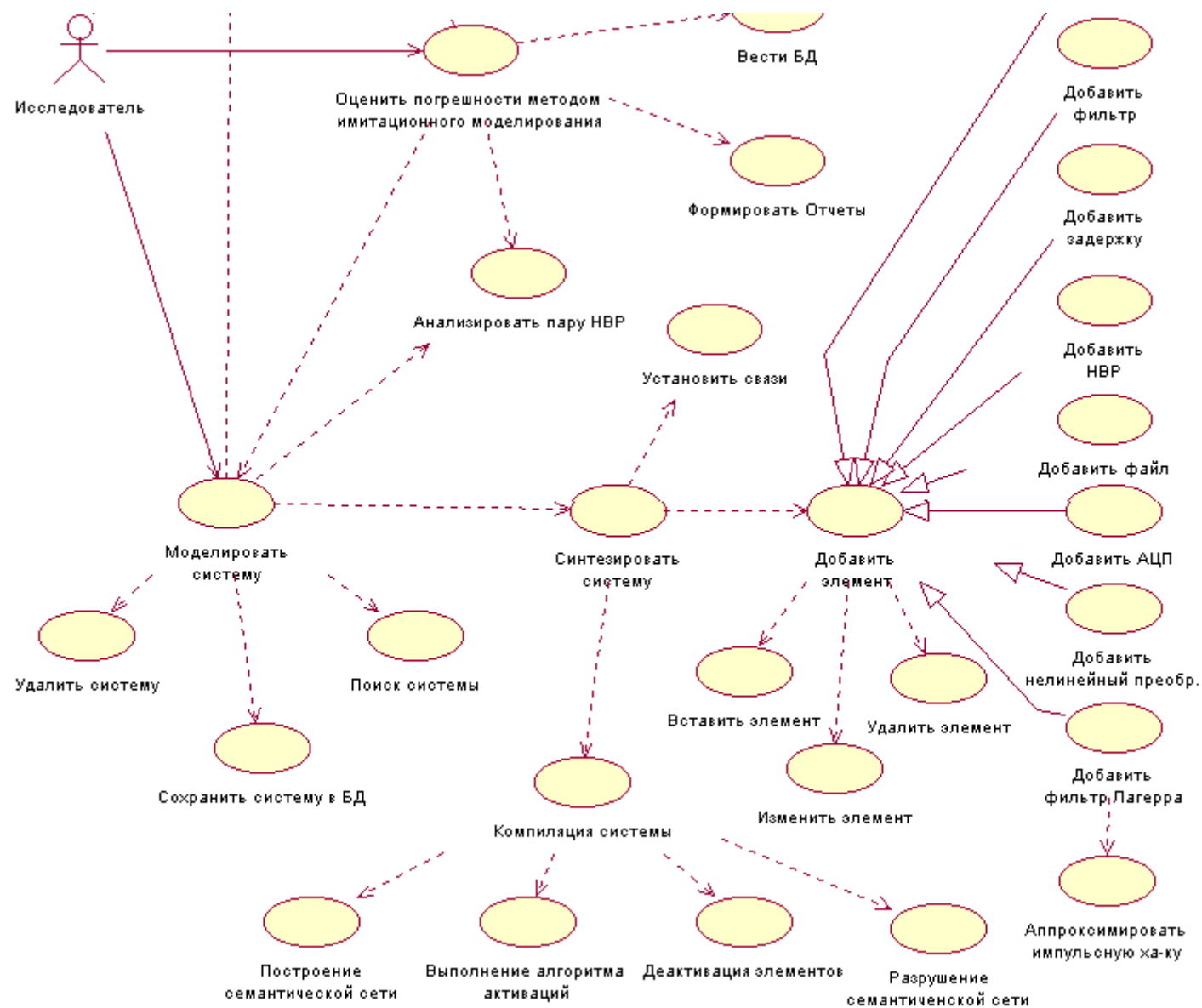
Процесс с регулярной дискретизацией *rd	Процесс с нерегулярной дискретизацией *nrd	ВКФ с регу- лярной дис- кретизацией *txt	Спектраль- ная плот- ность мощ- ности (па- рам. модели) *txt	Спектраль- ная плот- ность мощ- ности *txt	Параметры ортогональ- ных функ- ций *txt
M	M_j	$J_{\max, \Pi}$	$\Delta\omega$	$\Delta\omega$	α_{Π}
Δt	$x(1)$	$J_{\max, \Lambda}$	ω_3	ω_3	$\beta_{0, \Pi}$
$x(1)$	...	$\Delta\tau$	$S_x(\omega_3)$	$S_x(\omega_3)$	...
...	...	$\rho_{x, \Pi}(1)$	$\Delta\omega_3$	$\Delta\omega_3$	$\beta_{m1, \Pi}$
...	$x(M_j)$	...	$S_x(1)$	$S_x(1)$	α_{Λ}
...	$t(1)$	$\rho_{x, \Pi}(J_{\max, \Pi})$	$S_x(2)$	$S_x(2)$	$\beta_{0, \Lambda}$
...	...	$\rho_{x, \Lambda}(1)$	...	...	
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	$\beta_{m2, \Lambda}$
...	...	...	...	...	τ_m
...	...	...	...	...	$\rho_{xy\max}$
...	...	...	...	...	m
...	...	...	...	...	$\tau_k^{(2)}$
$x(M)$	$t(M_j)$	$\rho_{x, \Lambda}(J_{\max, \Lambda})$	$S_x(N)$	$S_x(N)$	$\tau_k^{(4)}$

Приложение 15 Диаграммы вариантов использования подсистем аппроксимативного анализа



Продолжение приложения 15





Импульсные характеристики для типовых аппроксимирующих выражений КФ

№	$\rho_x(\tau, \alpha, \omega_0)$	$h_i(\tau, \alpha, \omega_0)$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$4 \alpha^2 \tau e^{-\alpha \tau}$
2	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$1,6 \alpha^3 \tau^2 e^{-\alpha \tau}$
3	$e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau)$	$16 \alpha^2 \tau e^{-\alpha \tau} - 8 \alpha^3 \tau^2 e^{-\alpha \tau}$
4	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$\frac{8}{21} \alpha^3 \tau^2 e^{-\alpha \tau} + \frac{8}{21} \alpha^4 \tau^3 e^{-\alpha \tau}$
5	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau $	$\frac{8 \alpha^2 (\alpha^2 + \omega_0^2)^2}{2 \alpha^4 + \alpha^2 \omega_0^2 + \omega_0^4} \tau e^{-\alpha \tau} \cos \omega_0 \tau$
		$\frac{4(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}{\alpha \omega_0} \tau \sin \omega_0 \tau$
6	$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\frac{8 \alpha^2 (\alpha^2 + \omega_0^2)^2}{5 \alpha^4 - 2 \alpha^2 \omega_0^2 + \omega_0^4} \left[\tau e^{-\alpha \tau} (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau) - \frac{1}{\omega_0} e^{-\alpha \tau} \sin \omega_0 \tau \right]$
		$\frac{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}{\alpha \omega_0} e^{-\alpha \tau} \left[\frac{\alpha \tau}{\omega_0} \cos \omega_0 \tau - \left(\tau + \frac{\alpha}{\omega_0^2} \right) \sin \omega_0 \tau \right]$

Передаточные функции фильтров с регулируемыми параметрами

№	$\rho_x(\tau, \alpha, \omega_0)$	$W(p, T, k)$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$\frac{4}{(1+Tp)^2}$
2	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha/\tau)$	$\frac{3,2}{(1+Tp)^3}$
3	$e^{-\alpha \tau }(1-\alpha/\tau)$	$\frac{16Tp}{(1+Tp)^3}$
4	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha/\tau+\alpha^2\tau^2/3)$	$\frac{16(4+Tp)}{21(1+Tp)^4}$
5	$e^{-\alpha \tau }\cos\omega_0\tau$	$\frac{8(k+1)}{k} \left[\frac{1}{(1+Tp)^2} \right]^2 \times$ $\times \left[\left(\frac{Tp}{1+Tp} \right)^2 - (1+k) \frac{1}{(1+Tp)^2} \right];$ $8(k+1) \left[\frac{1}{1+Tp} \right]^2 \frac{1}{1+Tp};$
6	$e^{-\alpha \tau }(\cos\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \sin\omega_0\tau)$	$8(k+1) \frac{1}{(1+Tp)^3} \frac{Tp}{1+Tp};$ $4(k+1)^2 \frac{1}{(1+Tp)^3} \frac{1+Tp/2}{1+Tp};$

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АСНИ – автоматизированная система научных исследований;
АЦП – аналого-цифровой преобразователь;
БРП – блок регулировки параметров;
ВКФ – взаимная корреляционная функция;
ВНКФ – взаимная нормированная корреляционная функция;
ВР – временной ряд;
ЗР – закон распределения;
ИВК – измерительно-вычислительный комплекс;
ИИС – информационно-измерительная система;
ИП – измерительный преобразователь (датчик);
КФ – корреляционная функция;
НКФ – нормированная корреляционная функция;
ПО – процессор обработки;
ПРИС – процессорно-измерительное средство;
СП – случайный процесс;
 $A_{\Theta} \{ \hat{x}(t_k) \}$ – алгоритм оценки вероятностной характеристики Θ ;
 $A_s \{ \hat{x}(t_k) \}$ – алгоритм оценки сигнала;
 $C_x(J)$ – интервальная корреляционная функция;
 d – параметр усреднения (время T , совокупность реализаций N или время и совокупность реализаций TN);
 $\hat{D}_x$ – оценка дисперсии;
 $ent[]$ – операция взятия целой части числа;
 $F_x(\omega)$ – спектральная функция;
 $g[]$ – оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики Θ ;
 $K_a(\tau)$ – аппроксимирующее выражение корреляционной функции;
 $K_{axy}(\tau)$ – аппроксимирующее выражение взаимной корреляционной функции;
 $K_x(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса;
 $K_x(t, t')$ – корреляционная функция случайного процесса;
 $K_{xy}(\tau)$ – взаимная корреляционная функция;
 $L_k(\tau, \alpha)$ – ортогональная функция Лагерра k -го порядка;
 $Leg_k(\tau, \alpha)$ – ортогональная функция Лежандра k -го порядка;
 $D_k(\tau, \alpha)$ – ортогональная функция Дирихле k -го порядка;
 $P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$, $P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$, $P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$, $P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$, $P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$ – ортогональные функции k -го порядка семейства Якоби с выбранными параметрами ортогонального базиса $P_k^{(\alpha,\beta)}(\tau, \gamma)$;
 $M[]$ – оператор математического ожидания;
 S_d – оператор усреднения;
 $Sign$ – знаковая функция;
 $S_{axy}(\omega)$ – аппроксимирующее выражение взаимной спектральной плотности мощности;

$S_x(\omega)$ – спектральная плотность мощности процесса $\overset{\circ}{x}(t)$;
 $S_{x\mu}(\omega)$ – нормированная спектральная плотность мощности процесса $\overset{\circ}{x}(t)$;
 $S_{xy}(\omega)$ – взаимная спектральная плотность мощности;
 $W_k(j\omega)$ – частотная характеристика ортогональных функций k -го порядка;
 $x_j(t)$ – j -ая реализация случайного процесса;
 $\bar{x}(\vec{\Theta}, t)$ – реализация случайного процесса;
 β_k – коэффициент разложения ортогонального ряда;
 b_k – коэффициент разложения ортогонального ряда;
 c_k – коэффициент разложения ортогонального ряда;
 Δ – погрешность аппроксимации;
 δ – погрешность аппроксимации;
 Δt_{ji} – интервал дискретизации;
 $\Delta\omega_\phi$ – полоса пропускания фильтра;
 $\Delta\omega_c$ – эквивалентная ширина спектра мощности сигнала;
 $\gamma_{см}$ – погрешность от смещенности оценки;
 $\gamma_{см доп}, \gamma_{м доп}$ – допустимые значения погрешностей оценки;
 γ_m – методическая статистическая погрешность;
 μ – показатель колебательности;
 $\hat{\Theta}_j[X(t)]$ – j -текущая оценка вероятностной характеристики;
 $\Theta[X(t)], \Theta$ – измеряемая вероятностная характеристика;
 $\vec{\Theta}$ – вектор информативных параметров случайного процесса;
 $\hat{\Theta}_{cp}[X(t)]$ – средняя оценка вероятностной характеристики;
 $\hat{\Theta}[X(t)]$ – оценка измеряемой вероятностной характеристики;
 $\hat{\Theta}_t[X(t)]$ – t -текущая оценка вероятностной характеристики;
 $\rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – аппроксимирующее выражение нормированной корреляционной функции;
 $\rho_x(\tau)$ – нормированная корреляционная функция стационарного случайного процесса;
 $\rho_x(t, t')$ – нормированная корреляционная функция случайного процесса;
 $\rho_{xy}(\tau)$ – взаимная нормированная корреляционная функция;
 r_{xy} – коэффициент корреляции;
 $\tau_k^{(i)}$ – интервал корреляции;
 $\tau_{k \max}$ – максимальный интервал корреляции;
 $\vec{\Omega}$ – вектор информативных параметров объекта исследований.

Графкин А.В., Графкин В.В., Дегтярева О.А., Иващенко А.В., Кудрина М.А.,
Куликовских И.М., Лезин И. А., Лезина И. В., Москаленко И.С.,
Прохоров С.А., Сапожникова Е.С., Станкевич А.И., Широков О.Ю.

Под редакцией профессора Прохорова С.А.

ПРИКЛАДНОЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Компьютерный набор и верстка: С.А. Прохоров
Лицензия ЛР № 040910 от 10.08.98

Подписано в печать. Формат
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 36,4
Тираж 200 экз. Заказ № 1241

Самарский научный центр Российской академии наук.
443001 Самара, Студенческий переулок, 3 А.