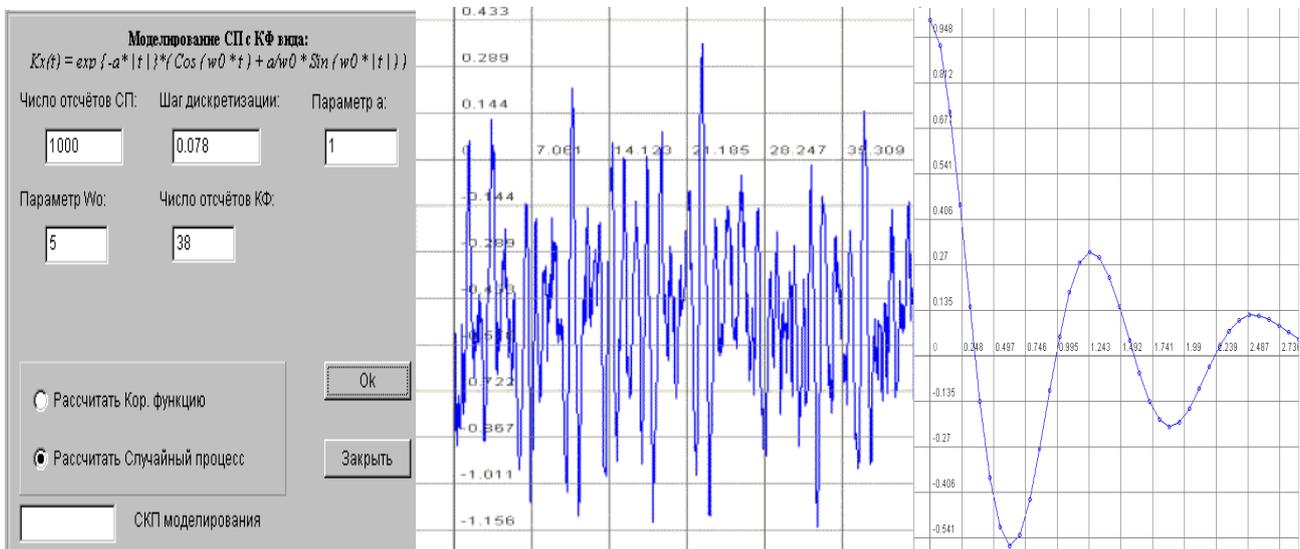


С.А. Прохоров

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ



Уральск 2001 г.

## Об авторе



**Прохоров Сергей Антонович** – доктор технических наук, профессор, академик Международной академии информатизации, член-корреспондент Российской академии естественных наук, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, декан факультета информатики, заведующий кафедрой информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета, директор Самарского филиала Российского НИИ информационных систем.

В качестве председателя Головного Совет Минвуза России по автоматизации научных исследований в период 1988-1996 г.г. руководил разработкой и выполнением шести научно-исследовательских программ и подпрограмм АН СССР, Минэлектронпрома СССР, Минвуза России.

Результаты его работы нашли отражение в 180 научных трудах, в том числе, 5 монографиях, 40 авторских свидетельствах, 6 работах опубликованных за рубежом, выступлениях более чем на 50 международных, всесоюзных и республиканских конференциях и симпозиумах.

УДК 681.518.3, 514:681.323/043.3/

ББК 32.965

П 5

Рецензенты:

Заслуженный деятель науки РФ, член-корреспондент РАН, д.т.н., профессор

Сойфер В.А.;

д.ф-м.н., профессор Жданов А.И.

Прохоров С.А.

**П 5** Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2001. 209 с.: ил.

**ISBN 9965-01-957-6**

Рассматриваются методы описания, алгоритмы и программные средства генерирования случайных процессов, потоков событий, неэквидистантных временных рядов с заданными вероятностными характеристиками, а также методы и средства оценки качества генерирования, основанные на аппроксимативном подходе и анализе фазовых портретов.

Приводится описание разработанных автоматизированных информационных систем для генерирования и аппроксимативного анализа случайных процессов, временных рядов.

Предназначена для научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов в качестве руководства по моделированию случайных процессов с заданными свойствами и имитационному моделированию алгоритмов и средств оценивания вероятностных характеристик случайных процессов, потоков событий и неэквидистантных временных рядов.

Издание монографии поддержано грантом 4 Г/2001 76/01/Б по программе «Поддержка важнейших разработок научных коллективов и отдельных учёных на основе системы грантов» по разделу «Важнейшие научные и технические разработки, соответствующие концепции социально-экономического развития Самары».

**ББК 32.965**

Печатается по решению издательского совета Самарского научного центра Российской академии наук.

П  $\frac{2402000000}{00(05)-01}$

**ISBN 9965-01-957-6**

© Самарский научный центр Российской академии наук, 2001

© Самарский государственный аэрокосмический университет, 2001

© Прохоров С.А., 2001

СОДЕРЖАНИЕ	Стр.
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	3
ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ВВЕДЕНИЕ	8
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ	10
1.1. Основные понятия и определения	17
1.2. Математическое описание случайных величин	23
1.3. Функции случайных аргументов	25
1.4. Системы случайных величин	26
1.5. Математическое описание случайных сигналов	30
1.6. Корреляционные характеристики	36
1.7. Спектральные характеристики	45
1.8. Математическое описание случайных потоков событий	50
1.9. Математическое описание неэквидистантных временных рядов	58
1.10. Типовые модели неэквидистантных временных рядов	66
2. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОРРЕЛИРОВАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	78
2.1. Моделирование временных рядов типа "белого" шума	78
2.2. Моделирование ПСП с заданным законом распределения	81
2.2.1. Метод обратной функции	81
2.2.2. Приближенный метод моделирования	83
2.3. Моделирование потоков событий с заданными свойствами	90
2.4. Проверка качества генерирования псевдослучайных последовательностей	95
2.5. АИС для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданными законами распределения	99
2.5.1. Описание подсистем	99
2.5.2. Описание интерфейса программ	101
2.5.3. Порядок работы с системой	110
3. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	111
3.1. Моделирование временных рядов с заданным видом корреляционной функции	111
3.2. Анализ методических погрешностей генерирования ПСП с заданным видом корреляционных функций	114
3.3. Экспериментальные исследования точностных характеристик программных генераторов ПСП с заданным видом корреляционных функций	121
3.4. Проверка качества генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций	125
3.5. Моделирование N ПСП с заданным видом корреляционных функций, некоррелированных между собой	132
3.6. Генерирование 2-х ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функций	133
3.7. Генерирование ПСП с заданным видом корреляционной функции и законом распределения отличным от нормального	138
3.8. Генерирование неэквидистантных временных рядов	143
3.9. Генерирование нестационарных временных рядов	147

4.	АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ И АППРОКСИМАТИВНОГО КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	150
4.1.	Учебно-исследовательская система для корреляционно-спектрального анализа	150
4.2.	Учебно-исследовательская система для моделирования и аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик	162
4.3.	Применение имитационного моделирования для исследования статистических характеристик временных рядов	168
4.4.	Анализ методических погрешностей результатов измерений вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов методом имитационного моделирования	171
4.5.	Анализ составляющей погрешности конечной разрядности процессора методом имитационного моделирования	180
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	184
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	185
	ПРИЛОЖЕНИЯ	188
П. 1.	Типовые законы распределения	188
П. 2.	Характеристические функции	193
П. 3.	Функции распределения	195
П. 4.	Обратные функции законов распределения	198
П. 5.	Характеристики типовых законов распределения ( $P_d=0,999$ )	199
П. 6.	Таблица значений коэффициента $\lambda$ к критерию Колмогорова	202
П. 7.	Таблица $\chi^2$ распределения	202
П. 8.	Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом нерекурсивной фильтрации	203
П. 9.	Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом рекурсивной фильтрации	204
П.10.	Обобщенные спектральные характеристики	205
П.11.	Блок - схема автоматизированной информационной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа.	207

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АЦП - аналого-цифровой преобразователь;  
БРП - блок регулировки параметров;  
ВУ - вычитающее устройство;  
ИП - измерительный преобразователь (датчик);  
К - коммутатор;  
КВ - квадратор;  
КФ - корреляционная функция;  
МУ - масштабирующее устройство;  
МУ - множительное устройство;  
НКФ - нормированная корреляционная функция;  
ПО - процессор обработки;  
УУ - усредняющее устройство;  
ФНЧ - фильтр нижних частот;  
 $A_{\Theta} \{ \epsilon(t_k) \}$  - алгоритм оценки вероятностной характеристики  $\Theta$ ;  
 $A_s \{ \epsilon(t_k) \}$  - алгоритм оценки сигнала;  
 $C_x(J)$  - интервальная корреляционная функция;  
 $d$  - параметр усреднения (время  $T$ , совокупность реализаций  $N$  или время и совокупность реализаций  $TN$ );  
 $\hat{\sigma}_x$  - оценка дисперсии;  
 $\text{ent}[\ ]$  - операция взятия целой части числа;  
 $F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$  - аппроксимирующее выражение функции распределения вероятностей;  
 $F\{ \}$  - функциональное преобразование полученных оценок вероятностных характеристик;  
 $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$  - аппроксимирующее выражение плотности распределения вероятностей;  
 $|F''(x)|_{\max}$  - максимум модуля второй производной функции распределения;  
 $F_x(x)$  - функция распределения вероятностей;  
 $f_x(x)$  - плотность распределения вероятностей;  
 $g[\ ]$  - оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики  $\Theta$ ;  
 $h(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  - импульсная характеристика фильтра с регулируемыми параметрами;  
 $K_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  - аппроксимирующее выражение корреляционной функции;  
 $k_a$  - коэффициент асимметрии;  
 $k_\epsilon$  - коэффициент эксцесса;  
 $K_\phi$  - коэффициент формы;  
 $K_x(\tau)$  - корреляционная функция стационарного случайного процесса;  
 $K_x(t, t')$  - корреляционная функция случайного процесса;  
 $K_{xy}(\tau)$  - взаимная корреляционная функция;  
 $K_{xy}$  - корреляционный момент;

$L_k(\tau, \alpha)$  - ортогональная функция Лагерра  $k$ -го порядка;  
 $M[\ ]$  - оператор математического ожидания;  
 $M_0$  - мода;  
 $M_e$  - медиана;  
 $\hat{\mu}_x$  - оценка математического ожидания;  
 $\beta_j$  - частота попадания анализируемой случайной величины в  $j$ -ый дифференциальный коридор;  
 $P_x(\tau)$  - полярная (знаковая) корреляционная функция;  
 $R_x(\tau)$  - релейная корреляционная функция;  
 $S_d$  - оператор усреднения;  
 $\text{Signu}$  - знаковая функция;  
 $S_{xH}(\omega)$  - нормированная спектральная плотность мощности процесса  $\dot{x}(t)$ ;  
 $S_x(\omega)$  - спектральная плотность мощности процесса  $\dot{x}(t)$ ;  
 $S_{xy}(\omega)$  - взаимная спектральная плотность мощности;  
 $T_\phi$  - постоянная времени ФНЧ;  
 $W(j\omega)$  - частотная характеристика фильтра с регулируемыми параметрами;  
 $W_1(j\omega)$  - частотная характеристика ФНЧ;  
 $W_k(j\omega)$  - частотная характеристика фильтра Лагерра  $k$ -го порядка;  
 $\bar{x}(\vec{\Theta}, t)$  - реализация случайного процесса;  
 $x_j(t)$  -  $j$ -ая реализация случайного процесса;  
 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  - параметры аппроксимирующего выражения;  
 $\alpha_k$  - начальный момент  $k$ -го порядка;  
 $\beta_k$  - коэффициент разложения ортогонального ряда;  
 $\chi$  - коэффициент вариации;  
 $\Delta$  - погрешность аппроксимации;  
 $\Delta\omega_\phi$  - полоса пропускания фильтра;  
 $\delta$  - квадратическая погрешность аппроксимации;  
 $\delta(t)$  -  $\delta$ -функция Дирака;  
 $\Delta t_i$  - интервал дискретизации;  
 $\delta_{ji}$  - индикатор состояния;  
 $\Delta\omega_c$  - эквивалентная ширина спектра мощности сигнала;  
 $\Delta x$  - ширина дифференциального коридора;  
 $\gamma_{см}$  - погрешность от смещенности оценки;  
 $\gamma_{см доп}, \gamma_{м доп}$  - допустимые значения погрешностей;  
 $\eta$  - пикфактор;  
 $\mu$  - показатель колебательности;  
 $\mu_k$  - центральный момент  $k$ -го порядка;  
 $\vec{\Omega}$  - вектор информативных параметров объекта исследований;

$\hat{\Theta}_j[X(t)]$  - j-текущая оценка вероятностной характеристики;  
 $\hat{\Theta}_t[X(t)]$  - t-текущая оценка вероятностной характеристики;  
 $\Theta[X(t)]$ ,  $\Theta$  - измеряемая вероятностная характеристика;  
 $\hat{\Theta}_{cp}[X(t)]$  - средняя оценка вероятностной характеристики;  
 $\bar{\Theta}$  - вектор информативных параметров случайного процесса;  
 $\hat{\Theta}[X(t)]$  - оценка измеряемой вероятностной характеристики;  
 $\rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  - аппроксимирующее выражение нормированной корреляционной функции;  
 $\rho_x(\tau)$  - нормированная корреляционная функция стационарного случайного процесса;  
 $\rho_x(t, t')$  - нормированная корреляционная функция случайного процесса;  
 $\rho_{xy}(\tau)$  - взаимная нормированная корреляционная функция;  
 $\rho_{xy}$  - коэффициент корреляции;  
 $\tau_k$  - интервал корреляции;  
 $\tau_{kmax}$  - максимальный интервал корреляции.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая Вашему вниманию монография написана для научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по основам моделирования случайных процессов с заданными свойствами.

Материалы, представленные в монографии, получены в результате выполнения научно-исследовательских работ на кафедрах «Информационно-измерительная техника», «Информационная техника» Самарского государственного технического университета (СГТУ), «Информационные системы и технологии» Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ), Самарском филиале Российского НИИ информационных систем, математическом факультете Загребского университета и «Центре исследования моря» института «Руджер Бошкович» (г. Загреб, Хорватия), выполненных под руководством и при непосредственном участии автора.

Отдельные разделы монографии использовались при чтении лекций по ряду дисциплин при подготовке студентов по специальностям «Информационно-измерительная техника», «Автоматизированные системы обработки информации и управления» в СГТУ, СГАУ, а также для научных сотрудников и аспирантов в «Центре исследования моря» института «Руджер Бошкович», на естественно-математическом факультете Загребского университета, международном университете подготовки аспирантов (г. Дубровник, Хорватия), Пекинском техническом университете.

**В первом разделе**, посвященном математическому описанию сигналов, приводятся основные модели случайных процессов, потоков событий, временных рядов, в том числе неэквидистантных, и их основные характеристики, используемые как при моделировании, так и оценивании вероятностных характеристик исследуемых сигналов.

**Во втором разделе** рассматриваются особенности моделирования некоррелированных временных рядов, случайных потоков событий, описывается разработанная автоматизированная информационная система для моделирования и оценки вероятностных характеристик сигналов.

Моделирование коррелированных временных рядов, анализ методических погрешностей генерирования рассматриваются **в третьем разделе**. В этом же разделе рассматриваются особенности генерирования некоррелированных между собой случайных процессов, имеющих заданный вид корреляционной функции, неэквидистантных временных рядов.

**В четвертом разделе** описываются автоматизированные информационные системы для моделирования и аппроксимативного анализа случайных процессов, а также методика и результаты имитационного моделирования временных рядов и анализа составляющей погрешности конечной разрядности процессора.

В разработке и моделировании аппаратно-программных средств на разных этапах работы принимали участие аспиранты и студенты указанных кафедр, выполнявшие под руководством автора кандидатские диссертации, курсовые и дипломные проекты: Белолипецкий В.Н., Зеленко Л.С., Дмитриева Е.В., Иванов С.Г., Крупец Н.Г., Мирзоев Р.К., Сухинин В.П., Снигерева-Давыденко Л.Б., Кудрина М.А., Новиленкова И.Ю., Козлов А.Н., Учеватов С.В., Шевченко Д., Иващенко А.В. и многие др.

Автор выражает благодарность всем сотрудникам, аспирантам и студентам кафедры информационных систем и технологий СГАУ за обсуждение материалов мо-

нографии, критические замечания, которых по мере возможности были учтены, особенно профессору Коварцеву А.Н. и доценту Иоффе В.Г.

Большую благодарность автор выражает академику АН СССР Ильичёву В.И., профессорам Виттиху В.А., Григоровскому Б.К., Куликовскому К.Л., Кловскому Д.Д., Курочкину Е.П., Мартяшину А.И., Иванову В.Н., Рожкову В.А., Трапезникову Ю.А., Хуснутдинову Г.Н., Тельскнису Л.А. (Литва), М. Бранице (Хорватия), И. Ружичу (Хорватия), Л. Ефтичу (Хорватия), Б. Чосович (Хорватия), Д. Р. Кушину (Австралия), Ф. Вайде (Венгрия) - за обсуждение работы на различных её этапах.

Особую благодарность автор выражает своим учителям: доценту Волкову И.И., профессорам Карпову Е.М., Куликовскому Л.Ф., Самарину Ю.П., Фремке А.В., Цветкову Э.И., Б. Соучеку (Хорватия), - за постоянное внимание, консультации и особенно за то, что привели в чудесный мир теории вероятностей и случайных процессов.

Автор считает своим долгом выразить глубокую признательность ректору СГАУ член-корреспонденту РАН, профессору Сойферу В.А. за постоянную поддержку, рецензию и неоценимую помощь при издании монографии, а также д.ф.-м.н., профессору Жданову А.И. за ценные замечания.

Неоценимую помощь в редактировании монографии оказала инженер кафедры «Информационные системы и технологии» СГАУ Муравьёва Е.В., которой автор выражает свою благодарность.

Издание монографии поддержано грантом 4 Г/2001 76/01/Б по программе «Поддержка важнейших разработок научных коллективов и отдельных учёных на основе системы грантов» по разделу «Важнейшие научные и технические разработки, соответствующие концепции социально-экономического развития Самары», за что автор выражает глубокую признательность губернатору Самарской области Титову К.А., а также президенту Самарского научного центра РАН академику РАН Шорину В.П.

И, наконец, но не в последнюю очередь, я благодарен своей семье за понимание и поддержку в работе.

Замечания и пожелания по книге, а также вопросы по информационным системам просьба направлять по адресу:

Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва, факультет информатики, кафедра «Информационных систем и технологий», декану факультета информатики, заведующему кафедрой Прохорову С.А.

E-mail: INTERNET: sp@smr.ru

## ВВЕДЕНИЕ

На пути создания образцов новой техники, технологических процессов научные исследования являются первым шагом, в процессе которого исследователь открывает новые законы, закономерности, совершает научные открытия.

Научные исследования представляют собой сложный, итерационный процесс, представляющий сочетание теоретических, включая методы моделирования, и экспериментальных методов [3, 35].

Не умаляя достоинств теоретических методов исследования, значение экспериментальных методов трудно переоценить. Только с помощью эксперимента возможно получение достоверной информации об исследуемом объекте в реальном масштабе времени, после обработки которой возможно построение её модели. Открыв новый эффект, новое явление экспериментальным путем, которые невозможно объяснить на базе существующих теорий, экспериментатор стимулирует развитие фундаментальной науки. В то же время, получив новый теоретический научный результат, исследователь, с целью подтверждения основных положений новой теории, нуждается в его экспериментальной проверке.

При проведении экспериментальных научных исследований исследователь:

1. ставит задачу исследований в терминах предметной области;
2. строит модель исследуемого объекта и определяет вектор информативных параметров  $\vec{\Omega}$ , адекватно описывающий ее в рамках поставленной задачи;
3. с помощью технических средств осуществляет измерение, регистрацию и обработку мгновенных значений наблюдаемых процессов  $\vec{X}(\vec{\Theta}, t)$ , с целью определения вектора информативных параметров  $\vec{\Theta}$ , описывающих модель процесса;
4. по результатам обработки информации устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами  $\vec{\Omega}$  и  $\vec{\Theta}$ :

$$\vec{\Omega} = \Phi(\vec{\Theta}),$$

используемое для построения искомой модели объекта;

1. анализирует полученные результаты;
2. если результаты его устраивают - эксперимент окончен, в противном случае необходимо повторить пункты 3,4 (точность полученных результатов неудовлетворительна), или пункты 2-4 (вектор параметров  $\vec{\Omega}$  не полно описывает поведение объекта), а иногда и пункты 1-4 (ставится другая задача).

Следует отметить, что задачи 1, 2 и 4, 5, как правило, решает специалист данной предметной области, формулируя и интерпретируя ее в терминах предметной области, а 3 задачу - специалисты в области измерения и обработки измерительной информации.

Такое разделение функций между исследователем и специалистом в области измерения и обработки измерительной информации позволяет последнему абстрагироваться от конкретных физических объектов и вектора физических параметров  $\vec{\Omega}$  и непосредственно перейти:

1. к математическому описанию исследуемых процессов и определению вектора параметров  $\vec{\Theta}$ , достаточных для решения поставленной задачи;
2. сбору информации с помощью первичных преобразователей;
3. оценке вектора параметров  $\vec{\Theta}$  с помощью технических средств;
4. анализу точности полученных результатов;

5. аппроксимации полученных функциональных зависимостей с помощью параметрических моделей.

Каждая из перечисленных задач имеет свои специфические особенности, а эффективность решения четвертой и пятой - зависит от применяемых технических средств, построенных, как правило, на базе современных средств информационно-измерительной и вычислительной техники.

Основной подсистемой любого технического средства, предназначенного для получения и обработки измерительной информации: автоматизированных систем научных исследований (АСНИ), информационно-измерительных систем (ИИС), процессорных измерительных систем (ПРИС), - является измерительно-вычислительный канал.

Под **измерительно-вычислительным каналом** понимается совокупность аппаратно-программных средств, предназначенных для измерения мгновенных значений соответствующей физической величины, обработки результатов измерения и представления конечных результатов в форме, удобной для дальнейшего использования.

Рассмотрим структуру отдельного измерительно-вычислительного канала.

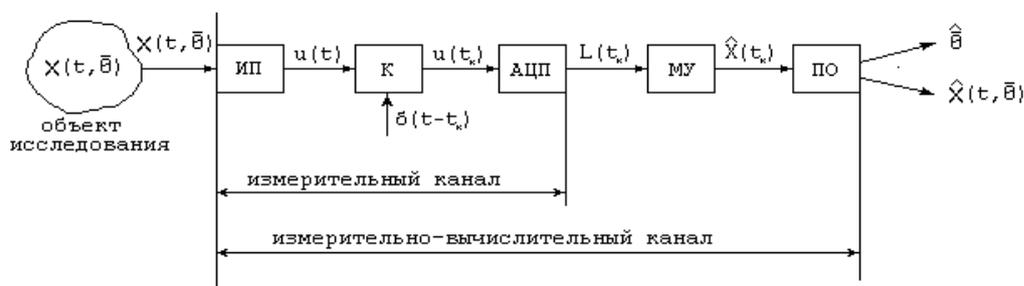


Рисунок В.1. Измерительно-вычислительный канал

На рис. В.1 приняты следующие обозначения.

- **ИП** - измерительный преобразователь (датчик);
- **К** - коммутатор;
- **АЦП** – аналого-цифровой преобразователь;
- **МУ** - масштабирующее устройство;
- **ПО** - процессор обработки.

Рассмотрим преобразования, происходящие с сигналами в измерительно-вычислительном канале.

Независимо от природы измеряемой физической величины на выходе **ИП** получаем электрический сигнал. При этом, каждому значению физической величины ставится в соответствие вполне определенное значение электрической величины:  $x(t, \vec{\Theta}) \rightarrow u(t)$ .

Основным требованием, предъявляемым к **ИП**, является линейность:

$$u(t) = k x(t, \vec{\Theta}), \quad (B.1)$$

где  $k = \text{const}$  - коэффициент преобразования.

Следует отметить, что если связь между  $u(t)$  и  $x(t, \vec{\Theta})$  нелинейная, то производят линеаризацию функции преобразования, воспользовавшись, например, методом наименьших квадратов [8].

После **ИП** исследуемый сигнал поступает на вход коммутатора.

В коммутаторе непрерывный сигнал  $u(t)$  преобразуется в последовательность отсчетов, отстоящих друг от друга на интервале  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ . Т.е. выполняется операция **дискретизации**:

$$u(t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \delta(t-t_i) dt, \quad (B.2)$$

$$\text{где } \delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{если } t = t_i \\ 0, & \text{если } t \neq t_i \end{cases} \text{ - } \delta\text{-функция Дирака.} \quad (B.3)$$

Отметим, что при коммутации возможны два варианта:

- $\Delta t_i = \text{const}$  - регулярная дискретизация;
- $\Delta t_i = \text{random}$  - нерегулярная дискретизация.

После коммутации сигнал поступает на аналого-цифровой преобразователь, где последовательно подвергается процедурам **квантования и кодирования**.

**Квантование** - процедура отнесения непрерывного значения процесса  $u(t_i)$  к ближайшему разрешенному целому уровню.

$$L(t_i) = \text{ent} \left[ \frac{|u(t_i)|}{\Delta u} + \lambda \right] \text{Sign } u(t_i), \quad (B.4)$$

где -  $\text{ent}[\ ]$  - операция взятия целой части числа;

-  $\Delta u$  - шаг квантования по уровню;

-  $\lambda = \begin{cases} 0, & \text{при усечении;} \\ 0,5, & \text{при округлении;} \end{cases}$

-  $\text{Sign } u = \begin{cases} 1, & \text{если } u > 0; \\ 0, & \text{если } u = 0; \\ -1, & \text{если } u < 0. \end{cases}$  - знаковая функция. (B.5)

В результате квантования сигнала получим целое число квантов, которое может кодироваться различными способами. При использовании двоичной системы счисления с весами 8-4-2-1 число двоичных разрядов, необходимых для представления  $L(t_i)$  определяется выражением:

$$n = \log_2 \max |L(t_i)|. \quad (B.6)$$

Следует подчеркнуть, что в случае одноканальной системы операции коммутации и аналого-цифрового преобразования совпадают. В многоканальных же системах, как правило, применяется один коммутатор на несколько каналов.

После аналого-цифрового преобразователя сигнал поступает на вход масштабирующего устройства, выходной сигнал которого равен:

$$\mathfrak{K}(t_k) = \frac{L(t_k)\Delta u}{k}. \quad (B.7)$$

Т.е. при этом происходит обратное преобразование: приведение электрического сигнала к измеряемой физической величине.

Далее сигнал поступает в процессор обработки - устройство, реализующее тот или иной алгоритм получения оценки параметров физического процесса  $x(t, \bar{\Theta})$ . При этом возможны два подхода к решению задачи оценки  $\bar{\Theta}$ :

- в режиме экспресс-анализа с помощью алгоритма  $A_{\Theta}$  оценивают вектор неизвестных параметров  $\bar{\Theta} = A_{\Theta} \{ \mathfrak{K}(t_k) \}$ ;

- в режиме контроля и регистрации с помощью алгоритма  $A_s$  получают оценку сигнала  $\mathfrak{K}(t, \bar{\Theta}) = A_s \{ \mathfrak{K}(t_k) \}$ , записывают его на какой-либо промежуточный но-

ситель, а затем обрабатывают. При этом происходит задержка в обработке информации и, следовательно, в получении результата.

Первый подход будем называть **статистическими измерениями**, второй - **статистической обработкой**.

Под **статистическими измерениями** будем понимать измерение вероятностных характеристик случайных процессов с помощью специальных технических средств, работающих в реальном масштабе времени.

Под **статистической обработкой** будем понимать оценку вероятностных характеристик случайных процессов на ЭВМ, записанных на промежуточный носитель, с задержкой в обработке информации.

С целью повышения эффективности научных исследований, особенно при исследовании новых объектов, возникает необходимость в разработке и исследовании **новых алгоритмов** оценки вектора неизвестных параметров -  $\vec{\Theta} = A_{\Theta} \{ \epsilon(t_k) \}$ .

Следует отметить, что исследование алгоритмов возможно как аналитическими методами, так и методом имитационного моделирования на ЭВМ, суть которого заключается в анализе их метрологических характеристик с использованием псевдослучайных последовательностей, сгенерированных с помощью ЭВМ. Появилось большое количество интересных и важных монографий и статей, посвященных методологии, планированию, конструированию и выполнению моделирования [10, 11, 20, 36, 37, 57, ]. Большинство их них описывает метод, который носит название метода Монте-Карло. Современное толкование этого термина базируется на работе Неймана и Улама, выполненной в конце сороковых годов, в которой они применили специальный математический метод для решения проблемы ядерной физики, экспериментальные исследования которых очень дороги, а аналитическое решение очень сложно.

Как правило реализация этого метода включает следующие основные блоки:

- имитации входных процессов и внешних воздействий;
- реальных и идеальных моделей, а также их разности;
- формирования изменения параметров модели:
  - под воздействием внешних факторов;
  - в случае технологического разброса на множестве экземпляров;
  - в случае временной нестабильности;
- первичной статистической обработки для определения статистических характеристик наблюдаемых процессов при данных испытаниях;
- вторичной статистической обработки и управления машинным экспериментом:
  - совокупной обработки множества результатов экспериментов;
  - определения необходимого числа прогонов модели и принятия решений при последовательном планировании о продолжении или окончания эксперимента;
  - управления параметрами модели и значениями внешних факторов;
  - управления системным временем;
- датчик системного времени;
- управляющую программу, синхронизирующую процесс моделирования.

Функциональная схема системного моделирования, поясняющая взаимодействие отдельных блоков представлена на рис. В.2.

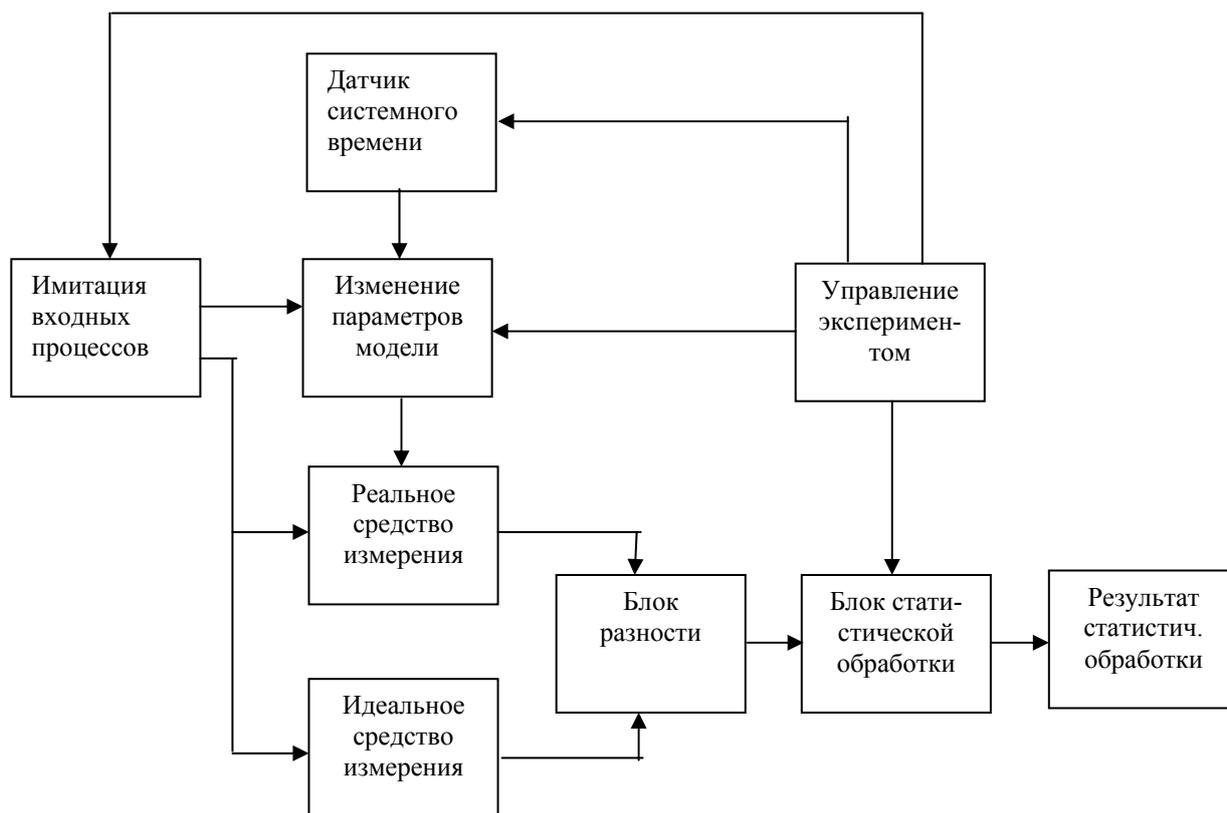


Рисунок В.2. Функциональная схема имитационного моделирования

Сложность имитационной модели и затраты машинного времени при ее исследовании во многом будут зависеть от принципа имитационного моделирования.

Учитывая, что основным принципом проектирования автоматизированных систем для автоматизации научных исследований, ИИС, процессорных средств измерения является агрегатное проектирование [4], наиболее целесообразно при конструировании модели использовать принцип блочного моделирования, суть которого сводится к следующему:

- на основании декомпозиции АСНИ, ИИС, ПРИС создается библиотека моделей стандартных блоков для моделирования входных воздействий, дестабилизирующих факторов, блоков реальных систем.
- на основании разработанных моделей блоков конструируется модель системы в соответствии с ее структурой, с возможностью контроля промежуточных последовательностей, соответствующих реальным физическим точкам системы.

Достоинства блочных моделей являются:

- гибкость, простота изменения конфигурации модели системы, возможность прослеживания промежуточных результатов; соответствие математической модели;
- возможность унификации процедур моделирования путём создания библиотеки стандартных процедур;
- единообразие и простота построения моделей разнообразных структур;
- возможность автоматизации процедуры построения моделей систем.

К недостаткам блочного моделирования следует отнести:

- увеличение времени моделирования;
- необходимость большого объёма памяти для хранения библиотеки моделей.

Следует подчеркнуть, что затраты на моделирование, достоверность полученных результатов во многом зависят от принятых решений на этапе планирования эксперимента, особенно при определении необходимого числа испытаний, выборе входных воздействий и т.д.

Согласно методике, изложенной в РТМ 25139-74 [29], в качестве метрологической характеристики может выбираться максимальное значение модуля погрешностей оценки  $\hat{\Theta}$ :

$$\Delta = \max \left\{ \left| \Delta_j \right| \right\} j = 1, \dots, N, \quad (B.8)$$

где N-число испытаний, зависящее от доверительной информации  $P_d$ . Так, если  $P_d = 0,95$ , то число испытаний равно 29 независимо от закона распределения погрешностей.

Структура пакета прикладных программ имитационного моделирования алгоритмов оценивания характеристик неэквидистантных временных рядов, содержащего как обрабатывающие, так и управляющие программы, состоит из следующих основных блоков:

- задания входных воздействий с требуемыми характеристиками;
- первичной статистической обработки информации ;
- вторичной статистической обработки информации;
- алгоритмов оценивания вероятностных характеристик;
- сервисных;
- определения методической погрешности и ее составляющих;
- определения инструментальных составляющих погрешности.

Одним из важных этапов имитационного моделирования является выбор, обоснование и моделирование сигналов, используемых в модельном эксперименте. Решение этой задачи определяется целевой функцией моделирования, назначением исследуемой системы и т.д. Так как при моделировании АСНИ, ИИС, ПРИС основной задачей является определение метрологических характеристик при определенных ограничениях на технико-экономические показатели, то существенным требованием, предъявляемым к образцовому (испытательному или тестовому) сигналу, является возможность оценки с его помощью погрешности результата измерения данным средством на заданном классе входных воздействий.

Учитывая большое разнообразие решаемых задач и соответствующих им средств измерения, однозначного ответа о виде образцового сигнала быть не может. Окончательное решение о выборе вида образцового сигнала для конкретных типов средств измерения должно приниматься по результатам лабораторных исследований.

В самом общем виде выбор образцового сигнала осуществляется:

- выбором наихудшего сигнала из множества возможных входных сигналов, для обеспечения гарантированной погрешности результата измерения;
- формированием набора типовых сигналов, то есть наиболее часто встречающихся входных сигналов или сигналов, наиболее интересующих исследователя;
- формированием набора типовых сигналов, включающих в себя наихудший сигнал.

Основными требованиями, предъявляемыми к образцовым сигналам, являются следующие:

- заданный вид вероятностных характеристик;

- принадлежность к классу входных сигналов, для которых предназначено данное средство;
- стабильность во времени;
- отклонение текущих характеристик от расчетных не должно быть более допустимого.

В некоторых случаях, кроме случайных сигналов, возникает необходимость в применении детерминированных образцовых сигналов.

Количество входных сигналов, одновременно обрабатываемых в модели системы, определяется сложностью системы, сложностью модели, количеством каналов и т.д. Т.е. в системе моделирования должна быть предусмотрена возможность генерирования  $N$  сигналов как с одинаковыми, так и различными характеристиками.

Отметим, что используемые в монографии термины «генерирование случайных процессов» и «моделирование случайных процессов» являются синонимами.

# 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ

## 1.1. Основные понятия и определения

Источником информации об измеряемой физической величине является электрический сигнал  $x(t, \bar{\Theta})$ , где  $\bar{\Theta}$  - вектор неизвестных параметров, подлежащий определению с помощью специальных технических средств. Состав этого вектора зависит от класса решаемой задачи и определяется в каждом конкретном случае. Сигналом или процессом считается любая функция времени. При фиксированном моменте времени  $t = t_i$  получим мгновенное значение измеряемой величины  $x(t_i, \bar{\Theta})$ . В зависимости от характера этой величины: **детерминированной** или **случайной**, - исследуемые процессы можно разделить на два класса: **детерминированные**, **случайные** процессы (сигналы).

**Детерминированным** является такой сигнал, который представляет собой известную функцию времени.

Для детерминированного сигнала, задав модель и числовые значения её параметров, можно определить его мгновенное значение для любого произвольного момента времени, например (см. рис. 1.1):

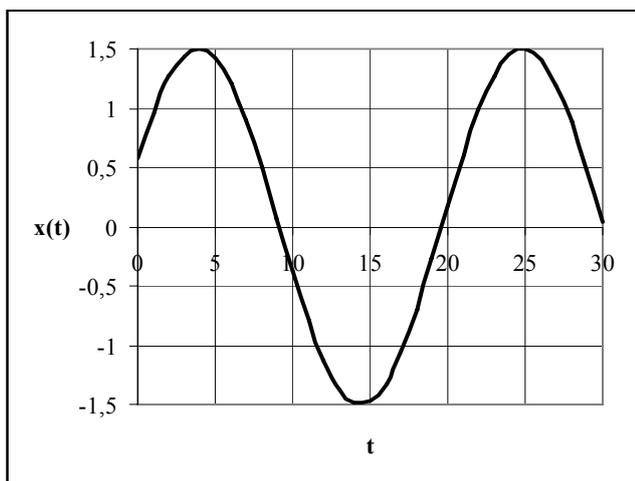


Рисунок 1.1.

$$x(t, \bar{\Theta}) = A_m \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (1.1)$$

где  $\bar{\Theta} = [A_m, \omega_0, \varphi]$  - вектор параметров модели.

В свою очередь, детерминированные сигналы делятся на непрерывные и импульсные. Непрерывные сигналы характеризуются тем, что в заданном диапазоне изменения они могут иметь бесконечное число значений. Для непрерывных сигналов справедливо следующее утверждение:

$$\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} x(t) = x(t_0). \quad (1.2)$$

Импульсные сигналы существуют на ограниченном интервале времени

$$x(t) = h(t)1(t_1 < t < t_2), \quad (1.3)$$

где  $h(t)$  - функция, описывающая форму импульса;

$T_u = t_2 - t_1$  - длительность импульса.

$$1(0 < t < T_u) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < t < T_u; \\ 0, & \text{если } t > T_u; \end{cases} \quad \text{- единичная функция} \quad (1.4)$$

На рис. 1.2 приведен пример импульсного сигнала, представляющего собой выходной сигнал фильтра с импульсной характеристикой

$$h(t) = \frac{k}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \left( \cos\omega_0 t + \frac{\sqrt{1+T^2\omega_0^2} - 1}{T\omega_0} \sin\omega_0 t \right) \quad (1.5)$$

при подаче на его вход сигнала в виде  $\delta$ -функции:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{если } t = 0; \\ 0, & \text{если } t \neq 0; \end{cases} \quad u \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1. \quad (1.6)$$

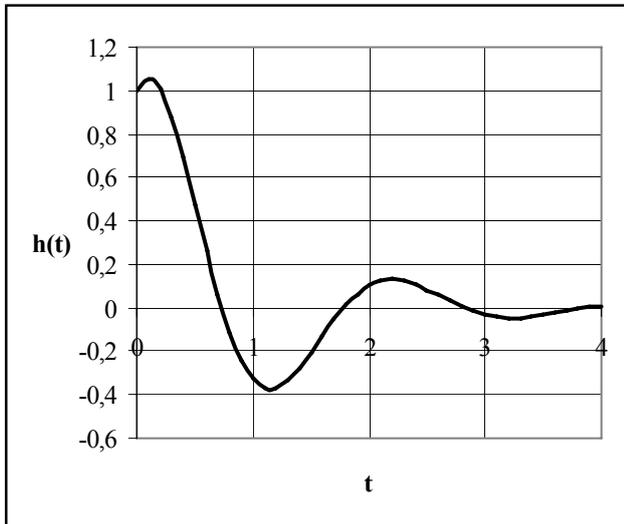


Рисунок 1.2.

Кроме того, детерминированные сигналы делятся на периодические и непериодические (единичные).

Периодическим называется процесс, для которого справедливо следующее свойство (см. рис.1.1):

$$x(t+nT) = x(t) \mathbb{1}(t < T) \quad (1.7)$$

где  $T$  - период процесса,  $n = 1, 2, \dots$

Для периодических импульсных сигналов характерно, что:

$$x(t+nT) = x(t) \mathbb{1}(0 < t < T) = h(t) \mathbb{1}(0 < t < T_u), \quad (1.8)$$

где  $T$  - период следования импульсов;  
 $T_u$  - длительность импульса.

На рис. 1.3. приведены примеры импульсных периодических сигналов, представляющие собой выходной сигнал генератора импульсов (рис. 1.3.а)), поток регулярных событий (точечный поток), поступающих, например, на вход информационно-измерительной системы (рис. 1.3. б)).

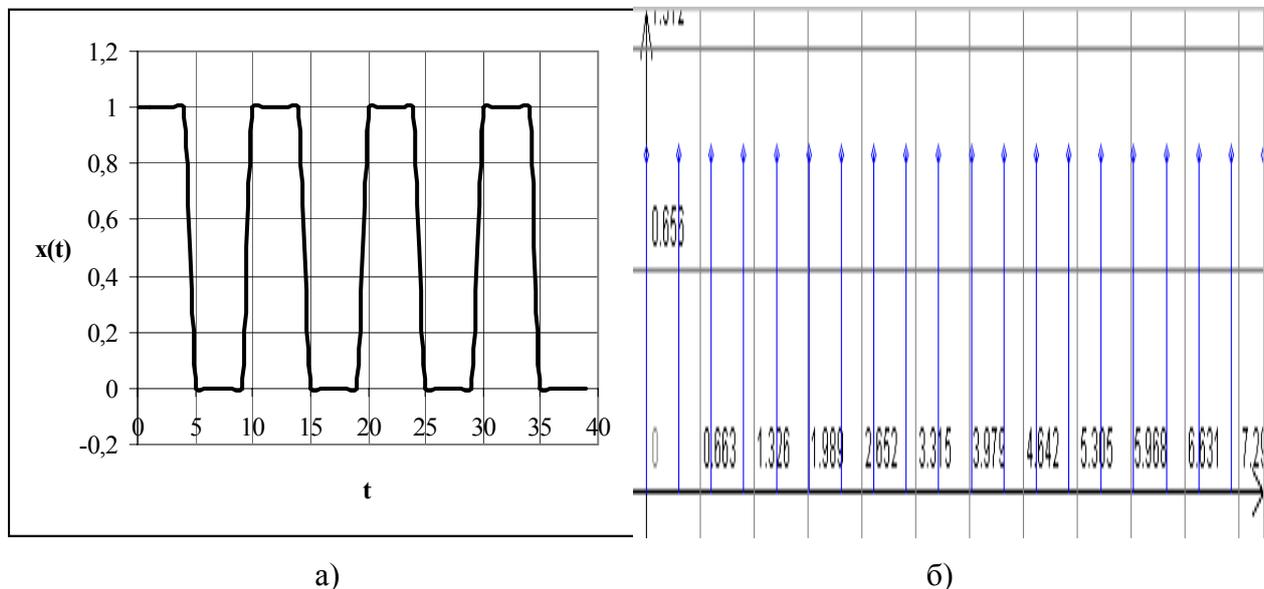


Рисунок 1.3.

Как правило, в процессе исследования определяются не все параметры, входящие в модель, а только те из них, которые необходимы для решения задачи.

Основные параметры детерминированных сигналов приведены в таблице 1.1.

## Параметры детерминированных сигналов

Таблица 1.1

№	Название параметра	Определение
1	среднее значение	$X_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$
2	действующее значение	$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) dt}$
3	амплитудное значение	$X_m$ - наибольшее значение измеряемого сигнала-
4	коэффициент амплитуды	$k_a = \frac{X_m}{X}$
5	коэффициент формы	$k_{\text{TM}} = \frac{X}{X_{-p}}$
6	период сигнала	$T$ - минимальный интервал времени, через который повторяется сигнал
7	частота сигнала	$f = \frac{1}{T}$
8	длительность импульса	$T_u$ - интервал времени от момента появления импульса до его окончания
9	скважность	$Q = \frac{T}{T_u}$

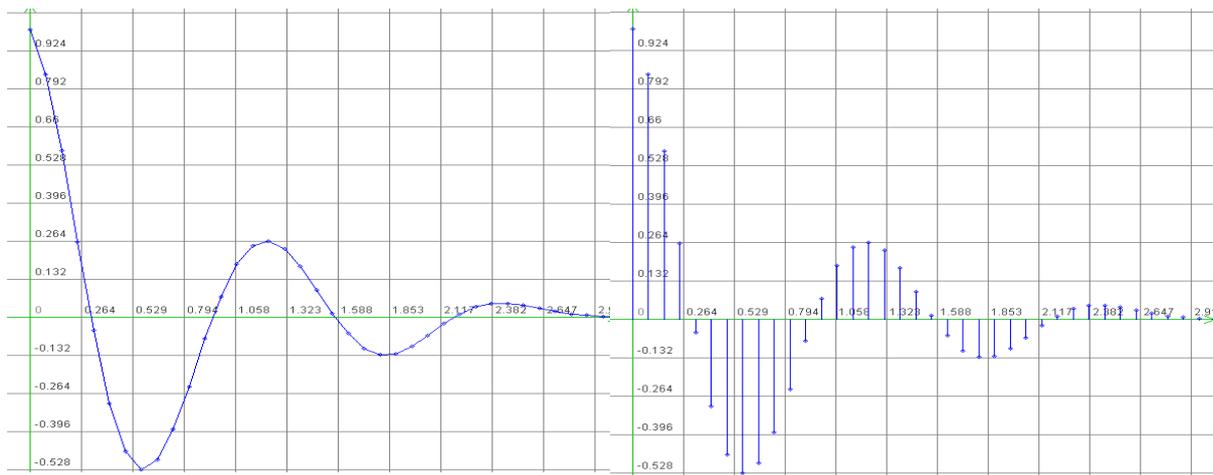
Как следует из таблицы 1.1, между амплитудным (пиковым), действующим и средним значениями существуют определенные соотношения, характеризующие форму сигнала, что даёт возможность решать задачи идентификации сигналов по измеренным значениям  $k_a$  и  $k_f$ , а также измерять действующее, среднее и амплитудные значения сигналов разной формы с помощью приборов, проградуированных, например для синусоидальных сигналов.

Детерминированный сигнал, подвергнутый аналого-цифровому преобразованию, представляет собой временную последовательность (временной ряд), члены которой отстоят друг от друга на величину интервала дискретизации  $\Delta t_0$ .

На рис. 1.4 б), в качестве примера, приведена реализация временного ряда импульсного сигнала, а на рис. 1.4 а) - непрерывная реализация того же сигнала.

**Случайными** называются процессы, численные значения которых невозможно определить (вычислить) для любого заданного момента времени. Отдельное наблюдение случайного процесса называется его **реализацией**. На рис. 1.5 приведен пример реализации случайного процесса.

При фиксации момента времени  $t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  получаем случайную величину.



а) б)  
Рисунок 1.4. Реализация импульсного сигнала

Введем следующие обозначения:  $X(t)$  - случайный процесс;  $x_j(t)$  -  $j$ -я реализация процесса  $X(t)$ ;  $x_j(t_i)$  - мгновенное значение процесса  $X(t)$ , соответствующее значению  $j$ -й реализации в  $i$ -й момент времени.

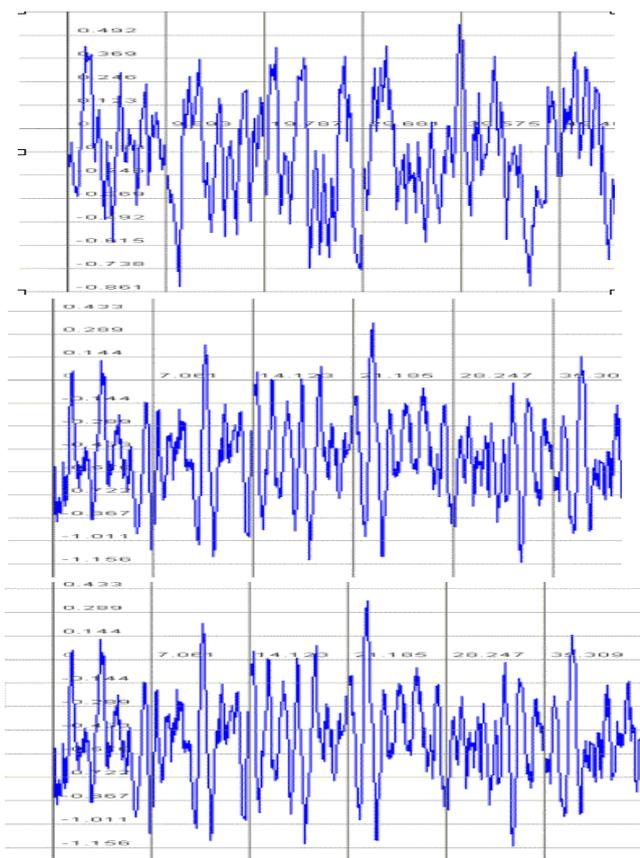


Рисунок 1.5. Реализация случайного процесса

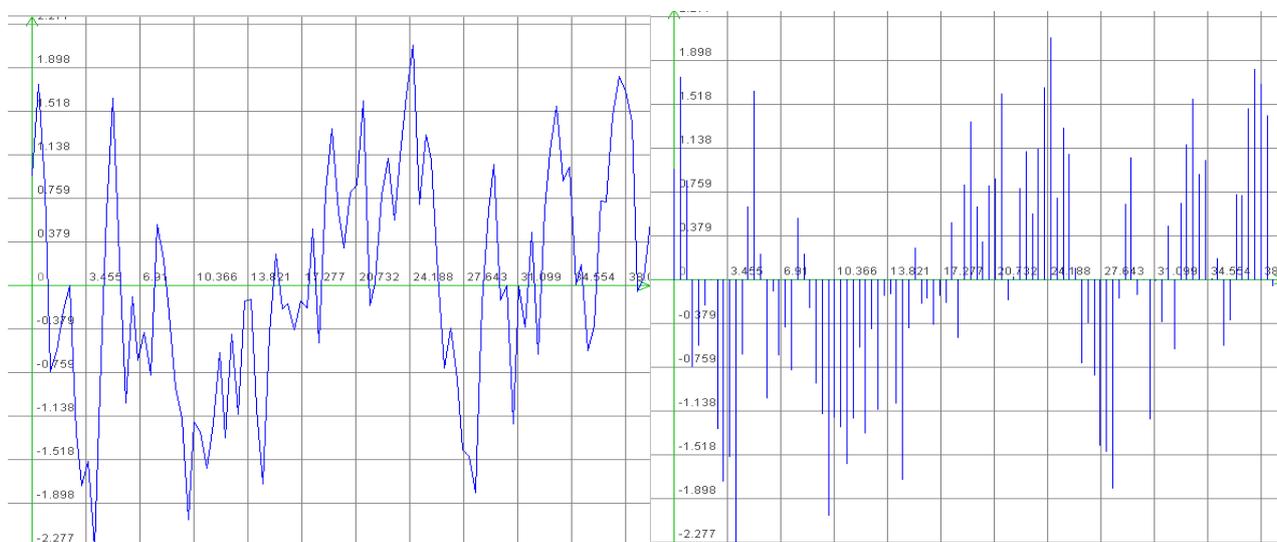
Совокупность мгновенных значений, соответствующих значениям различных реализаций в один и тот же момент времени  $t_i$ , назовем  $i$ -й последовательностью процесса  $X(t)$  и обозначим  $x(t_i)$ .

Отсюда следует, что в качестве аргументов случайного процесса выступают **время и номер реализации** [53]. Хотя между этими координатами имеется принципиальное различие, заключающееся в том, что время может быть как непрерывным, так и дискретным, а номер реализации принимает только целочисленные значения, в теоретико-вероятностном плане они равноправны.

Следовательно, возможны два подхода к изучению свойств случайных процессов: первый, основанный на анализе множества реализаций, и второй, оперирующий множеством последовательностей.

Для каждого случайного процесса могут быть установлены область определения  $T \times N$  и область существования  $X$ :  $t \in T$ ,  $j \in N$  и  $x \in X$ . При этом  $T$  и  $X$  могут быть непрерывными, дискретными или смешанными,  $N$  - только дискретной [53].

Пример реализации дискретного случайного процесса (временной последовательности, временного ряда), имеющего в заданном диапазоне изменения ограниченное число значений, уровней, представлены на рис. 1.6 б). На рис 1.6 а) представлена соответствующая ему реализация случайного процесса.



а) б)  
Рисунок 1.6. Реализации случайного процесса и временного ряда

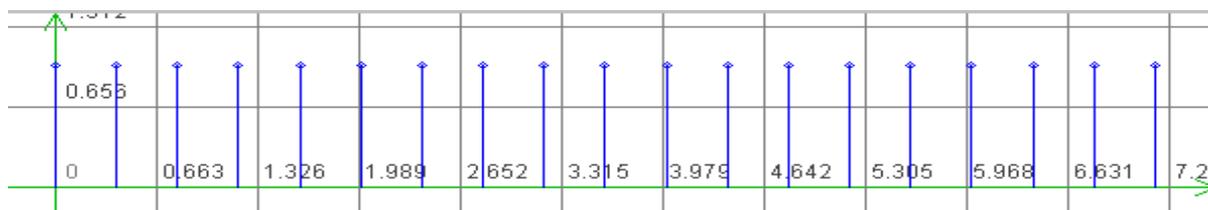
В процессе измерения интерес могут представлять как мгновенные значения  $x_j(t_j)$ , так и сами моменты измерения  $t_{ji}$  - потоки событий.

Под **потоком событий** будем понимать временную последовательность, характеризующую моментами наступления отдельных событий, независимо от природы этих событий.

При этом можно выделить два случая:

- $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \text{const}$  – регулярный (периодический) поток (см.рис. 1.7 а));
- $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \text{random}$  нерегулярный (аперiodический) поток (см. рис. 1.7

б)).



а) Регулярный поток



б) Нерегулярный поток

Рисунок 1.7. Реализации потоков событий

При решении самых разнообразных научно-технических задач исследователю приходится сталкиваться с ситуациями, когда исследуемый процесс  $X(t)$  представлен **неэвидистантным временным рядом**

$$\left[ x_{ji} (t_{ji} / \Delta t_{ji}) \right]_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, M_j}, \text{ где } \Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \text{random}.$$

Заметим, что индекс  $i$  в этом случае характеризует лишь место отсчёта или метки времени в массивах, где хранятся входные данные, а не характеризует время наступления события. Примеры реализаций неэвидистантных временных рядов приведены на рис. 1.8.

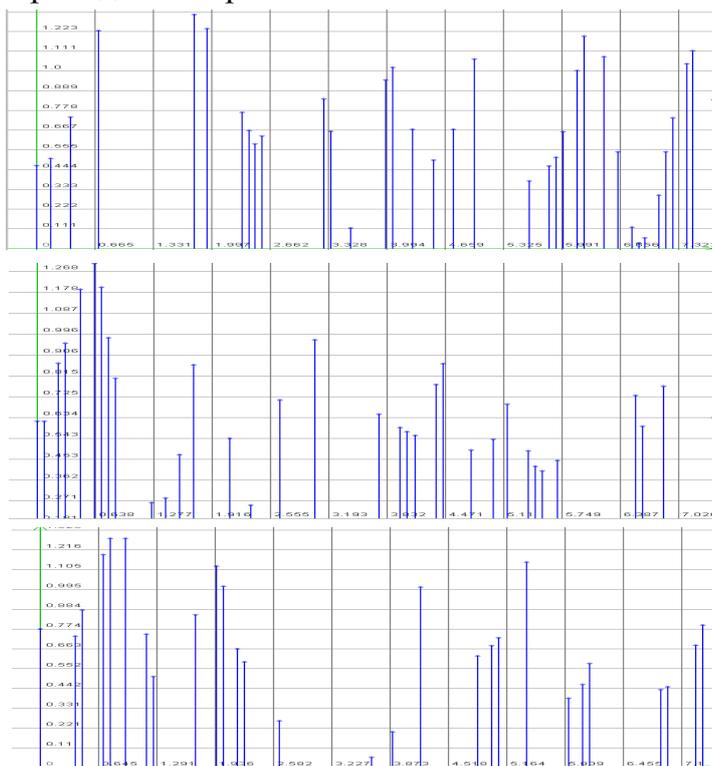


Рисунок 1.8. Примеры реализаций

Выделим восемь классов важнейших процессов, которые встречаются на практике при решении самых разнообразных задач:

1. детерминированные процессы -  $\varphi(t)$ ;
2. случайные процессы -  $X(t)$ ;
3. детерминированные последовательности с регулярными интервалами времени между отсчетами  $T = \text{const} - \varphi(iT)$ ;
4. случайные последовательности с регулярными интервалами времени между отсчетами  $\Delta t_0 = \text{const} - X_j(i\Delta t_0)$ , где  $j$  - номер реализации;
5. детерминированные последовательности со случайными интервалами времени между отсчетами  $\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \text{random} - \varphi_j(t_i)$ ;

6. случайные последовательности со случайными интервалами времени между отсчетами  $\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \text{random} - X_j(t_i)$ ;

7. регулярный поток событий -  $\delta(t-T_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = T_i \\ 0, & \text{если } t \neq T_i \end{cases}$ ;

8. случайный поток событий -  $\delta(t-t_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = t_i \\ 0, & \text{если } t \neq t_i \end{cases}$ , где  $t_i = \text{random}$ ;

Каждый из перечисленных классов имеет своё характерное описание - **математическую модель**, параметры которой подлежат определению как, с помощью теоретических, так и экспериментальных методов исследования.

Различные комбинации этих процессов дает возможность построить более сложные модели процессов, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при моделировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки с целью определения их метрологических характеристик.

## 1.2. Математическое описание случайных величин

Основой для математического описания случайных процессов и потоков событий является математическое описание случайных величин.

Для описания случайных величин в практических приложениях наиболее часто применяются [12]:

- законы распределения случайных величин;
- числовые характеристики законов определения.
- характеристические функции, -

обладающие различной степенью полноты описания.

Законом распределения называется функциональная зависимость, устанавливающая связь между возможным значением случайной величины и вероятностью появления этого значения.

Законы распределения записываются в виде:

- функции распределения вероятности -  $F_x(x) = P(X < x)$ ;
- плотности распределения вероятности -  $f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}$ .

Приведем основные свойства законов распределения (см. табл 1.2).

Таблица 1.2

	$f_x(x)$	$F_x(x)$
1	$f_x(x) \geq 0$	$F_x(x_2) \geq F_x(x_1)$ при $x_2 \geq x_1$
2	$P(x < X < x+dx) = f_x(x)dx$	$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F_x(x_2) - F_x(x_1)$
3	$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x)$	$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(x)dx$
4	$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1$	$F_x(\infty) = 1$
5	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_x(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f_x(x) = 0$	$F_x(-\infty) = 0$

Аналитические выражения наиболее часто встречающиеся законов распределения вероятности приведены в приложении П.1.

Законы распределения дают исчерпывающее описание случайной величины. Однако для их экспериментального определения требуется большой объём данных и, следовательно, большие материальные затраты. В большинстве же практических случаев для описания случайных величин применяют приближенные методы, основанные на знании числовых характеристик.

К числовым характеристикам относятся: начальные и центральные моменты  $k$ -го порядка, мода, медиана, коэффициенты вариации и формы, пикфактор и т.д.

• Начальным моментом  $k$ -го порядка называется величина, определяемая выражением:

$$\alpha_k = M[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_x(x) dx, \quad (1.9)$$

где  $M[ ]$  - операция нахождения математического ожидания.

Из начальных моментов наиболее часто применяются:

-  $\alpha_1 = M[X] = m_x$  - математическое ожидание, характеризующие среднее значение оцениваемой случайной величины;

-  $\alpha_2 = M[X^2]$  - определяющий мощность случайной величины.

• Центральные моменты  $k$ -го определяются в виде:

$$\mu_k = M[\overset{\circ}{X}^k],$$

где  $\overset{\circ}{X} = X - m_x$  - центрированная случайная величина.

Из них наиболее часто применяются:

-  $\mu_2 = \sigma_x^2$  - дисперсия процесса, характеризующая разброс значений случайной величины относительно математического ожидания;

-  $\mu_3 = M[\overset{\circ}{X}^3]$  - характеризует симметричность закона распределения. Для

устранения зависимости  $\mu_3$  от дисперсии вводят коэффициент асимметрии:  $K_a = \mu_3 / \sigma^3$  ;

-  $\mu_4 = M[\overset{\circ}{X}^4]$  - характеризует островершинность закона распределения. В

качестве базового закона (закона сравнения) был выбран нормальный закон, для которого  $\mu_4 = 3\sigma_x^4$ . Для удобства сравнения ввели понятие коэффициент эксцесса:

$$K_\varepsilon = \mu_4 / \sigma_x^4 - 3.$$

Моменты, коэффициенты асимметрии и эксцесса применяются при решении самых разнообразных прикладных задач, например:

- упрощенном описании случайной величины;

- идентификации закона распределения случайной величины с использованием кривых Пирсона [12];

- построении аналитического выражения закона распределения в виде ряда Грамма-Шарлье по той или иной системе ортогональных функций, например: Эрмита, Лежандра и т. д. [21];

- определении динамического диапазона случайной величины.

• Мода -  $M_o$  - наиболее вероятное значение случайной величины  $X$ , определяемое в результате решения уравнения:

$$f'_x(x) = 0. \quad (1.10)$$

• Медиана -  $M_e$  - определяется из уравнения

$$P\{x < M_e\} = 0,5 \quad (1.11)$$

и делит площадь под кривой распределения пополам.

• Коэффициент вариации  $- \chi = \sigma_x / m_x$  - применяется при метрологическом анализе результатов измерения.

- Коэффициент формы -  $K_\phi = M[|x|]/\sigma_x$  - характеризует форму кривой распределения и применяется, например, при оценки релейной корреляционной функции [24]/

- Пикфактор -  $\eta = |x_{\max}|/\sigma_x$  - применяется при оценки динамического диапазона случайной величины.

Значения числовых характеристик для типовых законов распределения приведены в приложении П.1.

При решении разнообразных задач полезной характеристикой случайной величины является её характеристическая функция - математическое ожидание комплексной случайной величины  $e^{iux}$ , рассматриваемое как функция параметра  $u$  [21]:

$$\phi_x(u) = M[e^{iux}]. \quad (1.12)$$

Так как  $|e^{iux}| = 1$  при любых действительных  $u$  и  $x$ , то вследствие основного свойства плотности вероятности характеристическая функция при любом действительном значении  $u$  не превосходит по модулю единицы и равна единице при  $u = 0$ .

Характеристическая функция и плотность распределения вероятности случайной величины связаны парой взаимно обратных преобразований Фурье [21]:

$$\phi_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) f_x(x) dx; \quad (1.13)$$

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iux) \phi_x(u) du. \quad (1.14)$$

Таким образом, характеристическая функция случайной величины также является её полной вероятностной характеристикой.

Примеры характеристических функций для типовых законов распределения приведены в приложении П.2.

Зная характеристическую функцию, можно просто определить начальные и центральные моменты случайной величины [21]:

$$\alpha_k = \frac{1}{i^k} \phi_x^{(k)}(0), \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (1.15)$$

$$\mu_k = \frac{1}{i^k} [\exp(-i u m_x) \phi_x(u)]_{u=0}, \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (1.16)$$

### 1.3. Функции случайных аргументов

При решении разнообразных практических задач часто возникает необходимость в определении закона распределения случайных величин, представляющие собой функции некоторых других случайных величин, имеющих известные законы распределения [21].

Пусть случайная величина  $Y$  представляет собой однозначную функцию случайной величины  $X$ :

$$y = g(x). \quad (1.17)$$

Задача состоит в определении плотности распределения вероятности  $f_y(y)$  по известной плотности распределения вероятности  $f_x(x)$ .

Вероятность того, что значение  $\xi$  заключено в промежутке  $x, x + dx$ , должна быть равна (вследствие однозначной связи между  $X$  и  $Y$ ) вероятности того, что значение  $\eta$  заключено в соответствующем промежутке  $y, y + dy$  [21]

$$P(x < \xi < x+dx) = P(y < \eta < y+dy). \quad (1.18)$$

Выражение (1.18) представим в виде (см. табл. 1.2)

$$f_x(x)dx = f_y(y)dy. \quad (1.19)$$

Отсюда следует, что

$$f_y(y) = f_x(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|. \quad (1.20)$$

Производную необходимо брать по абсолютному значению, так как плотность распределения всегда неотрицательна. Подставив вместо  $x$  в выражение (1.20) обратную функцию  $x = \varphi(y)$ , окончательно получим

$$f_y(y) = f_x[\varphi(y)] \left| \frac{d}{dx} \varphi(y) \right|. \quad (1.21)$$

Если функция  $x = \varphi(y)$  является двузначной, нужно формулу (1.21) применять дважды, т.е. к каждой ветви кривой  $x = \varphi_1(y)$  и  $x = \varphi_2(y)$ .

Если требуется определить только моментные характеристики, то задачу можно решить, не определяя плотности распределения вероятности:

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^k f_x(x) dx; \quad (1.22)$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (g(x) - m_y)^k f_x(x) dx. \quad (1.23)$$

Функция случайного аргумента применяется при моделировании псевдослучайных последовательностей с заданным законом распределения методом инверсного преобразования [47, 62].

#### 1.4. Системы случайных величин

В некоторых случаях приходится рассматривать совместно несколько случайных величин. Совокупность  $n$  случайных величин  $x_1, x_2, \dots, x_m$  удобно рассматривать как одну  $m$ - мерную векторную случайную величину, составляющие которой являются величины  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .

Часть вероятностных характеристик, описывающих  $n$  - мерную случайную величину, по смыслу совпадают и являются обобщением соответствующих характеристик одномерной случайной величины. Другая часть характерна только для векторных случайных величин - условные функции и плотности распределения вероятности [40].

К ним относятся:

- функции и плотности распределения вероятности;
- условные функции и плотности распределения вероятности;
- характеристическая функция;

- начальные моменты  $r + s$  порядка случайного вектора -

$$\alpha_{rs} = M[x^r y^s];$$

- центральные моменты  $r + s$  порядка случайного вектора -

$$\mu_{rs} = M\left[ x^{\circ r} y^{\circ s} \right].$$

Рассмотрим все характеристики на примере системы, состоящей из двух случайных величин.

Функцией распределения двумерного случайного вектора с составляющими  $X$  и  $Y$  или совместной функцией распределения двух случайных величин называется вероятность совместного выполнения неравенств  $X < x$ ,  $Y < y$ , рассматриваемая как функция двух переменных [40]:

$$F(x, y) = P\left( \begin{matrix} X < x \\ Y < y \end{matrix} \right). \quad (1.24)$$

Плотностью вероятности случайного вектора  $(X, Y)$  или совместной плотностью вероятности двух случайных величин  $X$  и  $Y$  называется предел отношения вероятности попадания его конца в бесконечно малую область к площади этой области при стягивании этой области в точку:

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P\left( \begin{matrix} x \leq X < x + \Delta x \\ y \leq Y < y + \Delta y \end{matrix} \right)}{\Delta x \Delta y}. \quad (1.25)$$

Зная плотность распределения вероятностей, можно определить функцию распределения случайного вектора:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv. \quad (1.26)$$

Из формулы (1.25) можно получить выражение плотности распределения вероятностей случайного вектора  $(X, Y)$  через его функцию распределения:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (1.27)$$

На практике часто приходится находить закон распределения одной случайной величины  $X$  при условии, что случайная величина  $Y$  примет определенное значение  $y$ . Этот закон называют условным законом распределения. На основании теоремы умножения плотностей вероятностей [12] совместная плотность вероятности двух случайных величин равна плотности вероятности одной из них, умноженной на условную плотность вероятности другой относительно первой:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y/x) = f_2(y) f_1(x/y). \quad (1.28)$$

Отсюда

$$f_1(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}. \quad (1.29)$$

Аналогично можно получить

$$f_2(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}. \quad (1.30)$$

Случайные величины  $X$  и  $Y$  называются **зависимыми**, если события, заключающиеся в выполнении неравенств  $X < x$  и  $Y < y$ , зависимы хотя бы для одной пары значений  $x$  и  $y$ . В противном случае случайные величины называются **независимыми**.

Для независимых случайных величин совместная плотность распределения вероятностей равна произведению одномерных плотностей:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y). \quad (1.31)$$

Следовательно, с учетом выражения (1.31)

$$f_1(x/y) = f_1(x), \text{ а } f_2(y/x) = f_2(y). \quad (1.32)$$

Аналогичным образом можно определить законы распределения векторов, когда  $n > 2$ .

Характеристическая функция случайного вектора  $X$  определяется выражением:

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = M [\exp\{i(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n)\}]. \quad (1.33)$$

Формула показывает, что характеристическая функция является преобразованием Фурье плотности распределения вероятности. Следовательно, плотность распределения вероятности определяется через характеристическую функцию обратным преобразованием Фурье [40]:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)\} \varphi(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n. \quad (1.33)$$

Для практики большое значение имеет раздел теории вероятностей, который ограничивается исследованием моментов первого и второго порядков случайных величин [10, 32]. Так моменты  $\alpha_{10}$  и  $\alpha_{01}$  равны математическим ожиданиям случайных величин  $X$  и  $Y$  соответственно. Для двумерного случайного вектора кроме моментов  $\mu_{20}$  и  $\mu_{02}$ , представляющих собой дисперсии случайных величин  $X$  и  $Y$ , существует момент  $\mu_{11}$ , который называют корреляционным моментом:

$$k_{xy} = \mu_{11} = M \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ x & y \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

Этот момент характеризует степень линейной связи случайных величин  $X$  и  $Y$ .

Случайные величины  $X$  и  $Y$  называются **коррелированными**, если их корреляционный момент отличен от нуля. Случайные величины называются **некоррелированными**, если их корреляционный момент равен нулю.

Независимые случайные величины всегда не коррелированы. Зависимые же случайные величины могут быть как коррелированными, так и некоррелированными. Следует подчеркнуть, что требование независимости величин является более жестким, чем требование некоррелированности.

На практике часто определяют нормированный корреляционный момент, который называют коэффициентом корреляции:

$$\rho_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (1.35)$$

Часто при исследовании погрешностей оценки результатов оценивания той или иной вероятностной характеристики возникает необходимость в оценке моментов

высших порядков. Для системы случайных величин, распределенной по нормальному закону, моменты высших порядков определяются через моменты второго порядка [43]. Задача легко решается, если воспользоваться характеристическими функциями (см. таблицу 1.3) [62].

Следует подчеркнуть, что нечётные моменты высших порядков в этом случае равны нулю.

Моменты высших порядков

Таблица 1.3

$M[x_1^2]$	$\sigma_1^2$
$M[x_1 x_2]$	$\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}$
$M[x_1^4]$	$3\sigma_1^4$
$M[x_1^2 x_2^2]$	$\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1+2\rho_{12}^2)$
$M[x_1^3 x_2]$	$3\sigma_1^3 \sigma_2 \rho_{12}$
$M[x_1^2 x_2 x_3]$	$\sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 (2\rho_{12} \rho_{13} + \rho_{23})$
$M[x_1 x_2 x_3 x_4]$	$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 (\rho_{12} \rho_{34} + \rho_{13} \rho_{24} + \rho_{14} \rho_{23})$
$M[x_1 x_2^2 x_3^3]$	$\sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_3^3 (3\rho_{13} + \rho_{12} \rho_{13} + \rho_{13} \rho_{23} + 5\rho_{12} \rho_{23} + 5\rho_{13} \rho_{23}^2)$
$M[x_1 x_2 x_3^4]$	$3\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^4 (\rho_{12} + 4\rho_{13} \rho_{23})$
$M[x_1^3 x_2^3]$	$\sigma_1^3 \sigma_2^3 (9\rho_{12} + \rho_{12}^2 + 5\rho_{12}^3)$
$M[x_1^2 x_2^4]$	$3\sigma_1^2 \sigma_2^4 (1+4\rho_{12}^2)$
$M[x_1 x_2^5]$	$15\sigma_1 \sigma_2^5 \rho_{12}$
$M[x_1^2 x_2^2 x_3^4]$	$\sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3 \sigma_4 (\rho_{34} + 2\rho_{23} \rho_{24} + 4\rho_{12} \rho_{14} \rho_{23} + 4\rho_{12} \rho_{13} \rho_{24} + 2\rho_{13} \rho_{14} + 2\rho_{14}^2 \rho_{34})$
$M[x_1^2 x_2^2 x_3^2]$	$\sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 (1+2\rho_{23}^2 + 8\rho_{12} \rho_{13} \rho_{23} + 2\rho_{13}^2 + 2\rho_{12})$
$M[x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5]$	$\sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 (\rho_{23} \rho_{45} + \rho_{24} \rho_{35} + \rho_{25} \rho_{34} + 2\rho_{14} \rho_{15} \rho_{23} + 2\rho_{13} \rho_{15} \rho_{24} + 2\rho_{13} \rho_{14} \rho_{25} + 2\rho_{12} \rho_{13} \rho_{14} + 2\rho_{12} \rho_{14} \rho_{35} + 2\rho_{12} \rho_{15} \rho_{34})$
$M[x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6]$	$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6 (\rho_{14} \rho_{23} \rho_{56} + \rho_{13} \rho_{24} \rho_{56} + \rho_{23} \rho_{15} \rho_{46} + \rho_{13} \rho_{25} \rho_{46} + \rho_{23} \rho_{16} \rho_{45} + \rho_{13} \rho_{26} \rho_{45} + \rho_{14} \rho_{25} \rho_{36} + \rho_{24} \rho_{15} \rho_{36} + \rho_{14} \rho_{26} \rho_{35} + \rho_{16} \rho_{24} \rho_{35} + \rho_{15} \rho_{26} \rho_{34} + \rho_{35} \rho_{46} \rho_{12} + \rho_{16} \rho_{25} \rho_{34} + \rho_{36} \rho_{45} \rho_{12} + \rho_{12} \rho_{34} \rho_{56})$

## 1.5. Математическое описание случайных сигналов

Если рассматривается  $j$ -я последовательность случайного процесса, то мгновенное значение произвольной реализации в момент  $t_i$ , будет случайной величиной с плотностью распределения вероятности  $f_x(x/t_i)$ . При фиксации номера реализации случайной будет мгновенное значение в произвольный момент времени. Плотность распределения вероятности -  $f_x(x/j)$ .

Плотности распределения вероятности  $f_x(x/j)$  и  $f_x(x/t_i)$  позволяют определить любую числовую или функциональную вероятностную характеристику соответствующей случайной величины [40].

Случайные процессы исчерпывающе описываются многомерной функцией распределения вероятности соответствующей мерности.

Так, например, если  $t_i \in T = \{t_i\}_{i=1, 2, \dots, m}$ , то используется  $m$ -мерная плотность распределения вероятностей  $f_m(x_1, x_2, \dots, x_m / t_1, t_2, \dots, t_m)$ . По известной  $m$ -мерной плотности распределения вероятности можно определить любую числовую или функциональную вероятностную характеристику  $\Theta[x(t_i)]_{i=1, 2, \dots, m}$  случайной последовательности, если эта характеристика может быть представлена как результат некоторого преобразования функции  $f_m(x_1, x_2, \dots, x_m / t_1, t_2, \dots, t_m)$ .

На основании общей теории статистических измерений [53] измеряемая вероятностная характеристика определяется как предел выборочного среднего функционально преобразованного случайного процесса:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{d \rightarrow \infty} S_d g[x_j(t)], \quad (1.36)$$

где  $\Theta$  - измеряемая вероятностная характеристика;

$S_d$  - оператор идеального усреднения;

$d$  - параметр усреднения (время  $T$ , совокупность реализаций  $N$  или время и совокупность реализаций  $TN$ );

$g$  - оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики  $\Theta$ ;

$x_j(t)$  -  $j$ -ая реализация случайного процесса.

В зависимости от вида усреднения получаем следующие вероятностные характеристики:

1. При усреднении по совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]. \quad (1.37)$$

2. При усреднении по времени:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (1.38)$$

3. При усреднении по времени и совокупности

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (1.39)$$

На практике исследователь имеет дело с ограниченной совокупностью выборочных данных (результатов измерения). Результат определения значения вероятностной характеристики по ограниченной совокупности выборочных данных носит название **оценки**:

$$\hat{\Theta}[X(t)] = S_d g[x_j(t), ]_{j=1,2,\dots,N} \quad (1.40)$$

К основным свойствам оценок относятся **несмещенность, состоятельность и эффективность**.

Оценка называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемой характеристики:

$$M \left[ \hat{\Theta}[X(t)] - \Theta[X(t)] \right] = 0 \quad (1.41)$$

При невыполнении равенства оценка будет смещенной.

Оценка называется **состоятельной**, если при бесконечном увеличении объема выборочных данных она сходится по вероятности к истинному значению оцениваемой характеристики:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \hat{\Theta}[X(t)] - \Theta[X(t)] \right| < \varepsilon \right\} = 1 \quad (1.42)$$

при любом  $\varepsilon$ .

При невыполнении этого условия оценка будет несостоятельной.

**Эффективными** называются оценки, дисперсия которых минимальна.

Следует подчеркнуть, что свойства оценок, которые описываются несмещенностью, состоятельностью и эффективностью, тесно связаны с характером ошибок, которые определяются методами математической статистики [12].

Таким образом, при ограниченном наборе выборочных данных выражения (1.37)-(1.39) при анализе случайных процессов примут вид:

- при усреднении по совокупности

$$\hat{\Theta}_t[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]; \quad (1.43)$$

- при усреднении по времени

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt; \quad (1.44)$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\hat{\Theta}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (1.45)$$

Следует отметить, что этими соотношениями определяются разные вероятностные характеристики. При усреднении только по совокупности реализаций (при фиксированном моменте времени) вероятностная характеристика  $\Theta[X(t)]$  будет зависеть от текущего времени и называется t-текущей характеристикой  $\hat{\Theta}_t$  [53]. При усреднении только по времени, когда выборочные значения относятся к одной реализации j, вероятностная характеристика  $\Theta[X(t)]$  будет зависеть от номера реализации и называется j-текущей характеристикой  $\hat{\Theta}_j$ . При усреднении и по времени и совокуп-

ности значение  $\Theta[X(t)]$  не зависит ни от текущего времени, ни от номера реализации и называется средней характеристикой -  $\Theta_{\text{ср}}$ .

Наличие или отсутствие зависимости значений вероятностных характеристик от времени или номера реализации определяет такие фундаментальные свойства процесса, как **стационарность** и **эргодичность**.

**Стационарным** называются процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. **Эргодическим** называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от номера реализации.

В теории случайных процессов различают стационарность в узком и широком смысле. Данное выше определение относится к случайным процессам, стационарным в узком смысле. Для этих процессов равенство  $\Theta_t = \text{const}$  выполняется для любой вероятностной характеристики. Когда от времени не зависят только одно- и двумерные вероятностные характеристики, случайный процесс считается стационарным в широком смысле. Если условие стационарности не выполняется хотя бы для одной вероятностной характеристики, процесс называется **нестационарным** по этой характеристике.

По аналогии, процесс считается эргодическим в узком смысле, если  $\Theta_j = \text{const}$ , где  $j$  - номер реализации, для любой вероятностной характеристики, и в широком смысле, если независимость значений вероятностных характеристик от номера реализации имеет место лишь для характеристик первых двух порядков. Если условие эргодичности не выполняется, процесс называется **неэргодическим**.

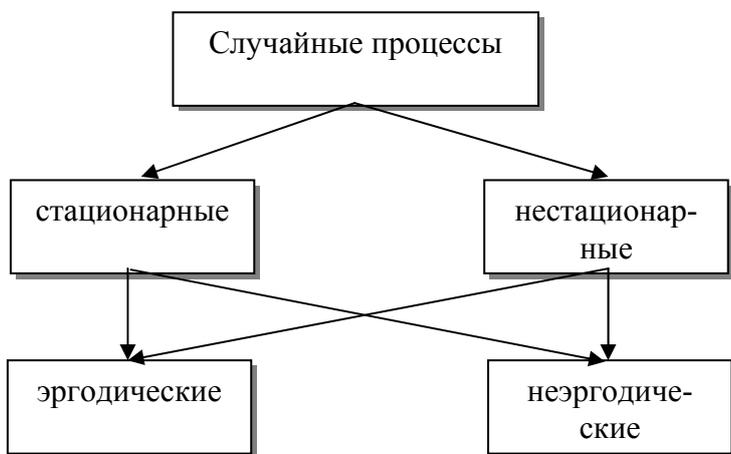


Рисунок 1.9. Классификация случайных процессов

Таким образом, случайные процессы на основе свойств стационарности и эргодичности можно представить в виде четырех классов (см. рис.В.2):

- стационарные эргодические;
- стационарные неэргодические;
- нестационарные эргодические;
- нестационарные неэргодические.

Каждый из перечисленных классов имеет своё характерное описание - **математическую модель**, параметры которой подлежат определению как с помощью теоретических, так и экспериментальных методов исследования.

Различные комбинации этих процессов совместно с детерминированными дают возможность построить более сложные модели, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при генерировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки с целью определения их метрологических характеристик.

Ответ на вопрос, какие характеристики определять:  $\Theta_t$ ,  $\Theta_j$ ,  $\Theta_{\text{ср}}$ , - во многом определяется свойствами исследуемого процесса и способом формирования выборочных данных.

Таким образом, прежде чем выбрать тип вероятностной характеристики (вид оператора усреднения), необходимо решить вопрос о стационарности и эргодичности случайного процесса. Этот вопрос самостоятельный и выходит за рамки монографии.

В [53] показано, что для стационарного эргодического случайного процесса  $\Theta_i = \Theta_j = \Theta_{cp}$ , для стационарного неэргодического процесса  $\Theta_i = \Theta_{cp}$ , для нестационарного эргодического -  $\Theta_j = \Theta_{cp}$ , а для нестационарного неэргодического процесса все виды вероятностных характеристик различны.

При фиксированном типе  $S_d$  вопросы организации эксперимента и принципы организации массивов выборочных данных о мгновенных значениях исследуемого случайного процесса подробно рассмотрены в [53]. Результаты измерений могут формироваться с использованием:

- различных временных интервалов одной и той же совокупности реализаций;
- одних и тех же временных интервалов различных совокупностей реализаций;
- различных временных интервалов различных совокупностей реализаций.

Причем, от эксперимента к эксперименту возможно изменение  $N$ ,  $M$  и  $T$ , т.е. объема выборочных данных.

Различные комбинации этих процессов совместно с детерминированными дают возможность построить более сложные модели, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при моделировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки с целью определения их метрологических характеристик.

Если, например, модель исследуемого процесса задать в виде:

$$x(t) = \varphi(t) + \eta(t) \overset{\circ}{x}(t), \quad (1.46)$$

где  $\varphi(t)$ ,  $\eta(t)$  - детерминированные функции времени,  $\overset{\circ}{x}(t)$  - центрированный стационарный эргодический процесс,

- то в зависимости от сочетания составляющих этой модели и значения ее параметров получим следующие частные модели (см. таблицу 1.3).

Некоторые модели исследуемых процессов

Таблица 1.3

$\varphi(t)$	$\eta(t)$	$x(t)=\varphi(t)+\eta(t) \overset{\circ}{x}(t)$	Название процесса
$\varphi(t)$	0	$x(t)=\varphi(t)$	детерминированный
$m_x$	1	$x(t)=m_x + \overset{\circ}{x}(t)$	стационарный
$\varphi(t)$	1	$x(t)=\varphi(t)+ \overset{\circ}{x}(t)$	нестационарный по математическому ожиданию
0	$\eta(t)$	$x(t)=\eta(t) \overset{\circ}{x}(t)$	нестационарный по дисперсии
$\varphi(t)$	$\eta(t)$	$x(t)=\varphi(t)+\eta(t) \overset{\circ}{x}(t)$	нестационарный по математическому ожиданию и дисперсии

Приведенные модели случайных процессов не являются исчерпывающими, но часто являются достаточными при решении разнообразных прикладных задач в различных предметных областях.

Наиболее часто в качестве модели первого приближения исследователи выбирают самую простейшую модель случайного процесса - стационарный эргодический случайный процесс, - и для него определяют необходимые по смыслу задачи вероятностные характеристики. Если по какой-либо причине полученные результаты не устраивают, переходят к более сложной модели.

Для описания случайных процессов при решении разнообразных практических задач применяются:

- законы распределения, в том числе, многомерные;
- характеристические функции;
- числовые характеристики;
- характеристики взаимосвязи;
- частотные характеристики.

Классификация вероятностных характеристик, описывающих случайный процесс во временной области, представлена на рис. 1.10.



Рисунок 1.10. Классификация вероятностных характеристик случайных процессов

Первые три вида характеристик подробно рассмотрены в подразделе 1.2.-1.3. и особой специфики при описании случайных процессов не имеют.

На рис.1.11 приведены реализации случайных процессов, распределенных по различным законам.

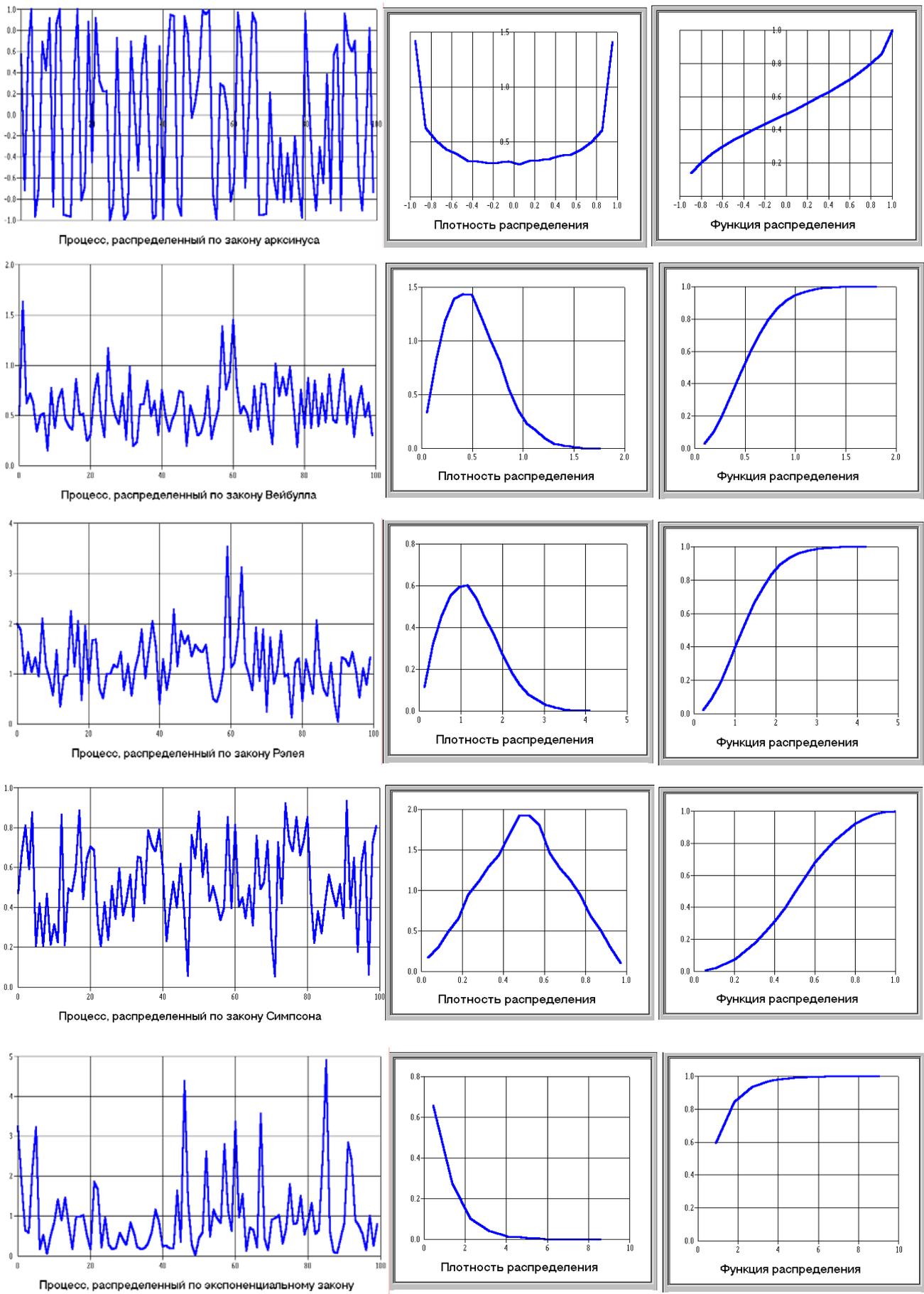


Рисунок 1.11. Реализации случайных процессов

Следует подчеркнуть аналогию вероятностных характеристик, предназначенных для описания случайных процессов, с характеристиками, описывающими детерминированные процессы (см. таблицу 1.1):

- математического ожидания  $m_x$  со средним значением  $x_{cp}$ ;
- среднеквадратического отклонения  $\sigma_x$  с действующим значением  $x$ ;
- пикфактора  $\eta$  с коэффициентом амплитуды  $k_a$ ;
- коэффициента формы случайного процесса  $k_\phi$  с коэффициентом формы детерминированного процесса  $k_\phi$  и т. д.

Остановимся более подробно на характеристиках взаимосвязи и частотных характеристиках.

## 1.6. Корреляционные характеристики

Основой характеристик взаимосвязи являются корреляционные функции [25].

Корреляционная функция представляет собой корреляционный момент её значений при двух значениях аргумента  $t, t'$ , рассматриваемый как функция  $t, t'$  [10, 32]:

$$K_x(t, t') = M[\overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}(t')], \quad (1.47)$$

где  $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x(t)$ , а  $m_x(t)$  - математическое ожидание случайного процесса в сечении  $t$ .

Корреляционная функция характеризует степень **линейной связи** между сечениями процесса.

Часто вместо корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t)}\sqrt{D_x(t')}}. \quad (1.48)$$

Для стационарных случайных процессов корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов и является четной функцией  $\tau = t - t'$  [40]:

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau). \quad (1.49)$$

Это свойство позволяет определять корреляционную функцию только во временном интервале  $[0, \infty)$ .

Нормированная корреляционная функция, в соответствии с выражением (1.48), равна:

$$\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)}. \quad (1.50)$$

Отсюда видно, что

$$|\rho_x(\tau)| \leq 1. \quad (1.51)$$

Типовые модели нормированных корреляционных функций, широко применяемых в приложениях, приведены в таблице 1.4, а их классификация – на рис. 1.12. На рис. 1.14 приведены примеры реализаций типовых моделей стационарных эргодических случайных процессов и соответствующие им корреляционные функции.

Следует отметить, что 8-ая модель (см. таблицу 1.4) может быть корреляционной функцией только в том случае, если  $|C| \leq \alpha/\omega_0$ . В противном случае спектральная плотность  $S_x(\omega) < 0$  (см. таблицу 1.9).

Из анализа моделей, представленных в таблице 1.4 и на рис. 1.14, видно, что все корреляционные функции можно разбить на два класса: монотонные и колебательные.

Кроме того, из графиков видно, что для ряда моделей производная корреляционных функций в «нуле» имеет разрыв первого рода. То есть случайный процесс относится к классу недифференцируемых процессов. Случайный процесс называется дифференцируемым, если производная корреляционной функции в «нуле» непрерывна (см. модели 2, 4, 6, 8 таблицы 1.4).

Типовые модели корреляционных функций

Таблица 1.4

№	$\rho_x(\tau)$
1	$e^{-\alpha \tau }$
2	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha/\tau)$
3	$e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha/\tau)$
4	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha/\tau + \alpha^2 \tau^2/3)$
5	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$
6	$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \alpha/\omega_0 \sin \omega_0 \tau)$
7	$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \alpha/\omega_0 \sin \omega_0 \tau)$
8	$e^{-\alpha \tau } (C \cos \omega_0 \tau + C \sin \omega_0 \tau)$

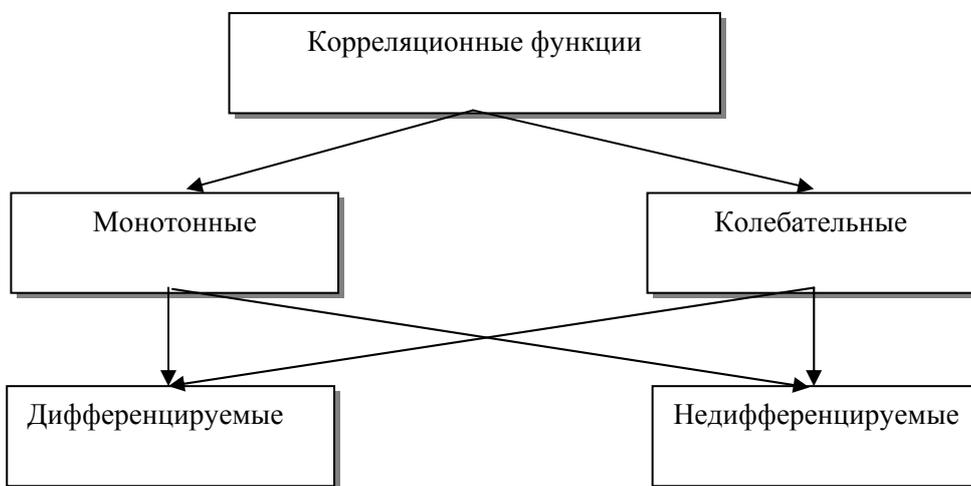


Рисунок 1.12. Классификация корреляционных функций

Пример корреляционной функции дифференцируемого случайного процесса (модель 6), при различных сочетаниях параметров:  $\omega_0 / \alpha = 0, 3, 5$ , - представлен на рис. 1.13.

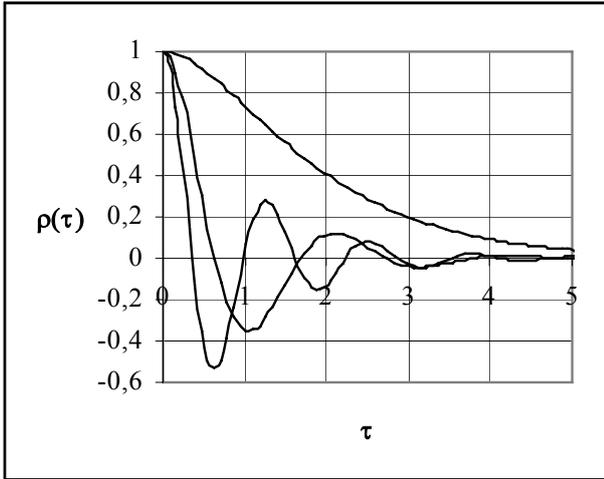


Рисунок 1.13.

Отметим, что корреляционная функция  $n$ -ой производной стационарного случайного процесса определяется выражением:

$$K_{x^{(n)}}(\tau) = (-1)^n K_x^{(2n)}(\tau). \quad (1.52)$$

Отсюда видно, что все производные дифференцируемых стационарных случайных процессов являются стационарными случайными процессами.

Таким образом, корреляционные функции стационарных случайных процессов можно разделить на четыре класса:

1. монотонные недифференцируемые (модели 1);
2. монотонные дифференцируемые (модели 2, 4);
3. колебательные недифференцируемые (модели 3, 5, 7, 8);
4. колебательные дифференцируемые (модели 6, 8).

Такое разделение стационарных случайных процессов по виду корреляционной функции оказывается полезным при аппроксимации корреляционных функций, полученных экспериментально, параметрическими моделями [2].

В практических приложениях часто для описания временной зависимости нормальных стационарных процессов применяют [31]:

- релейную корреляционную функцию

$$R_x(\tau) = M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \text{sign} \overset{\circ}{x}(t - \tau) \right] = k_\phi \sigma_x \rho_x(\tau); \quad (1.53)$$

- полярную (знаковую) корреляционную функцию

$$P_x(\tau) = M \left[ \text{sign} \overset{\circ}{x}(t) \text{sign} \overset{\circ}{x}(t - \tau) \right] = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_x(\tau). \quad (1.54)$$

По найденной релейной корреляционной функции можно найти нормированную корреляционную функцию:

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \right]}. \quad (1.55)$$

Отметим, что  $R_x(0) = k_\phi \sigma_x$ . Отсюда видно, что для оценки релейной корреляционной функции процессов, отличных от нормального, необходима априорная информация о законе распределения, т.е. необходимо знание  $k_\phi$ .

Зная полярную корреляционную функцию, из выражения (1.54) можно найти нормированную корреляционную функцию:

$$\rho_x(\tau) = \sin \frac{\pi}{2} P_x(\tau). \quad (1.56)$$

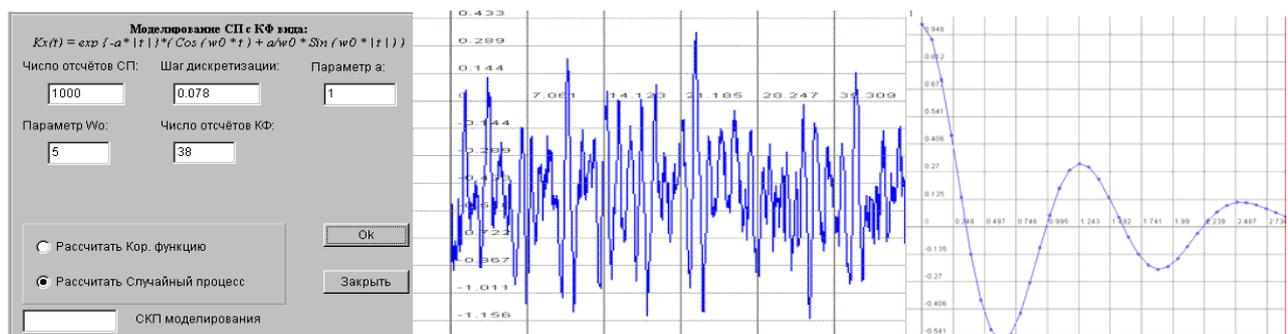
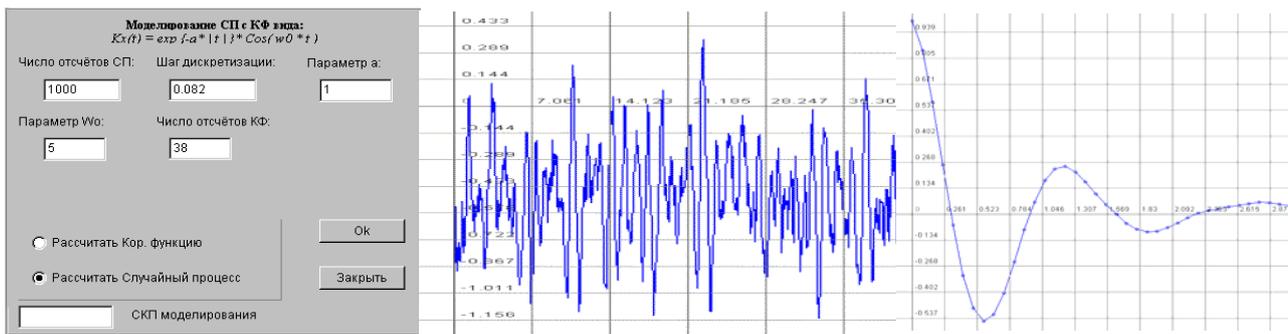
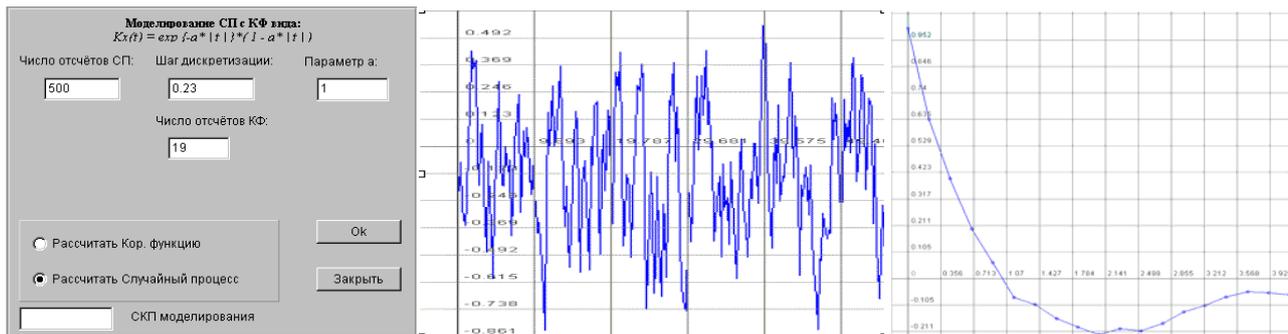
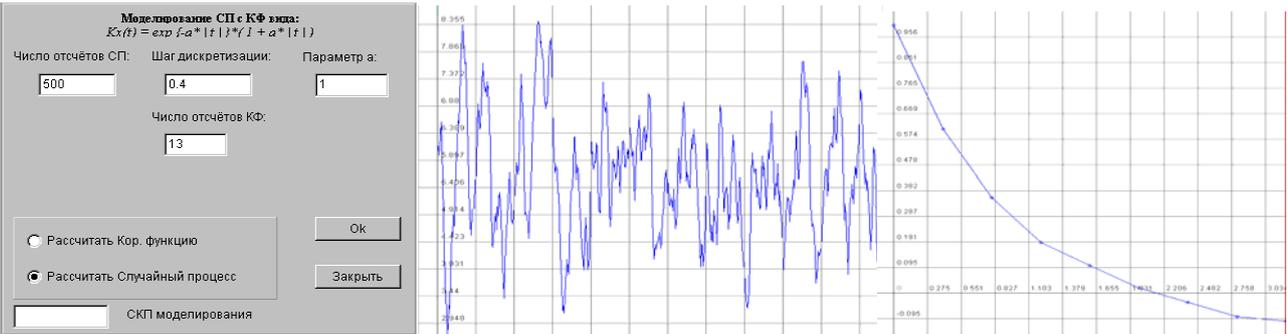
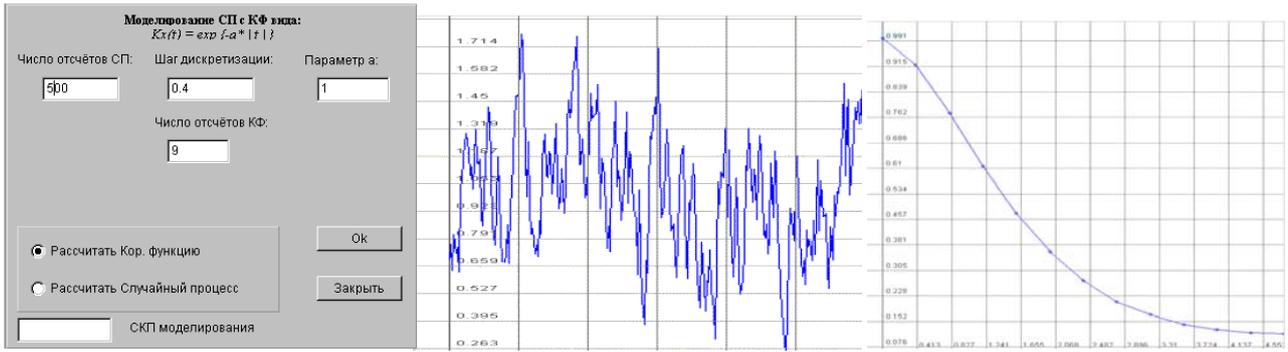


Рисунок 1.14. Случайные сигналы и их корреляционные функции

Из выражения (1.54) следует, что при оценке полярной корреляционной функции теряется информация о мощности процесса.

Несмотря на ограничения на закон распределения, релейные и полярные корреляционные функции находят широкое применение при решении различных практических задач. Это объясняется простотой технической реализации алгоритмов.

По найденной корреляционной функции возможно определение обобщенных корреляционных характеристик. К ним относятся:

- показатель колебательности, равный числу пересечения «нуля» корреляционной функции и используемый при оценке интервала дискретизации случайного процесса, метрологическом анализе результатов оценивания вероятностных характеристик;
- интервалы корреляции, определяющие длительность существования корреляционной функции;
- корреляционные моменты, вводимые по аналогии с начальными моментами законов распределения и используемые, например, для идентификации процесса по виду корреляционной функции.

Обобщенные корреляционные характеристики широко применяются при решении разнообразных прикладных задач связанных с:

- определением интервала дискретизации исследуемых процессов при цифровых методах анализа;
- идентификацией случайного процесса по виду корреляционной функции;
- метрологическим анализом результатов измерения вероятностных характеристик с целью получения оценок сверху, инвариантных к виду корреляционной функции исследуемого процесса.

Учитывая важность обобщенных корреляционных характеристик в прикладном анализе случайных процессов, рассмотрим их более подробно.

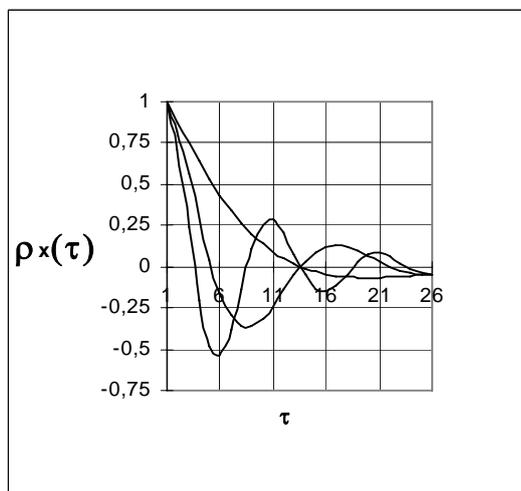


Рисунок 1.15.

Рассмотрим колебательную модель корреляционной функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ .

Введем безразмерную величину  $\mu = \omega_0 / \alpha$ , равную отношению частоты колебания корреляционной функции к показателю затухания и характеризующую число пересечений корреляционной функцией «нуля». Эта характеристика называется **показателем колебательности** корреляционной функции. На рис. 1.15 представлены три нормированные корреляционные функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ , имеющие показатели колебательности 1, 3, 5 соответственно.

Введенный показатель колебательности оказывается очень полезной характеристикой и при исследовании других колебательных моделей корреляционных функций. Показатель колебательности, в общем случае, равен числу пересечения корреляционной функции оси  $\tau$  на максимальном интервале корреляции. Учитывая, что «хвост» корреляционной функции оценивается с большей погрешностью, показатель колебательности целесообразнее определять по фазовым портретам [2]. На рис. 1.16 приведены примеры оценки показателя колебательности для различных колебательных моделей корреляционных функций. Он равен числу

пересечения фазового портрета оси  $\tau$ . Заметим, что для стационарных эргодических процессов  $\rho_x(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Следовательно, фазовый портрет заканчивается в точке с координатами  $(0,0)$ .

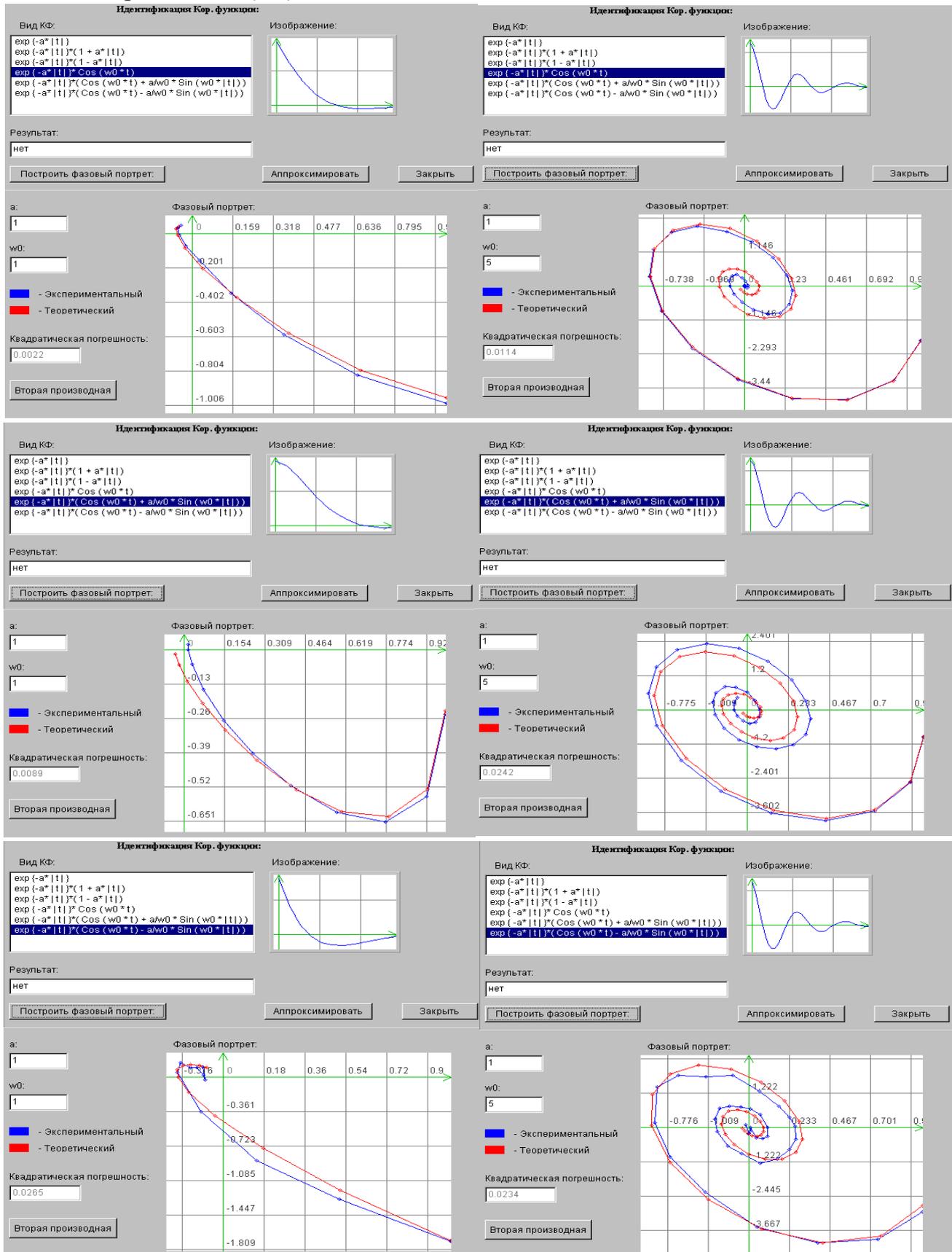


Рис. 1.16. К определению показателя колебательности

Показатель колебательности входит в аналитические выражения для определения интервалов дискретизации случайных процессов (см. таблицу 3.1), используется при идентификации случайных процессов по виду корреляционной функции, анализе методических погрешностей оценивания вероятностных характеристик и т.д. [31, 51].

Следующей корреляционной характеристикой, широко применяемой в приложениях, является интервал корреляции.

Существуют различные способы определения интервалов корреляции, имеющие один и тот же физический смысл - **длительность существования корреляционной функции**.

Максимальный интервал корреляции  $\tau_k^{(1)} = \tau_{k \max}$  определяется в результате решения уравнения (см. таблицу 1.5):

$$|\rho_x(\tau \geq \tau_{k \max})| \leq \Delta, \quad (1.57)$$

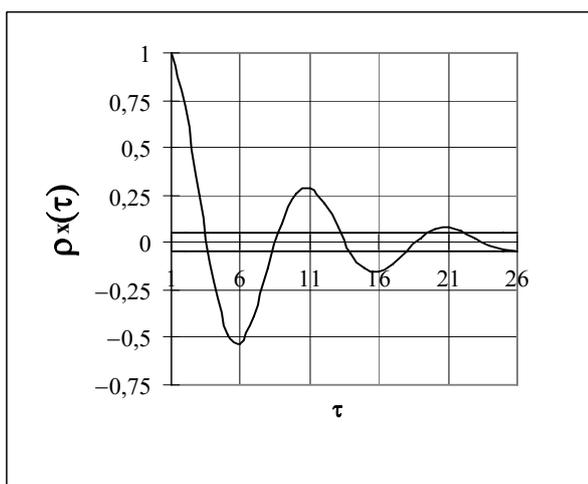


Рисунок 1.17.

где  $\Delta$  заданное значение, принимаемое, как правило, равным 0,01, 0,02, 0,05.

Т.е. под максимальным интервалом корреляции понимается временной интервал от начала координат до точки пересечения с линиями  $\Delta$  и  $-\Delta$ , после которой нормированная корреляционная функция не выходит из коридора  $[-\Delta, \Delta]$ . На рис. 1.17 поясняется, каким образом определяется максимальный интервал корреляции для колебательной модели корреляционной функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  при  $\alpha=1$ ,  $\omega_0=5$ ,  $\Delta=0,05$ .

Аналитические выражения  $\tau_{k \max}$  для типовых моделей  $\rho_x(\tau)$  приведены в таблице 1.5.

Максимальные интервалы корреляции типовых моделей корреляционных функций

Таблица 1.5

№	Наименование	$\Delta=0,01$	$\Delta=0,02$	$\Delta=0,05$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
2	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau )$	$6,64/\alpha$	$5,84/\alpha$	$4,75/\alpha$
3	$e^{-\alpha \tau } (1-\alpha \tau )$	$6,27/\alpha$	$5,40/\alpha$	$4,14/\alpha$
4	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$8,03/\alpha$	$7,14/\alpha$	$5,92/\alpha$
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau+\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
7	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau-\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$

Часто под интервалом корреляции понимается основание прямоугольника с высотой, равной единице, площадь которого равновелика площади фигуры, определяемой нормированной корреляционной функцией [43]:

$$\tau_k^{(2)} = \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau. \quad (1.58)$$

Отметим, что для некоторого класса процессов  $\tau_k^{(2)} = 0$ , что свидетельствует об отсутствии корреляции между сечениями процесса. Однако это не так, корреляция есть, и это подтверждает  $\tau_{k\max} > 0$ .

Следовательно, при оценке длительности существования корреляционной функции  $\tau_k^{(2)}$  целесообразно применять лишь при анализе случайных процессов с монотонными корреляционными функциями.

Для устранения отмеченного недостатка были предложены следующие определения интервалов корреляции:

$$\tau_k^{(3)} = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau; \quad (1.59)$$

$$\tau_k^{(4)} = \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau. \quad (1.60)$$

Анализ выражений (1.58) и (1.59) показывает, что аналитическая оценка длительности существования корреляционной функции затруднена, особенно для колебательных моделей корреляционных функций. От этого недостатка свободно определение  $\tau_k^{(4)}$ . Поэтому, несмотря на то, что  $\tau_k^{(4)}$  дает заниженные результаты, в технических приложениях он применяется значительно чаще, чем  $\tau_k^{(3)}$ . Значения интервалов корреляции  $\tau_k^{(2)}$  и  $\tau_k^{(4)}$  для типовых моделей корреляционных функций приведены в таблице 1.6.

Интервалы корреляции для типовых моделей корреляционных функций

Таблица 1.6

№	Наименование	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$1/\alpha$	$1/2\alpha$
2	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau )$	$2/\alpha$	$5/4\alpha$
3	$e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau )$	0	$1/4\alpha$
4	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$8/3\alpha$	$7/4\alpha$
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2}$	$\frac{2\alpha^2 + \omega_0^2}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2}$	$\frac{5\alpha^2 + \omega_0^2}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
7	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau - \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	0	$\frac{1}{4\alpha}$

В таблице 1.7 показано, во сколько раз  $\tau_{k \max}$  больше  $\tau_k^{(2)}$  и  $\tau_k^{(4)}$  ( $\Delta = 0,05$ ).

Таблица 1.7

№	Наименование	$\tau_{k \max} / \tau_k^{(2)}$	$\tau_{k \max} / \tau_k^{(4)}$
1	$e^{-\alpha \tau }$	3	6
2	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau )$	2,375	3,8
3	$e^{-\alpha \tau } (1-\alpha \tau )$	$\infty$	16,56
4	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	2,22	3,38
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$3(1+\mu^2)$	$\frac{2(1+\mu^2)}{2+\mu^2}$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau+\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$1,5(1+\mu^2)$	$\frac{12(1+\mu^2)}{(5+\mu^2)}$
7	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau-\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\infty$	12

Отсюда видно, что  $\tau_k^{(2)}$  и  $\tau_k^{(4)}$  дают сильно заниженный результат по сравнению  $\tau_{k \max}$ .

Часто при решении различных прикладных задач используются моменты корреляционных функций, которые вводятся по аналогии с моментами законов распределения. Определим начальный момент  $k$ -го порядка в виде:

$$\mu_k = \int_0^{\infty} \tau^k \rho_x(\tau) d\tau. \quad (1.61)$$

Значение моментов для типовых моделей корреляционных функций приведено в таблице 1.8.

Таблица 1.8

№	Наименование	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$1/\alpha^2$	$2/\alpha^3$	$6/\alpha^4$
2	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau )$	$3/\alpha^2$	$8/\alpha^3$	$30/\alpha^4$
3	$e^{-\alpha \tau } (1-\alpha \tau )$	$-1/\alpha^2$	$-4/\alpha^3$	$-18/\alpha^4$
4	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$5/\alpha^2$	$16/\alpha^3$	$70/\alpha^4$
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$\frac{\alpha^2 - \omega_0^2}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$\frac{2(\alpha^3 - 3\alpha\omega_0^2)}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^3}$	$6 \frac{\alpha^4 - 6\alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau+\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{3\alpha^2 - \omega_0^2}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$\frac{8\alpha(\alpha^2 - \omega_0^2)}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^3}$	$6 \frac{5\alpha^4 - 10\alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$
7	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau-\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{1}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$-\frac{4\alpha}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$-6 \frac{3\alpha^4 + 2\alpha^2\omega_0^2 - \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$

Знание моментов позволяет ввести ещё одно определение длительности существования корреляционной функции [43]:

$$\tau_k^{(5)} = \mu_1 / \mu_0. \quad (1.62)$$

По аналогии с обобщенными характеристиками для автокорреляционных функций введем обобщенные характеристики для взаимных корреляционных характеристик, широко применяемых в практических приложениях:

- максимального интервала корреляции  $\tau_{kxy}^{(1)} = \tau_{kmaxxy}$ ; (1.63)

- интервала корреляции  $\tau_{kxy}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}(\tau) d\tau$ ; (1.64)

- интервала корреляции  $\tau_{kxy}^{(3)} = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho_{xy}(\tau)| d\tau$ ; (1.65)

- интервала корреляции  $\tau_{kxy}^{(4)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}^2(\tau) d\tau$ ; (1.66)

- моменты корреляционных функций  $\mu_{kxy} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^k \rho_{xy}(\tau) d\tau$ , (1.67)

используемые при решении различных прикладных задач, например, идентификации, метрологическом анализе результатов оценивания взаимных корреляционных характеристик, при определении времени задержки одного сигнала по отношению к другому и т.д.

## 1.7. Спектральные характеристики

Спектральные функции представляют собой частотное распределение энергетических характеристик случайного процесса. Существуют различные способы их определения, например: преобразование Фурье процесса, преобразование Фурье корреляционной функции. Определим спектральную плотность мощности в виде [18]:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.68)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Винера-Хинчина, можно установить связь между корреляционной функцией и спектральной плотностью мощности:

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.69)$$

С учетом четности функций  $K_x(\tau)$  и  $S_x(\omega)$ , воспользовавшись формулой Эйлера, выражения (1.68), (1.69) приведем к виду:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos\omega\tau d\tau; \quad (1.70)$$

$$K_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos\omega\tau d\omega. \quad (1.71)$$

Аналитические выражения спектральной плотности мощности для типовых моделей корреляционных функций приведены в таблице 1.9.

$K_X(\tau)$	$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sigma_X^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha^3}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau )$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha\omega^2}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau  + \frac{\alpha^2 \tau^2}{3})$	$\frac{\sigma_X^2 8\alpha^5}{3\pi(\alpha^2 + \omega^2)^3}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{\sigma_X^2 \alpha}{2\pi} \left[ \frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau )$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau )$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha\omega^2}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + C \sin \omega_0  \tau )$	$\frac{\sigma_X^2 [\alpha(\alpha^2 + \omega^2 + \omega_0^2) + C\omega_0(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2)]}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$

Подставив в выражение (1.71)  $\tau = 0$ , получим:

$$K_X(0) = \int_0^{\infty} S_X(\omega) d\omega, \quad (1.72)$$

условие нормировки для спектральной плотности мощности.

Подставив в выражение (1.68)  $\omega = 0$ , получим

$$S_X(0) = \frac{\sigma_X^2}{\pi} \tau_k^{(2)}. \quad (1.73)$$

Отсюда видно, что если значение спектральной плотности мощности «в нуле» равно нулю, то  $\tau_k^{(2)} = 0$ . Это свойство случайных процессов ограничивает область применения интервала корреляции  $\tau_k^{(2)}$ .

Спектральная плотность мощности с успехом применяется при анализе линейных динамических систем при случайном входном воздействии.

Пусть на вход линейной динамической системы с частотной характеристикой  $|W(j\omega)|$  поступает случайный процесс  $x(t)$  со спектральной плотностью мощности  $S_x(\omega)$ . Спектральная плотность мощности выходного процесса  $y(t)$  в этом случае равна [41]:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega), \quad (1.74)$$

где  $|W(j\omega)|^2$  – квадрат модуля частотной характеристики.

Это фундаментальное выражение позволяет определить:

- дисперсию выходного сигнала (см. (1.72));
- найти аналитическое выражение квадрата модуля частотной характеристики и соответствующее ему выражение импульсной переходной характеристики, необходимое для моделирования стационарных случайных процессов с заданным видом спектральной плотности мощности (корреляционной функции) методом фильтрации [62].

Аналогичным образом, воспользовавшись преобразованием Винера-Хинчина, можно определить взаимную спектральную плотность мощности исследуемых процессов:

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.75)$$

Отсюда

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.76)$$

Поскольку взаимная корреляционная функция не является четной, взаимная спектральная плотность мощности в общем случае является комплексной:

$$S_{xy}(\omega) = \text{Re } S_{xy}(\omega) - j \text{Im } S_{xy}(\omega). \quad (1.77)$$

Отсюда очевидно, что

$$S_{yx}(\omega) = \text{Re } S_{xy}(\omega) + j \text{Im } S_{xy}(\omega). \quad (1.78)$$

Воспользовавшись соотношениями (1.77)-(1.78), получим:

$$C_{xy}(\omega) = 2 \text{Re } S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau)] \cos \omega \tau d\tau, \quad (1.79)$$

а

$$Q_{xy}(\omega) = 2 \text{Im } S_{xy}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_{xy}(\tau) - K_{yx}(\tau)] \sin \omega \tau d\tau. \quad (1.80)$$

Функция  $C_{xy}(\omega)$  является четной, а  $Q_{xy}(\omega)$  - нечетной. Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, получим:

$$K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} C_{xy}(\omega) \cos \omega \tau d\omega ; \quad (1.81)$$

$$K_{xy}(\tau) - K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} Q_{xy}(\omega) \sin \omega \tau d\omega . \quad (1.82)$$

Для стационарно связанных процессов часто вводят нормированную меру взаимной когерентности, являющуюся функцией частоты [18, 19]:

$$\text{Coh}_{xy}(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)} . \quad (1.83)$$

Эта функция равна 0 для независимых процессов, 1 для линейно связанных процессов и находится в пределах от 0 до 1 во всех прочих случаях.

Знание спектральной плотности мощности позволяет решать самые разные прикладные задачи в различных предметных областях:

- выделение полезного сигнала на фоне шумов;
- идентификации объектов и т.д.

Знание спектральной плотности мощности позволяет найти обобщенные спектральные характеристики, широко применяемые в приложениях.

К относятся: эквивалентная ширина спектра мощности, частота, соответствующая максимуму спектральной плотности мощности, значение максимума и т.д.

Знание спектральной плотности мощности позволяет определить полосу частот, где сосредоточена основная мощность процесса. Эта характеристика называется **эквивалентной шириной спектра мощности случайного процесса** -  $\Delta\omega_3$ . Существуют различные способы определения  $\Delta\omega_3$ , приведенные, например, в [43].

Наиболее часто для процессов, у которых спектральная плотность мощности сосредоточена вблизи нулевой частоты (рис. 1.18),  $\Delta\omega_3$  определяют в виде:

$$\Delta\omega_3 = \frac{\sigma_x^2}{2S_x(\omega)_{\max}} . \quad (1.84)$$

Если основная мощность процесса сосредоточена вблизи экстремальной частоты спектральной плотности мощности  $\omega_3$  (рис. 6.18), а не в нуле, выражение для оценки эквивалентной ширины примет вид:

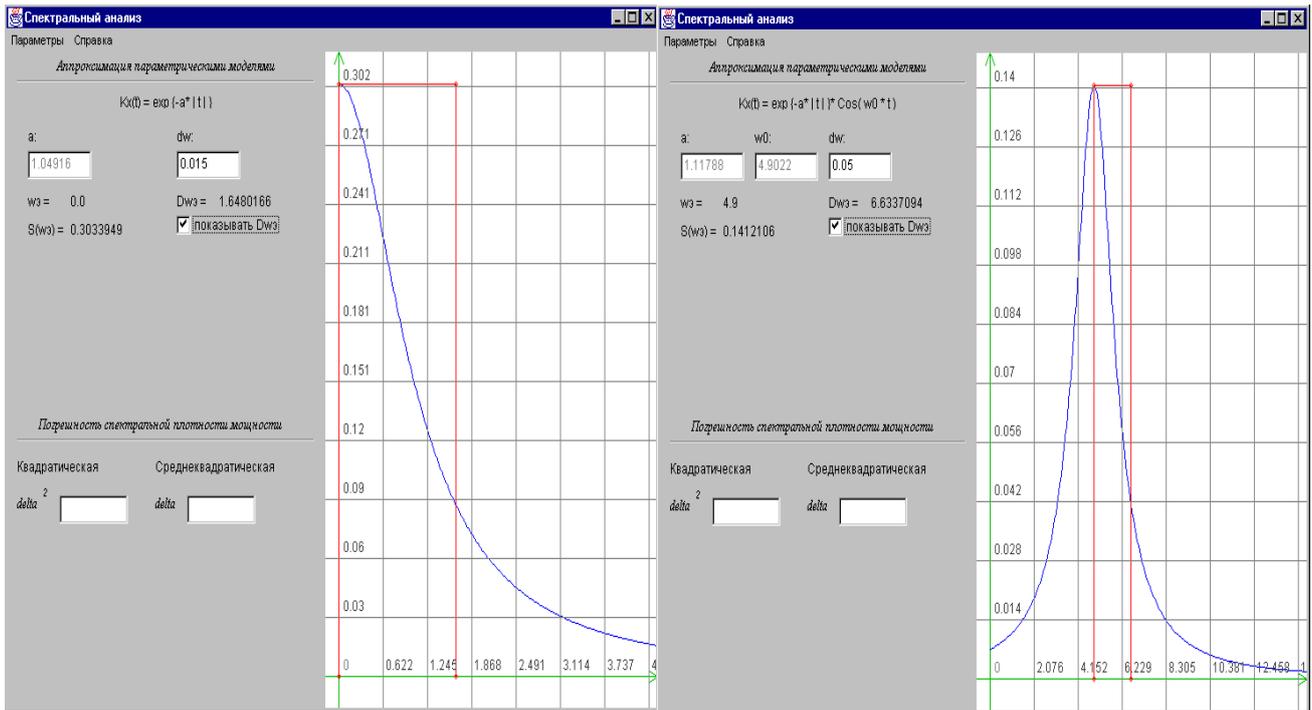
$$\Delta\omega'_3 = \omega_3 + \Delta\omega_3 / 2 . \quad (1.85)$$

В приложении 15 приведены выражения эквивалентной ширины спектра мощности случайных процессов для типовых моделей.

Воспользовавшись понятием  $\Delta\omega_3$ , можно получить аналитическое выражение оценки сверху дисперсии выходного процесса линейной динамической системы, без знания конкретного аналитического выражения спектральной плотности мощности. Дисперсия выходного сигнала линейной динамической системы равна:

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \leq 2S_x(\omega)_{\max} \int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega \leq \frac{\sigma_x^2 \Delta\omega_c}{\Delta\omega_3} |W(j\omega)_{\max}|^2 , \quad (1.86)$$

где  $\Delta\omega_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega}{|W(j\omega)_{\max}|^2}$  - полоса пропускания линейной динамической системы.



а) Эквивалентная ширина спектра широкополосного процесса

б) Эквивалентная ширина спектра узкополосного процесса

Рисунок 1.18.

Из выражения (1.86) видно, что дисперсия выходного сигнала, независимо от вида спектральной плотности мощности случайного процесса, пропорциональна отношению эквивалентной полосы пропускания линейной динамической системы к эквивалентной ширине спектра мощности случайного процесса.

Исследования показали, что

$$\begin{cases} \Delta\omega_{\text{э}} \tau_k^{(2)} = \pi / 2; \\ \Delta\omega_{\text{с}} \tau_{\text{и}}^{(2)} = \pi / 2, \end{cases} \quad (1.87)$$

где  $\tau_{\text{и}}^{(2)} = \frac{\int_0^{\infty} h(\tau) d\tau}{h(\tau)_{\text{max}}}$  - длительность импульсной характеристики линейной динамической системы. Эти выражения называются **соотношениями неопределённости** для сигнала и для системы.

Воспользовавшись соотношениями неопределённости, выражение (1.86) преобразуем к виду:

$$D_y \leq \sigma_x^2 |W(j\omega)|_{\text{max}}^2 \frac{\tau_k^{(2)}}{\tau_{\text{и}}^{(2)}}. \quad (1.88)$$

Отсюда видно, что дисперсия выходного процесса линейной динамической системы, независимо от вида спектральной плотности мощности, не превышает величины, пропорциональной отношению интервала корреляции к длительности импульсной характеристики.

Таким образом, возможна оценка сверху дисперсии выходного процесса линейной динамической системы с использованием обобщенных характеристик, определенных как во временной, так и в частотных областях. Это обстоятельство значительно упрощает теоретические исследования и позволяет определить требования к системе, гарантирующие обеспечение допустимых погрешностей.

Понятие эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса позволяет разбить случайные процессы на два класса: узкополосные и широкополосные.

**Узкополосным случайным процессом** называется процесс, основная мощность которого сосредоточена вблизи какой-либо частоты  $\omega_0$ . Условие узкополосности записывается в виде:  $\Delta\omega_y / 2 \ll \omega_0$ .

Процессы, не удовлетворяющие этому условию, называются **широкополосными**.

К узкополосным процессам относятся процессы, имеющие колебательную корреляционную функцию с показателем колебательности  $\mu > 5$  (см. таблицу 6.8, модели 4-7).

К широкополосным процессам относятся все модели, представленные в таблице 6.8, причем, для моделей 4-7  $\mu < 5$ .

Спектральные плотности мощности колебательных моделей представлены на рис. 1.19.

При решении ряда прикладных задач возникает необходимость оценки частоты, соответствующей максимуму спектральной плотности мощности  $\omega_y$ . Её можно определить в результате решения уравнения:

$$S'_x(\omega) = 0. \quad (1.89)$$

Результаты решения этого уравнения и  $S_x(\omega_y)$ , в виду громоздкости таблицы, представлены в приложении П.10.

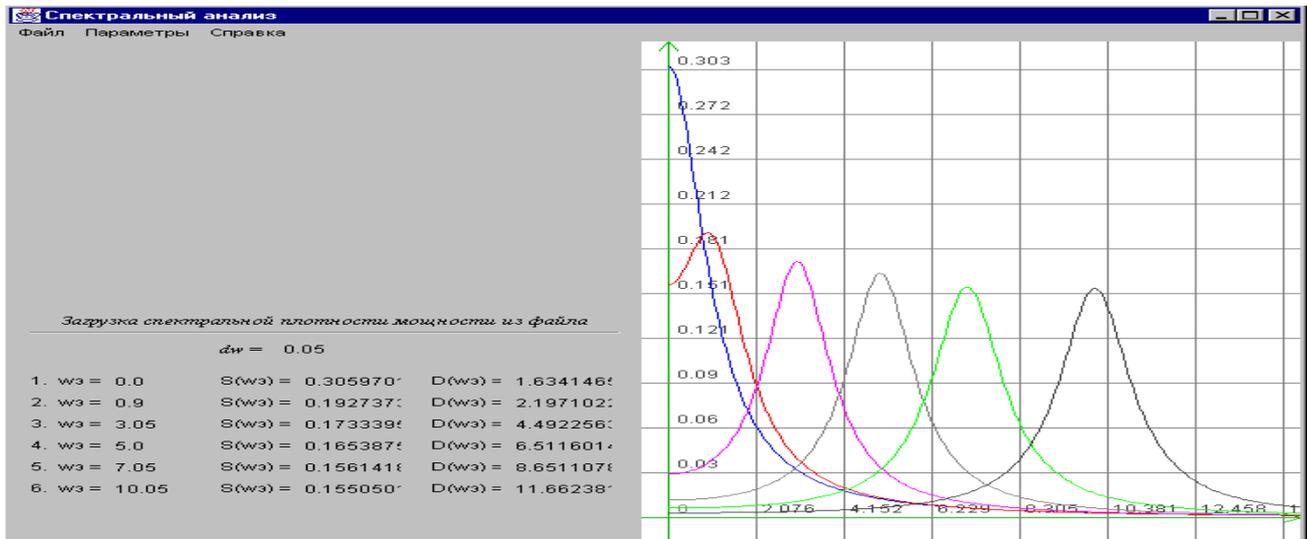
## 1.8. Математическое описание случайных потоков событий

В системах реального времени обработки и передачи информации, управления наблюдаются различные потоки событий. Поток событий представляет собой точечный процесс с событиями, появляющимися случайным или периодическим образом во времени.

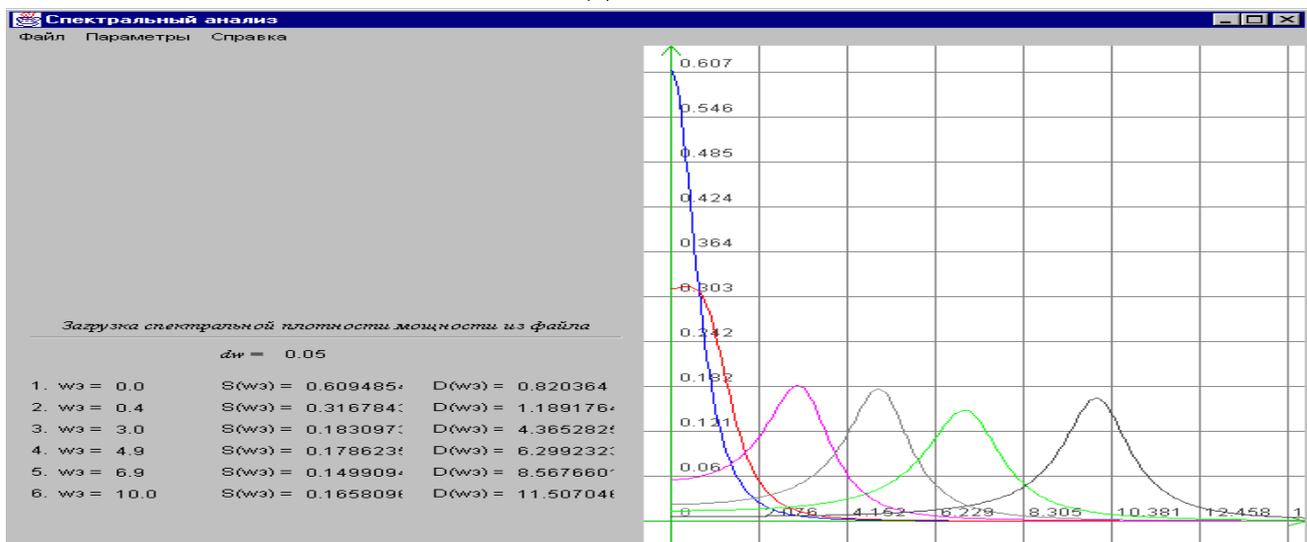
Различают потоки **однородных** и **неоднородных** событий. Например, в системах связи, реализующих приоритет определенной группы абонентов, поток вызовов будет с этой точки зрения неоднородным, система по-разному будет реагировать на разные события (вызовы) в потоке. На рассматриваемые же события (отсчеты первичного процесса) реакция устройств АСНИ, дискретных ИИС, как правило, не меняется при изменении порядкового номера события и поэтому поток выборок можно считать однородным [15].

Основными характеристиками, классифицирующими случайный поток, являются свойства стационарности, ординарности и последствий [15].

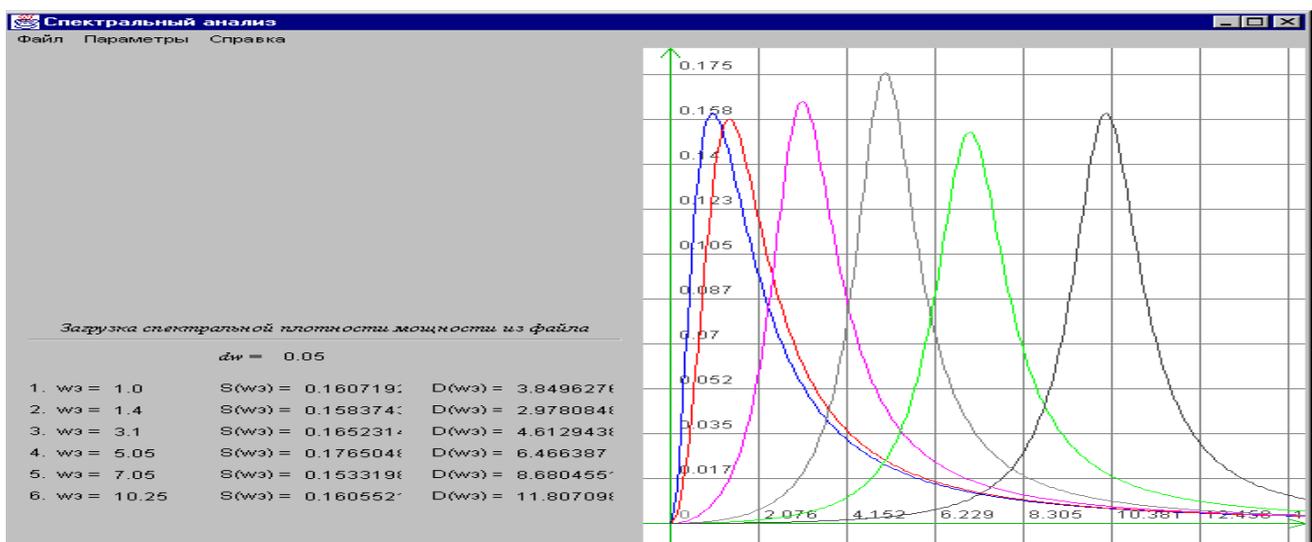
**Стационарным** называется поток событий, для которого вероятность  $P_k(1-t, 1)$  появления какого-либо числа  $k$  событий на определенном интервале времени  $(1-t, 1)$  зависит лишь от значения этого интервала  $t$  и не зависит от его расположения на оси времени.



$$a) \rho_X(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)\cos\omega_0\tau, \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$$



$$a) \rho_X(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)(\cos\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \sin\omega_0|\tau|), \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$$



$$a) \rho_X(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)(\cos\omega_0\tau - \alpha/\omega_0 \sin\omega_0|\tau|), \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$$

Рисунок 1.19. Спектральные плотности мощности колебательных моделей

**Ординарным** называется поток, для которого вероятность появления на малом участке  $\delta t$ , примыкающем к произвольно выбранному моменту времени, более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления хотя бы одного события.

**Последствие** потока заключается в зависимости вероятности  $P_k(l-t, l)$  от распределения событий на оси времени вне интервала  $(l-t, l)$ . Либо, другими словами, поток не обладает последствием, если вероятность появления на любом интервале времени какого-либо числа событий не зависит от того, сколько событий произошло на других, не перекрывающихся с данным интервалом. Из литературы известно [15], что не обладает последствием только простейший случайный или иначе стационарный пуассоновский поток, имеющий экспоненциальное распределение интервалов времени между событиями в потоке.

Варьируя этими свойствами, можно образовывать различные классы потоков [5, 15]:

- простейший поток - поток Пуассона, обладающий всеми тремя свойствами, наиболее широко применяемый на практике;
- рекуррентные потоки, относящиеся к классу стационарных потоков Пальма, у которых одномерные законы распределения интервалов дискретизации одинаковы, а сами интервалы независимы между собой;
- поток смены состояний марковского процесса Вольда, предполагающий зависимость соседних интервалов между событиями в потоке;
- альтернирующие потоки, у которых плотность распределения интервалов чередуется от интервала к интервалу (выбирается из двух возможных видов);
- модель рекуррентного потока, получаемого разряжением посредством  $p$ -преобразования исходного потока (каждое событие с вероятностью  $p$  остается в потоке, а с вероятностью  $q=1-p$  выбрасывается).

Выбор модели потока зависит от характера решаемой задачи, метода исследований (аналитический или имитационное моделирование) и т.д. При аналитических исследованиях предпочтение следует отдавать простейшим моделям, позволяющим получить сравнительно простые выражения, удобные для инженерного расчета основных параметров алгоритмов.

При решении перечисленных задач необходимо определить характеристики потока, которые можно задать различными способами [15]:

- вероятностью числа событий на заданном временном интервале;
- законом распределения интервалов между отсчётами потока;
- временами возвращения.

Эти способы дополняют друг друга, и в зависимости от решаемой задачи применяется один из них или их совокупность.

Плотность распределения вероятностей интервалов  $f_{\Delta t}(\Delta t)$  и функция распределения вероятностей интервалов  $F_{\Delta t}(\Delta t)$  являются основными характеристиками, позволяющими определить большинство вероятностных характеристик, и при математическом описании потока специфики не имеют. Определение моментных характеристик интервалов дискретизации при известном законе их распределения затруднений не вызывает [12].

Плотности распределения прямого  $V$  и обратного  $U$  времен возвращения, необходимые для метрологического анализа оценки взаимных корреляционно-структурных функций, определяется в виде [5, 15]:

$$\varphi(t) = \varphi_v(t) = \varphi_u(t) = \lambda F(t), \quad (1.90)$$

где  $F(t)$  - функция распределения интервала дискретизации;

$\lambda$ - интенсивность потока.

При решении ряда прикладных задач представляет интерес время появления события и его отношение к предшествующим событиям, не обращая внимание ни на амплитуду события, ни на информацию, которую они несут. В системах реального времени к событиям могут быть отнесены: электрический импульс, сигнал переключения, прерывания, момент окончания алгоритма и т.д.

В настоящее время в литературе описаны различные статистические методы и аппаратура для анализа случайных событий [5, 15, 39, 64, 65]. Важной частью этого анализа является корреляционный анализ потоков событий. Корреляция событий основана на измерении распределения интервалов времени между случайными событиями. События могут представлять поток данных в вычислительных системах реального времени или временные ряды экспериментальных импульсов.

**Автокорреляция**  $C_x(t)$  определяет вероятность появления события в потоке  $X$  как функцию времени после данного события без учета числа прошедших событий:

$$C_x(t)dt = P[\text{событие в } X(t, t + dt) / \text{событие } X \text{ в } 0]. \quad (1.91)$$

В дальнейшем для отличия автокорреляционной функции случайных процессов (последовательностей) автокорреляционную функцию потоков будем называть **интервальной корреляционной функцией (ИКФ)**.

**Взаимокорреляция**  $C_{xy}(t)$  применяется в случае двух потоков событий  $X$  и  $Y$  и определяет вероятность наблюдения события в потоке  $Y$  как функцию времени после данного события в потоке  $X$ , без учета числа прошедших событий:

$$C_{xy}(t)dt = P[\text{событие в } Y(t, t + dt) / \text{событие } X \text{ в } 0]. \quad (1.92)$$

Функцию  $C_{xy}(t)$  по аналогии назовем **взаимной интервальной функцией (ВИКФ)**.

Определенные таким образом, автокорреляция и взаимокорреляция применяются для объяснения поведения систем реального времени для измерения и управления, нейронных сетей и моделей поведения определения зависимости в случайных потоках, осуществления этой зависимости, обнаружения скрытых моделей в случайной последовательности и предложения соответствующей вероятностной модели исследуемой системы.

Определим ИКФ событий для конкретных практических случаев. При этом начнем со случайной последовательности, описываемой распределением Пуассона - простейшего потока. Корреляция событий в этом случае будет использована для распознавания системы и определения ее основных свойств.

Практическими интересными случаями являются [64]:

- системы с встроенными генераторами повторяющихся событий;
- системы с задержкой;
- системы с «мертвым» временем;
- периодические события, смещенные случайной девиацией;
- системы с буфером для одного и более событий;
- двойные стохастические пуассоновские процессы;
- разветвляющиеся стохастические процессы.

а) Пуассоновский процесс.

Пуассоновский процесс описывает вероятность появления числа событий  $r$  в произвольном интервале длиной  $t$ :

$$P(r, t) = \left[ (\lambda t)^r / r! \right] \exp(-\lambda t), \quad (r = 0, 1, \dots) \quad (1.93)$$

Пуассоновский процесс также дает распределение вероятностей интервалов  $t$  между событиями:

$$f(t) = P(r = 0, t) = \exp(-\lambda t).$$

ИКФ событий, основанная на определении (1.91) для пуассоновского процесса, равна среднему числу событий в  $dt$ :

$$\begin{cases} C_x(0) = 1; \\ C_x(0) = \lambda, \end{cases} \quad (1.94)$$

представлена на рис. 1.20 а).

б) Периодические события.

Для периодических событий выражение (1.91) приводит к:

$$\begin{cases} C_x(t) = 1, \text{ для } t = kT; \\ C_x(t) = 0, \text{ для } t \neq kT. \end{cases} \quad (1.95)$$

Результат представлен на рис. 1.20 б).

в) Периодические события, смещенные случайной девиацией («дрожание»).

В этой модели события должны появляться через регулярные интервалы, т.е. периодически, но они смещены относительно требуемого момента появления случайным образом.

Из выражения (1.91) следует, что

$$C_x(t + kT) = g(t) * g(t), \quad (1.96)$$

где  $g(t)$  - плотность распределения вероятностей  $t$  («дрожание»);

\*- операция нахождения композиции законов распределения.

Результат представлен на рис. 1.20 в).

г) Системы с «мертвым» временем.

Модель имеет соответствующее «мертвое» время [47]. После прихода входного события система пропускает это событие на выход и затем закрывается на фиксированное «мертвое» время  $T$ , например, на время обработки информации на ЭВМ. ИКФ выходного процесса может быть определена следующим образом [64].

Для  $d < t < 2d$ , используя выражения (1.91), (1.93), получим:

$$C_x(t)dt = P(1, dt)P(0, t-d) = f(t)P(0, t-d) \quad (1.97)$$

Для  $2d < t < 3d$  интервал  $t$  может быть сформирован двумя способами.

Первый способ:

$t = d + t_1$  с плотностью распределения вероятностей

$$\varphi_1(t-d) = f(t). \quad (1.98)$$

Вероятность такого способа формирования  $t$  равна  $P(0, t-d)$ .

Второй способ:

$t = 2d + t_1 + t_2$  с плотностью

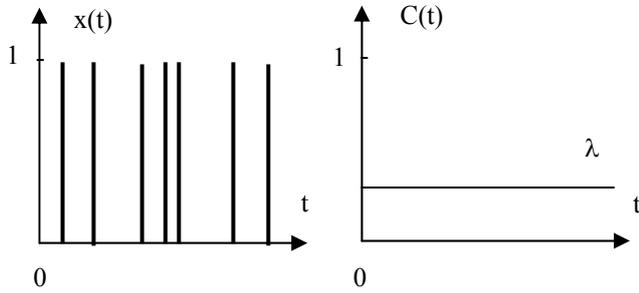
$$\varphi_2(t-2d) = f(t) * f(t). \quad (1.99)$$

Вероятность такого способа формирования  $t$  равна  $P(1, t-2d)$ .

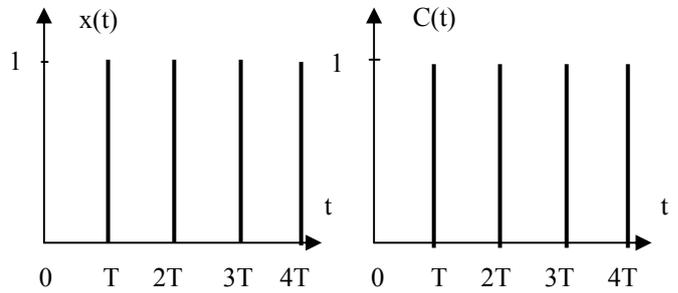
Таким образом:

$$C_x(t)dt = P(0, t-d)f(t) + P(1, t-2d)f(t)*f(t). \quad (1.100)$$

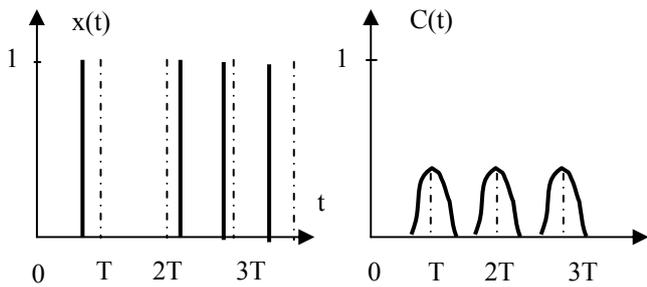
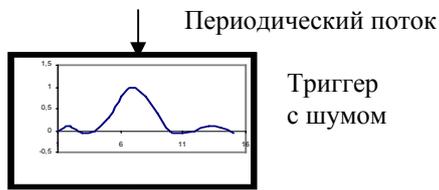
а) Пуассоновский поток



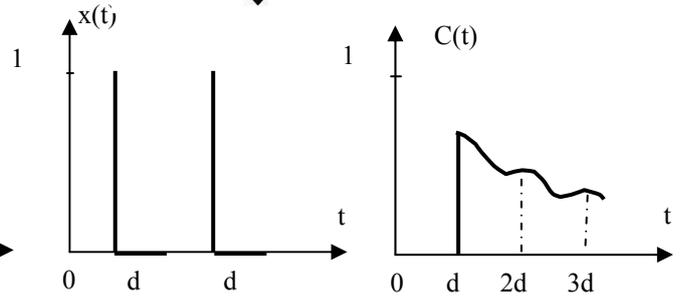
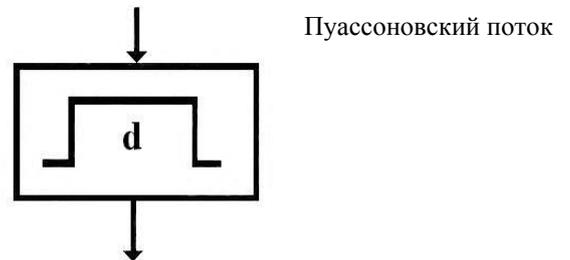
б) Периодический поток



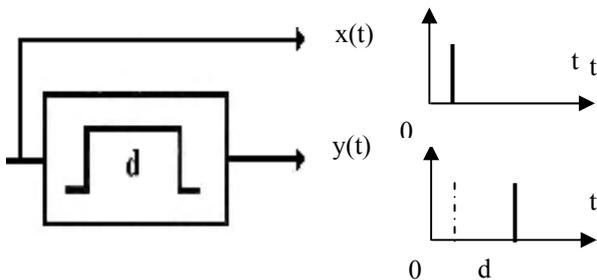
в) Периодический поток с «дрожанием»



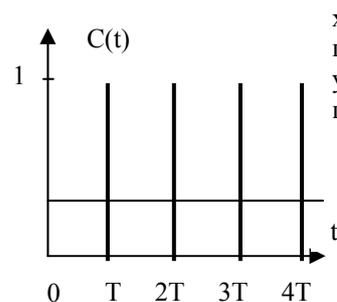
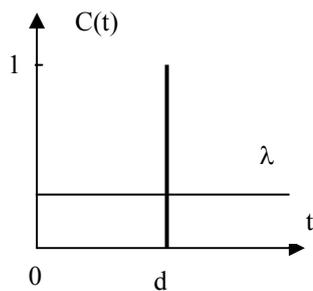
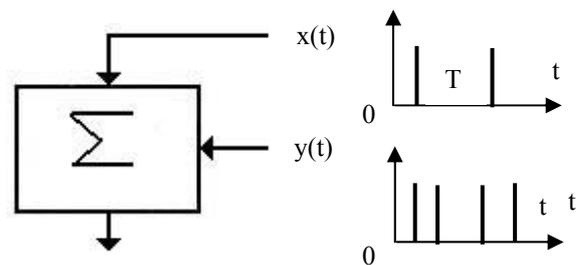
г) Система с «мертвым» временем



д) Взаимная корреляция



е) Суперпозиция



$x(t)$  – Пуассоновский поток;  
 $y(t)$  – периодический поток.

Рисунок 1.20. Интервальные корреляционные функции

Обобщая выражение (1.100) для  $k$  способов формирования интервалов, получим:

$$C_x(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} P[k, t - (k+1)d] [f(t) \dots * f(t)]. \quad (1.101)$$

Следует отметить, что многократная композиция законов распределения Пуассона приводит к распределению Эрланга [15]. Интервальная корреляционная функция для рассматриваемого случая представлена на рис. 1.20 г)

Аналогичным образом можно привести дополнительные примеры взаимодействия случайных последовательностей и систем.

### Взаимная корреляция.

Более общим применением корреляционного анализа потоков событий являются случаи с несколькими потоками событий в системе. Случайные потоки могут наблюдаться в различных точках системы и не взаимодействовать друг с другом. В других случаях потоки «перемешиваются». Это явление получило название суперпозиции потоков [64].

В первом случае ВИКФ позволяет определить степень взаимозависимости потоков. На рис. 1.20 д) приведен пример системы с постоянной задержкой  $d$  в обработке информации при подаче на вход простейшего потока. Выражение (1.92) для рассматриваемого примера позволяет определить ВИКФ входного и выходного потоков в виде:

$$\begin{cases} C_{xy}(t) = 1, & \text{для } t = d; \\ C_{xy}(t) = \lambda, & \text{для } t \neq d, \end{cases} \quad (1.102)$$

что позволяет в случае необходимости величину задержки  $d$ .

### Суперпозиция случайных потоков.

Во многих физических и инженерных случаях потоки событий представляют собой суперпозицию некоторых других потоков событий. Например, поток случайных прерываний, приходящий в процессор от нескольких источников. Если поток событий представляет собой смесь двух или нескольких потоков событий, его ИКФ будет равна сумме ИКФ индивидуальных потоков. Так на рис. 1.20 е) показана суперпозиция Пуассоновского и периодического потоков вместе с результирующей ИКФ. Если в ходе проведения эксперимента будет получена похожая ИКФ, то сравнив её с результатами рис. 1.20 е), можно сделать вывод о том, что периодический поток «погружен» в случайный поток.

Для потоков, рассмотренных в примерах 1.20 а) – 1.20 г), можно представить различные суперпозиции. ИКФ в этих случаях поможет различить составляющие потоки, их интенсивность и скорость. Кроме того, ИКФ может быть использована при моделировании и измерении характеристик случайных потоков и процессов с нерегулярным интервалом дискретизации.

Приведем несколько примеров, связанных с функционированием вычислительных систем реального времени.

### Сканирование

В вычислительных системах реального времени, основанных на сканировании, программа вычислений определяет время и порядок выполнения операций. Из-за то-

го, что для обработки могут применяться различные алгоритмы, сканирование может представлять процесс, в котором появление событий планируется через регулярные интервалы времени, но благодаря различному времени обработки они будут смещены от времени расписаний. Следовательно, ИКФ процесса сканирования будет похожа на функцию, представленную на рис. 1.20 в). ИКФ в рассматриваемом примере отражает степень нерегулярности процесса сканирования.

#### Мультиплексирование.

При подключения множества источников информации к мультиплексору его выходной поток будет определяться суперпозицией входных потоков. В этом случае его ИКФ будет являться суммой составляющих ИКФ, как показано на рис. 1.20 е). Даже если составляющие потоки событий являются достаточно периодическими, результирующий поток может быть случайным. Был отмечен интересный факт для нервных клеток, когда нервные импульсы приходят по множеству волокон [64]. Последовательность нервных импульсов, формируемая в результате суперпозиции значительного числа довольно регулярных последовательностей, представляет собой случайную последовательность. ИКФ в этом случае определяет степень регулярности потока.

#### «Мертвое время».

Если время обработки события  $T$  имеет тот же порядок, что и средний интервал между событиями  $1/n$ , значительное число выходных событий будет потеряно. Потери за счет «мертвого» времени для многих практических случаев найдены Соучеком Б. [47]. Так, например, если «мертвое» время постоянно и равно  $T$ , то потери определяются выражением

$$g(T) = nT. \quad (1.103)$$

Выходная последовательность и его ИКФ представлены на рис. 1.20 г).

В измерительных системах реального времени, предназначенных для построения гистограммы исследуемого сигнала, потери «мертвого» времени не внесут искажения в гистограмму. Это объясняется тем, что при кодировании информации применяется импульсная модуляция и импульсы приходят случайным образом, а временные зависимости не учитываются. Ситуация значительно ухудшается при построении гистограмм временных интервалов. В таких системах «мертвое» время должно быть значительно меньше, чем среднее время между событиями потока.

#### Буферизация.

Если интервал между событиями короче, чем время обработки  $T$ , буфер запомнит второе событие, что, в свою очередь, уменьшит потерю событий [47]:

$$g_1(T) = nT - [1 - \exp(-nT)]. \quad (1.104)$$

Событие, запомненное в буфере, обрабатывается сразу после «мертвого» времени. Таким образом, буфер «сдвигает» события вдоль временной оси, формируя более регулярные интервалы. ИКФ в этом случае позволяет измерить степень регулярности временных интервалов.

#### Нейронные импульсы.

Поток нейронных импульсов записывается с помощью микроэлектродов [66]. Результатом анализа потока является ИКФ (корреляционная гистограмма), которая сравнивается с ранее полученными результатами, например, представленными на рис.

1.20, с целью построения наиболее адекватной модели потока. Как показали исследования, наиболее адекватной моделью потока нейронных импульсов является суперпозиция (см. рис. 1.20 е) пуассоновского потока (см. рис. 1.20 а) и смещенного регулярного потока (см. рис. 1.20 в) [66]. ИКФ в этом случае помогла определить свойства модели рассматриваемой системы.

#### Коммуникация насекомых.

В работе [64, 66] приведен интересный пример из жизни насекомых-сверчков. В спокойном состоянии периодичность посылок сообщений сверчка случайна. Но стоит их потревожить, как картина резко меняется- появляется некоторая закономерность в посылки их сообщений. Была проанализирована импульсная последовательность сигналов насекомых, используемая ими для коммуникации, и определена ИКФ интервалов между посылками сообщений этих насекомых. Экспериментальные результаты были сравнены затем с результатами, представленными на рис. 1.20. Адекватной моделью для этого случая является суперпозиция (см. рис. 1.20 е) пуассоновского потока (см. рис. 1.20 а) и потока на выходе системы с фиксированным временем обработки, т. е. системы с “мертвым” временем (см. рис. 1.20 г). ИКФ, как и в предыдущем случае использовалась для построения модели системы.

Таким образом, в рассмотренных примерах для вычислительных систем реального времени и их основных функциональных блоков: сканеров, мультиплексоров, элементов задержки, процессоров обработки («мертвое» время), буферов и т. д.,- по результатам оценки ИКФ определялась модель неизвестного потока событий и строилась соответствующая вероятностная модель системы, через которую эти события прошли. Кроме того, ИКФ применялась для анализа и сравнения потоков событий в нейронных сетях и система поведения.

Было показано, что суперпозиция почти периодических потоков событий (мультиплексирование) приводит к появлению на выходе случайного потока. С другой стороны, процесс обработки, буферизация «сглаживают» случайный поток, преобразуя его в почти периодическую последовательность. Следует отметить, что интервальная корреляционная функция позволяет определить и скрытые модели в экспериментальных данных, а взаимная интервальная корреляционная функция - степень зависимости двух потоков событий.

Это важное обстоятельство: возможность определения степени зависимости событий одного потока (разных потоков) через интервальные корреляционные функции,- позволяет применять их и для анализа неэквилибриальных временных рядов.

### **1.9. Математическое описание неэквилибриальных временных рядов**

При описании неэквилибриального временного ряда необходимо учитывать специфику его представления в виде двух массивов выборочных данных:  $[x_{ji}(t_{ji} / \Delta t_{ji})]_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, M_j}$  - массива мгновенных значений  $x_{ji}$  и соответствующих им моментов или интервалов времени  $t_{ji} / \Delta t_{ji}$ , фиксирующих факт проведения измерений.

Такое представление позволяет для математического описания массива значений  $x_{ji}$  использовать математический аппарат теории случайных процессов, а для описания временной последовательности  $t_{ji}$  - математический аппарат теории потоков событий [39].

Независимо от особенностей математического описания  $x_{ji}$  и  $t_{ji}$  неэквидистантные временные ряды можно разбить на два класса:

- характеристики потока событий  $t_{ji}$  не зависят от характеристик исследуемого случайного процесса (см. рис. 1.21);
- характеристики потока событий  $t_{ji}$  полностью определяются характеристиками исследуемого случайного процесса (см. рис. 1.22).

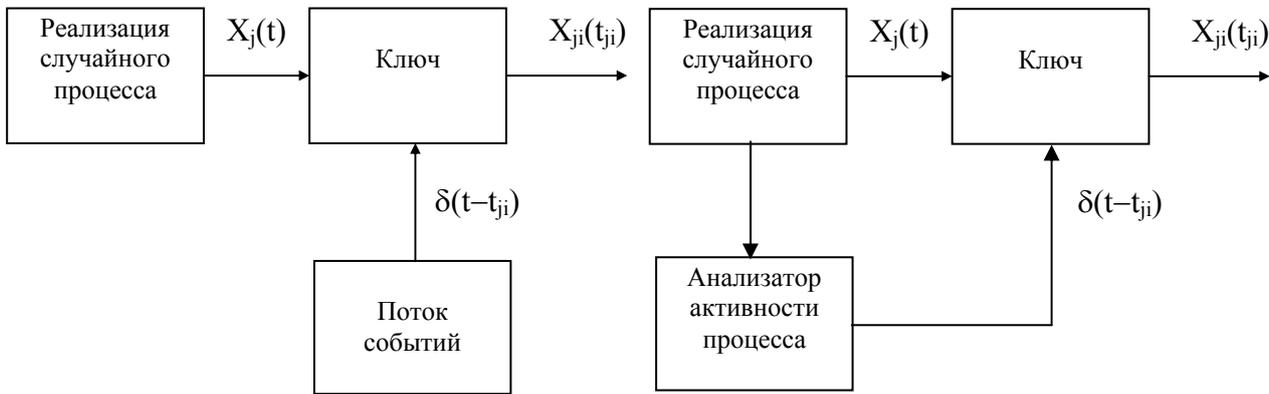


Рисунок 1.21. Характеристики потока не зависят от характеристик процесса

Рисунок 1.22. Характеристики потока зависят от характеристик процесса

К первому классу неэквидистантных временных рядов приводит **непреднамеренная случайная дискретизация**, не зависящая от желания исследователя, в том числе, и «некачественная» регулярная дискретизация [15, 39]:

- регулярная дискретизация с пропусками наблюдений;
- регулярная дискретизация с «дрожанием»;
- регулярная дискретизация с «дрожанием» и пропускам наблюдений.

Ко второму классу относится **преднамеренная нерегулярная дискретизация**, например: адаптивно-временная, спорадическая, - вводимая по желанию исследователя [4, 5, 15, 22, 23, 39]. Следует подчеркнуть, что чем большей априорной информацией о характере нерегулярной дискретизации располагает исследователь, тем более точную модель потока событий он построит.

Так, например, если  $\Delta x_{ji} = \text{const}$ ;  $\Delta t_{ji} = \text{random}$ , то такая дискретизация называется спорадической [22]. Для неё известна связь между интервалом дискретизации и характеристиками случайного процесса. Учёт этого важного обстоятельства позволяет упростить процедуру оценивания вероятностных характеристик и её метрологический анализ.

Математическое описание потоков событий и его характеристики зависят от способа дискретизации случайного процесса (см. рис. 1.23).

Выбор модели потока при описании неэквидистантного временного ряда зависит от способа неравномерной дискретизации, характера решаемой задачи, метода исследований (аналитический или имитационное моделирование) и т.д.

Основными требованиями, предъявляемыми к модели потока событий, являются следующие:

- модель должна адекватно описывать поток - совпадение основных характеристик потока и модели;



Рисунок 1.23. Классификация методов дискретизации

- быть по возможности простой, позволяющей аналитическое определение основных характеристик потока;
- для потоков, зависящих от характеристик случайного процесса, позволять определение характеристик потока в зависимости от характеристик процесса.
- При статистических измерениях при неравномерной дискретизации случайных процессов возможны следующие случаи:
  - случайная дискретизация непреднамеренная и для нее необходимо оценить увеличение методической погрешности, вызванное этой неравномерностью;
  - случайная дискретизация преднамеренная с известными характеристиками потока и необходимо: разработать алгоритмы статистических измерений, определить увеличение методической погрешности, вызванной неравномерностью дискретизации;
  - случайная дискретизация преднамеренная, и для нее необходимо определить требования к потоку при известных характеристиках процесса с целью обеспечения допустимых методических погрешностей измерения значений вероятностных характеристик.

Как правило, для анализа алгоритмов статистических измерений и расчета их основных параметров необходимо знание:

- закона распределения интервалов и их моментных характеристик, используемых при оценке составляющей методической погрешности, обусловленной неравномерностью дискретизации (см. подраздел 1.6);
- закона распределения сумм интервалов, требуемые для определения числа каналов аппаратно-программных средств при измерении функциональных вероятностных характеристик, например, корреляционно-структурных;
- плотности распределения времен возвращения, используемой при статистическом анализе взаимных корреляционно-структурных характеристик (см. подраздел 1.6);
- интервальной корреляционной функции, необходимой для усреднения результата и оценки составляющих методической погрешности (см. подраздел 1.6);
- минимального интервала дискретизации - параметра аппаратно-программных средств, обеспечивающего допустимые значения составляющей методической погрешности, обусловленной дискретизацией;
- интенсивности потока - величины, обратной математическому ожиданию интервала дискретизации, используемой для оценки коэффициента сжатия, определения допустимого значения погрешности восстановления случайного процесса;
- коэффициента сжатия  $k_{сж}$ , характеризующего число существенных отсчетов на выходе аналого-цифрового преобразователя.

Рассмотрим в общем виде определение указанных характеристик без учета конкретных особенностей моделей потоков.

Задаче определения статистических характеристик интервалов между существенными отсчетами, являющейся задачей о первом достижении границ, посвящено большое число работ (см. например, [30]). Как известно, строгое решение этой задачи, связанное с  $n$ -мерным интегрированием  $n$ -мерной плотности вероятности процессов при  $n \rightarrow \infty$ , может быть получено в аналитическом виде только для марковского процесса первого порядка [30]. В остальных же случаях авторы для конкретных способов неравномерной дискретизации при определенных допущениях приводят аналитические выражения  $f_{\Delta t}(\Delta t)$ ,  $F_{\Delta t}(\Delta t)$ .

Так, в [4] для адаптивно-временной дискретизации, полиномами нулевого и первого порядка при условии постоянства производной на интервале дискретизации, что справедливо лишь при малых погрешностях восстановления (уставки) и известном законе распределения модуля  $n+1$  производной, приводятся и анализируются законы распределения интервалов.

Однако, на практике применение такого подхода оказывается проблематичным, так как только для нормального  $n+1$  раз дифференцируемого входного процесса возможно аналитическое определение закона распределения модуля  $n+1$  производной. В остальных же случаях задача не имеет решения.

В [4,15] в результате обработки большого экспериментального материала авторы делают вывод о том, что математическая модель интервалов дискретизации для адаптивно-временных дискретизаторов с предсказателем нулевого порядка представляет собой рекуррентный поток с гамма-распределением интервалов:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \frac{(\alpha\lambda)^\alpha \Delta t^{\alpha-1} \exp(-\alpha\lambda\Delta t)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (1.105)$$

где  $\lambda$  - интенсивность потока.

Причем, чем меньше корреляционные связи между отсчетами входного процесса источника, тем меньше коэффициент  $\lambda$ , а для безызбыточных выборок он практически равен 1.

Отметим, что при  $\alpha = 1$  распределение интервалов становится экспоненциальным:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \lambda \exp(-\lambda \Delta t), \quad (1.106)$$

а поток отсчетов - пуассоновским [15].

На пуассоновский характер потока при различных способах неравномерной дискретизации указывают и другие авторы [4, 23, 39].

В некоторых частных случаях неравномерной дискретизации возможно аналитическое определение закона распределения интервалов, в остальных же случаях полученные результаты для повышения достоверности должны проверяться методом имитационного моделирования и экспериментальными исследованиями [39].

Определение моментных характеристик интервалов дискретизации при известном законе их распределения затруднений не вызывает [12].

Законы распределения сумм интервалов для рекуррентных потоков наиболее целесообразно определить через характеристическую функцию интервалов  $\varphi_{\Delta t}(u)$  [40].

В этом случае характеристическая функция  $\Theta_s = \sum_{i=1}^s \Delta t_i$  равна:

$$\varphi_{\Theta_s}(u) = [\varphi_{\Delta t}(u)]^s \quad (1.107)$$

Отсюда, воспользовавшись обратным преобразованием Фурье для  $\varphi_{\Theta_s}(u)$ , определим  $f_{\Theta_s}(\Theta_s)$  и  $F_{\Theta_s}(\Theta_s)$  [32].

При определении числа каналов аппаратно-программных средств возникает необходимость в определении распределения сумм  $L$  интервалов дискретизации на заданном интервале наблюдения оцениваемой вероятностной характеристики, например, на максимальном интервале корреляции  $\tau_{k \max}$  [39].

$$\begin{aligned} P(L, \tau_{k \max}) &= P(\tau_{k \max} \leq \Theta_L \cap \Theta_{L-1} < \tau_{k \max}) = \\ &= F_{L-1}(\tau_{k \max}) - F_L(\tau_{k \max}) \end{aligned} \quad (1.108)$$

Значение  $L_{\max}$ , обеспечивающего выполнение условия (1.108) с вероятностью  $P_d$ , находится из уравнения:

$$F_{L_{\max}}(\tau_{k \max}) = 1 - P_d. \quad (1.109)$$

Определим вероятность того, что один отсчёт потока отстоит от другого на расстоянии  $J\Delta\tau \pm \Delta\tau/2$  без учёта числа прошедших отсчётов.

Введем случайную величину, равную сумме  $k$  интервалов дискретизации:

$$\Theta_{jk} = \sum_{i=1}^k \Delta t_{ji}. \quad (1.110)$$

Найдем вероятность того, что случайная величина  $\Theta_{jk}$  находится в диапазоне

$$J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2} < \Theta_{jk} < J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2} :$$

$$P\left\{J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2} < \Theta_{jk} < J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right\} = F_{\Theta_{jk}}\left(J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right) - F_{\Theta_{jk}}\left(J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2}\right). \quad (1.111)$$

Вероятность того, что в этот интервал попадет любой из  $k$  отсчетов, равна:

$$C_{x_j}(J) = C_{x_j}(J\Delta\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left[J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2} \leq \Theta_{jk} < J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right] = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ F_{jk}\left(J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right) - F_{jk}\left(J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2}\right) \right], \quad (1.112)$$

В соответствии с определением (1.91) это и есть интервальная корреляционная функция.

При **преднамеренной неравномерной дискретизации** с целью упрощения аппаратной реализации сжатия данных используются полиномиальные модели восстановления нулевого и первого порядка (см. таблицу 1.10), требующие для реализации сравнительно простые технические средства и обладающие достаточной эффективностью, хотя в некоторых случаях рассматривается применение и других моделей, в том числе и сплайн - аппроксимации.

Модели входных сигналов при адаптивной дискретизации

Таблица 1.10

№	Название модели	Аналитическое выражение	Критерий	$\Delta t_0$	
				n=0	n=1
1	Интерполяционный полином Лагранжа	$\sum_{m=0}^n a_m t^m$	Равномерное приближение	$\frac{\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{8\varepsilon}{\mu_2}}$
2	Ряд Маклорена	$\sum_{m=0}^n \frac{x^{(m)}(0)t^m}{m!}$	Равномерное приближение	$\frac{\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{8\varepsilon}{\mu_2}}$
3	Полиномиальная	$\sum_{m=0}^n b_m t^m$	Квадратическое приближение	$\frac{2\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{12\varepsilon}{\mu_2}}$
4	Полиномиальная	$\sum_{m=0}^n c_m t^m$	Интегральное приближение	$\frac{4\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{48\varepsilon}{\mu_2}}$

В рассматриваемых полиномиальных моделях при  $n = 0$  и  $n = 1$  модели  $j$ -ой реализации случайного процесса на  $i$ -ом интервале дискретизации записываются в виде

$$x_{ji}^{(m)}(t) = a_{ji}^{(0)} \delta_{ji}^* ; \quad (1.113)$$

$$x_{ji}^{(m)}(t) = \left( a_{ji}^{(0)} + a_{ji}^{(1)} t \right) \delta_{ji}^* , \quad (1.114)$$

$$\text{где } \delta_{ji}^* = \begin{cases} 1, & \text{если } t_{ji} \leq t < t_{j,i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (1.115)$$

индикатор состояния, определяющий интервал дискретизации.

Так, при адаптивно-временной дискретизации и критерии равномерного приближения параметры моделей определяются в следующем виде:

1. для предсказателя нулевого порядка с фиксированной апертурой:

$$a_{ji}^{(0)} = x_{ji}; \quad (1.116)$$

2. для предсказателя первого порядка, определяющего производную сигнала по соседним отсчетам равномерной дискретизации, т.е. непосредственно в существенном отсчете:

$$\begin{cases} a_{ji}^{(0)} = x_{ji} - \Delta_{ji} t_{ji}; \\ a_{ji}^{(1)} = \Delta_{ji}, \end{cases} \quad (1.117)$$

где  $\Delta_{ji} = \frac{x_{j1} - x_{ji}}{t_{j1} - t_{ji}}$ , а  $t_{j1} = t_{ji} + \Delta t_0$ ,  $x_{j1} = x_{j1}(t_{j1})$ ,  $\Delta t_0$  - интервал дискретизации процесса;

3. для предсказателя первого порядка, определяющего производную сигнала по предыдущему и текущему существенным отсчетам сигнала:

$$\begin{cases} a_{ji}^{(0)} = \frac{x_{j,i-1} t_{ji} - x_{ji} t_{j,i-1}}{t_{ji} - t_{j,i-1}}; \\ a_{ji}^{(1)} = \frac{x_{ji} - x_{j,i-1}}{t_{ji} - t_{j,i-1}}; \end{cases} \quad (1.118)$$

4. для «вверхнего» интерполятора первого порядка:

$$\begin{cases} a_{ji}^{(0)} = \frac{x_{ji} t_{j,i+1} - x_{j,i+1} t_{ji}}{t_{j,i+1} - t_{ji}}; \\ a_{ji}^{(1)} = \frac{x_{j,i+1} - x_{ji}}{t_{j,i+1} - t_{ji}}. \end{cases} \quad (1.119)$$

Следующей важной характеристикой является минимальный интервал дискретизации, позволяющий восстановить случайный процесс по существенным отсчётам.

Эту характеристику необходимо определять в случаях, когда характеристики потока зависят от характеристик процесса: при адаптивно-временной, спорадической дискретизации, адаптивной коммутации и т.д.

Если значение интервала принудительной дискретизации превышает минимальный, то возможны пропуски отсчетов, что, в свою очередь, приводит к увеличению методической погрешности оценки значений вероятностных характеристик.

Существуют различные приближенные методы определения минимального интервала дискретизации, требующие ту или иную априорную информацию о свойствах процесса, модели процесса на интервале дискретизации и ее параметрах, способе неравномерной дискретизации и т.д.

Так для АД, использующих полиномиальные модели, как правило, низких порядков ( $n=0$ ,  $n=1$ ), необходимо знание максимального значения модуля  $n+1$  производной  $\mu_{n+1}$  на интервале дискретизации. Аналитически эта задача может быть решена только для дифференцируемых процессов с  $2(n+1)$  раз дифференцируемой корреляционной функцией, т.е. в ограниченных случаях [4]. В остальных же - возможно применение неравенства Бернштейна, которое справедливо для функций, ограниченных по модулю и имеющих финитную спектральную плотность мощности [39]:

$$\mu_{n+1} = \max |x^{(n+1)}(t)| \leq \omega_c^{n+1} \max |x(t)|, \quad (1.120)$$

где  $\omega_c$  - верхняя граничная частота спектра входного процесса.

Из выражения (1.120) видно, что для оценки  $\mu_{n+1}$  необходима информация о законе распределения модуля и спектральной плотности мощности входного процесса.

Воспользовавшись этим выражением, определим минимальный интервал дискретизации [4]:

$$\Delta t_{\min} = n+1 \sqrt{\frac{\varepsilon k}{\mu_{n+1}}}, \quad (1.121)$$

где  $\varepsilon$  - погрешность аппроксимации;  $k$  - коэффициент, зависящий от вида, степени аппроксимирующего полинома и критерия приближения (см. табл. 1.10).

Следует отметить, что неравенство Бернштейна дает сильно завышенное значение  $\mu_{n+1}$ . Скорректировать это завышение возможно подбором множителя  $R$  в уравнении определения  $\omega_c$

$$\int_0^{\omega_c} S_x(\omega) d\omega = R \sigma_x^2. \quad (1.122)$$

Так для нормального входного процесса с КФ  $K_x(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-\alpha|\tau|)$

$$\omega_c = \alpha \operatorname{tg} R\pi. \quad (1.123)$$

В таблице 1.11 приведены результаты определения  $\Delta t_{\min}$  в соответствии с выражением (1.121) для предсказателей нулевого порядка с плавающей апертурой для различных  $R$  и результаты имитационного моделирования [39]. Отсюда видно, что хорошее совпадение наблюдается при  $R=0,4$ .

Минимальный интервал дискретизации

Таблица 1.11

$\gamma = \varepsilon / \sigma_x$	0,25	0,5	0,75	1,0
$R = 0,320$	0,0529	0,1058	0,1587	0,2115
$R = 0,400$	0,0271	0,0542	0,0812	0,1083
$R = 0,475$	0,0066	0,0131	0,0197	0,0262
Результаты имитационного моделирования	0,0288	0,0579	0,0977	0,1465

Аналогичным образом возможно определение  $\Delta t_{\min}$  и для других моделей КФ входного процесса.

Интенсивность потока  $\lambda$  - величина, обратная математическому ожиданию интервала дискретизации, как параметр закона распределения используется при метрологическом анализе алгоритмов статистических измерений, определении коэффициента сжатия.

Существуют различные способы определения коэффициента сжатия [4]. Учитывая, что эта характеристика в дальнейшем будет использоваться при метрологическом анализе алгоритмов статистических измерений, определим ее в виде:

$$k_{\text{сж}} = \frac{N}{M}, \quad (1.124)$$

где  $N$  - число отсчетов при равномерной дискретизации;

$M$  - число отсчетов при неравномерной дискретизации при той же длительности реализации и погрешности восстановления.

При известных характеристиках потока выражение (1.124) удобно представить в виде:

$$k_{\text{сж}} = \frac{m_{\Delta t}}{\Delta t_{\min}} = \frac{1}{\lambda \Delta t_{\min}}. \quad (1.125)$$

### 1.10. Типовые модели неэквидистантных временных рядов

Рассмотрим типовые модели неэквидистантных временных рядов, широко применяемых на практике как при описании, так и при метрологическом анализе алгоритмов оценивания вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов. На практике, при описании различных видов неравномерной дискретизации, приводящей к нерегулярным временным рядам, как правило, применяют модели рекуррентных потоков Пальма [4, 15, 23, 39]:

- периодической дискретизации со случайными пропусками наблюдений;
- периодической дискретизации с «дрожанием»;
- аддитивной случайной дискретизации;
- периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений;
- аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений.

**Так для периодической дискретизации со случайными пропусками наблюдений** интервал дискретизации  $\Delta_{ji} = t_{j,i+} - t_{ji}$  определяется в соответствии с выражением

$$\Delta t_{ji} = Y_{ji} \Delta t_0, \quad (1.126)$$

где  $\Delta t_0$  - интервал принудительной дискретизации;

$Y$ -случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром  $p$  [11]:

$$P(Y = m) = pq^{m-1} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (1.127)$$

В соответствии с выражением (1.126) мгновенное значение выборки случайного процесса и соответствующая ему метка времени равны:

$$\begin{cases} x_{ji} = x_{ji} \left( \Delta t_0 \sum_{k=1}^i Y_{jk} \right); \\ t_{ji} = \Delta t_0 \sum_{j=1}^i Y_j. \end{cases} \quad (1.128)$$

Плотность и функция распределения вероятностей интервала дискретизации соответственно имеют вид [15]:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = p \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} \delta[\Delta t - i\Delta t_0] \quad (1.129)$$

$$F_{\Delta t}(\Delta t) = p \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} 1[\Delta t - i\Delta t_0], \quad (1.130)$$

где  $1[\Delta t] = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta t \geq 0 \\ 0, & \text{если } \Delta t < 0 \end{cases}$  - единичная функция.

Для определения моментных характеристик, законов распределения сумм интервалов удобнее воспользоваться характеристической функцией [40]:

$$\varphi_{\Theta}(u) = \frac{p \exp(iu\Delta t_0)}{1 - q \exp(iu\Delta t_0)}. \quad (1.131)$$

Тогда математическое ожидание и дисперсия равны:

$$\begin{cases} m_{\Delta t} = \frac{\Delta t_0}{p}; \\ \sigma_{\Delta t}^2 = \frac{\Delta t_0^2 q}{p^2}, \end{cases} \quad (1.132)$$

а плотность распределения времени возвращения имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{p^2}{\Delta t_0} \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} l[\Delta t - i\Delta t_0]. \quad (1.133)$$

С учетом выражения (1.131) характеристическая функция  $Z_{nj} = \sum_{i=1}^n \Delta t_{ji}$  равна

$$\varphi_{Z_{nj}}(u) = \left[ \frac{p \exp(iu\Delta t_0)}{1 - q \exp(iu\Delta t_0)} \right]^n. \quad (1.134)$$

Откуда плотность и функция распределения  $Z_{nj}$  определяется в виде:

$$f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = P(Z_{nj} = k\Delta t_0) = C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \delta[Z_{nj} - k\Delta t_0] \quad (1.135)$$

$$F_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = P(Z_{nj} \leq k\Delta t_0) = \sum_{r=n}^k C_{r-1}^{n-1} p^r q^{r-n} l[Z_{nj} - r\Delta t_0] \quad (1.136)$$

С учетом выражения (1.136)  $L_{\max}$ , обеспечивающее выполнение условия (1.108), находится из уравнения

$$p^{L_{\max}} \sum_{r=L_{\max}}^m C_{r-1}^{L_{\max}-1} q^{r-L_{\max}} l[\tau_{k \max} - r\Delta t_0] = 1 - P_d, \quad (1.137)$$

где  $m = \text{ent} \left[ \frac{\tau_{k \max}}{\Delta t_0} \right] + 1$ .

Плотность распределения  
 $\Delta t = 0,4$   $\tau_{k \max} = 3$

Функция распределения  
 $\Delta t = 0,4$   $\tau_{k \max} = 3$

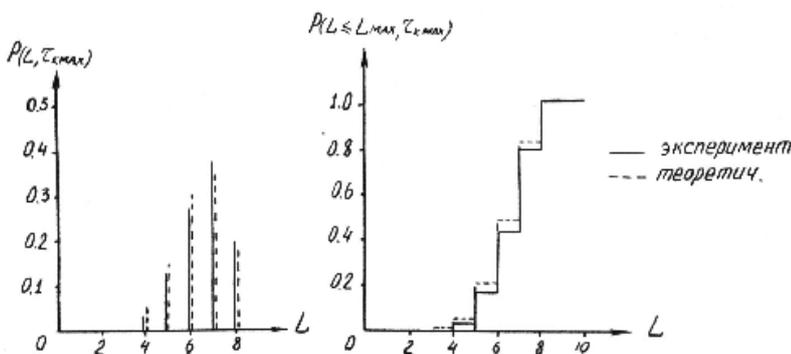


Рисунок 1.24 Плотность и функция распределения суммы интервалов на  $\tau_{k \max}$

На рис. 1.24 приведены результаты расчета плотностей и функций распределения вероятностей в соответствии с выражениями (1.135), (1.136) для  $p=0,8$ ,  $\Delta t_0=0,4$ ,  $\tau_{k \max}=3$  и результаты имитационного моделирования, подтверждающие правильность расчетов. Из рис. 1.24 видно, что для  $p=0,8$   $L_{\max}=m$ .

Интервальная корреляционная функция для рассматриваемого потока равна

$$C_x(J) = p, \quad (1.138)$$

а минимальный интервал дискретизации и коэффициент сжатия соответственно равны:

$$\begin{cases} \Delta t_{\min} = \Delta t_0; \\ k_{\text{сж}} = \frac{1}{p}. \end{cases} \quad (1.139)$$

**Для периодической дискретизации с «дрожанием»**

$$\begin{cases} t_{ji} = i\Delta t_0 + \xi_{ji}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (1.140)$$

где  $\xi_{ji}$  - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей  $f_\xi(\xi)$ , каждая из которых расположена в диапазоне  $\left(-\frac{\Delta t_0}{2}, \frac{\Delta t_0}{2}\right)$ , а интервал дискретизации равен

$$\Delta t_{ji} = \Delta t_0 + \xi_i - \xi_{i-1}. \quad (1.141)$$

Характеристики потока будут зависеть от  $f_\xi(\xi)$ . Рассмотрим пример, когда  $\xi$  распределена по нормальному закону с  $m_\xi = 0$  и  $D_\xi = \sigma_\xi^2$ .

Тогда плотность, функция распределения вероятностей и характеристическая функция соответственно равны:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_\xi} \exp\left(-\frac{(\Delta t - \Delta t_0)}{4\sigma_\xi^2}\right); \quad (1.142)$$

$$F_{\Delta t}(\Delta t) = \Phi\left*\left(\frac{\Delta t - \Delta t_0}{\sqrt{2}\sigma_\xi}\right)\right, \quad (1.143)$$

где  $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$  [12];

$$\varphi_{\Delta t}(u) = \exp\left(-u^2\sigma_x^2 + iu\Delta t_0\right). \quad (1.144)$$

Откуда  $m_{\Delta t} = \Delta t_0$ , а  $D_{\Delta t} = 2\sigma_\xi^2$ .

Плотность распределения времени возвращения имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Delta t_0} \Phi\left*\left(\frac{t - \Delta t_0}{\sqrt{2}\sigma_\xi}\right)\right. \quad (1.145)$$

Характеристическая функция суммы  $n$  независимых интервалов  $Z_{nj} = \sum_{i=1}^n \Delta t_{ji}$  с

учетом выражения (1.144) запишется в виде

$$\varphi_{Z_{nj}}(u) = \exp\left(-n(u^2\sigma_\xi^2 - iu\Delta t_0)\right), \quad (1.146)$$

а соответствующие ей плотность и функция распределения вероятностей равны:

$$f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}\sigma_\xi} \exp\left(-\frac{(Z_{nj} - n\Delta t_0)^2}{4n\sigma_\xi^2}\right), \quad (1.147)$$

$$F_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \Phi^*\left(\frac{Z_{nj} - n\Delta t_0}{\sqrt{2n}\sigma_\xi}\right). \quad (1.148)$$

Для нормального закона распределения  $\xi$   $L_{\max}$  определяется из уравнения

$$\Phi^*\left(\frac{\tau_{k\max} - L_{\max}\Delta t_0}{\sqrt{2L_{\max}}\sigma_\xi}\right) = 1 - P_d, \quad (1.149)$$

которое с учетом свойств  $\Phi^*(x)$  приведем к виду:

$$\Phi^*\left(\frac{L_{\max}\Delta t_0 - \tau_{k\max}}{\sqrt{2L_{\max}}\sigma_\xi}\right) = P_d. \quad (1.150)$$

Отсюда, после преобразований получим следующее уравнение:

$$L_{\max}^2 - \frac{2L_{\max}(\Delta t_0\tau_{k\max} + A^2\sigma_\xi^2)}{\Delta t_0} - \frac{\tau_{k\max}^2}{\Delta t_0^2} = 0, \quad (1.151)$$

где  $A = \arg \Phi^*(P_d)$ .

Решение этого уравнения, например, для случайного процесса с нормированной корреляционной функцией  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ ,  $\Delta t_0 = 0.4/\alpha$ ,  $\tau_{k\max} = 3/\alpha$ ,  $P_d = 0.99$ ,  $A = 2,3$  дает  $L_{\max} = 9$ .

Заметим, что при равномерной дискретизации  $L_{\max} = \text{ent}\left[\frac{\tau_{k\max}}{\Delta t_0} + 0,5\right] = 8$ .

Интервальная корреляционная функция равна

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Phi^*\left[\frac{\Delta t_0(J-k) + \frac{\Delta}{2}}{\sqrt{2}\sigma_\xi}\right] - \Phi^*\left[\frac{\Delta t_0(J-k) - \frac{\Delta}{2}}{\sqrt{2}\sigma_\xi}\right] \right\}. \quad (1.152)$$

Если  $\sigma_\xi = \frac{\Delta t_0}{6}$  и  $\Delta = \Delta t_0$ , то после промежуточных преобразований получим

$$C_x(J) = \Phi^*\left[\frac{3(2J-1)}{\sqrt{2}}\right] \rightarrow 1. \quad (1.153)$$

Заметим, что для рассматриваемой модели при заданном значении  $\Delta t_0$  минимальный интервал дискретизации может быть близок к нулю, но коэффициент сжатия  $k_{сж} = 1$ .

**Для аддитивной случайной дискретизации**

$$\begin{cases} t_{ji} = t_{j+1} + \xi_{ji}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (1.154)$$

где  $\xi_{ji}$  - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей  $f_{\xi}(\xi)$ , каждая из которых расположена в диапазоне  $(0, \infty)$ .

Интервал дискретизации для этой модели равен

$$\Delta t_{ji} = \xi_{ji}. \quad (1.155)$$

Наиболее полно вероятностные характеристики этой модели исследованы в [4, 15]. Учитывая, что в практике широко применяется модель простейшего потока и потока с распределением интервалов, подчиненного гамма-распределению, частным случаем которого являются законы Эрланга, экспоненциальное, вырожденное причинное, показательное степенное, Пирсона и т.д. [15], определим их характеристики.

Для гамма-распределения длительности интервалов

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \frac{(\alpha\lambda)^{\alpha} \Delta t^{\alpha-1} \exp(-\alpha\lambda\Delta t)}{\Gamma(\alpha)} \quad (1.156)$$

характеристическая функция равна:

$$\varphi_{\Delta t}(u) = \frac{(\alpha\lambda)^{\alpha}}{(\alpha\lambda - iu)^{\alpha}}. \quad (1.157)$$

Отсюда характеристическая функция  $Z_{nj} = \sum_{i=1}^n \Delta t_{ji}$  определяется в виде:

$$\varphi_{Z_{nj}}(u) = \frac{(\alpha\lambda)^{\alpha n}}{(\alpha\lambda - iu)^{\alpha n}}, \quad (1.158)$$

а плотность и функция распределения вероятностей соответственно равны:

$$f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \frac{(\alpha\lambda)^{\alpha n} Z_{nj}^{\alpha n-1}}{\Gamma(\alpha n)} \exp(-\alpha\lambda Z_{nj}), \quad (1.159)$$

$$F_{Z_n}(Z_n) = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} v[\alpha n, \alpha\lambda Z_n] \quad (1.160)$$

где  $v[\alpha, x] = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt$  - неполная гамма-функция [16].

Моментные характеристики интервалов равны:  $m_{\Delta t} = \frac{1}{\lambda}$ ,  $D_{\Delta t} = \frac{1}{\alpha\lambda^2}$ , а коэф-

фициент формы

$$k_{\phi} = \frac{2\alpha^{\alpha-1} e^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (1.161)$$

Вероятностные характеристики для простейшего потока можно получить из выражений (1.156) - (1.161), положив  $\alpha = 1$ .

Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{\Delta t}(\Delta t) = \lambda \exp(-\lambda \Delta t); \\ F_{\Delta t}(\Delta t) = 1 - \exp(-\lambda \Delta t); \\ \varphi_{\Delta t}(u) = \frac{\lambda}{\lambda - iu}; \\ \varphi_{Z_{nj}}(u) = \frac{\lambda^n}{(\lambda - iu)^n} \\ \\ f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \frac{\lambda^n Z_{nj}^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda Z_{nj}); \\ F_{Z_{nj}} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k Z_{nj}^k}{k!} \exp(-\lambda Z_{nj}) \end{array} \right. \quad (1.162)$$

При целочисленных значениях  $\alpha = k+1 = 1, 2, 3$  гамма-распределение вырождается в распределение Эрланга [15].

Для простейшего потока, как следует из выражения (1.108), плотность распределения сумм интервалов на  $\tau_{k \max}$  имеет вид

$$f(L, \tau_{k \max}) = P(L, \tau_{k \max}) = \frac{(\lambda \tau_{k \max})^{L-1}}{(L-1)!} \exp(-\lambda \tau_{k \max}), \quad (1.163)$$

а  $L_{k \max}$  находится из уравнения

$$\sum_{L=1}^{L_{k \max}} \frac{(\lambda \tau_{k \max})^{L-1}}{(L-1)!} \exp(-\lambda \tau_{k \max}) = P_d. \quad (1.164)$$

Решение уравнения для  $L_{k \max} = 6,7766$  и  $P_d = 0,99$  дает  $L_{k \max} = 14$ .

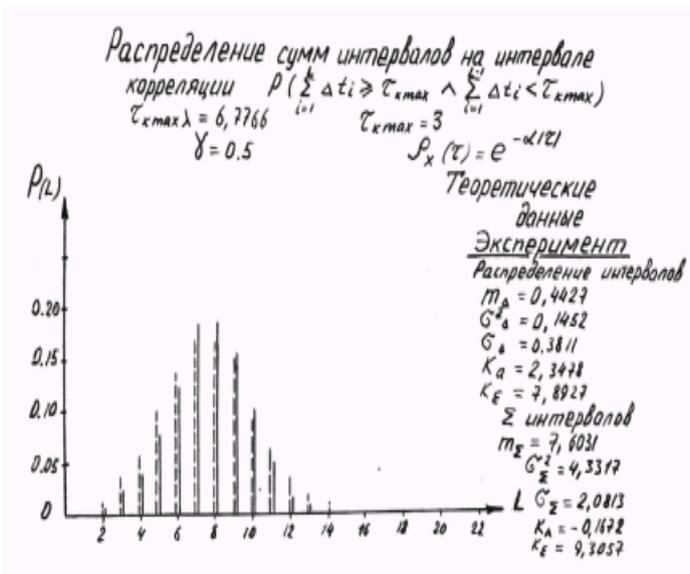


Рисунок 1.25. Распределение сумм интервалов на максимальном интервале корреляции

На рис. 1.25 приведены для примера законы распределения сумм интервалов на  $\tau_{k \max}$  для АД с предсказателем нулевого порядка с плавающей апертурой (ПНП ПА), полученные методом имитационного моделирования, и результаты определения  $L_{k \max}$  из уравнения (1.164). Результаты анализа еще раз подтверждают, что для АД ПНП ПА возможно применение модели простейшего потока.

Для гамма-распределения  $L_{k \max}$  определяется из уравнения

$$\frac{v[L_{\max} \alpha, \alpha \lambda \tau_{k \max}]}{\Gamma(\alpha L_{\max})} = 1 - P_d, \quad (1.165)$$

решение которого возможно только численными методами [55].

Интервальная корреляционная функция для простейшего потока примет вид

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ \frac{\lambda^r \exp(-J \lambda \Delta t_0)}{r!} \left[ \exp\left(-\frac{\lambda \Delta}{2}\right) \left(J \Delta t_0 - \frac{\Delta}{2}\right)^r - \exp\left(-\frac{\lambda \Delta}{2}\right) \left(J \Delta t_0 + \frac{\Delta}{2}\right)^r \right] \right\}, \quad (1.166)$$

а для гамма-распределения интервалов -

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k)} \left\{ v \left[ \alpha k, \alpha \lambda \left(J \Delta t_0 + \frac{\Delta}{2}\right) \right] - v \left[ \alpha k, \alpha \lambda \left(J \Delta t_0 - \frac{\Delta}{2}\right) \right] \right\}. \quad (1.167)$$

Результаты определения  $C_x(J)$  для АД ПНП ПА для модели КФ входного процесса  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$  представлены на рис. 1.26.

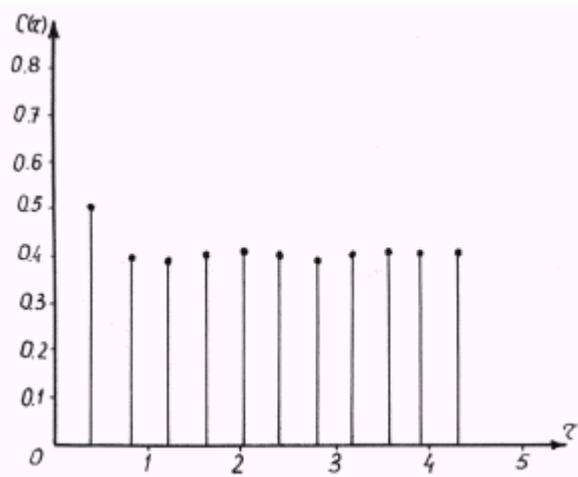


Рисунок 1.26. Интервальная корреляционная функция

Плотность распределения времени возвращения для простейшего потока

$$\varphi(t) = \lambda \exp(-\lambda t), \quad (1.168)$$

а для гамма-распределения интервалов -

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} v[\alpha, \alpha \lambda t]. \quad (1.169)$$

Минимальный интервал дискретизации для полиномиальной модели процесса на интервале дискретизации определяется в соответствии с выражением (1.121) с учетом (1.122).

Следует отметить, что если массивы  $\{x_i, \Delta t_i\}_{i=1}^M$  записаны в память ЭВМ, то задачи определения  $\Delta t_{\min}$  и  $\lambda$  тривиальны.

Аналитическое же определение интенсивности потока для произвольного вида неравномерной дискретизации, особенно для не дифференцируемых процессов с законами распределения, отличными от нормального, встречает определенные трудности. Следовательно, интенсивность потока необходимо определять для конкретного вида неравномерной дискретизации.

Так, например, для спорадической дискретизации при числе уровней квантования  $6 \leq r \leq 300$ , как показано в [22] на обработке большого экспериментального материала, удовлетворительная аппроксимация достигается с интенсивностью  $\lambda$ , определяемой выражением

$$\lambda = \frac{\sqrt{-\rho_x''(0)}}{\pi} \sum_{i=1}^r \exp \left[ -0,5 \left( \frac{i q - m_x}{\sigma_x} \right)^2 \right], \quad (1.170)$$

$q$  - шаг квантования.

Для АД ПНП с фиксированной апертурой (ФА) поток является простейшим [4] с интенсивностью

$$\lambda = \frac{M \left[ \overset{\circ}{x'} \right]}{\varepsilon} = \frac{k_{\phi} \sigma_{x'}}{\varepsilon}, \quad (1.171)$$

где  $k_{\phi}$  - коэффициент формы производной процесса;

$\sigma_{x'}$  - СКО производной процесса.

Из анализа выражения (1.171) видно, что интенсивность при заданном значении уставки  $\varepsilon$  определяется, в основном, значением  $\sigma_{x'}$ , т.к. значения  $k_{\phi}$  для производных законов изменяются в небольших пределах (см. таблицу 1.12) [39].

Таблица коэффициентов формы и пикфактора для типовых законов распределения

Таблица 1.12

№	Наименование закона	$k_{\phi} = M \left[ \overset{\circ}{x'} \right] / \sigma_x$	$\eta = x_{\max} / \sigma_x$	$P_d$
1	Нормальный	0,7979	3	0,9973
2	Равномерный	0,8660	1,7320	1
3	Треугольный	0,8165	2,4495	1
4	Антимодальный I	0,9428	1,4142	1
5	Антимодальный II	0,9802	1,2603	1
6	Трапециевидный	0,8391	2,3238	1
7	Рэля	1	2,9735	0,995
8	Экспоненциальный	0,7358	5,2983	0,995
9	Лапласа	0,7071	3,7465	0,995

Выражения  $\sigma_{x'}$  для типовых дифференцируемых моделей КФ приведены в таблице 1.13.

СКО дифференцируемых процессов

Таблица 1.13

N	$K(\tau)$	$\sigma_{x'}$
1	$\sigma_x e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	$\alpha \sigma_x$
2	$\sigma_x e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau  + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$\alpha \sigma_x \sqrt{3} / 3$
3	$\sigma_x \exp(-\alpha^2 \tau^2)$	$\alpha \sigma_x \sqrt{2}$
4	$\sigma_x e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau )$	$\sigma_x \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}$

Для недифференцируемых случайных процессов в явном виде значение  $\sigma_{x'}$  определить нельзя.

Однако, воспользовавшись аппроксимативным подходом, возможно определение параметров аппроксимирующего выражения  $K_a(\tau)$ , удовлетворяющего, напри-

мер, минимуму квадратической погрешности аппроксимации [38], а затем по параметрам модели определение  $\sigma_{x'}$ .

Так, например, при аппроксимации  $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$  моделью вида  $K_a(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-\beta^2 \tau^2)$  связь параметров имеет вид

$$\beta = 0,935 \alpha \quad (1.172)$$

Результаты теоретического определения интенсивности для адаптивно-временной дискретизации предсказателем пулевого порядка с плавающей апертурой (АВД ПНП ПА)  $\lambda_T$ , экспериментального, полученного методом имитационного моделирования  $\lambda_M$ , а также погрешности оценки  $\lambda$  приведены в таблице 1.14.

Интенсивность потока АВД ПНП ПА для случайного процесса

$$c K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \text{ для } \gamma = \varepsilon / \sigma_x = 0,5$$

Таблица 1.14

№	$k_\Phi$	$\lambda_T$	$\lambda_M$	$\delta = (\lambda_M - \lambda_T) / \lambda_T$
1	0,7979	2,1101	2,1778	0,0705
2	0,8148	2,1547	2,1589	0,0019
3	0,8283	2,1747	2,2124	0,0173
4	0,8225	2,1752	2,2247	0,0228
5	0,7954	2,1035	2,1673	0,0303
6	0,7489	1,9805	1,9324	0,0243

Из анализа результатов видно, что независимо от вида закона распределения входного процесса, задаваемого  $k_\Phi$ , погрешность оценки  $\lambda$  находится в допустимых пределах.

Аналогичным образом, воспользовавшись подпрограммами аппроксимации КФ параметрическими моделями [38], возможно определение и других моделей КФ.

**Модель периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений** является обобщением модели периодической дискретизации с «дрожанием», интервалы которой  $\Delta t_{ji} = \Delta t_0 + \xi_{j,i+1} - \xi_{j,i}$  с плотностью распределения вероятностей  $f_{\Delta t}(\Delta t)$ , разряжены р-преобразованием [39].

Для нее:

$$\begin{cases} t_{ji} = \Delta t_0 \sum_{k=1}^i Y_{kj} + \xi_{\sum_{k=1}^i Y_{kj}} - \xi_0; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (1.173)$$

где  $Y_i$  - случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром  $p$  в соответствии с выражением (1.127), а интервал дискретизации

$$\Delta t_{ji} = Y_i \Delta t_0 + \xi_{\sum_{j=1}^i Y_i} - \xi_{\sum_{j=1}^{i-1} Y_j} \quad (1.174)$$

Плотность распределения вероятностей величины  $Z$  находится по формуле полной вероятности с гипотезами  $H_n(Y=n)$  в виде [13]

$$f_z(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_z^{(n)}(z) p q^{n-1}, \quad (1.175)$$

где  $f_z^{(n)}(z)$  - плотность распределения суммы  $n$  независимых величин  $\Delta t_{ji}$ .

Пусть  $\xi$  распределена по нормальному закону  $m_\xi = 0$  и  $D_\xi = \sigma_\xi^2$ . Тогда выражение (1.175) примет вид:

$$f_z(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi n} \sigma_\xi} \exp\left(-\frac{(z - n \Delta t_0)^2}{4n \sigma_\xi^2}\right) p q^{n-1}, \quad (1.176)$$

соответствующая функция распределения -

$$F_z(z) = p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \Phi\left(\frac{z - n \Delta t_0}{\sqrt{2n} \sigma_\xi}\right), \quad (1.177)$$

а математическое ожидание и дисперсия соответственно равны

$$\begin{cases} m_z = \frac{\Delta t_0}{p}; \\ \sigma_z^2 = \frac{2\sigma_\xi^2}{p} + \frac{\Delta t_0^2}{p^2}. \end{cases} \quad (1.178)$$

Плотность распределения времени возвращения определяется в виде:

$$\varphi(t) = \frac{p^2}{\Delta t_0} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \Phi\left(\frac{z - n \Delta t_0}{\sqrt{2n} \sigma_\xi}\right). \quad (1.179)$$

Найдем законы распределения  $\zeta_n = \sum_{i=1}^n z_i$ , воспользовавшись ее характеристической функцией

$$\varphi_{\zeta_n}(u) = \left[ \frac{p \exp(-u^2 \sigma_\xi^2 + iu \Delta t_0)}{1 - q \exp(-u^2 \sigma_\xi^2 + iu \Delta t_0)} \right]^n \quad (1.180)$$

Отсюда плотность распределения вероятностей

$$f_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi k} \sigma_\xi} \exp\left(-\frac{(\zeta_n - k \Delta t_0)^2}{4k \sigma_\xi^2}\right) C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n}, \quad (1.181)$$

а функция распределения примет вид:

$$F_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \Phi\left(\frac{\zeta_n - k \Delta t_0}{\sqrt{2k} \sigma_\xi}\right). \quad (1.182)$$

В соответствии с выражением (1.109)  $L_{\max}$  определяется из уравнения

$$\sum_{k=L_{\max}}^{\infty} C_{k-1}^{L_{\max}-1} p^{L_{\max}} q^{k-L_{\max}} \Phi\left(\frac{\tau_{k \max} - k \Delta t_0}{\sqrt{2k} \sigma_\xi}\right) = 1 - P_d. \quad (1.183)$$

Интервальная корреляционная функция с учетом выражения (1.112) примет вид:

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=k}^{\infty} C_{r-1}^{k-1} p^k q^{r-k} \left\{ \Phi * \left[ \frac{\Delta t_0(J-k) + \Delta / 2}{\sqrt{2r} \sigma_{\xi}} \right] - \Phi * \left[ \frac{\Delta t_0(J-k) - \Delta / 2}{\sqrt{2r} \sigma_{\xi}} \right] \right\}. \quad (1.184)$$

Если  $\Delta = \Delta t_0$ , то  $C_x(J) = p$ .

Минимальный интервал дискретизации может быть близок к нулю, а коэффициент сжатия равен

$$k_{сж} = \frac{1}{p}. \quad (1.185)$$

**Модель аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений** является обобщением модели аддитивной случайной дискретизации, интервалы которой  $\Theta_i = \xi_i$  с плотностью распределения вероятностей  $f_{\Theta}(\Theta)$  разряжены  $p$ -преобразованием.

Для этой модели:

$$\begin{cases} t_i = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^{Y_j} \xi_{k+\sum_{l=1}^{j-1} Y_l}; \\ x_i = x(t_i), \end{cases} \quad (1.186)$$

а интервал дискретизации равен

$$z_i = \sum_{i=1}^Y \Theta_i = \sum_{k=1}^{Y_i} \xi_{k+\sum_{l=1}^{i-1} Y_l}. \quad (1.187)$$

Плотность распределения вероятностей  $Z$  определяется в соответствии с выражением (1.175).

Пусть  $\xi$  распределена по экспоненциальному закону. Тогда  $f_z(z)$  с учетом (1.162) примет вид

$$f_z(z) = p \lambda \exp(-\lambda p z). \quad (1.188)$$

Из этого выражения видно, что все вероятностные характеристики аналогичны характеристикам простейшего потока с параметром  $\lambda p$  для аддитивной случайной дискретизации (см. выражения (1.162), (1.164), (1.166), (1.168)).

Для гамма-распределения длительности интервалов  $\Theta$  (см. (1.105)) плотность распределения

$$f_z(z) = p \alpha \lambda \exp(-\alpha \lambda z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha \lambda q z)^{\alpha n - 1}}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (1.189)$$

функция распределения

$$F_z(z) = p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \frac{\nu[n \alpha, \alpha \lambda z]}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (1.190)$$

математическое ожидание и дисперсия

$$\begin{cases} m_z = \frac{1}{p\lambda}; \\ \sigma_z^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{p} + \frac{q}{\lambda^2 p^2}, \end{cases} \quad (1.191)$$

плотность распределения времени возвращения

$$\varphi(t) = \lambda p^2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \frac{v[\alpha n, \alpha \lambda z]}{\Gamma(\alpha n)}. \quad (1.192)$$

Плотность и функция распределения вероятностей суммы  $n$  интервалов

$\zeta_n = \sum_{i=1}^n z_i$  соответственно равны:

$$f_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \frac{(\alpha \lambda)^{\alpha n} \zeta_n^{\alpha n-1}}{\Gamma(\alpha n)} \exp(-\alpha \lambda \zeta_n) \quad (1.193)$$

$$F_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \frac{v[\alpha n, \alpha \lambda \zeta_n]}{\Gamma(\alpha n)}. \quad (1.194)$$

С учетом выражений (1.109) и (1.195)  $L_{\max}$  находится из уравнения

$$\sum_{k=L_{\max}}^{\infty} C_{k-1}^{L_{\max}-1} p^{L_{\max}} q^{k-L_{\max}} \frac{v[\alpha L_{\max}, \alpha \lambda \tau_{k \max}]}{d(\alpha L_{\max})} = 1 - P_d \quad (1.195)$$

с использованием одного из численных методов [55].

Интервальная корреляционная функция определяется в виде:

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=k}^{\infty} C_{r-1}^{k-1} p^k q^{r-k} \left\{ \frac{v\left[\alpha r, \alpha \lambda \left(J \Delta t_0 + \frac{\Delta}{2}\right)\right]}{\Gamma(\alpha r)} - \frac{v\left[\alpha r, \alpha \lambda \left(J \Delta t_0 - \frac{\Delta}{2}\right)\right]}{\Gamma(\alpha r)} \right\}. \quad (1.196)$$

Интенсивность и минимальный интервал дискретизации определяются аналогично как и для модели аддитивной случайной дискретизации, а коэффициент сжатия для рассматриваемых законов равен:

$$k_{сж} = \frac{1}{p\lambda\Delta t_0}. \quad (1.197)$$

Рассмотренные модели, естественно, не являются исчерпывающими, но они покрывают широкий класс практических задач.

## 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОРРЕЛИРОВАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

### 2.1. Моделирование временных рядов типа «белого» шума

Как правило, в качестве первичного случайного процесса, с помощью которого осуществляется моделирование образцовых сигналов, является процесс типа «белого» шума, распределенный по равномерному или нормальному законам. В дальнейшем для получения случайного сигнала с заданными статистическими характеристиками его подвергают различным линейным и нелинейным преобразованиям. Существуют различные способы получения первичного процесса:

- с использованием физических датчиков случайных процессов, построенных на различных физических эффектах;
- с помощью специальных программ формируется достаточно большая последовательность псевдослучайных чисел, удовлетворяющая принятым тестам случайности - программный;
- с использованием таблиц случайных чисел - табличный;
- с использованием специального процессора для генерирования псевдослучайной последовательности - программно-аппаратный.

В таблице 2.1 указаны достоинства и недостатки методов генерирования.

Сравнительная оценка методов генерирования случайных процессов  
(последовательностей)

Таблица 2.1

Метод	Достоинства	Недостатки
Датчиков	Запас чисел неограничен. Сверхбыстрое получение	Нестабильность физических генераторов. Невозможность повторение последовательности. Необходимость специальной аппаратуры.
Программный	Проверка однократная. Возможность воспроизведения чисел. Простота реализации. Отсутствие специальной аппаратуры	Запас чисел ограничен (периодичность процесса). Сравнительно малое быстродействие.
Табличный	Высокое быстродействие. Хорошая случайность. Возможность воспроизведение чисел.	Запас чисел ограничен. Большой объем занимаемой памяти.
Программно-аппаратный	Высокое быстродействие. Возможность воспроизведение чисел.	Запас чисел ограничен. Требуется специальный процессор.

Из анализа таблицы 2.1. видно, что программный метод генерирования псевдослучайных последовательностей (ПСП) самый удобный с практической точки зрения.

Обычно современные ЭВМ в математическом обеспечении имеют встроенную функцию генерирования ПСП с равномерным законом распределения в диапазоне  $[0,1]$ , используя которую можно решать большинство задач моделирования образцовых сигналов. Но иногда возникает необходимость генерирования независимых слу-

чайных процессов. Наилучшие из известных сегодня датчиков случайных чисел представляют частные случаи схемы, предложенной Д.Ч. Леммером [26]:

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \bmod m, \quad (2.1)$$

где  $x_0 > 0$  - начальное значение;

$a > 0$  - множитель;

$c \geq 0$  - приращение;

$m$  - модуль ( $m > x_0, m > a, m > c$ ).

Обычно  $m$  задается на единицу больше максимального числа, которое можно записать в машинном слове.

Такая последовательность называется линейной конгруэнтной последовательностью. Для получения равномерно распределенной в интервале  $[0,1]$  последовательности необходимо выполнить преобразование:

$$u_n = \frac{x_n}{m}. \quad (2.2)$$

Конгруэнтные последовательности всегда «зацикливаются». Это свойство присуще всем последовательностям вида  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Повторяющийся цикл называется периодом.

Если  $C=0$ , то процесс генерации случайных чисел происходит несколько быстрее, но в то же время ограничение  $C=0$  уменьшает длину периода. Методы генерирования с  $C=0$  и  $C \neq 0$  называют соответственно: мультипликативным конгруэнтным и смешанным конгруэнтным методами.

Рекомендации по выбору числа  $m$  сводятся к следующему -  $m$  необходимо выбрать достаточно большим, так как длина периода не может быть больше  $m$ . Другой фактор, влияющий на выбор  $m$ , - это скорость выработки чисел. Так как деление - сравнительно медленная операция, то ее можно избежать. Для этого необходимо выбрать  $m$  равным размеру слова. При выборе  $m$ , равном максимальному целому числу, размещающемуся в машинном слове, младшие разряды числа  $x$  намного менее случайны случайных старших. Если  $m$  равно максимальному целому числу в машинном слове  $\pm 1$ , то такой ситуации не возникает. Но для большинства приложений младшие разряды не существенны, и выбор  $m$  равном максимальному целому числу в машинном слове является вполне удовлетворительным, т.е. можно принять  $m=2^l$ , где  $l$  - длина машинного слова.

Выбор множителя  $a$ : для любой последовательности, предназначенной для использования в качестве источника случайных чисел, важен большой период.

Теорема 1. Длина периода линейной конгруэнтной последовательности равна  $m$  тогда и только тогда, когда

1.  $C$  и  $m$  - взаимно простые числа;
2.  $b = a - 1$  - кратно  $p$  для любого простого  $p$ , являющимся делителем  $m$ ;
3.  $b$  кратно 4, если  $m$  кратно 4.

Замечание: когда период имеет длину  $m$ , каждое число от 0 до  $m-1$  встречается за период ровно один раз, следовательно выбор  $x_0$  не влияет в этом случае на длину периода.

#### Мультипликативный метод:

$$x_{n+1} = a x_n \pmod{m}; \quad (2.3)$$

при  $m=2^{1-2}$  получается последовательность с тах периодом, алгоритм построения которой приведен ниже [26]:

1. выбрать в качестве  $x_0$  произвольное нечетное число;
2.  $a=8t\pm 3$ , где  $t$  - любое целое положительное число;
3. вычислить  $ax_0$ ; полученное число содержит не более 21 значащих разрядов; взять 1 младших значений разрядов в качестве  $x_1$ , остальные отбросить;
4.  $u_1 = x_1/m$ ;
5.  $x_{i+1} = 1$  младших разрядов  $ax_i$ ; вернуться к пункту 4.

### Смешанный метод:

Преимущество данной процедуры в том, что можно так подобрать  $a$  и  $s$ , что эта формула определит последовательность, пробегающую все целые значения от 0 до  $m-1$ . Т.е. если выполняются условия теоремы 1, то можно получить ПСП с периодом  $=2^l$ .

С вычислительной точки зрения смешанный метод сложнее на одну операцию сложения мультипликативного метода. Однако свобода выбора параметра  $s$  открывает дополнительные возможности уменьшения сериальной автокорреляции.

Общие рекомендации по выбору параметров сводятся к следующему:

1. множитель  $a$  не должен быть близок к простому рациональному кратному модуля  $m$ , в противном случае возникает сериальная корреляция пар чисел;
2. множитель  $a$  не должен быть близок к простому рациональному кратному квадратного корня модуля  $m$ ; эта близость приведет к сериальной корреляции троек чисел;
3. не следует выбирать множитель  $a$  так, чтобы он содержал мало единиц в двоичном представлении;
4. множитель  $a$  должен быть достаточно велик;
5. особенно внимательно надо относиться к выбору множителя  $a$  при реализации генератора на ЭВМ с малой длиной слова; для того, чтобы обеспечить хорошие статистические характеристики генератора, в этом случае может понадобиться представление чисел с двойной точностью.

Период линейной конгруэнтной последовательности чрезвычайно велик. Обычно, если  $m$  приближается к длине машинного слова, то период  $\approx 10^9$  и больше.

Так как генератор «белого шума» является базовым генератором при решении разнообразных задач, связанных с генерированием случайных величин, процессов и последовательностей с заданными статистическими характеристиками проведем его исследование.

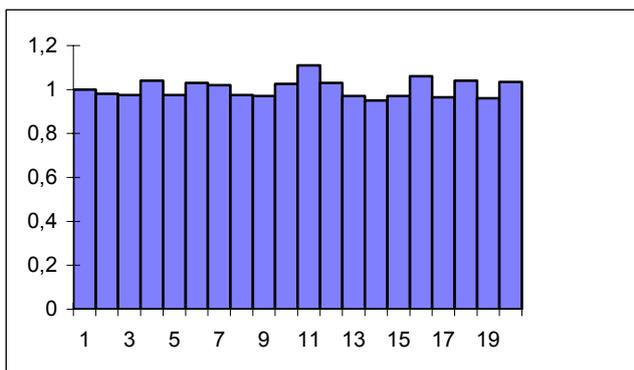


Рисунок 2.1. Гистограмма «белого» шума

На рис 2.1. представлена гистограмма генератора «белого шума» с равномерным законом распределения в диапазоне  $[0,1]$ , построенная для  $N=10000$ .

Результаты обработки данных и параметры закона распределения представлены в таблице 2.2. Вычисленное значение  $\chi^2$  соответствует достоверности  $P=0,6$ .

## Результаты экспериментальных исследований генератора «белого» шума

Таблица 2.2.

$\Delta$	$x_{\min}$	$x_{\max}$	$m_x$	$D_x$	a	b	$\chi^2$
0,05	0,00002	0,9999	0,4999	0,0834	-0,0003	1,003	15,66

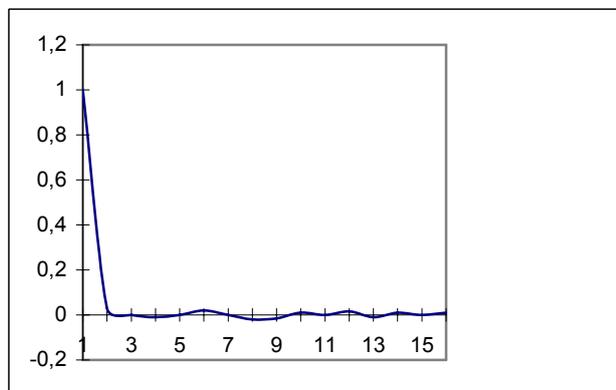


Рис. 2.2. Корреляционная функция «белого шума»

Нормированная корреляционная функция генератора «белого» шума представлена на рис. 2.2.

Результаты исследования показывают неидеальность генератора «белого шума». Однако, как показывает практика, точностные характеристики генератора являются достаточными при решении разнообразных задач моделирования входных воздействий [62].

## 2.2. Моделирование ПСП с заданным законом распределения

Для генерирования ПСП с заданным законом распределения (основные виды моделей приведены в приложении П1) применяются различные методы [11, 26, 47, 62]:

- метод нелинейного преобразования (обратной функции);
- приближенный метод (метод кусочно-линейной аппроксимации закона распределения);
- метод исключения (метод Неймана) и т.д.

Рассмотрим более подробно первые два.

### 2.2.1. Метод обратной функции

Для решения задачи моделирования ПСП с заданным законом распределения случайный процесс подвергается нелинейному преобразованию. Теоретической базой для определения вида и характеристик нелинейной функции является теория функций случайного аргумента [40].

Допустим, случайная величина  $X$  имеет плотность распределения вероятности  $f_x(x)$ , а необходимо получить выходную величину  $Y$  с плотностью распределения вероятностей  $f_y(y)$ . Таким образом, мы должны определить вид нелинейной функции преобразования  $y=g(x)$ .

Известно, что

$$f_x(x)dx = f_y(y)dy. \quad (2.4)$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f_y(y)}{f_x(x)}. \quad (2.5)$$

Допустим, что обратная функция преобразования

$$x = t(y). \quad (2.6)$$

Тогда

$$t'(y) = \frac{f_y(y)}{f_x(x)}. \quad (2.7)$$

Если в качестве входной ПСП выбрать «белый шум» с  $f_x(x) = 1$ , то  $x = t(y) = F_y(y)$ . (2.8)

Отсюда можно определить вид нелинейной функции преобразования  $y = g(x) = F_y^{-1}(x)$ . (2.9)

Графическая интерпретация метода инверсного преобразования представлена на рис. 2.3.

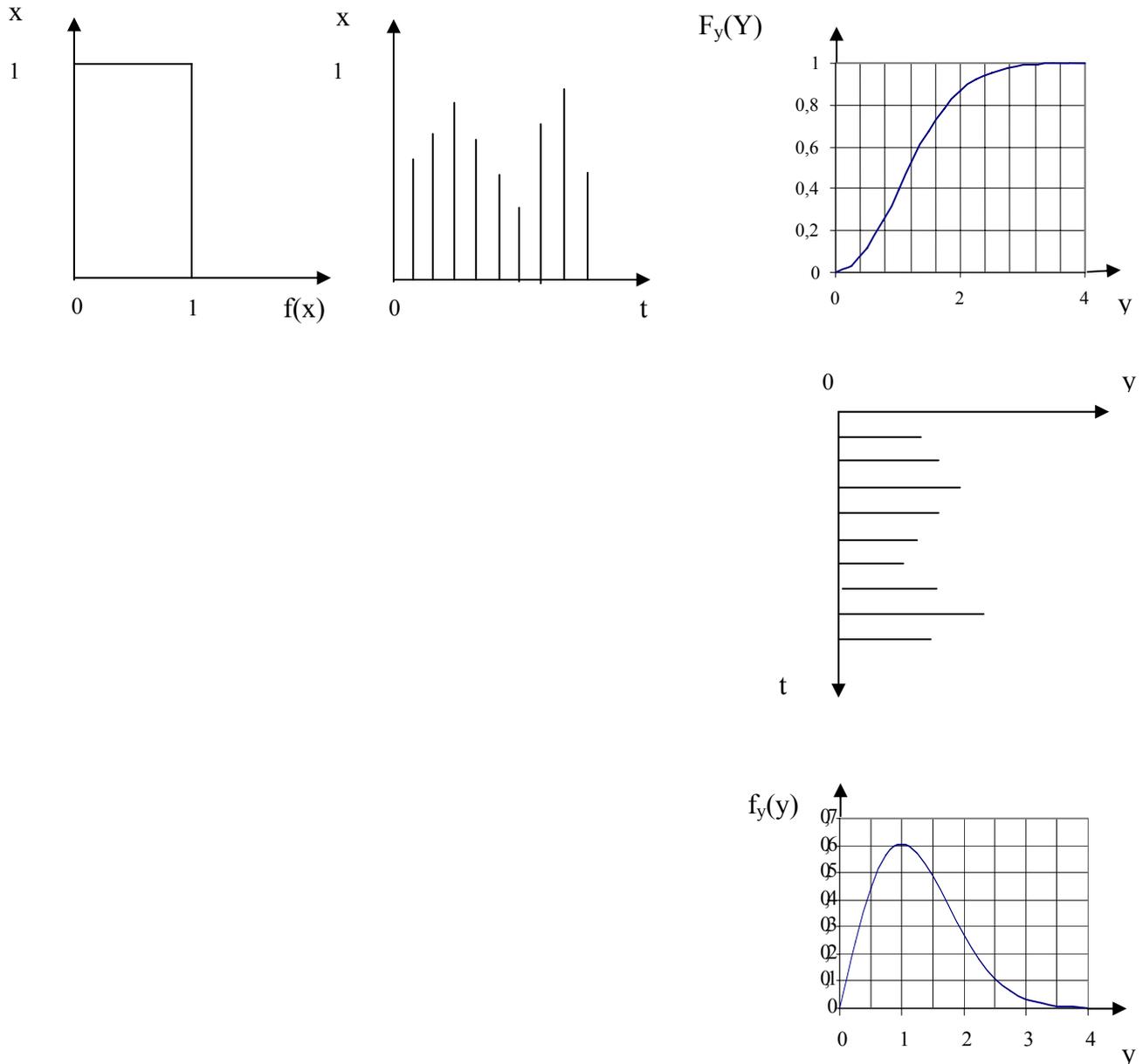


Рисунок 2.3. Моделирование ПСП с заданным видом закона распределения вероятностей

Обычно можно найти аналитическое решение  $F_y^{-1}(x)$  только для ограниченно-го числа случаев. Примеры интегральных функций распределения и обратных им функций приведены в приложении П.3.

### 2.2.2. Приближенный метод моделирования

Для большинства случаев интегральную функцию нельзя найти аналитически и тогда применяют приближенный метод моделирования, который основан на использовании ПСП с равномерным законом распределения, кусочно-линейной интерполяции функции распределения и решении задачи обратной интерполяции.

При кусочно-линейной интерполяции функцию распределения представим в виде:

$$F_y(y_i) = \sum_{l=1}^L \left\{ F_y(y_{l-1}) + \frac{y_i - y_{l-1}}{y_l - y_{l-1}} [F_y(y_l) - F_y(y_{l-1})] \right\} \mathbb{1}(y_{l-1} \leq y_i < y_l), \quad (2.10)$$

где  $i=1,2,\dots,N$ .

Отсюда найдем обратную функцию:

$$y_i = \sum_{l=1}^L \left[ y_{l-1} + \frac{F_y(y_i) - F_y(y_{l-1})}{F_y(y_l) - F_y(y_{l-1})} (y_l - y_{l-1}) \right] \mathbb{1}[F_y(y_{l-1}) \leq F_y(y_i) < F_y(y_l)]. \quad (2.11)$$

С учётом того, что при генерировании ПСП  $x_l = F_y(y_l)$  получим,

$$y_i = \sum_{l=1}^L \left[ y_{l-1} + \frac{x_i - x_{l-1}}{x_l - x_{l-1}} (y_l - y_{l-1}) \right] \mathbb{1}(x_{l-1} \leq x_i < x_l). \quad (2.12)$$

Так как координаты узловых точек  $F(y_l)$  рассчитываются заранее, окончательно получим:

$$y_i = \sum_{l=1}^L \left[ y_{l-1} + (x_i - x_{l-1}) A_l \right] \mathbb{1}(x_{l-1} \leq x_i < x_l), \quad (2.13)$$

$$\text{где } A_l = \frac{y_l - y_{l-1}}{x_l - x_{l-1}}.$$

Отсюда следует, что необходимо, задавшись допустимой погрешностью восстановления  $F_y(y)$   $\delta$ , видом интерполяции, определить узловые точки  $\{y_l - F_y(y_l)\}$  и  $A_l$ . Затем, воспользовавшись формулой (2.11), сгенерировать ПСП с требуемым законом распределения.

Для удобства дальнейших расчётов в приложении П.4. приведены  $F_y(y)$ , для типовых законов распределения, представленные в виде рядов. Такое представление позволяет определить значения  $F_y(y)$  с заданной погрешностью и уменьшить время решения задачи.

Выбор допустимой погрешности аппроксимации функции распределения  $F_y(y)$  определяется в зависимости от  $N$  - числа генерируемых чисел ПСП, допустимого уровня значимости  $P$ , выбранного критерия и его значения.

Наиболее целесообразно в этом случае применить критерий Колмогорова [12], связанный с погрешностью восстановления:

$$\delta = \max \left| F_y^{(N)}(y) - F_y(y) \right|, \quad (2.14)$$

где  $F_y^{(N)}(y)$  - функция распределения, определяемая экспериментально на выборке размером  $N$ ;

$F_y(y)$ - теоретическая функция распределения.

Для определенной погрешности восстановления  $\delta$  и объема выборки  $N$  определяется

$$\lambda = \delta \sqrt{N}. \quad (2.15)$$

Гипотеза принимается, если для заданного уровня значимости  $P$

$$\lambda < \lambda_{1-P}. \quad (2.16)$$

В приложении П.7. приведены результаты расчета  $\lambda$  для различных  $\delta$  и  $N$ .

Задавшись допустимым уровнем значимости, например  $P=0,3$ , определим  $\lambda=0,97$ . Гипотеза принимается, если  $\lambda < 0,97$ . Так, если необходимо сгенерировать  $N=5000$  чисел, допустимая погрешность восстановления  $\delta=0,01$ .

Для расчета узловых точек функции распределения  $F_Y(Y_i)$  необходимо выбрать вид интерполяции, определить диапазон изменения  $y \in [y_{\min}, y_{\max}]$  при заданной доверительной вероятности, интервал дискретизации аргумента  $\Delta y$  и число узловых точек  $M$ :

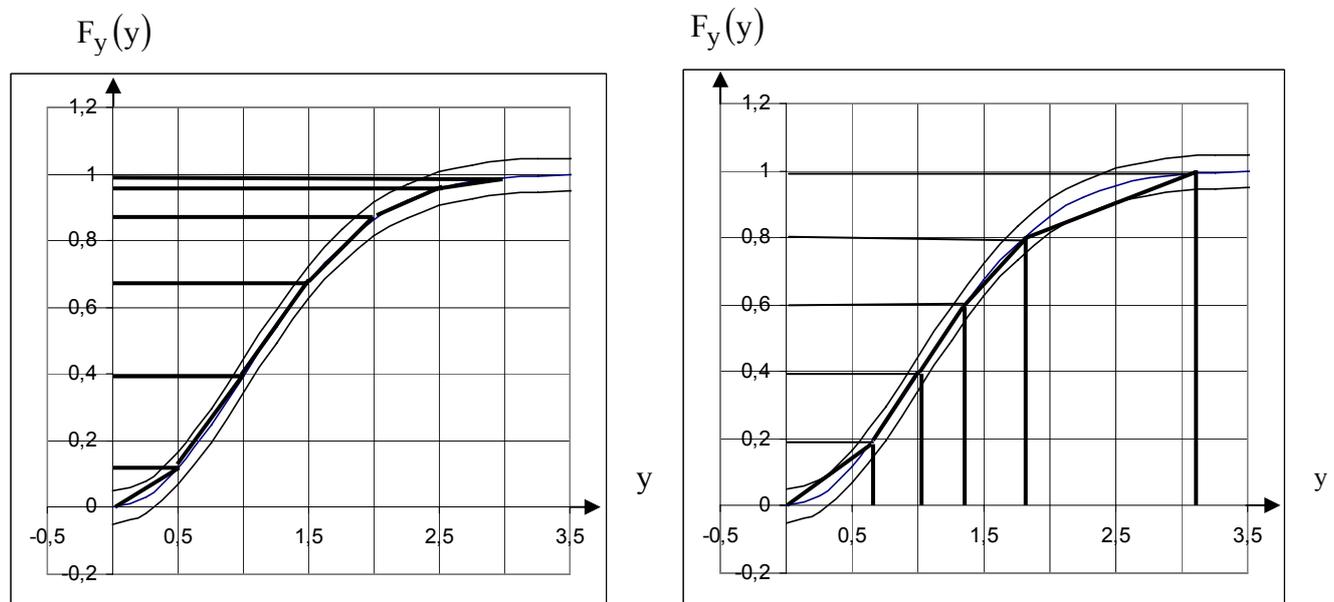
$$M = \text{ent} \left[ \frac{y_{\max} - y_{\min}}{\Delta y} \right] + 1. \quad (2.17)$$

В случае применения линейной интерполяции

$$\Delta y = \sqrt{\frac{8\delta}{|F_Y''(y)|_{\max}}}. \quad (2.18)$$

В приложении П.5 приведены результаты определения  $|F_Y''(y)|_{\max}$  и  $[y_{\min}, y_{\max}]$ .

При генерировании ПСП, т.е. решении задачи обратной интерполяции, возможны три варианта:



а)  $\Delta y = \text{const}$

б)  $\Delta x = \text{const}$

Рисунок 2.4. Формирование параметров кусочно-линейной модели

1.  $\Delta y_1 = \text{const}, \Delta x_1 = \text{var}$  (см. рис.2.4. а));
2.  $\Delta y_1 = \text{var}, \Delta x_1 = \text{const}$  (см. рис.2.4. б));
3.  $\Delta y_1 = \text{var}, \Delta x_1 = \text{var}$  (см. рис.2.5).

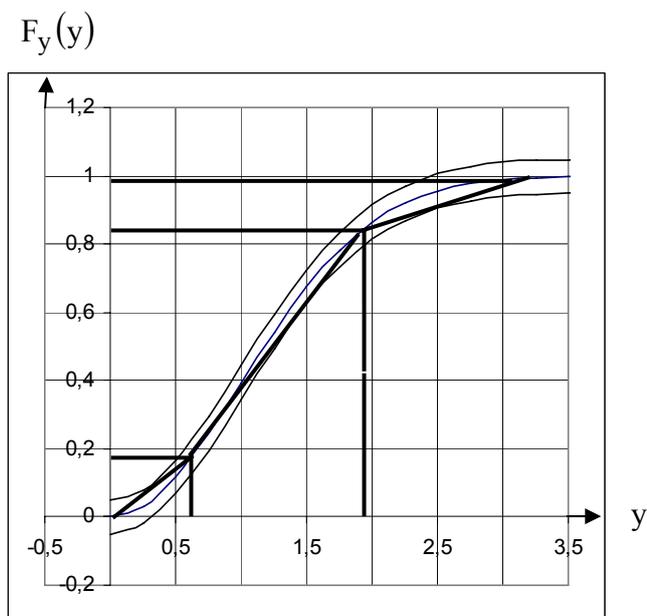


Рисунок 2.5. Формирование параметров кусочно-линейной модели  
 $\Delta y_1 = \text{var}, \Delta x_1 = \text{var}$

В первом варианте упрощается процедура нахождения узловых точек (интервал дискретизации определяется в соответствии с выражением (2.18)), но больше время генерирования, т.к. необходимо определять участок интерполяции. Во втором - сложнее процедура определения узловых точек, но меньше время генерирования, т.к. упрощается процедура нахождения участка интерполяции. Заметим, что решение третьей задачи аналогично решению задачи адаптивно-временной дискретизации сигнала при выбранной модели восстановления [4]. В этом случае интервал  $\Delta u_1$  определяется в соответствии с выражением:

$$\Delta u_1 = \sqrt{\frac{8\delta}{[F_y''(y)]}}. \quad (2.19)$$

Достоинствами данного метода являются:

- возможность применения его для моделирования случайных величин со сколь угодно сложным законом распределения;
- значительно меньшее время генерирования ПСП по сравнению с методом инверсного преобразования за счёт уменьшения количества интервалов.

Недостаток - необходимость проведения некоторой подготовительной работы перед непосредственным применением процедуры генерирования ПСП (разбиение области распределения  $y$  на интервалы).

В качестве примера рассмотрим генерирование ПСП, имеющей распределение модуля многомерного вектора:

$$F_y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{y^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & y > 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

где

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{y^2}{2\sigma^2}\right) = \int_0^{\frac{y^2}{2\sigma^2}} e^{-t} t^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} dt. \quad (2.21)$$

Для генерирования ПСП необходимо задать параметры распределения. Пусть  $\sigma=1, n=4$ . Тогда выражение (2.20) примет вид:

$$F(y) = \int_0^{y^2/2} e^{-t} t dt \quad (2.22)$$

Результаты расчёта координат узловых точек для приведенной погрешности интерполяции 1% приведены в таблице 2.3.

Координаты узловых точек.

Таблица 2.3

y	0	0,7	1,3	2,5	3,1	3,9	4,2	4,3
F(y)	0	0,026	0,207	0,819	0,952	0,996	0,998	0,999

Из таблицы 2.3 видно, что кривая распределения имеет восемь узлов и семь линейных участков.

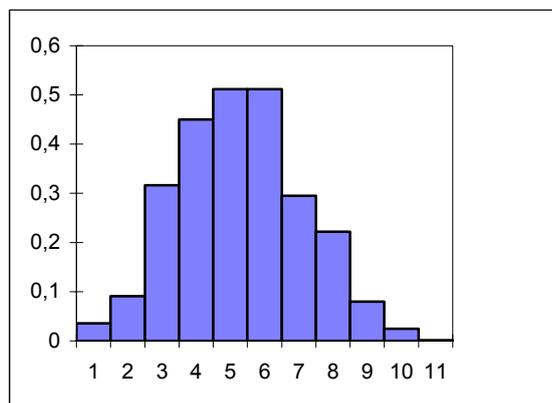


Рисунок 2.5. Гистограмма ПСП

Гистограмма сгенерированной ПСП приведена на рис. 2.5.

Для проверки достоверности результатов генерирования использовался критерий Пирсона [10], а сами результаты представлены в таблице 2.4.

Результаты расчётов.

Таблица 2.4

J	p <sub>i</sub>	p <sub>i</sub> <sup>*</sup>	p <sub>i</sub> <sup>*</sup> / h	(p <sub>i</sub> <sup>*</sup> - p <sub>i</sub> ) / p <sub>i</sub>
(0 - 0,4)	0,00316	0,015	0,036	0,0114335
(0,4 - 0,8)	0,039	0,036	0,091	0,0001030
(0,8 - 1,2)	0,121	0,126	0,316	0,0002900
(1,2 - 1,6)	0,215	0,181	0,450	0,0056300
(1,6 - 2,0)	0,217	0,205	0,512	0,0007500
(2,0 - 2,4)	0,192	0,205	0,512	0,0008920
(2,4 - 2,8)	0,115	0,118	0,295	0,0000900
(2,8 - 3,2)	0,061	0,088	0,222	0,0012608
(3,2 - 3,6)	0,026	0,032	0,080	0,0010600
(3,6 - 4,0)	0,008	0,010	0,025	0,0003000
(4,0 - 4,4)	0,001	0,0009	0,0013	0,0020000

Расчитанное значение  $\chi^2 = 1,54$ , число степеней свободы  $k=11-3 = 8$ . В приложении П.6 при выбранном уровне значимости  $\alpha = 0,05$  находим  $\chi_{k,\alpha}^2 = 15,51$ . Так как  $\chi^2 < \chi_{k,\alpha}^2$ , сгенерированная ПСП согласуется с требуемым законом распределения.

Для сокращения времени генерирования увеличим погрешность интерполяции до тех пор, пока критерий согласия  $\chi^2$  перестанет выполняться.

Численные значения узлов интерполяции для приведенной погрешности 2% представлены в таблице 2.5.

Узлы интерполяции.

Таблица 2.5.

Y	0	0,98	2,55	3,75	4,3
F(y)	0	0,080	0,850	0,985	0,999

Проведя аналогичные расчёты, получим, что  $\chi^2 = 6,55$ , и условие  $\chi^2 < \chi_{k,\alpha}^2$  выполняется.

Результаты расчёта  $\chi^2 = 12,9$  для приведенной погрешности 3% (узлы функции распределения представлены в таблице 2.6), показывают, что условие  $\chi^2 < \chi_{k,\alpha}^2$  выполняется.

Узлы интерполяции.

Таблица 2.6.

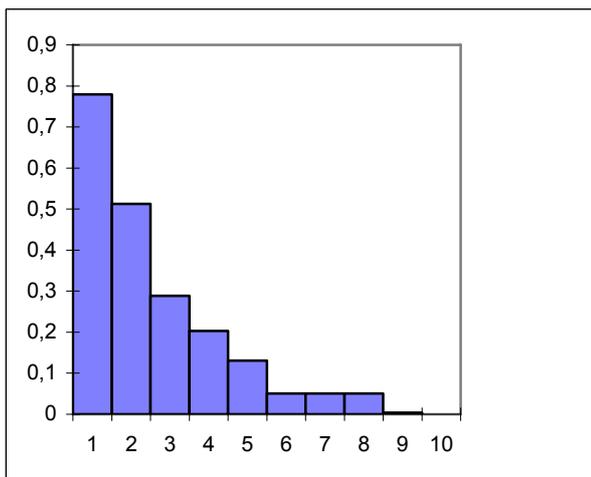
Y	0	1,1	3,0	4,3
F(y)	0	0,12	0,94	0,999

При дальнейшем увеличении приведенной погрешности интерполяции критерий согласия нарушается.

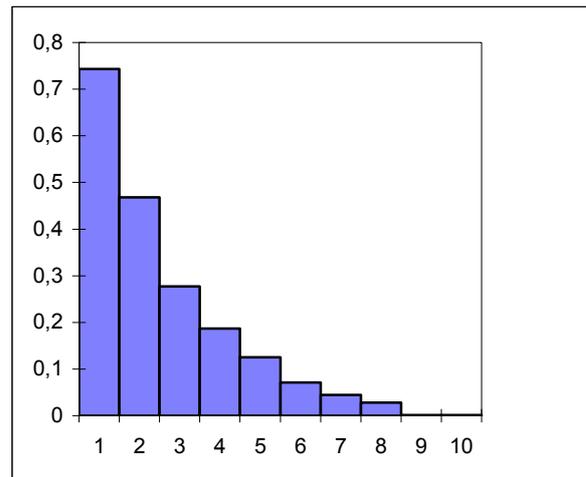
Проведем исследование генераторов ПСП, распределенных по экспоненциальному закону. В отличие от предыдущего примера, в этом случае возможно применения метода инверсного преобразования (см. приложение П.3). Результаты сравним с приближенными методами генерирования.

На рис. 2.6 а) приведены результаты моделирования ПСП, распределенной по экспоненциальному закону с использованием инверсной функции. В этом случае  $\chi^2 = 7,579$ ,  $r = 7$ ,  $P = 0,4$ .

На рис. 2.6 б) приведены результаты моделирования ПСП, распределенной по экспоненциальному закону с использованием приближенного метода генерирования ПСП  $\Delta x = \text{const}$ . Для рассматриваемого примера  $\chi^2 = 7,054$ ,  $r = 7$ ,  $P = 0,4$ .



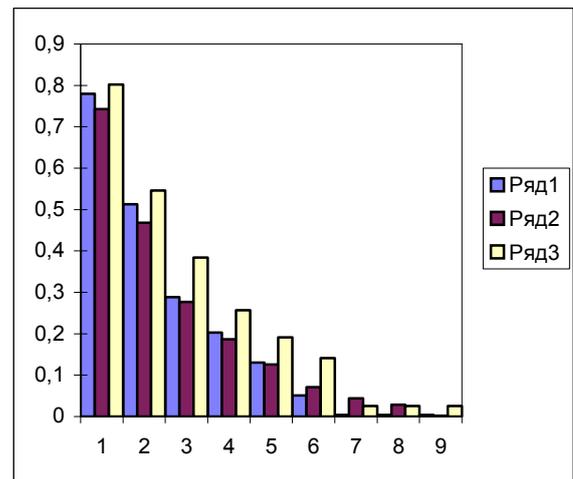
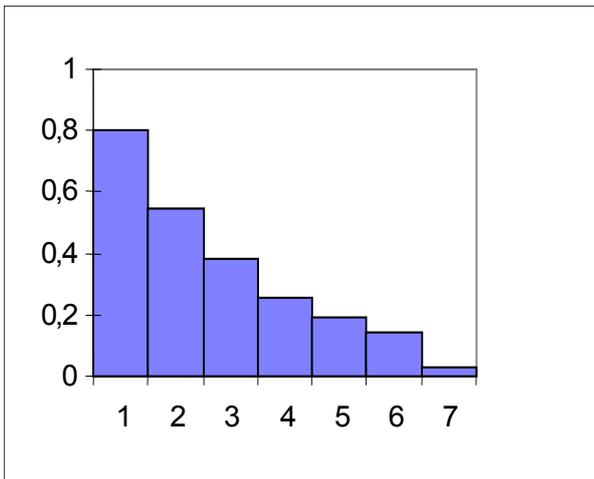
а)



б)  $\Delta x = \text{const}$

Рисунок 2.6. Гистограммы экспоненциального распределения

На рис. 2.7 а) приведены результаты моделирования ПСП, распределенной по экспоненциальному закону с использованием приближенного метода генерирования  $\Delta y = \text{const}$ . Для рассматриваемого примера  $\chi^2 = 7,33$ ,  $r = 5$ ,  $P = 0,2$ .



а)  $\Delta y = \text{const}$  б)  
Рисунок 2.7. Гистограммы экспоненциального распределения

На рис. 2.7 б) приведены все три гистограммы, полученные в ходе генерирования с использованием различных методов ПСП, распределенных по экспоненциальному закону. Ряд 1- инверсный метод преобразования, ряд 2 -  $\Delta x = \text{const}$  , ряд 3 -  $\Delta y = \text{const}$ .

Таким образом, результаты экспериментальных исследований различных генераторов экспоненциального распределения подтверждают возможность применения приближенного метода генерирования ПСП.

Проведенные исследования для других законов распределения показали, что для обеспечения требуемого качества генерирования ПСП (в смысле критерия Пирсона) достаточно осуществить интерполяцию функции распределения с приведенной погрешностью 1%. В этом случае количество узлов интерполяции для большинства законов меньше 10, что значительно уменьшает общее время моделирования.

Следует отметить, что в ряде случаев при генерировании ПСП более целесообразно применять более простые методы. Так, например, при генерировании ПСП, распределенной по нормальному закону, можно воспользоваться теоремой Ляпунова [12].

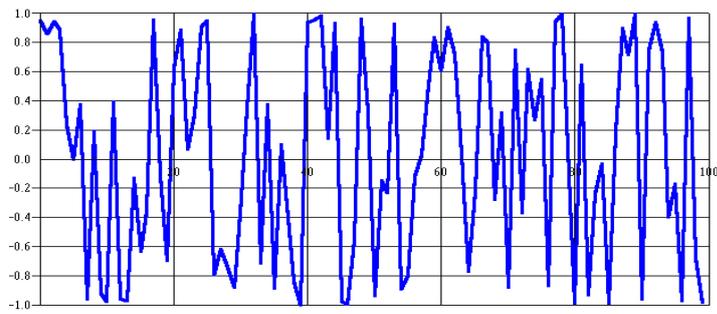
Практика показала, что ПСП можно определить в виде

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - n/2}{(n/2)^{1/2}}, \quad (2.23)$$

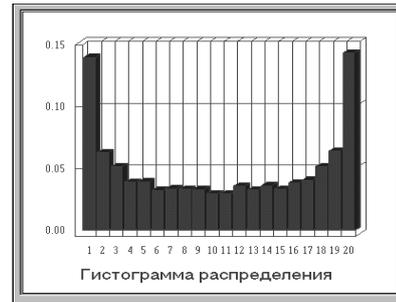
где  $x_i$  - случайная величина, распределенная по равномерному закону, а  $n$  находится в диапазоне  $6 \leq n \leq 12$ .

Для получения временного ряда из сгенерированной ПСП необходимо задать интервал дискретизации  $\Delta t_0$ . Так как отсчеты ПСП некоррелированы (см. рис. 2.2), интервал дискретизации может быть любым. Его величина устанавливается исследователем самостоятельно в зависимости от характера решаемой задачи.

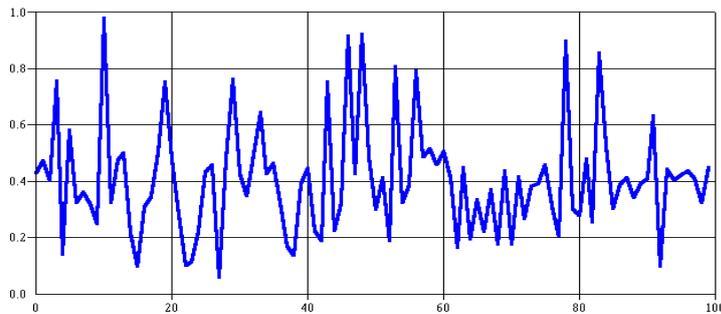
На рис. 2.9 приведены примеры реализаций ПСП с заданными законами распределения, полученные с помощью автоматизированной системы [2] и соответствующие им гистограммы. Забегая вперед, отметим, что с помощью этой системы возможно определение аналитических выражений законов распределения сгенерированной ПСП и проверка качества генерирования с помощью критериев согласия.



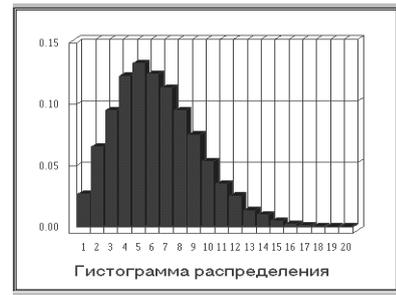
Процесс, распределенный по закону арксинуса



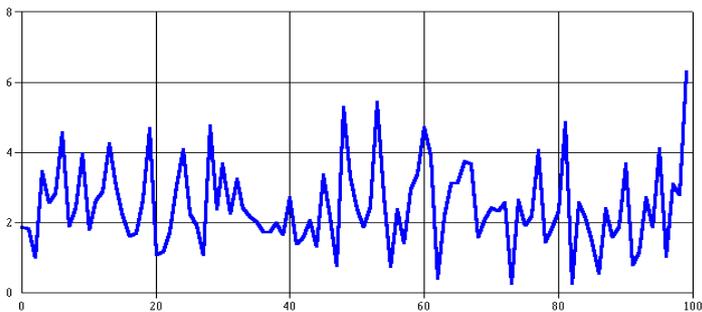
Гистограмма распределения



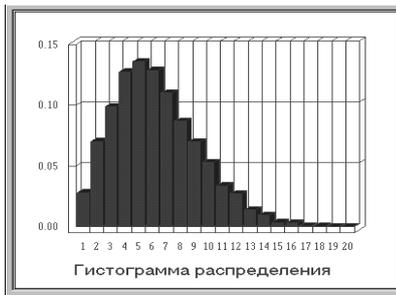
Процесс, распределенный по закону Вейбулла



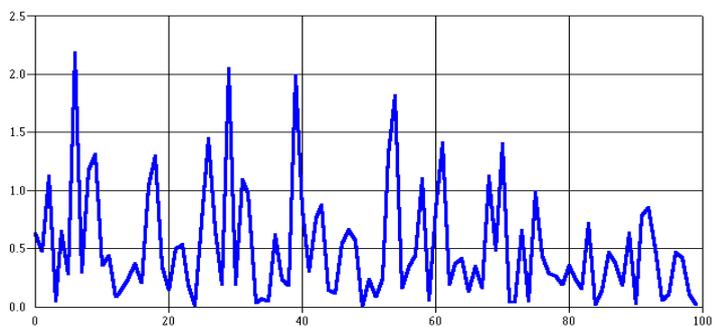
Гистограмма распределения



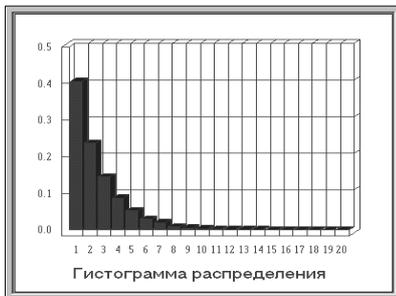
Процесс, распределенный по закону Рэля



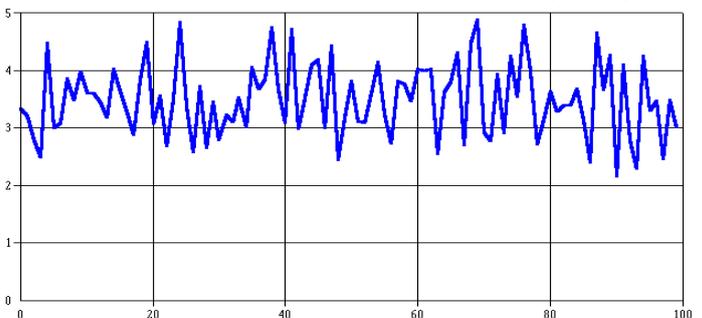
Гистограмма распределения



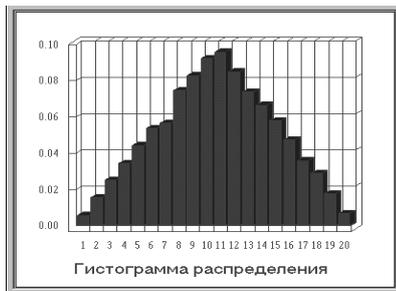
Процесс, распределенный по экспоненциальному закону



Гистограмма распределения



Процесс, распределенный по закону Симпсона



Гистограмма распределения

Рисунок 2. 8. ПСП с заданным видом закона распределения

### 2.3. Моделирование потоков событий с заданными свойствами

Приведенные основные соображения, рассмотренные в подразделе 2.2, позволяют легко генерировать на ЭВМ реализации различных однородных потоков событий. Формально моделирование подобных потоков мало чем отличается от моделирования случайных величин.

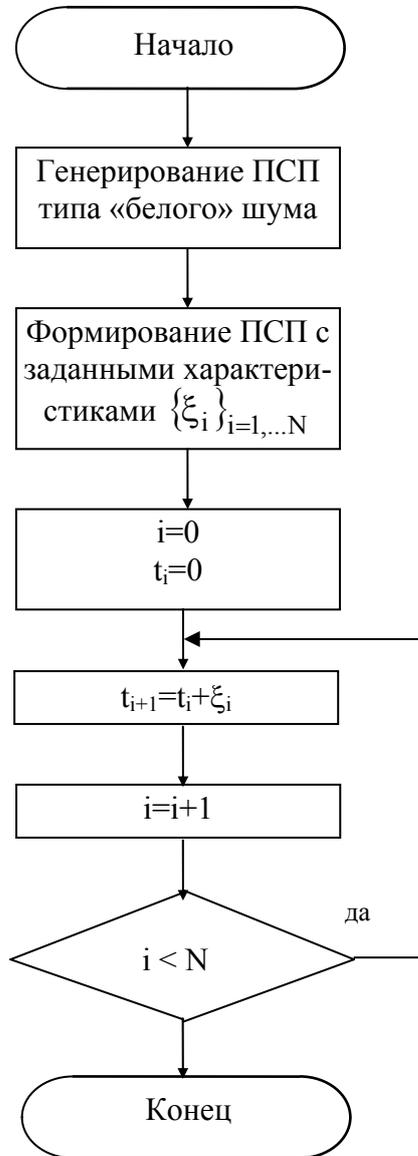


Рисунок 2.9. Блок-схема моделирования потока событий

Для этого необходимо сгенерировать случайные величины  $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,N}$  с законом распределения  $f_\xi(\xi)$ . Суммирование получаемых реализаций позволит определить моменты наступления событий в системе (см. рис. 2.9):

$$t_{i+1} = t_i + \xi_i \quad (2.24)$$

Отметим, что подобные потоки относятся к классу потоков с аддитивной дискретизацией. В качестве законов распределения  $f_\xi(\xi)$  в зависимости от решаемой задачи могут использоваться самые различные законы:

- экспоненциальный;
- распределение Эрланга;
- равномерное распределение;
- треугольное распределение 1-го и 2-го типов и т.п.

Для простейшего потока событий или потока Пуассона, широко применяемого на практике, число событий  $k$ , наступивших на интервале времени  $[0, t]$  - дискретная случайная величина, определяемая законом распределения Пуассона:

$$P[k] = \frac{a^k}{k!} e^{-a} : k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.25)$$

с параметром  $a = \lambda t$ ,  $\lambda$  - интенсивность или параметр потока.

Следует, однако, помнить, что при таком способе моделирования потока разыгрывается лишь общее число событий на интервале  $[0, t]$ , а не каждое отдельное событие.

Формула (2.25) может быть распространена и на случай интервала времени  $[t_1, t_2]$

$$P[k] = \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \quad (2.26)$$

При этом  $k$  - число событий, наступивших на интервале времени  $[t_1, t_2]$ .

Известно, что закон распределения интервалов простейшего потока экспоненциальный [15]

$$f_{\xi}(\xi) = \lambda e^{-\lambda \xi}, \lambda > 0, \xi > 0, \quad (2.27)$$

что дает более простой способ генерирования простейшего потока, - формирование на ЭВМ дискретной случайной величины с законом распределения (2.27).

Следует заметить, что нередко моделирование случайных величин, определяющих поток событий в системе, проводится с использованием специальных методов. Так, например, моделирование случайных величин, распределенных по нормальному закону, законам Симпсона, более целесообразно проводить путем суммирования случайных величин, распределенных по равномерному закону, а для закона Эрланга - суммированием случайных величин, распределенных по экспоненциальному

закону. Рассмотрим особенности генерирования типовых рекуррентных потоков, модели которых представлены в подразделе 1.8.

• Значение  $j+1$ -ого отсчёта регулярного потока с  $p$ -преобразованием (периодическая дискретизация со случайными пропусками наблюдений) определяется выражением:

$$t_j = \Delta t_0 \sum_{i=1}^j Y_i, \quad (2.28)$$

где  $\Delta t_0$  - интервал принудительной дискретизации;

$Y$  - случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром  $p$  [13]:

$$P(Y = m) = pq^{m-1}, m=1, 2, \quad (2.29)$$

Выражение для генерирования удобнее представить в следующем виде

$$t_{j+1} = t_j + k\Delta t_0, \quad (2.30)$$

где  $k$  - случайная величина (см. рис. 2.10).

• Значение  $i+1$ -ого отсчёта регулярного потока с «дрожанием» равно:

$$t_{i+1} = i\Delta t_0 + \xi_i. \quad (2.30)$$

где  $\xi_i$  - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей  $f_{\xi}(\xi)$ , каждая из которых расположе-

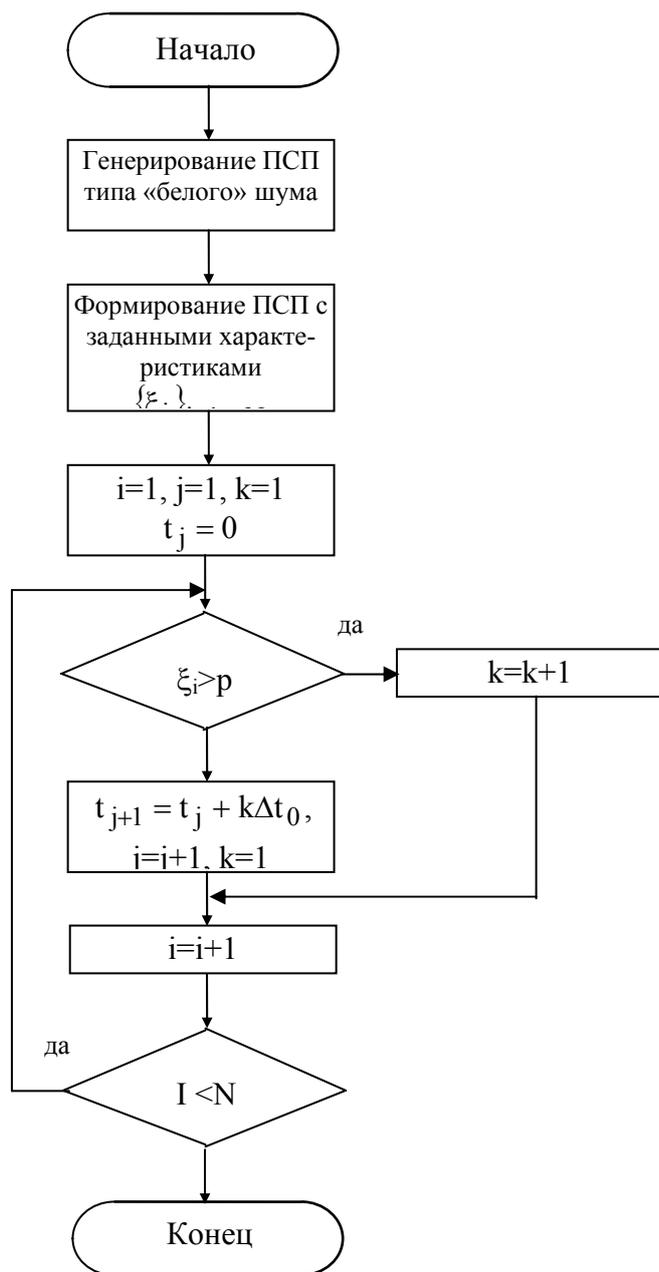


Рисунок 2.10. Блок-схема моделирования регулярного потока событий с  $p$ -преобразованием

на в диапазоне  $\left(-\frac{\Delta t_0}{2}, \frac{\Delta t_0}{2}\right)$  (см. рис. 2.11).

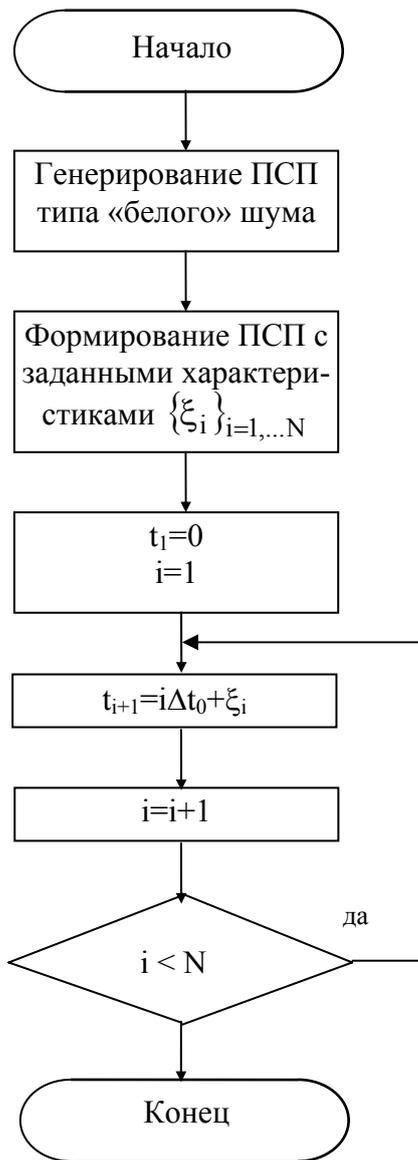


Рисунок 2.11. Блок-схема моделирования регулярного потока с «дрожанием»

Следует подчеркнуть, что при моделировании потоков с аддитивной дискретизацией на ЭВМ всегда будет наблюдаться процесс «дрожания», обусловленный принудительной дискретизацией интервалов между событиями потока (конечная разрядная сетка). Это обстоятельство, когда им нельзя пренебречь, необходимо учитывать.

Таким образом, применяя в различных сочетаниях разработанные алгоритмы моделирования базовых потоков, можно генерировать более сложные случайные потоки (см. рис. 2.12).

Рассмотренные модели случайных потоков, естественно, не являются исчерпывающими. Часто при решении прикладных задач возникает необходимость в применении альтернирующих потоков, блок-схема программы генерирования которых приведена на рис. 2.13. В этом случае выражения для определения времени отсчёта в потоке определяются следующими выражениями:

Базовые модели рекуррентных потоков событий позволяют путём их сочетания получить более сложные модели потоков:

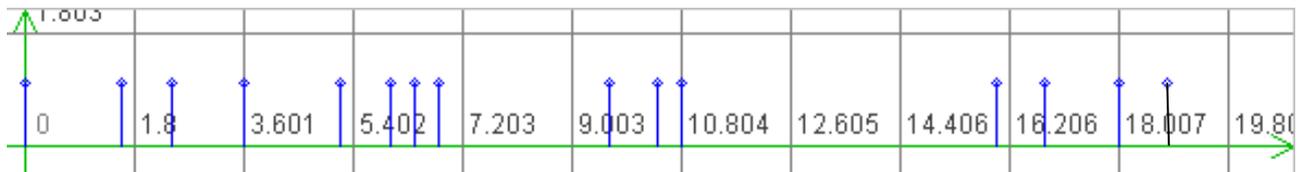
- аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений, являющейся обобщением модели аддитивной случайной дискретизации, интервалы которой  $\xi_i$  с плотностью распределения вероятностей  $f_\xi(\xi)$  разряжены  $p$ -преобразованием;

- аддитивной случайной дискретизации с «дрожанием», являющейся обобщением модели аддитивной случайной дискретизации, интервалы которой  $\xi_i$  с плотностью распределения вероятностей  $f_\xi(\xi)$  подвержены «дрожанию»;

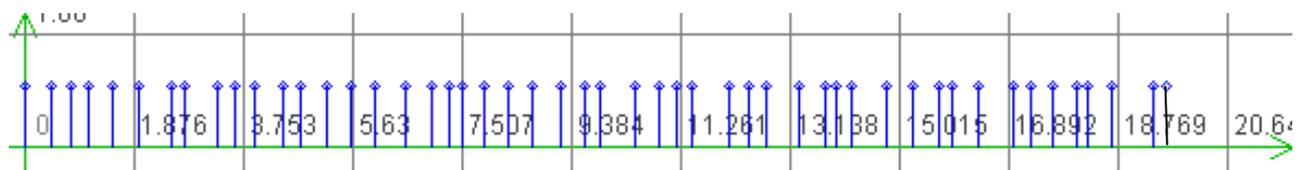
- аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений и «дрожанием», являющейся обобщением модели аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений, интервалы которой  $\xi_i$  с плотностью распределения вероятностей  $f_\xi(\xi)$  разряжены  $p$ -преобразованием и подвержены «дрожанию»;

- периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений, являющейся обобщением модели периодической дискретизации с «дрожанием», интервалы которой  $\Delta t_i = \Delta t_0 + \xi_i - \xi_{i-1}$  с плотностью распределения вероятностей  $f_{\Delta t}(\Delta t)$  разряжены  $p$ -преобразованием и т.д.

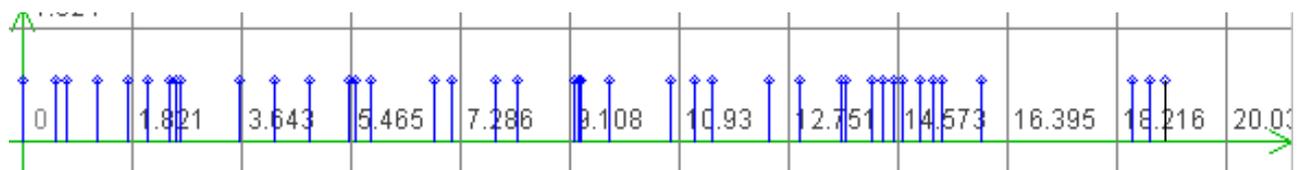
$$\begin{cases} t_1 = 0; \\ t_2 = t_1 + \xi_1^{(1)}; \\ t_3 = t_2 + \xi_1^{(2)}; \\ t_4 = t_3 + \xi_2^{(1)}; \\ \dots \end{cases} \quad (2.31)$$



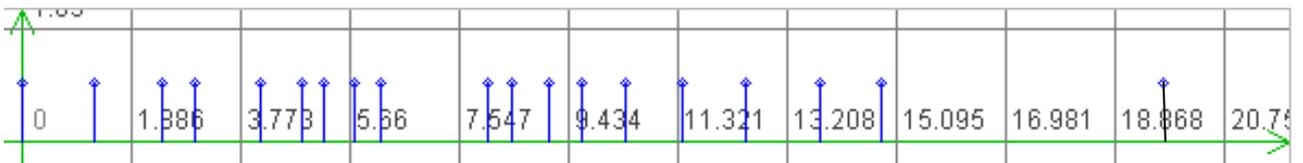
а) периодический (регулярный) поток с р-преобразованием –  $p=0,4$



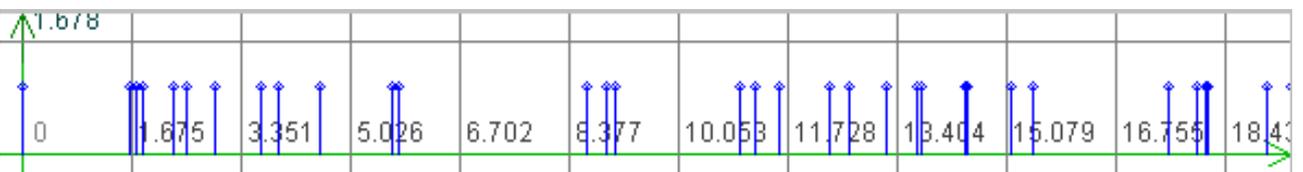
б) периодический поток с «дрожанием»



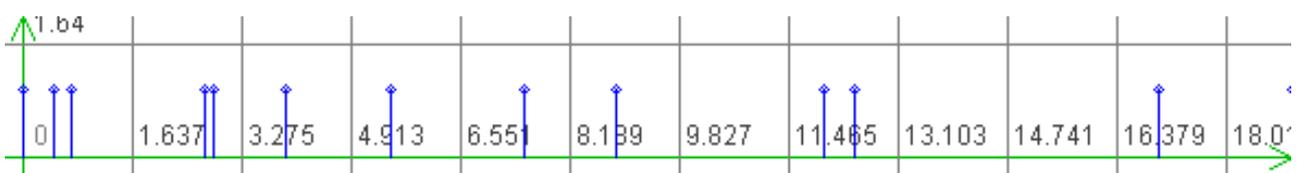
в) поток с аддитивной случайной дискретизацией -  $\lambda=2$



г) периодический поток с «дрожанием» и р-преобразованием –  $p=0,4$



д) поток с аддитивной случайной дискретизацией и р-преобразованием -  $\lambda=2, p=0,8$



е) поток с аддитивной случайной дискретизацией с «дрожанием» и р-преобразованием -  $\lambda=2, p=0,4$

Рисунок 2.12. Реализации случайных потоков событий

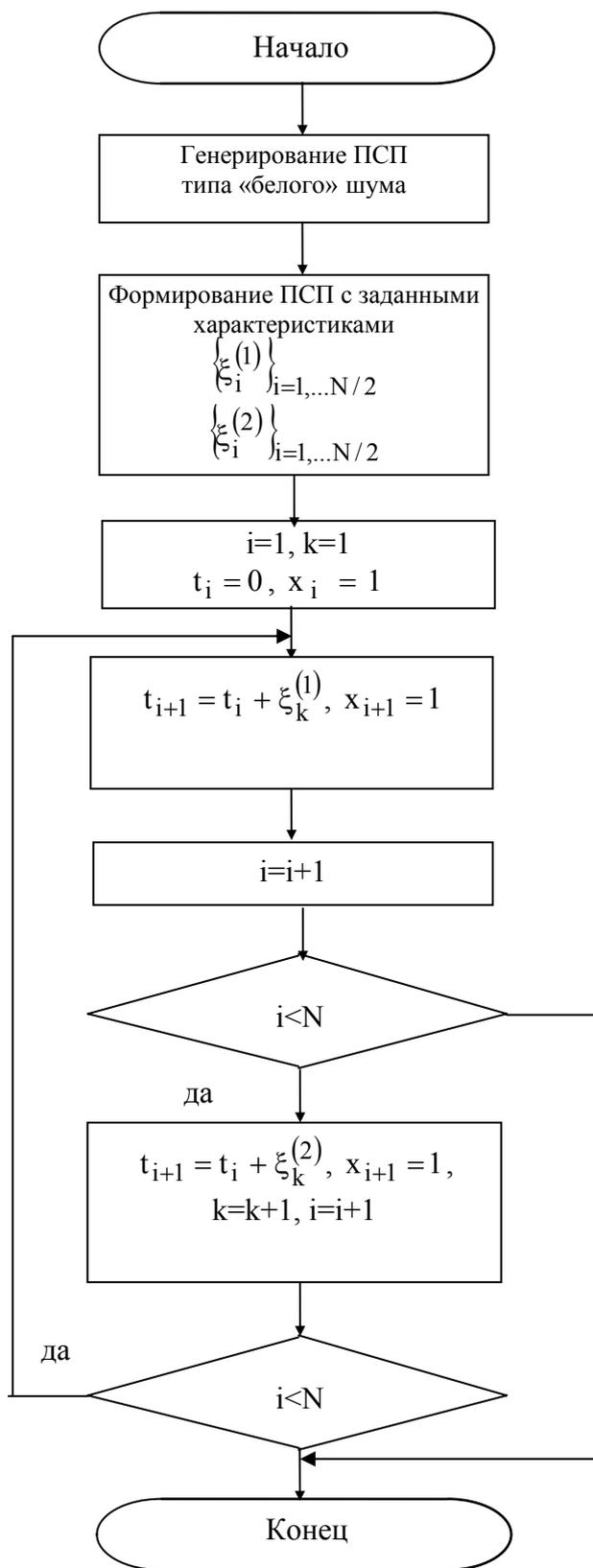


Рисунок 2.13. Блок-схема моделирования альтернирующего потока событий

Воспользовавшись базовыми моделями рекуррентных потоков событий, можно получить более сложные модели альтернирующих потоков:

- альтернирующий поток с пропусками наблюдений;
- альтернирующий поток с «дрожанием»;
- альтернирующий поток с пропусками наблюдений и «дрожанием».

Отметим, что случайные потоки применяются при генерировании неэквидистантных временных рядов (см. рис. 1.8). Все рассмотренные модели позволяют описать неэквидистантные временные ряды с непреднамеренной дискретизацией. В случае преднамеренной нерегулярной дискретизации: адаптивно-временной, спорадической, адаптивной коммутации, - характеристики модели случайного потока будут зависеть от характеристик процесса, критерия восстановления, вида модели и т.д. Эти вопросы будут рассмотрены в подразделе 3.8.

## 2.4. Проверка качества генерирования псевдослучайных последовательностей

Как правило, при решении важных задач методом имитационного моделирования исследователь проверяет качество генерирования псевдослучайной последовательности. Эта задача решается с использованием критериев согласия. Отличие применения этих критериев при оценке качества генерирования от классической задачи сглаживания статистических рядов заключается в том, что исследователь априори задаёт закон распределения и требуемые значения параметров псевдослучайной (сгенерированной) последовательности, а при решении задачи сглаживания необходимо решить задачу идентификации закона распределения.

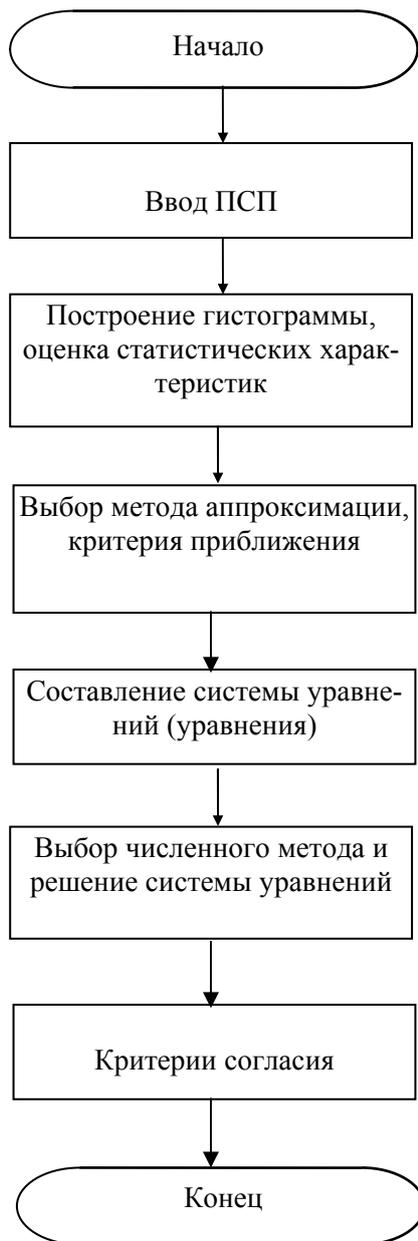


Рисунок 2.14. Блок-схема проверки качества генерирования ПСП

При оценке качества генерирования псевдослучайной последовательности в качестве теоретического закона распределения возможно использование:

1. заданного закона распределения с заданными параметрами;
2. заданного закона распределения с уточненными параметрами путём решения задачи аппроксимации закона распределения тем или иным способом.

Рассмотрим последовательность этапов решения задачи оценки качества генерирования применительно ко второму случаю, как более общему (см. рис. 2.14).

После ввода исходных данных первым шагом решения этой задачи является построение гистограммы наблюдаемого статистического ряда  $\{x_i\}_{i=1}^N$ . Для этого необходимо выполнить следующие этапы:

1. определить диапазон изменения статистического ряда  $X_{\min}-X_{\max}$ .
2. определить ширину дифференциального коридора:

$$\Delta x = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{M}, \quad (2.32)$$

где  $M$  - количество дифференциальных коридоров [12].

3. Определить частоту попадания анализируемой случайной величины в  $j$ -ый дифференциальный коридор:

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{ij}, \quad (2.33)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{ent}\left[\frac{x_i - x_{\min}}{\Delta x}\right] + 1 = j \wedge x_i = x_{\max}; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x_i = j \Delta x; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.34)$$

- индикатор состояния.

Следует отметить, что  $\delta_{i, j+1} = 1/2$ , если  $x_i = j \Delta x \wedge x_i \neq x_{\max}$ , т.е. в этом случае в  $j$  и  $j+1$  коридоры добавляется по  $1/2$ .

4. Если частота попадания в какой-либо  $k$ -ый дифференциальный коридор мала ( $p_j < 0,01 \div 0,02$ ), для уменьшения влияния случайности его объединяют с  $k+1$  коридором. Эта операция может быть применена неоднократно.

Исходным материалом для построения гистограммы является сгруппированный по дифференциальным коридорам статистический ряд, представленный, как правило, в виде таблицы (см. таблицу 2.7), где  $\bar{f}_j = f_j / \Delta x_j$ .

Статистический ряд

Таблица 2.7

$f_j$	0,099	0,1006	0,1003	0,0989	0,099	0,1067	0,0954	0,1008	0,0997	0,0996
$j \Delta x$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\bar{f}_j$	0,99	1,006	1,003	0,989	0,99	1,067	0,954	1,008	0,997	0,996

После построения гистограммы и оценки статистических характеристик решают задачу уточнения параметров распределения, используя тот или иной метод аппроксимации закона распределения [38].

Заключительным этапом решения задачи является проверка качества генерирования с использованием критериев согласия. Идея применения критериев согласия заключается в следующем. На основании данного статистического материала необходимо проверить гипотезу  $H$ , состоящую в том, что случайная величина  $X$  подчиняется заданному закону распределения. Введем случайную величину  $U$ , являющуюся мерой расхождения теоретического и статистического распределений. Закон распределения этой случайной величины  $f_u(u)$  зависит как от закона распределения случайной величины  $X$ , так и от числа опытов  $N$ . Если гипотеза  $H$  верна, то  $f_u(u)$  определяется законом распределения  $f_a(x)$  и числом опытов  $N$ .

Вычислим вероятность события  $P(u \leq U) = P_d$ . Если эта вероятность мала, то гипотезу следует отвергнуть как маловероятную, если значительна - экспериментальные данные не противоречат гипотезе  $H$ .

Выберем в качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим распределениями случайную величину

$$U = \sum_{j=1}^M c_j (f_j - p_j)^2, \quad (2.35)$$

где  $c_j$  – веса;

$p_j = F_a(x_{j+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_m) - F_a(x_j, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$  – теоретические вероятности, соответствующие  $\mathfrak{f}_j$ .

Коэффициенты  $c_j$  вводятся для учёта веса отклонений, относящихся к разным разрядам. Так отклонения могут быть малозначительными, если вероятность  $p_j$  велика, и наоборот.

К. Пирсон показал, что если положить  $c_j = N/p_j$ , то при большом  $N$   $f_u(u)$  не зависит от  $f_x(x)$  и  $N$ , а зависит только от числа разрядов  $M$ . Этот закон при увеличении  $N$  приближается к закону  $\chi^2$  с  $r$  степенями свободы, плотность распределения вероятностей которого определяется выражением [12]:

$$f_r(u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} u^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}, & \text{если } u > 0; \\ 0, & \text{если } u < 0, \end{cases} \quad (2.36)$$

где  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  - гамма-функция [16]. (2.37)

В этом случае мера расхождения обозначается  $\chi^2$  и определяется выражением:

$$\chi^2 = N \sum_{j=1}^M \frac{(\mathfrak{f}_j - p_j)^2}{p_j}. \quad (2.38)$$

Иногда для удобства вычислений, чтобы избежать вычислений с промежуточными малыми числами, выражение (2.38) представляют в виде

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^M \frac{(n_j - N p_j)^2}{N p_j}, \quad (2.39)$$

где  $n_j$  - число попаданий  $x$  в  $j$ -ый дифференциальный коридор.

Распределение  $\chi^2$  зависит от параметра  $r$ , называемого числом «степеней свободы». Число степеней свободы равно  $r = M - k$ , где  $k$  – число независимых наложенных условий (связей), например, условие нормировки, совпадение теоретических и статистических моментов и т.д.

Для распределения  $\chi^2$  составлены специальные таблицы (см. приложение П.6) [12]. Пользуясь ими, можно для каждого значения  $\chi^2$  и числа степеней свободы  $r$  найти вероятность того, что величина, распределенная по закону  $\chi^2$ , превзойдет это значение. Если эта вероятность мала, то результат опыта следует признать противоречащим гипотезе о том, что случайная величина распределена по предполагаемому закону. Если на практике она оказывается меньше, чем 0,1, рекомендуется проверить результаты эксперимента и, если это возможно, повторить его.

**Схема применения критерия сводится к следующему:**

1. строится гистограмма входной последовательности
2. определяется мера расхождения  $\chi^2$  по формуле (2.37) или (2.38);

3. определяется число степеней свободы  $r=M-k$ ;
4. по  $r$  и  $\chi^2$  по таблице приложения П.6 определяется вероятность того, что величина, имеющая распределение  $\chi^2$  с  $r$  степенями свободы, превзойдет данное значение  $\chi^2$ ;

5. если вероятность  $P_d$  велика, то гипотеза  $H$  принимается.

Следует отметить, что с помощью критериев согласия можно только в некоторых случаях опровергнуть гипотезу  $H$ . Если вероятность  $P_d$  велика, то это указывает лишь на то, что гипотеза  $H$  не противоречит опытным данным [12].

Кроме критерия Пирсона на практике применяется критерий А.Н. Колмогорова [12].

В качестве меры расхождения между статистическим и теоретическим распределениями рассматривается величина, равная

$$\delta = \max |F(x) - F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)|. \quad (2.40)$$

Обоснованием выбора этой меры расхождения являются следующие обстоятельства:

- простота определения  $\delta$ ;

• при неограниченном числе испытаний  $N$  вероятность неравенства  $\delta \sqrt{N} \geq \lambda$  стремится к пределу

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2 \lambda^2}. \quad (2.41)$$

Значения  $P(\lambda)$ , подсчитанные по формуле (2.41), приведены в приложении П.7.

**Схема применения этого критерия сводится к следующему:**

1. строятся статистическая и теоретическая функции распределения;
2. по графикам определяется  $\delta$ ;
3. вычисляется  $\lambda = \delta \sqrt{N}$ ;
4. по таблице приложения П.7 определяется  $P(\lambda)$ ;
5. гипотеза принимается, если для заданного уровня значимости  $P_d$ ;
6.  $\lambda < \lambda_{1-P_d}$ ;

7. Если вероятность  $P_d$  мала, гипотезу  $H$  следует отвергнуть. При сравнительно больших  $P(\lambda)$  её можно считать совместимой с опытными данными.

Следует отметить, что критерий Колмогорова можно применять, когда известно теоретическое распределение и численные значения его параметров, например, при проверке качества сгенерированной псевдослучайной последовательности с заданным законом распределения [38], расчете параметров функций распределения [62]. Если применять этот критерий в случаях, когда параметры теоретического распределения определяются по статистическим данным, критерий даёт завышенное значение  $P(\lambda)$ . В этом случае мы рискуем принять неправильную гипотезу.

Если уточнение параметров распределения сгенерированной последовательности не производится, т.е. не решается задача аппроксимации законов распределения, качество генерирования ПСП производится с использованием в качестве теоретического распределения заданного закона с заданными параметрами.

## **2.5. АИС для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданными законами распределения**

Методы, рассмотренные в разделе 2.2-2.3, легли в основу АИС, предназначенной для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданными законами распределения и проверки качества генерирования.

АИС состоит из комплекса технических средств, пакета прикладных программ, интерфейса пользователя, математического и методического обеспечения [27, 38, 49].

Технические требования, предъявляемые к системе состоят в следующем:

- программные требования - Microsoft Windows 95-98;
- аппаратные требования - процессор Pentium 100 МГц, ОЗУ 16 Мб, на жестком диске 15 Мб.

### **2.5.1. Описание подсистем**

Разработка структуры пакета программ велась в соответствии с приведенной схемой, представленной на рис. 2.15. Учитывая большое разнообразие законов распределения, основным требованием, предъявляемым к структуре пакета программ, является открытость, то есть возможность добавления в программу новых методов аппроксимации и законов распределения без изменения структуры программы. В соответствии с этим требованием пакет программ системы разбит на четыре блока, обмен между которыми осуществляется в виде передачи данных:

- получения статистических данных;
- оценки статистических данных;
- аппроксимации;
- оценки качества аппроксимации.

**Блок получения статистических данных** делится, в свою очередь, на три части:

- генерация случайного процесса с заданным видом закона распределения;
- ввод выборки из  $N$  отсчетов случайного процесса из выбранного файла;
- ввод частот попадания в дифференциальные коридоры отсчетов случайного процесса из выбранного файла.

В первом случае данные генерируются в самой программе, во втором - возникают как результат эксперимента или генерируются в другой программе и передаются в систему. Данные, получаемые в первом блоке, передаются в блок оценки статистических характеристик вместе со способом получения информации. В первом и втором случае передается массив отсчетов случайного процесса, в третьем - частоты попадания в дифференциальные коридоры. В первом случае вводится также число дифференциальных коридоров и передается номер закона распределения, по которому сгенерирован случайный процесс.

**Блок оценки статистических характеристик** состоит из шести частей: оценки числовых характеристик случайного процесса; расчета и построения плотности распределения вероятностей; функции распределения, гистограммы; фазового портрета и графика случайного процесса.

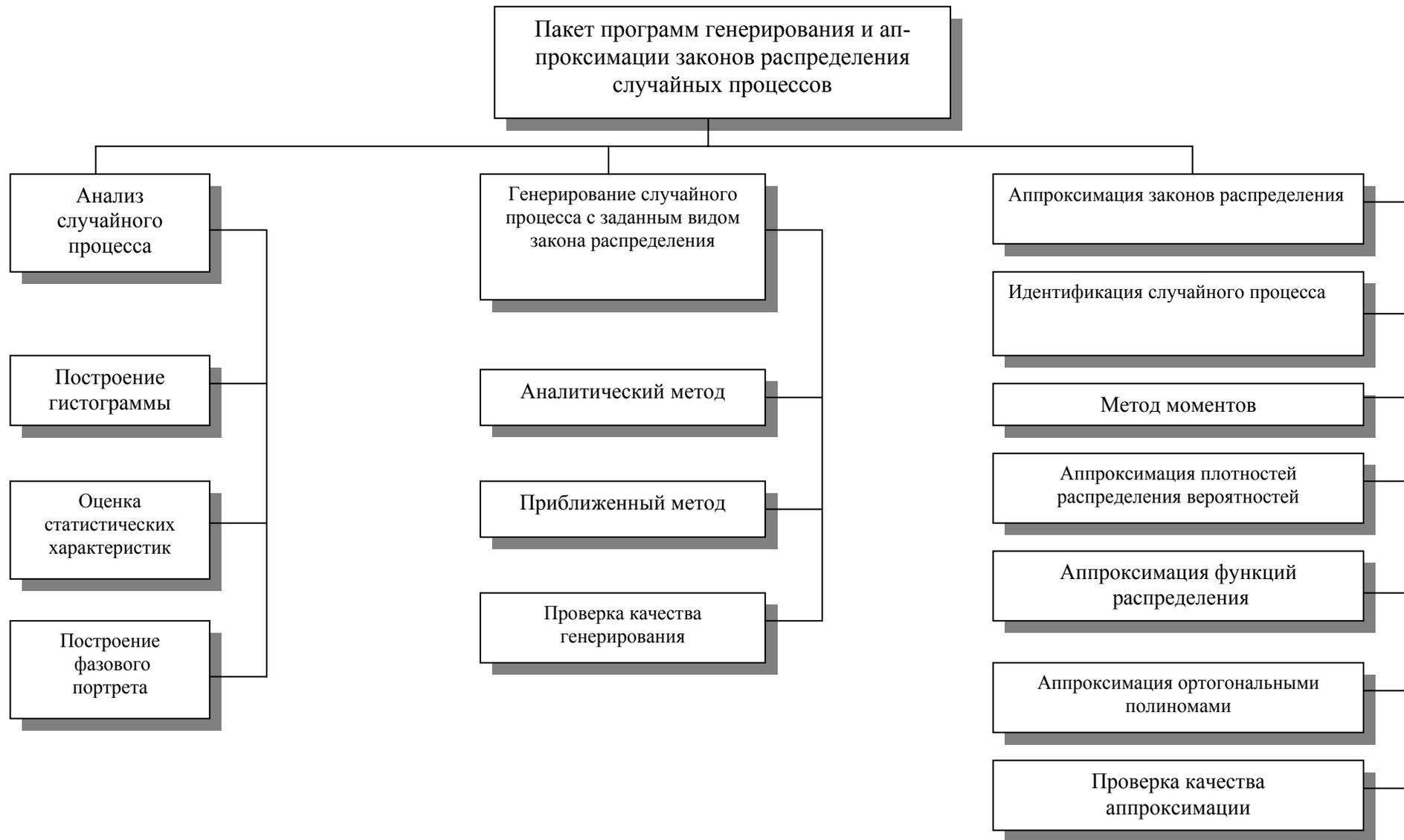


Рисунок 2.15. Пакет программ генерирования и аппроксимации законов распределения случайных процессов

Данные в этот блок попадают из блока получения статистических данных. В первом и втором случае на основе отсчетов случайного процесса рисуется график процесса, определяются частоты попадания в дифференциальные коридоры, и формируется гистограмма, оцениваются числовые характеристики случайного процесса. Данные о частотах попадания в дифференциальные коридоры передаются в блоки формирования функции распределения и плотности распределения вероятности. Значения плотности распределения вероятности передаются в блок формирования фазового портрета случайного процесса.

**Блок аппроксимации (уточнения параметров распределения)** состоит из четырех частей: аппроксимации плотности распределения вероятностей и функций распределения по методу моментов, аппроксимации плотности распределения вероятностей и функций распределения параметрическим методом.

В блок аппроксимации передаются из блока получения статистических данных число дифференциальных коридоров и номер закона распределения, а из блока оценки статистических характеристик - значения плотности распределения вероятностей и значения функции распределения, значения математического ожидания и дисперсии. Математическое ожидание и дисперсия используется в методе моментов, значение плотности вероятности и функции распределения используется в параметрическом методе.

Используя переданные значения и выбранный для аппроксимации закон распределения в данном блоке вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующего закона.

**Блок оценки качества аппроксимации** состоит из двух частей:

- оценки по критерию Пирсона;
- оценки по критерию Колмогорова.

В блок оценки качества аппроксимации передаются:

- из блока получения статистических данных - значения частот попадания в дифференциальные коридоры, число отсчетов случайного процесса, число дифференциальных коридоров;
- из блока оценки статистических характеристик - значения функции распределения;
- из блока аппроксимации - значения неизвестных параметров аппроксимирующего закона распределения.

Благодаря такому блочному построению структуры программы можно добавлять новые возможности, не видоизменяя ее принципиально. Например, можно изменить способы задания статистических данных, с которыми работает система, добавить новые законы распределения, по которым будет генерироваться случайный процесс, задать другие статистические характеристики случайного процесса, которые оцениваются в программе, изменить методы их расчетов, добавлять новые или изменять старые методы аппроксимации и т.д. Трудоемкость таких изменений будет определяться только сложностью программной реализации самих изменений, а не перестройкой структуры системы.

## 2.5.2. Описание интерфейса программ

Основу интерфейса системы составляют две основные экранные формы, с которыми работает пользователь:

- экранная форма задания случайного процесса и оценивания его характеристик;
- экранная форма аппроксимации случайных процессов и оценки качества аппроксимации.

Первая форма, показанная на рис. 2.16, представляет из себя панель, содержащую элементы ввода и отображение информации, а также горячие клавиши, позволяющие реализовывать различные функции системы:

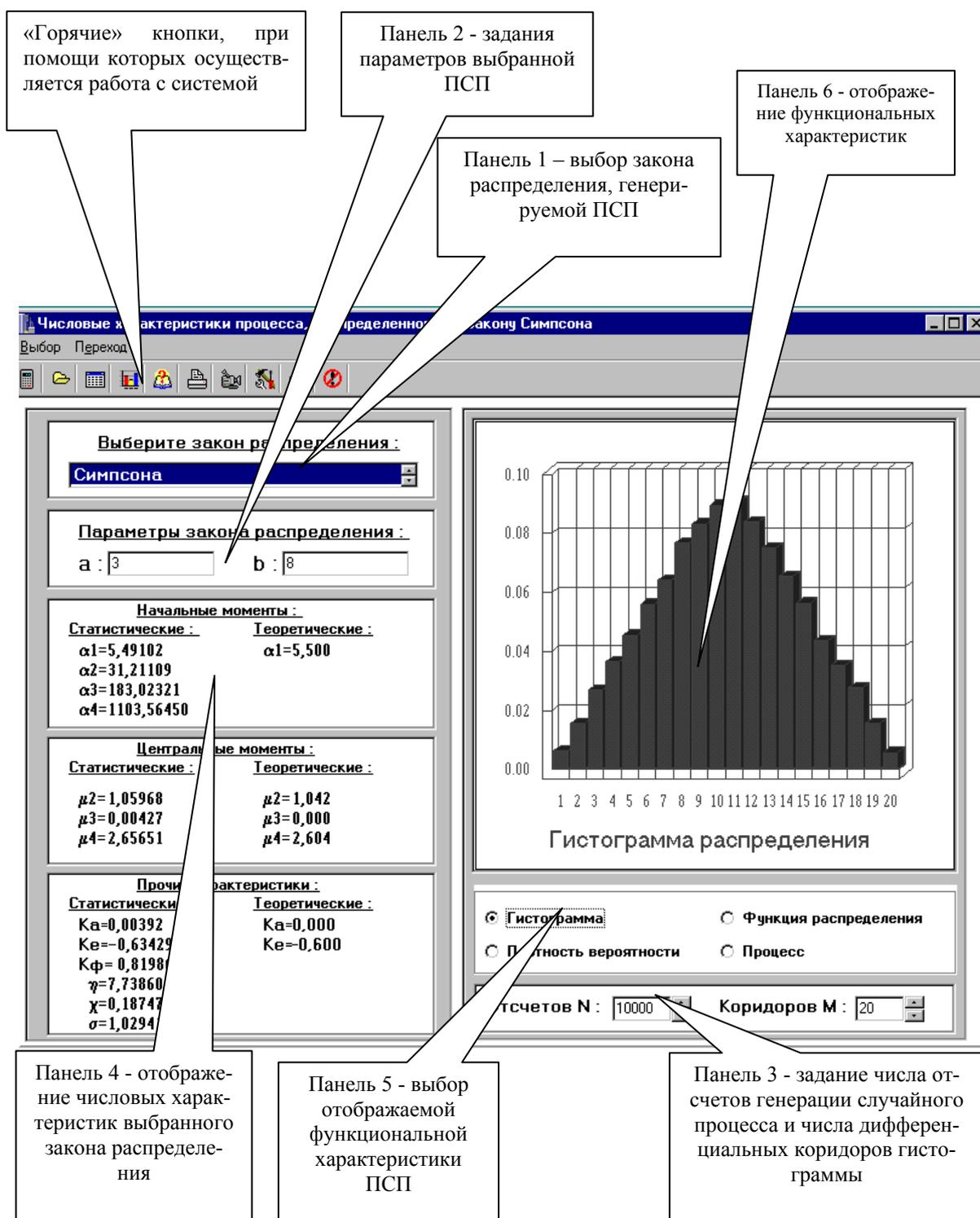


Рисунок 2.16. Интерфейс экранной формы генерирования и оценки статистических характеристик случайного процесса

- панель «горячих» клавиш, с помощью которой осуществляется управление работой системы;
- панель 1 – выбор закона распределения для генерации процесса, в случае его программного задания;
- панель 2 появляется после выбора закона распределения и позволяет задать значение одного или (в зависимости от закона) двух параметров данного закона распределения;
- панель 3 позволяет указать число отсчетов программно-генерируемого случайного процесса, а также число дифференциальных коридоров для расчета гистограммы;
- панель 4 служит для отображения вычисленных числовых характеристик сгенерированного с заданным видом закона распределения случайного процесса;
- панель 5 позволяет выбрать вид отображаемой функциональной характеристики случайного процесса или сам график процесса;
- панель 6 отображает одну из трех функциональных характеристик случайного процесса: гистограмму, плотность распределения вероятностей или функцию распределения.

На рис. 2.17 более подробно показана панель «горячих» кнопок. Она состоит из следующих кнопок:

- расчетов – генерирует случайный процесс с заданным видом закона распределения и параметром;
- загрузки из файла – требует указать файл и вызывает для работы экранную форму приема статистических данных, эта экранная форма показана на рис. 2.18;
- отображения расчетов – считает и отображает числовые характеристики случайного процесса;
- отображения функциональных характеристик – рассчитывает и показывает на панели 6 выбранную на панели 5 функциональную характеристику случайного процесса;
- справки – вызывает справочную систему, содержащую основные сведения об основных видах законов распределения;
- печати – позволяет вызвать стандартный диалог печати под Windows;
- настройки принтера – вызывается стандартное окно настройки параметров принтера;
- перехода к экранной форме структурной функции – при нажатии вызывается экранная форма, отображающая структурную функцию случайного процесса, экранная форма структурной функции показана на рис. 2.21;
- перехода к экранной форме аппроксимации случайного процесса;
- выхода из программы.

На рис. 2.18 показана экранная форма загрузки данных из файла.

На панели 1 выбирается вид данных: отсчеты случайного процесса или частоты попадания в дифференциальные коридоры. В том случае, если выбраны отсчеты на панели 2, задается их число. В случае выбора частот на панели 3 следует указать число дифференциальных коридоров, а также минимальную и максимальную границу диапазона.

После этого, по нажатию кнопки 1, происходит чтение данных из указанного перед этим файла.

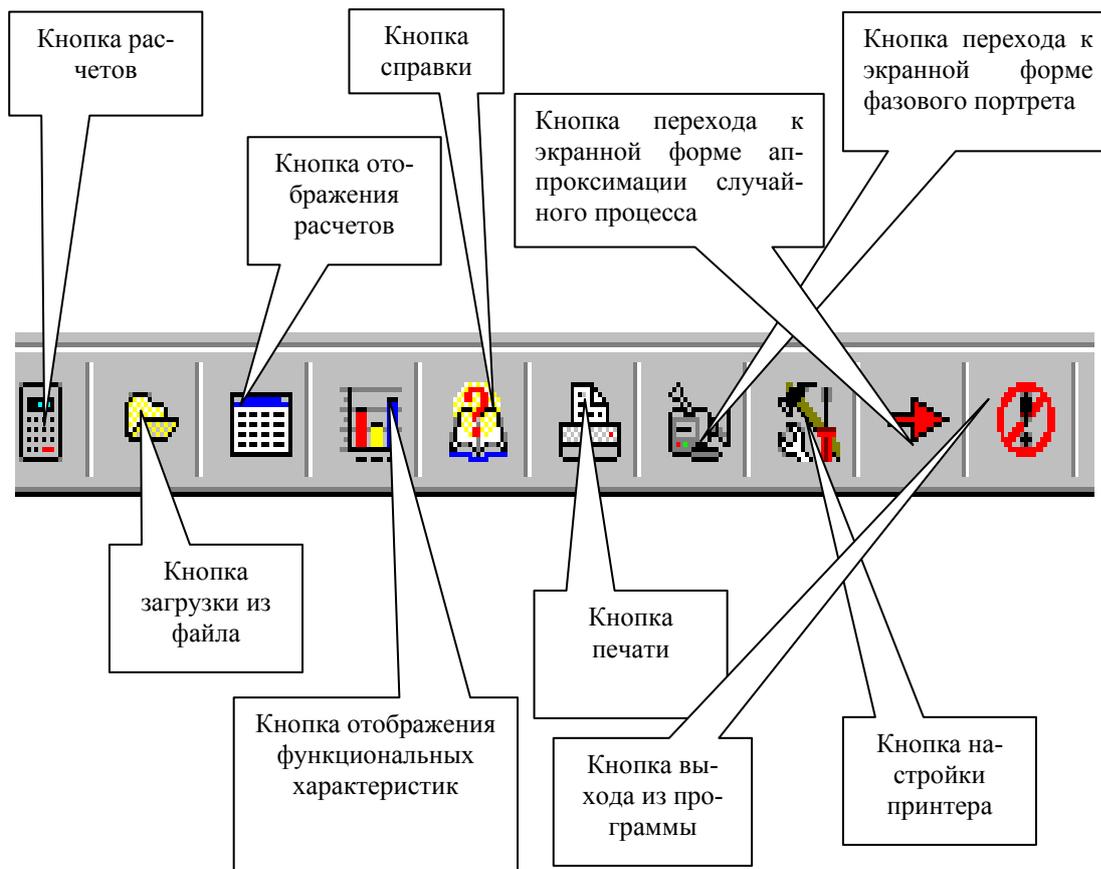


Рисунок 2.17. Панель «горячих» кнопок

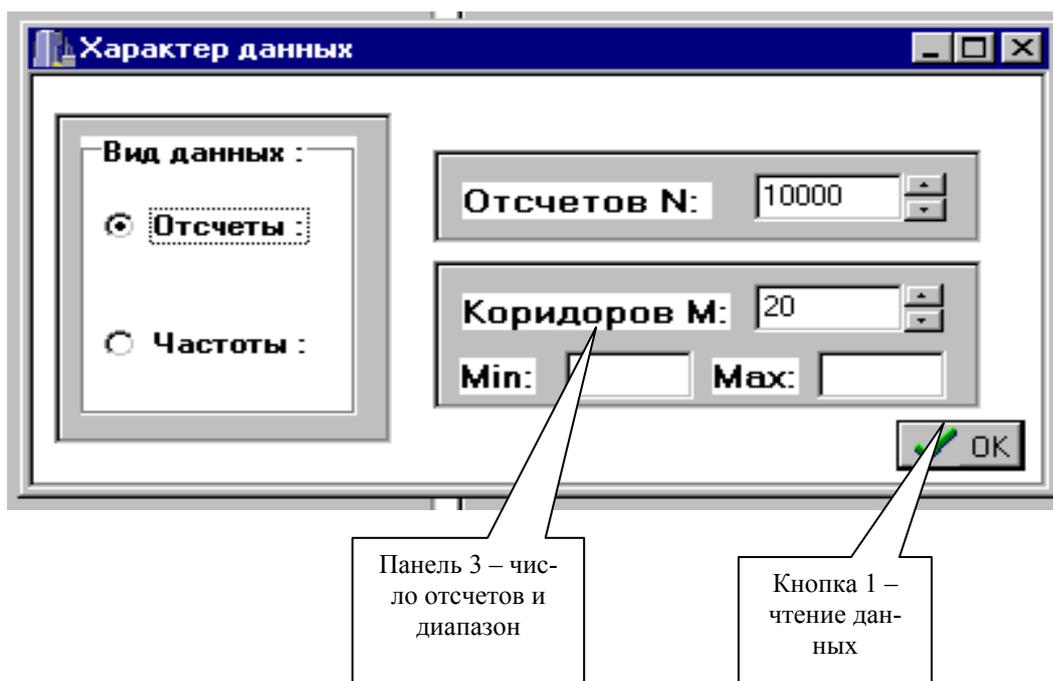


Рисунок 2.18. Экранная форма загрузки данных из файла

На рис. 2.20. показана экранная форма отображения графика случайного процесса. Она появляется на экране после выбора кнопки с названием «Процесс» на панели 5 основной экранной формы. На экранной форме отображения графика присутствуют панель «горячих» кнопок, панель отображения графика и панель задания числа отсчетов. На панели «горячих» кнопок (рис. 2.19) четыре кнопки: настройки принтера, печати формы, возвращения на основную экранную форму и отображения графика, которая перерисовывает график после изменения числа отображаемых отсчетов случайного процесса. Число отсчетов задается на панели 2. На панели 3 отображается график случайного процесса.

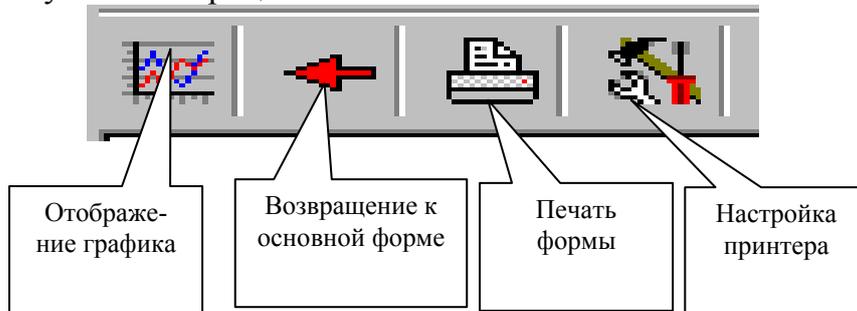


Рисунок 2.19. Панель «горячих» кнопок экранной формы отображения случайного процесса

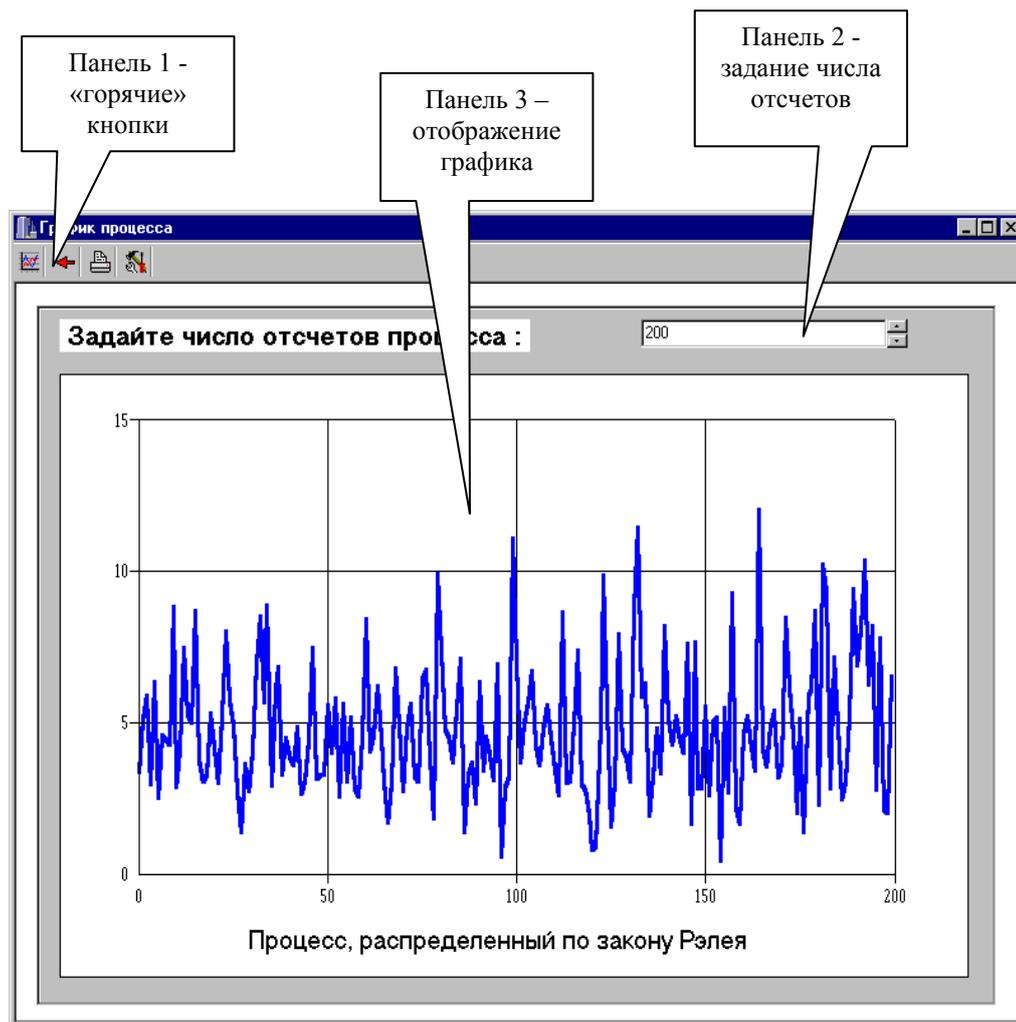


Рисунок 2.20. Экранная форма отображения графика случайного процесса

На рис. 2.21 показана экранная форма расчета и отображения структурной функции. На этой форме присутствуют панель «горячих» кнопок и панель отображения графика структурной функции. На панели «горячих» кнопок есть три кнопки: построения структурной функции, возвращения на основную экранную форму и вызова справки.

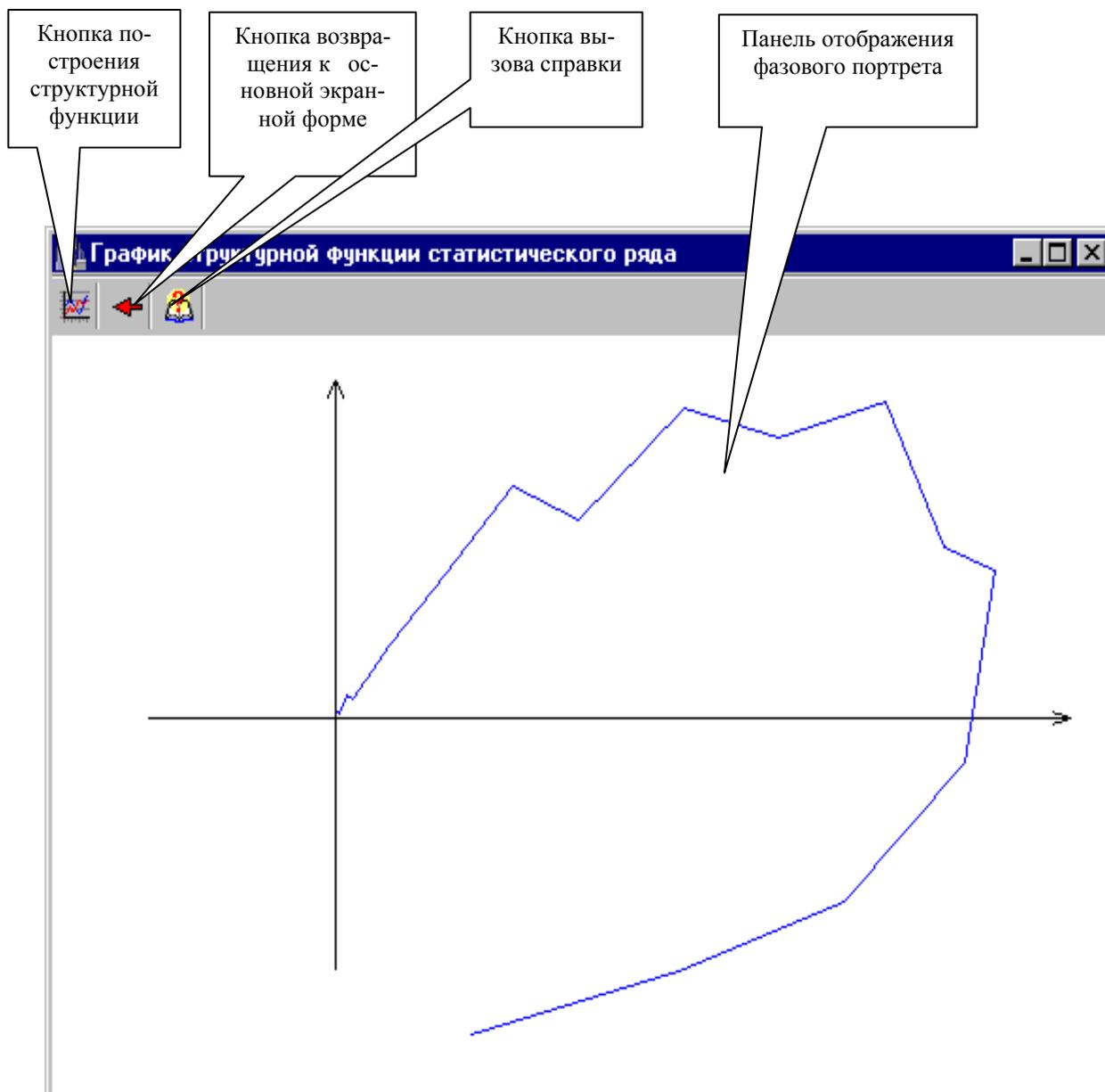


Рисунок 2.21. Экранная форма расчета и отображения структурной функции случайного процесса

Вторая экранная форма предназначена для реализации блока аппроксимации. Сама форма, показанная на рис. 2.22, представляет собой панель, содержащую элементы ввода и отображение информации, а также «горячие» клавиши, позволяющие реализовывать различные функции системы. На рис. 2.23-2.25 представлены укрупненные изображения используемых инструментов.

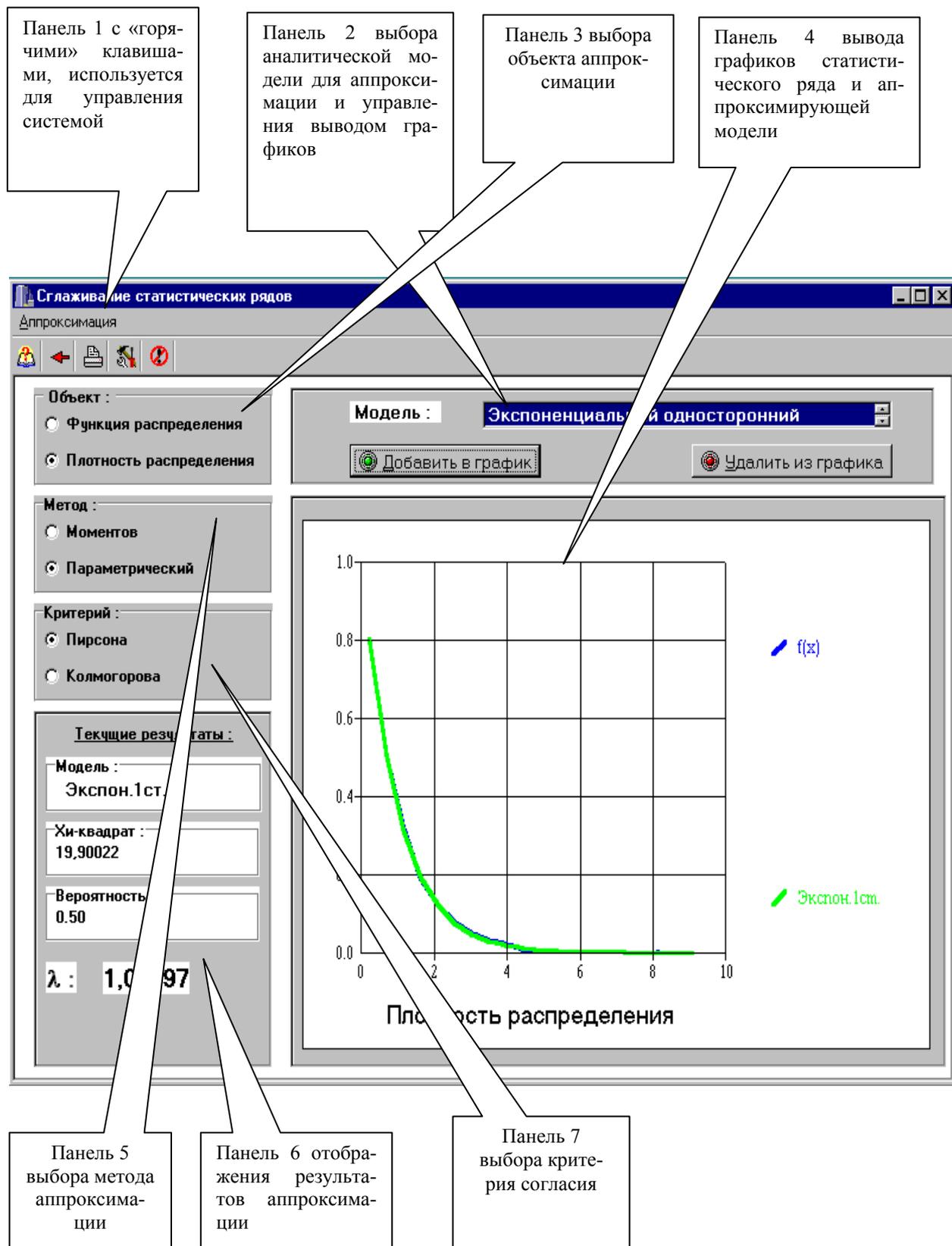


Рисунок 2.22. Общий вид формы блока аппроксимации

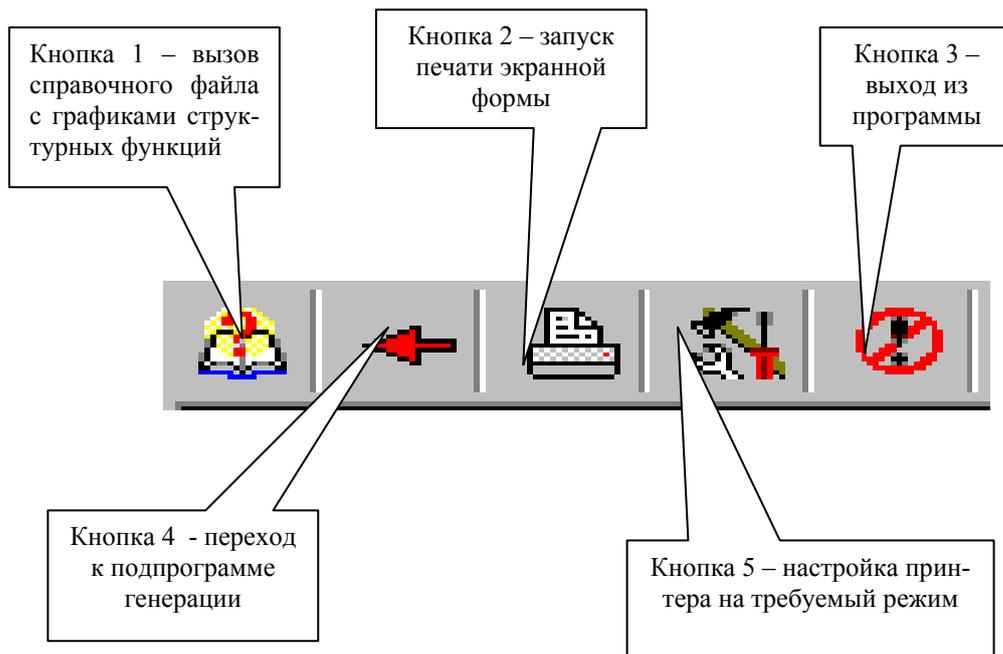


Рисунок 2.23. Панель инструментов

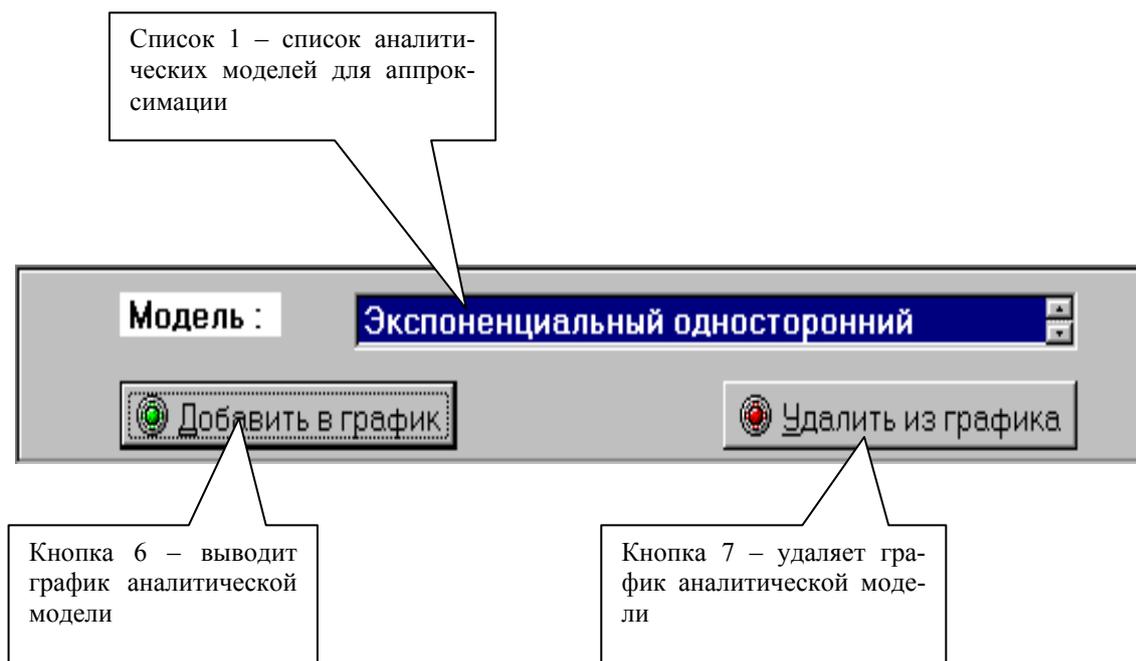


Рисунок 2.24. Панель выбора аналитической модели

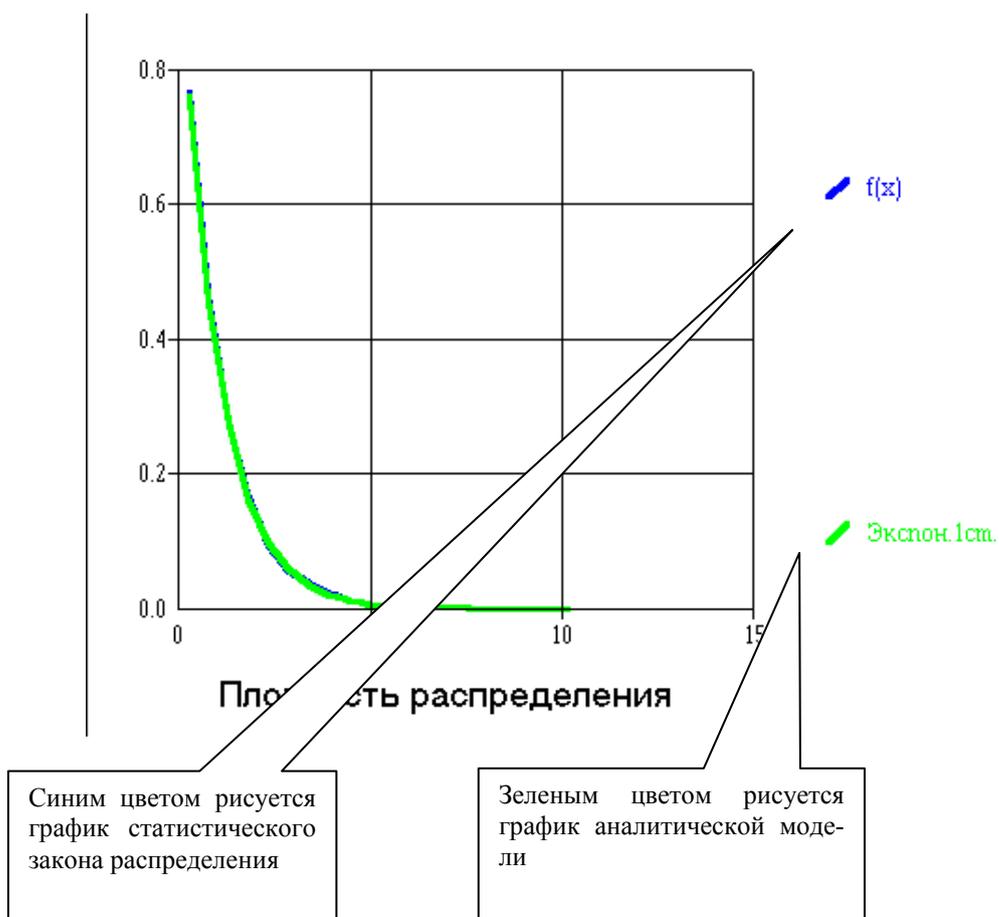
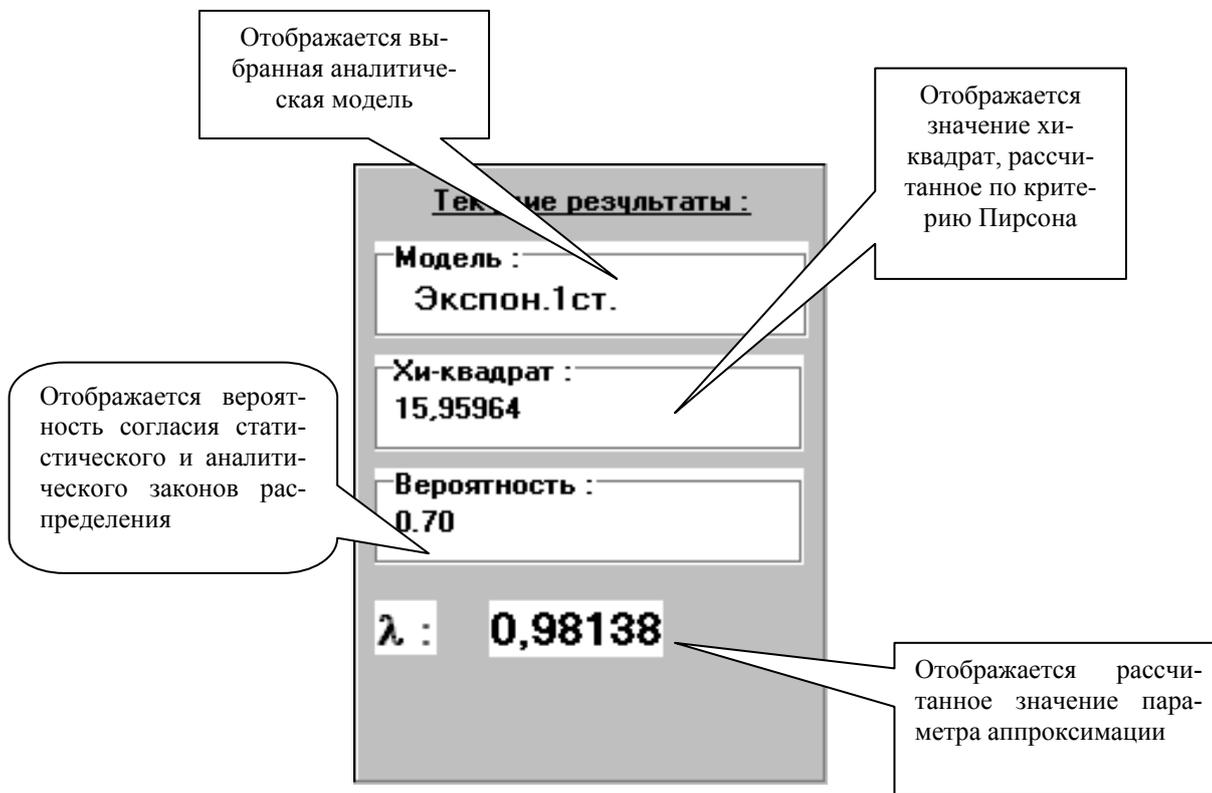


Рисунок 2.25. Панели вывода результатов

### 2.5.3. Порядок работы с системой

После загрузки основной экранной формы следует решить, будет ли проведена генерация процесса в самой системе, или будут загружены данные извне. В первом случае на панели 1 основной экранной формы следует выбрать закон распределения из списка законов, с которым будет сгенерирован данный процесс (см. рис.2.16). На экранной форме появится панель 2, на которой, в зависимости от закона, следует задать значения одного или двух параметров. На панели 3 нужно задать значения числа отсчетов генерируемого процесса и число дифференциальных коридоров. После нажатия на кнопку расчетов панели «горячих» кнопок основной экранной формы будет произведен расчет  $N$  отсчетов процесса.

Для экспорта данных в программу следует нажать кнопку загрузки из файла на основной экранной форме. Пользователю будет предложено указать загружаемый файл в стандартном диалоговом окне Windows. После указания файла появится экранная форма загрузки данных из файла, в которой следует указать тип передаваемых данных.

На первом этапе задаются данные процесса. На втором этапе оцениваются различные характеристики этого процесса. При нажатии на кнопку отображения расчетов на экране появляются числовые характеристики случайного процесса. На панели 5 нажатием радиокнопки можно выбрать график одной из трех функциональных характеристик или график самого процесса.

При нажатии на кнопку отображения фазового портрета, загружается экранная форма, позволяющая рассчитать и построить график (см. рис. 2.21).

В начале работы с экранной формой аппроксимации случайного процесса пользователь уже должен иметь гипотезу о виде закона распределения исследуемого процесса. Этот гипотетический закон распределения выбирается из общего списка законов распределения на панели 2 (см. рис. 2.22).

После чего, на панели 3 следует выбрать ту функциональную характеристику случайного процесса, по которой будет проводиться аппроксимация: функцию распределения или плотность распределения вероятностей. Выбранная функциональная характеристика графически отображается на панели 4.

На панели 5 выбирается метод нахождения неизвестных параметров теоретического закона распределения:

- метод моментов;
- параметрический метод.

Указав на панели 7 метод оценки качества аппроксимации, следует нажать кнопку 6 на панели 2. По нажатию этой кнопки происходит нахождение неизвестных параметров теоретического закона распределения, и результаты отображаются на панелях 4 и 6.

На панели 4 рисуется выбранная функциональная характеристика теоретического закона распределения, а на панели 6 показывается рассчитанное значение  $\chi^2$  (критерий Пирсона) или  $\lambda$  (критерий Колмогорова) и значение вероятности того, что расхождение между статистическим и теоретическим законами распределения можно объяснить случайными причинами.

Если вычисленное значение вероятности не удовлетворяет пользователя, то, нажав кнопку 7, он может убрать график функциональной характеристики теоретического закона распределения с панели 4 и повторить результаты расчёта.

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

#### 3.1. Моделирование временных рядов с заданным видом корреляционной функции

Часто при решении задач имитационного моделирования средств измерений возникает необходимость в формировании процессов с заданным видом корреляционной функции. При этом не обращают внимание на закон распределения процесса. Теоретически эта задача решается методом фильтрации и сводится к определению характеристик формирующего фильтра при известных характеристиках входного и выходного сигналов [11] (см. рис. 3.1).

Известно, что спектральная плотность мощности выходного сигнала фильтра определяется в соответствии с выражением:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega), \quad (3.1)$$

где  $S_x(\omega)$  - спектральная плотность мощности входного сигнала;

Рисунок 3.1.

$|W(j\omega)|^2$  - квадрат модуля частотной характеристики формирующего фильтра.

Учитывая, что  $S_x(\omega)$ ,  $S_y(\omega)$  и  $|W(j\omega)|^2$  - чётные функции, их можно представить в виде:

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \varphi(j\omega) \varphi(-j\omega); \\ S_y(\omega) = \psi(j\omega) \psi(-j\omega); \\ |W(j\omega)|^2 = W(j\omega) W(-j\omega). \end{cases} \quad (3.2)$$

Отсюда

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\varphi(j\omega)}. \quad (3.3)$$

Сложность частотной характеристики формирующего фильтра  $W(j\omega)$  во многом будет определяться видом  $S_x(\omega)$ . При использовании в качестве входного сигнала «белого» шума с  $S_x(\omega) = S_0$ , получим:

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\sqrt{S_0}}. \quad (3.4)$$

Для моделирования случайного процесса с помощью ЭВМ необходимо найти импульсную характеристику формирующего фильтра (см. приложение П.8):

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{S_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.5)$$

Выходной сигнал формирующего фильтра может быть определен различными способами в зависимости от принятого способа преобразования аналогового фильтра в цифровой. Один из самых простых, но не эффективных способов в смысле временных затрат заключается в следующем:

$$Y(j) = \Delta\tau \sum_{i=0}^{N1} x(j-i)h(i), \quad (3.6)$$

где N1 - число отсчётов импульсной характеристики, зависящее от вида корреляционной функции;

$\Delta\tau$  - интервал дискретизации исследуемого процесса;

$h(i)=h(i\Delta\tau)$  - значение импульсной переходной характеристики формирующего фильтра.

Значение интервала дискретизации зависит от вида корреляционной функции, значения её параметров, требуемой точности вычисления корреляционной функции  $\delta$  и способа интерполяции корреляционной функции между узлами. Минимальное количество требуемых ординат импульсной переходной характеристики при линейной интерполяции и различных погрешностях восстановления корреляционной функции представлено в таблице 3.1.

Минимальное количество ординат корреляционной функции

Таблица 3.1.

$\rho_x(\tau) \setminus \delta$	0,02	0,05	0,1	0,2
$e^{-\alpha \tau }$	9	6	4	3
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau )$	13	9	7	5
$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau )$	19	13	10	7
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau  + \alpha^2\tau^2 / 3)$	10	7	5	4
$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$47 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$30 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$21 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$15 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$
$e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$47 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$30 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$21 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$15 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$
$e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$47 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$30 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$21 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$15 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$

Используя эту таблицу, можно определить интервал дискретизации в виде:

$$\Delta\tau = \frac{\tau_{kmax}}{N1}, \quad (3.7)$$

где  $\tau_{kmax}$  - максимальный интервал корреляции (см. таблицу 1.5).

Другой подход также сводится к нерекурсивной фильтрации входного ряда [11]:

$$y_n = \sum_{k=0}^N c_k x_{n-k}, \quad (3.8)$$

причём  $M[y_n] = 0$ , а

$$M[y_n y_k] = \begin{cases} K_{n-k}, & |n - k| \leq N; \\ 0, & |n - k| > N, \end{cases} \quad (3.9)$$

где  $K_{n-k}$  - значение корреляционной функции в точке  $(n-k)\Delta$ .

Коэффициенты  $c_k$ ,  $k=0,1,\dots,N$  удовлетворяют следующей нелинейной системе алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 c_0 + c_1 c_1 + c_2 c_2 + \dots + c_N c_N = K_0 \\ c_0 c_1 + c_1 c_2 + \dots + c_{N-1} c_N = K_1 \\ \dots\dots\dots \\ c_0 c_N = K_N \end{array} \right. ; \quad (3.10)$$

Решение этой системы дает искомый алгоритм моделирования выходной последовательности. Тем не менее, применение этого метода затруднено из-за трудности решения указанной системы уравнений. Рекуррентный алгоритм оценивания коэффициентов  $c_k$  заключается в следующем [48]:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0^{(l)} = \sqrt{K_0}; \\ c_k^{(l)} = \begin{cases} 0, & \text{если } k > l; \\ \frac{K_k - \sum_{i=1}^{m-k} c_i^{(l-k)} c_{i+k}^{(l)}}{c_0^{(l-k)}}, & \text{если } k \leq l; \end{cases} \\ c_0^{(l)} = \sqrt{K_0 - \sum_{i=1}^m (c_i^{(l)})^2}, \end{array} \right. \quad (3.11)$$

где  $l=0,1,2,\dots$ -номер итерации.

Однако при оценочном характере  $K_k$  возникают дополнительные сложности в корректировке  $c_k$ , что усложняет его и ставит под сомнение его целесообразность.

В работе [48] исследована эффективность алгоритмов нерекурсивной фильтрации: прямой свертки, скользящего спектра и обратного преобразования Фурье. Показано, что частота дискретизации отсчетов на выходе фильтра в соответствии с положениями теории дискретизации непрерывных образов однозначно связывается с шириной его полосы:

$$f = mF_{\text{ВЫХ}}, \quad (3.12)$$

где  $m$  - коэффициент запаса.

Нарушение этого положения при традиционной реализации цифровой фильтрации, когда частота  $f$  принимается равной частоте дискретизации входной последовательности, приводит к информационной избыточности дискретного представления реакции фильтра и сопровождается непроизводительными вычислительными затратами, снижающими эффективность вычислительных средств.

В связи с этим в работе предложено увеличить шаг скольжения входной информации в  $N/Q$  раз, т.е.:

$$y_n = \sum_{k=0}^N h_k x_{\frac{N}{Q}n-k}, \quad (3.13)$$

где  $N$  - размер (сложность) импульсной характеристики;

$Q$  - определяет множество учитываемых отсчетов переходной характеристики фильтра и их количество (т.е. сложность фильтра).

Поиски более быстродействующих алгоритмов моделирования ПСП с заданным видом корреляционной функции привели исследователей к использованию рекурсивной фильтрации [42]:

$$y_n = \sum_{i=0}^N a_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^N b_i y_{n-i}. \quad (3.14)$$

Для нахождения коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  (т.е. параметров фильтра) применяются, в основном, три класса методов: методы преобразования аналоговых фильтров в цифровые, прямые методы расчёта цифровых фильтров в  $Z$ -плоскости и методы, использующие алгоритмы оптимизации. В общем случае невозможно отдать предпочтение какому-либо одному из них. С учётом применимости этих методов в конкретных условиях и многих других факторов, каждый из них может оказаться наиболее подходящим. Однако, большинство цифровых фильтров рассчитываются методом билинейного преобразования стандартных аналоговых фильтров. Это обстоятельство связано с тем, что в задачах статистического моделирования необходимо проектировать фильтры, для которых билинейные преобразования аналоговых фильтров уже известны.

В [45] предлагается методика расчёта рекурсивного фильтра для моделирования ПСП с заданным видом корреляционной функции в  $Z$ -плоскости. Параметры и вид цифрового рекурсивного фильтра для основных моделей корреляционных функций представлены в приложении П.9.

Актуальным и малоисследованным вопросом цифровой фильтрации является точностной анализ методов генерирования ПСП с заданным видом корреляционной функции с помощью формирующих фильтров. Среди работ в этой области следует выделить [50], где дается аналитический расчёт погрешностей цифровой фильтрации со скользящим средним (нерекурсивная фильтрация).

В работе [14] предложена методика расчёта рекурсивного фильтра с учётом заданных точностных параметров моделируемых сигналов. Этим моделям, как правило, уделяется очень большое внимание [25, 46, 59-61], так как при предварительно рассчитанных параметрах они обеспечивают большее быстродействие.

На рис. 3.2 приведены примеры реализаций ПСП с заданным видом корреляционных функций.

### 3.2. Анализ методических погрешностей генерирования ПСП с заданным видом корреляционных функций

Генерирование ПСП осуществляется методом фильтрации. Выходной сигнал фильтра, импульсная характеристика которого определяется требуемым видом корреляционной функцией, равен:

$$\overset{\circ}{y}(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \overset{\circ}{x}(t - \tau) d\tau, \quad (3.15)$$

где  $h(\tau)$  - импульсная характеристика фильтра.

Корреляционная функция выходного сигнала фильтра равна:

$$K_y(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) K_x(\tau + \tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2. \quad (3.16)$$

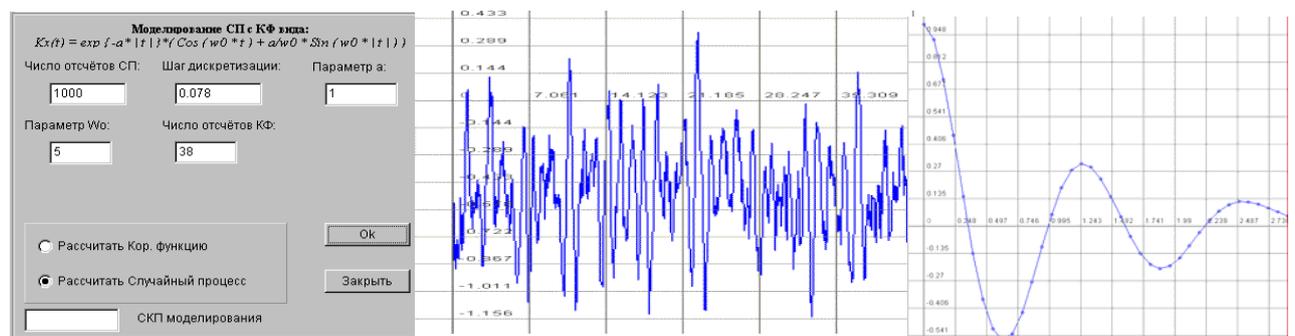
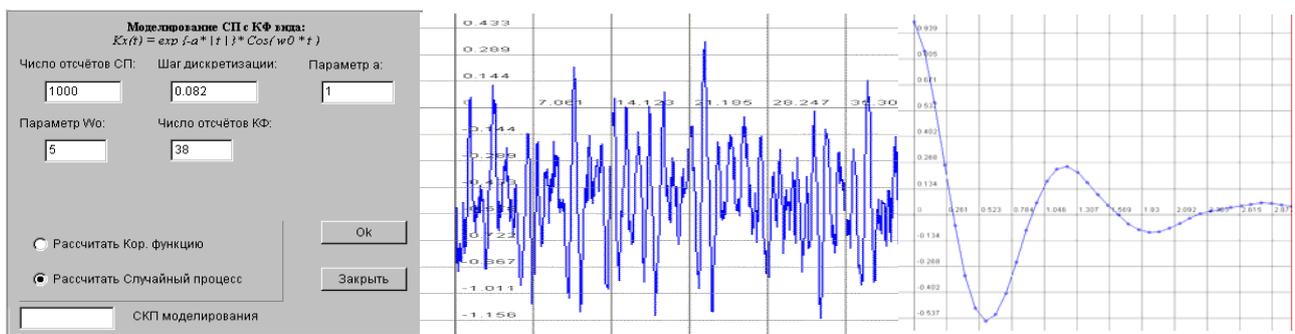
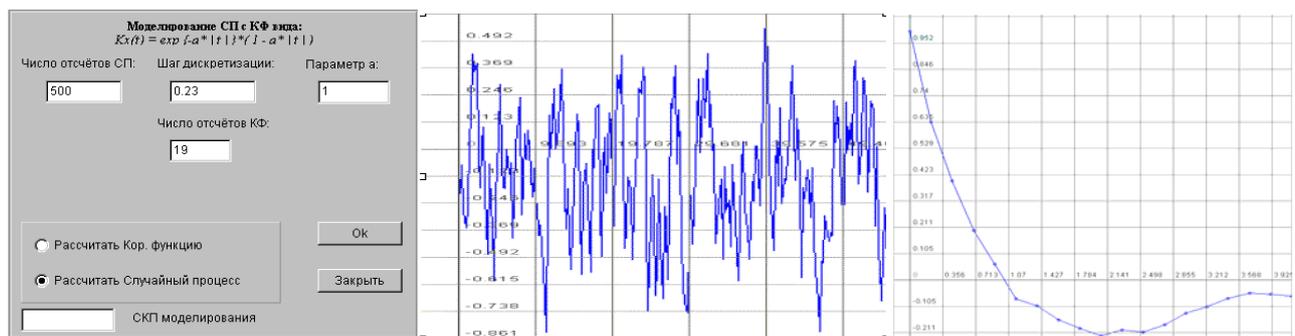
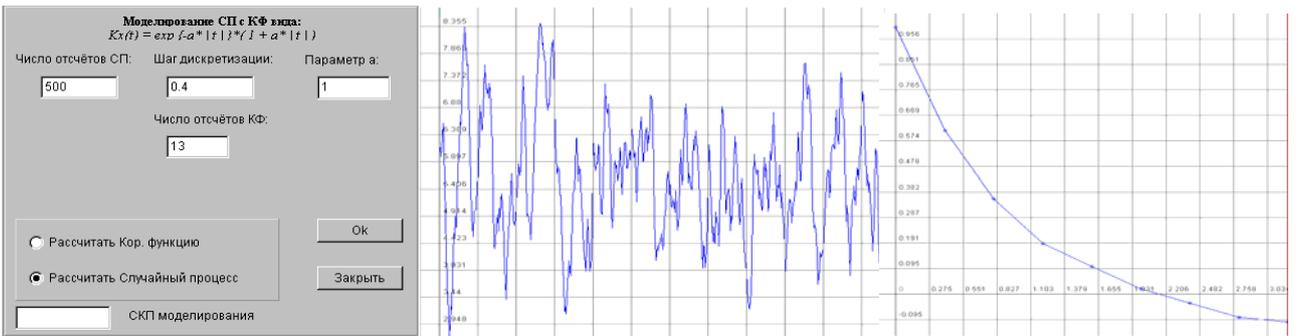
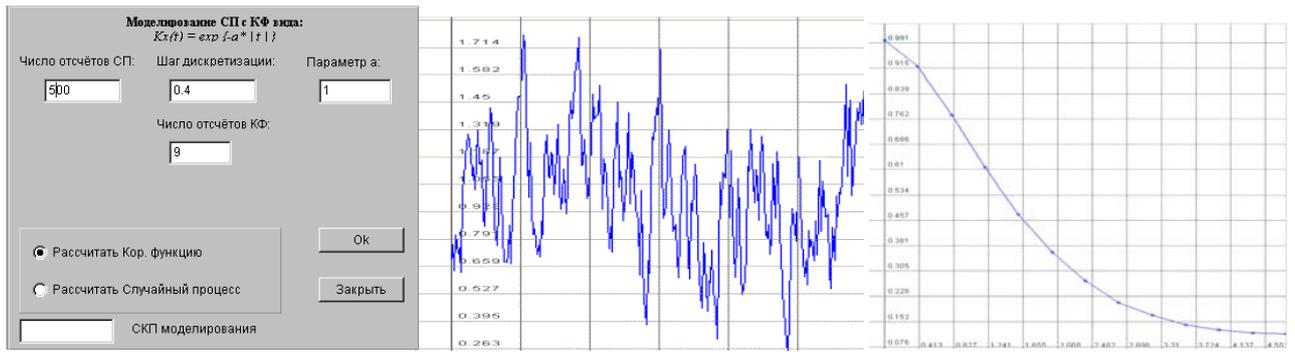


Рисунок 3.2. Случайные сигналы с заданным видом корреляционных функций

Если  $\overset{\circ}{x}(t)$  - «белый» шум с корреляционной функцией  $K_x(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau)$ ,

где  $S_0$  - интенсивность «белого» шума, то

$$K_y(\tau) = 2\pi S_0 \int_0^{\infty} h(\tau + \tau_2) h(\tau_2) d\tau_2. \quad (3.17)$$

Определим приведенную погрешность, обусловленную конечным верхним пределом интеграла в (3.17):

$$\hat{K}_y(\tau) = 2\pi S_0 \int_0^T h(\tau + \tau_2) h(\tau_2) d\tau_2 \quad (3.18)$$

в виде

$$\gamma_T(\tau) = \frac{K_y(\tau) - \hat{K}_y(\tau)}{K_y(0)} = \frac{\int_0^{\infty} h(\tau + \tau_2) h(\tau_2) d\tau_2}{\int_0^{\infty} h^2(\tau_2) d\tau_2}. \quad (3.19)$$

Выражения приведенной погрешности, обусловленной конечным верхним пределом для различных моделей корреляционных функций приведены в таблице 3.2.

Численные значения погрешности зависят от вида нормированной корреляционной функции. Для расчёта конкретных значений погрешности выберем  $T = \tau_{kmax}$  (см. таблицу 3.2).

Оценим погрешность определения корреляционной функции, вызванную дискретизацией. Так как

$$y_k = \sum_{m=0}^{N1} h_m \overset{\circ}{x}_{k-m}, \quad (3.20)$$

где  $h_m = h(m\Delta\tau)$  - значение импульсной переходной характеристики формирующего фильтра;

$\Delta\tau$  - интервал дискретизации;

$\overset{\circ}{x}_k = \overset{\circ}{x}(k\Delta)$  значение ПСП с  $K_x(v) = 2\pi S_0 \delta_v$ ;

$$\delta_v = \begin{cases} 1, & \text{если } v = 0; \\ 0, & \text{если } v \neq 0; \end{cases}$$

$$N1 = \text{ent} \left[ \frac{T}{\Delta} \right],$$

то

$$\hat{K}_y(v) = \sum_{n=0}^{N1-v} h_n h_{n+v}. \quad (3.21)$$

Нормированная корреляционная функция в соответствии с выражением (1.50) примет вид:

Приведенные погрешности генерирования ПСП, вызванные конечным пределом интегрирования

Таблица 3.2.

№	$\rho_y(\tau)$	$\hat{\rho}_y(\tau)$	$\gamma_T$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$e^{-\alpha\tau}(1 - e^{-2\alpha T})$	$e^{-\alpha\tau} e^{-2\alpha T}$
2	$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau )$	$e^{-\alpha\tau} \left\{ \alpha\tau [1 - e^{-2\alpha T}(1 + 2\alpha T)] + 1 - e^{-2\alpha T}(1 + 2\alpha T + 2\alpha^2 T^2) \right\}$	$e^{-\alpha\tau} e^{-2\alpha T} \left[ \alpha\tau(1 + 2\alpha T) + (1 + 2\alpha T + 2\alpha^2 T^2) \right]$
3	$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau )$	$e^{-\alpha\tau} \left\{ 1 - \alpha\tau - e^{-2\alpha T}(1 - 2\alpha T + 2\alpha^2 T^2) - \alpha\tau e^{-2\alpha T}(2\alpha T - 1) \right\}$	$e^{-\alpha\tau} e^{-2\alpha T} \left[ 1 - 2\alpha T + 2\alpha^2 T^2 + \alpha\tau(2\alpha T - 1) \right]$
4	$e^{-\alpha \tau } \left( 1 + \alpha \tau  + \frac{\alpha^2 \tau^2}{3} \right)$	$e^{-\alpha\tau} \left\{ 1 - e^{-2\alpha T} / 3(3 + 6\alpha T + 6\alpha^2 T^2 + 4\alpha^3 T^3 + \alpha^4 T^4) + \alpha\tau [1 - e^{-2\alpha T} / 3(3 + 6\alpha T + 6\alpha^2 T^2 + 4\alpha^3 T^3) + \alpha^2 T^2 [1 - e^{-2\alpha T}(1 + 2\alpha T + 2\alpha^2 T^2)]]^3 \right\}$	$e^{-\alpha\tau} e^{-\alpha T} \left[ (1 + 2\alpha T + 2\alpha^2 T^2 + 4/3\alpha^3 T^3 + \alpha^4 T^4) + \alpha\tau(1 + 2\alpha T + 2\alpha^2 T^2 + 4/3\alpha^3 T^3) + \alpha^2 T^2 / 3(1 + 2\alpha T + 2\alpha^2 T^2) \right]$
5	$e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$e^{-\alpha\tau} \left\{ \cos \omega_0 \tau [1 - e^{-2\alpha T}(1 + \alpha / \omega_0 \sin 2\omega_0 T + 2\alpha^2 / \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 T)] + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau [1 - e^{-2\alpha T}(\cos 2\omega_0 T + \alpha / \omega_0 \sin 2\omega_0 T)] \right\}$	$e^{-\alpha\tau} e^{-\alpha T} \left[ \cos \omega_0 \tau (1 + \alpha / \omega_0 \sin 2\omega_0 T + 2\alpha^2 T^2 / \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 T) + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau (\cos 2\omega_0 T + \alpha / \omega_0 \sin 2\omega_0 T) \right]$

$$\hat{\rho}(v) = \frac{\sum_{n=0}^{N1-v} h_n h_{n+v}}{\sum_{n=0}^{N1} h_n^2}. \quad (3.22)$$

Приведенная погрешность оценки нормированной корреляционной функции, вызванная дискретизацией будет равна:

$$\gamma_{\Delta}(v) = \rho_y(v) - \frac{\sum_{n=0}^{N1-v} h_n h_{n+v}}{\sum_{n=0}^{N1} h_n^2}. \quad (3.23)$$

Выражения для оценки погрешности  $\gamma_{\Delta}(v)$  для типовых моделей корреляционных функций представлены в таблице 3.3.

Из анализа этих выражений видно, что погрешность растет с увеличением величины  $v$ .

Полная погрешность, обусловленная конечным пределом интегрирования и дискретизацией, равна:

$$\gamma_{T,\Delta}(v) = \gamma_T(v) + \gamma_{\Delta}(v). \quad (3.24)$$

Для расчёта полной погрешности необходимо определить интервалы дискретизации для различных моделей нормированных корреляционных функций и число точек на интервале дискретизации  $N1$ . Задавшись допустимой погрешностью восстановления корреляционной функцией  $\delta$  при её линейной интерполяции и результатами таблицы 3.1, определим максимальные погрешности методических погрешностей генерирования ПСП с заданным видом корреляционной функции (см. таблицу 3.4)

Анализ результатов таблицы показывает, что выбором  $T$  и  $\Delta$  возможно обеспечение допустимой погрешности вычисления оценок корреляционной функции. Так, например, определив  $T = \tau_{\text{кнах}}$  на уровне  $0,02 \gamma_{T,\Delta} \leq 0,02$ .

Следующая составляющая погрешности генерирования вызвана неидеальностью генератора «белого» шума (см. подраздел 2.1). Кроме того, при ограниченной разрядности ЭВМ необходимо учитывать погрешность округления. Однако аналитическое определение указанных составляющих погрешностей вызывает значительные трудности. В связи с этим более целесообразно для оценки погрешностей применять метод имитационного моделирования.

### 3.3. Экспериментальные исследования точностных характеристик программных генераторов ПСП с заданным видом корреляционных функций

Экспериментальные исследования точностных характеристик генераторов проведем в соответствии с рекомендациями РТМ [22]. При исследовании генерировались ПСП с заданным видом корреляционной функции объемом 140000 отсчётов, которые разбивались на 29 реализаций объемом 5000 отсчётов каждая. Далее оценивались максимальные погрешности равномерного приближения.

Результаты исследования алгоритмов генерирования ПСП нерекурсивной фильтрации представлены в таблице 3.5 (для моделей 5-7  $\mu=5$ ). Параметры алгоритма выбраны в соответствии с рекомендациями таблиц 3.1.

Приведенные погрешности генерирования ПСП, вызванные дискретизацией

Таблица 3.3

№	$\rho_y(v)$	$\gamma_\Delta(v)$
1	$e^{-\alpha\Delta v }$	$\rho_y(v) = \frac{e^{-\alpha\Delta v} \sum_{n=0}^{N1-v} e^{-2\alpha\Delta n}}{\sum_{n=0}^{N1} e^{-2\alpha\Delta n}}$
2	$e^{-\alpha\Delta v }(1 + \alpha\Delta v )$	$\rho_y(v) = \frac{e^{-\alpha\Delta v} \sum_{n=0}^{N1-v} (n+v)ne^{-2\alpha\Delta n}}{\sum_{n=0}^{N1} e^{-2\alpha\Delta n} n^2}$
3	$e^{-\alpha\Delta v }(1 - \alpha\Delta v )$	$\rho_y(v) = \frac{e^{-\alpha\Delta v} \sum_{n=0}^{N1-v} (1 - \alpha\Delta n)(1 - \alpha\Delta(n+v))e^{-2\alpha\Delta n}}{\sum_{n=0}^{N1} e^{-2\alpha\Delta n} (1 - \alpha\Delta n)^2}$
4	$e^{-\alpha\Delta v }\left(1 + \alpha\Delta v  + (\alpha\Delta v)^2 / 3\right)$	$\rho_y(v) = \frac{e^{-\alpha\Delta v} \sum_{n=0}^{N1-v} (n+v)^2 n^2 e^{-2\alpha\Delta n}}{\sum_{n=0}^{N1} n^4 e^{-2\alpha\Delta n}}$
5	$e^{-\alpha\Delta v }\left(\cos \mu\alpha\Delta v + \frac{1}{\mu} \sin \mu\alpha\Delta v \right)$	$\rho_y(v) = \frac{e^{-\alpha\Delta v} \sum_{n=0}^{N1-v} e^{-2\alpha\Delta n} \sin \mu\alpha\Delta(n+v) \sin \mu\alpha\Delta n}{\sum_{n=0}^{N1} e^{-2\alpha\Delta n} \sin^2 \mu\alpha\Delta n}$

Максимальные значения методических погрешностей генерирования ПСП с заданным видом корреляционной функции

Таблица 3.4

$\rho_x(v)$	$\Delta$	$\tau_{k 0,05}$			$\tau_{k 0,02}$			$\tau_{k 0,01}$		
		$\alpha T$	$v$	$\gamma_{T,\Delta}$	$\alpha T$	$v$	$\gamma_{T,\Delta}$	$\alpha T$	$v$	$\gamma_{T,\Delta}$
$e^{-\alpha\Delta v }$	$0,4/\alpha$	3,00	8	0,0184	3,92	10	0,0082	4,61	12	0,0037
$e^{-\alpha\Delta v }(1 + \alpha\Delta v )$	$0,4/\alpha$	4,75	11	0,0494	5,84	3	0,0191	6,64	2	0,0184
$e^{-\alpha\Delta v }(1 - \alpha\Delta v )$	$0,231/\alpha$	4,14	18	0,0218	5,40	4	0,0054	6,27	4	0,0045
$e^{-\alpha\Delta v }(1 + \alpha\Delta v  + (\alpha\Delta v)^2 / 3)$	$0,693/\alpha$	5,92	8	0,0489	7,14	10	0,0171	8,03	11	0,0099
$e^{-\alpha\Delta v }\left(\cos \mu\alpha\Delta v + \frac{1}{\mu} \sin \mu\alpha\Delta v \right)$	$0,0785/\alpha$	2,71	39	0,0393	3,88	49	0,0200	4,53	57	0,0090

Результаты экспериментальных исследований точностных характеристик генерирования ПСП для нерекурсивной фильтрации (N=5000)

Таблица 3.5

№	$\rho_x(\tau)$	$\tau_{kmax}$	$\Delta t$	N1	$\gamma$
1	$e^{-\alpha \tau }$	3	0,333	9	0,0774
2	$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau )$	4,75	0,475	10	0,1152
		5,94	0,495	12	0,0872
		6,93	0,495	14	0,0842
		7,92	0,495	16	0,0842
		5,94	0,283	21	0,0965
		7,075	0,283	25	0,0949
		7,641	0,283	27	0,0916
3	$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau )$	4,14	0,414	10	0,0567
		4,389	0,231	19	0,0779
4	$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau  + \alpha^2\tau^2 / 3)$	5,92	0,493	12	0,1361
5	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	3	0,075	40	0,1290
6	$e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	3	0,075	40	0,1361
7	$e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	3	0,075	40	0,1062

Результаты исследования алгоритмов генерирования ПСП рекурсивной фильтрации представлены в таблице 3.6. В моделях 5-7 ( $\mu=5$ ). Параметры алгоритма выбраны в соответствии с рекомендациями таблиц 3.1.

Результаты экспериментальных исследований точностных характеристик генерирования ПСП для рекурсивной фильтрации (N=5000)

Таблица 3.6

№	$\rho_x(\tau)$	$\tau_{kmax}$	$\Delta t$	N1	$\gamma$
1	$e^{-\alpha \tau }$	3,92	0,4	9	0,079
2	$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau )$	3	0,3	10	0,0728
		5,84	0,4	13	0,0796
3	$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau )$	3	0,3	10	0,0675
		5,4	0,231	19	0,0763
4	$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau  + \alpha^2\tau^2 / 3)$	6,93	0,693	10	0,0881
5	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	3	0,075	40	0,1053

Продолжение таблицы 3.6

6	$e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	3	0,075	40	0,115
7	$e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	3	0,075	40	0,1031

Приведенные погрешности оценки нормированных корреляционных функций ПСП, полученные методом нерекурсивной фильтрации для  $N=5000$ , представлены на рис. 3.3.

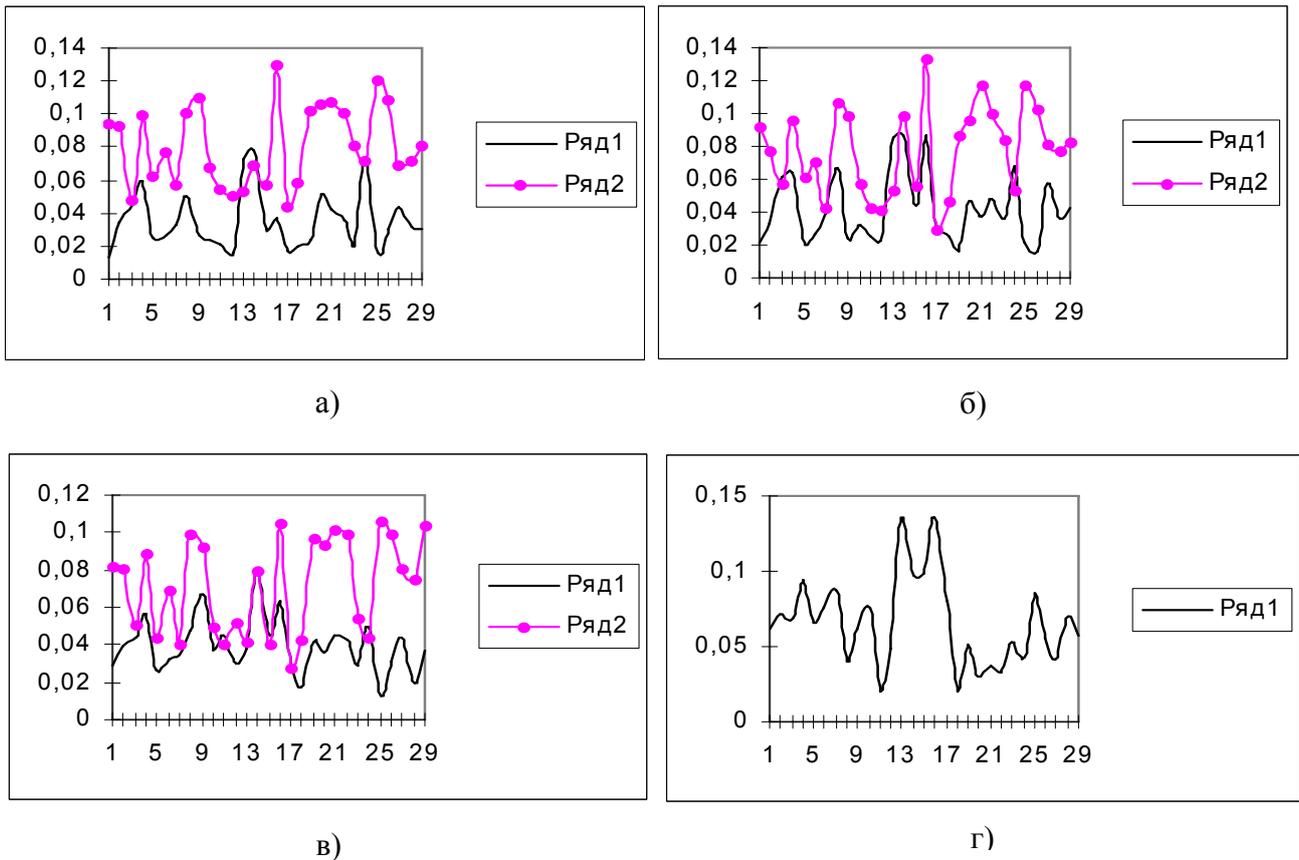


Рисунок 3.3. Приведенные погрешности оценки нормированных корреляционных функций (нерекурсивная фильтрация)

На рисунке 3.3 приняты следующие обозначения:

- а) - ряд 1 -  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ , ряд 2 -  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ ;
- б) - ряд 1 -  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|)$ , ряд 2 -  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$ ;
- в) - ряд 1 -  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|)$ , ряд 2 -  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$ ;
- г) - ряд 1 -  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau| + \alpha^2 \tau^2 / 3)$ .

Приведенные погрешности оценки нормированных корреляционных функций ПСП, полученные методом рекурсивной фильтрации для  $N=5000$ , представлены на рис. 3.4.

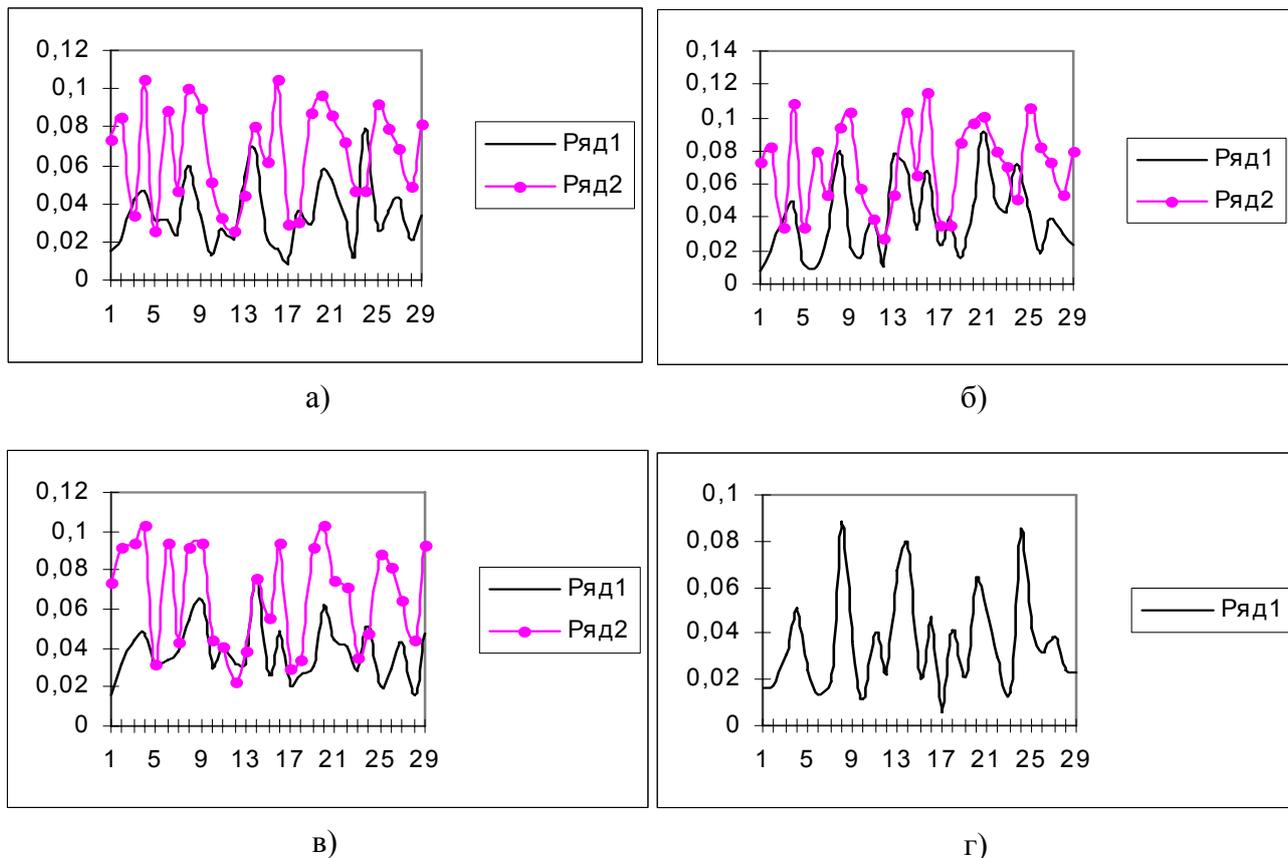


Рисунок 3.4. Приведенные погрешности оценки нормированных корреляционных функций (рекурсивная фильтрация)

На рисунке 3.4 приняты следующие обозначения:

- а) - ряд 1 -  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ , ряд 2 -  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ ;
- б) - ряд 1 -  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|)$ , ряд 2 -  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$ ;
- в) - ряд 1 -  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|)$ , ряд 2 -  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$ ;
- г) - ряд 1 -  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau| + \alpha^2 \tau^2 / 3)$ .

В таблице 3.7 приведено время генерирования ПСП для типовых моделей корреляционной функции при нерекурсивной и рекурсивной фильтрации с вычислением корреляционной функции при  $N=5000$ .

Из анализа таблиц 3.5-3.6. и рис. 3.3-3.4 можно сделать следующие выводы:

1. значения приведенных погрешностей оценки корреляционной функции существенно зависят от значения ядра генератора «белого» шума, следовательно, в программу моделирования необходимо включать блок проверки - вычисления корреляционной функции с последующей её аппроксимацией параметрическими моделями;

2. максимальные значения приведенных погрешностей оценки нормированной корреляционной функции, вычисленных по 29 реализациям, для параметров, представленных в таблице 3.6-3.7, больше у алгоритмов нерекурсивной фильтрации:

3. время генерирования больше у алгоритмов нерекурсивной фильтрации;

4. объём памяти, необходимой для размещения программы, больше у алгоритмов рекурсивной фильтрации;

5. большие значения максимальной приведенной погрешности оценки нормированной корреляционной функции следует ожидать при генерировании ПСП с колебательными моделями корреляционной функции.

Время генерирования ПСП с заданным видом корреляционной функции

Таблица 3.7

№	$\rho_x(\tau)$	N1	Время решения	
			Нерекурсив	Рекурсив
1	$e^{-\alpha \tau }$	9	9,54	6,19
2	$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau )$	13	12,16	8,05
3	$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau )$	19	17,27	10,45
4	$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau  + \alpha^2\tau^2 / 3)$	10	10,11	8,21
5	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	40	34,15	18,34
6	$e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	40	33,26	18,26
7	$e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	40	33,35	18,15

### 3. 4. Проверка качества генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций

Проверить качество генерирования псевдослучайной последовательности с заданным видом корреляционной функции можно и косвенными методами:

- путём сравнения параметров аппроксимирующего выражения корреляционной функции, соответствующих тому или иному критерию приближения, с заданными значениями;
- путем сравнения фазовых портретов заданной и вычисленной корреляционных функций сгенерированной последовательности.

Блок-схема программы оценки качества генерирования ПСП с заданным видом корреляционной функции с использованием аппроксимативного подхода представлена на рис. 3.5.



Рисунок 3.5. Блок-схема алгоритма проверки качества генерирования ПСП

В этом случае по найденным ординатам корреляционной функции находятся параметры заданного аналитического выражения корреляционной функции и оценивается погрешность аппроксимации. Результаты оценки представлены на рис. 3.6. В рассмотренных примерах приведены реализации ПСП длительностью 20 сек., а параметры корреляционной функции определялись для объема выборки  $M=1000$ . Интервал дискретизации определялся по таблице 3.1 для погрешности восстановления корреляционной функции  $\delta=0,02$ .

Для проверки качества генерирования ПСП, как и в случае идентификации законов распределения, корреляционных функций, представляется перспективным использование фазовых портретов. Под фазовым портретом будем понимать графическую зависимость, построенную в координатах:  $\rho_x(\tau)$  и  $\rho'_x(\tau)$  (см. рис. 3.7):

$$\rho'_x(\tau) = \Phi_x[\rho_x(\tau)]. \quad (3.25)$$

Следует отметить, что каждому типу корреляционных функций соответствует свой, уникальный фазовый портрет. На практике при построении фазового портрета вместо значения производных корреляционных функций возможно определение её приращений на заданном интервале.

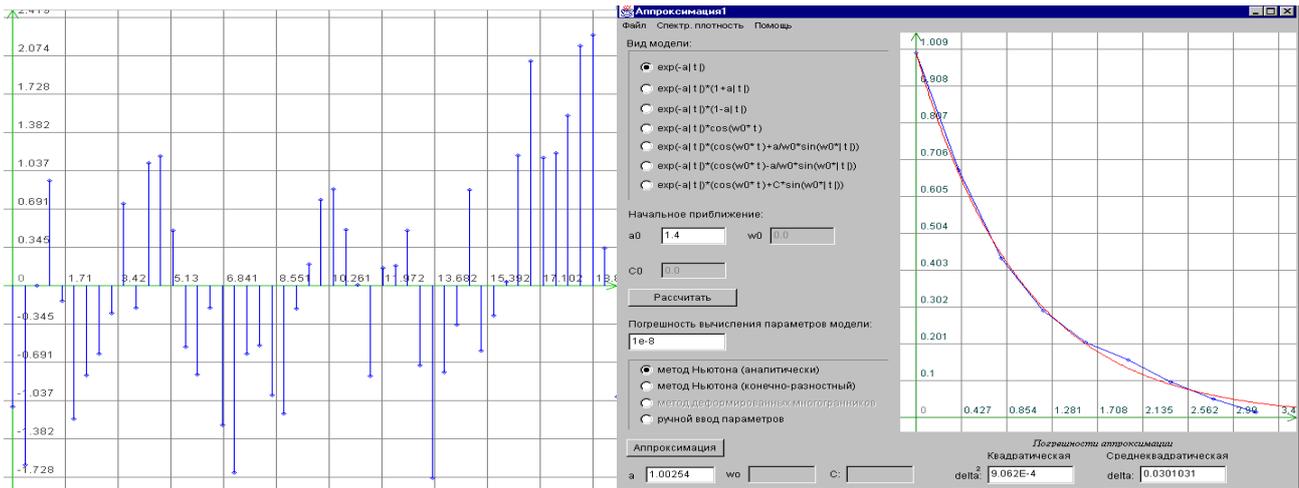
Для сравнения фазовых портретов определим квадратическую погрешность в виде:

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=0}^{J_{\max}} [\Phi_T[\rho_x(\tau_i)] - \Phi_x[\rho(\tau_i)]]^2}{\sum_{i=0}^{J_{\max}} \Phi_T^2[\rho_x(\tau_i)]}, \quad (3.26)$$

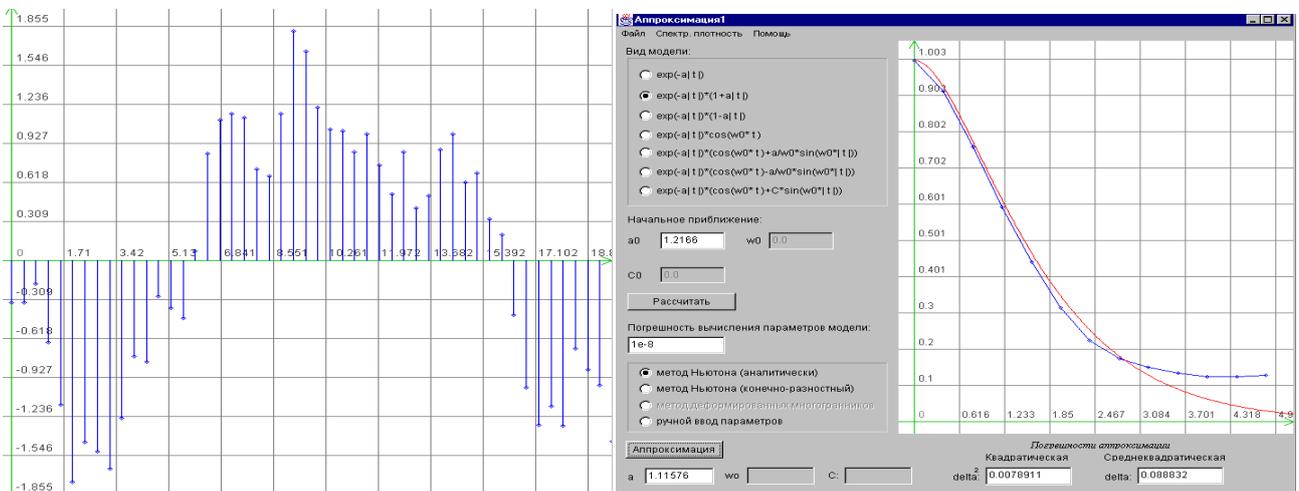
$\Phi_T[\rho_x(\tau_i)]$  - эталонный фазовый портрет.

На рис. 3.7 приведены фазовые портреты широко применяемых однопараметрических моделей. Следует отметить, что за исключением фазового портрета корреляционной функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$ , все фазовые портреты расположены в четвертом квадранте и не пересекают ось абсцисс. Кроме этого, фазовые портреты второй и четвертой моделей очень близки по форме и отличаются лишь численными значениями, в частности, значениями минимума.

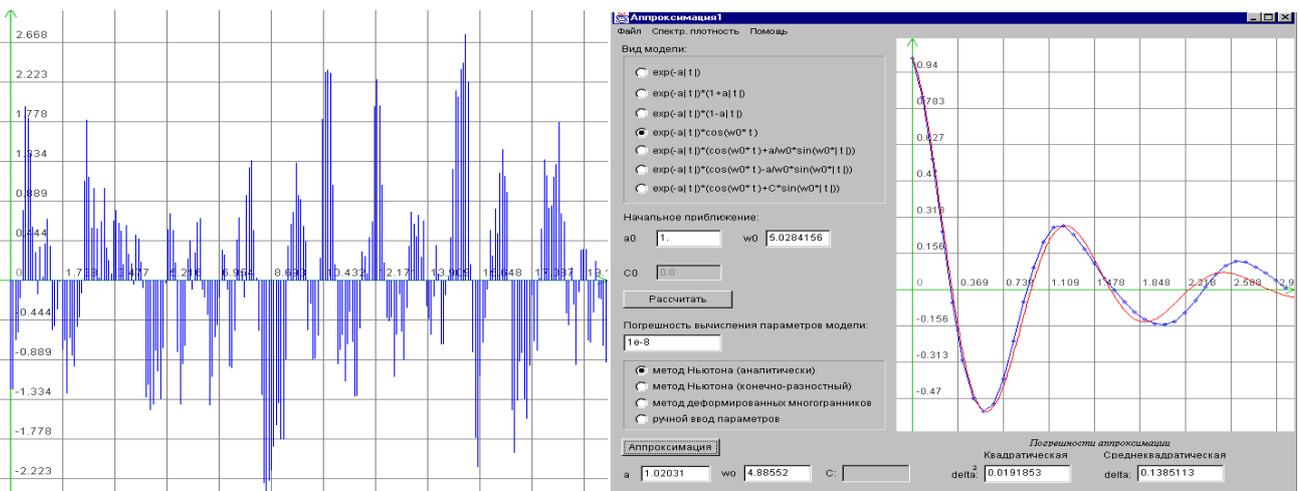
Фазовые портреты колебательных моделей, представленные на рис. 3.8, расположены во всех квадрантах. Причем, количество пересечений оси абсцисс зависит не от вида корреляционной функции, а от численного значения показателя колебательности  $\mu = \omega_0 / \alpha$ .



$$\text{а) } \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \alpha = 1, \Delta\tau = 0,4$$

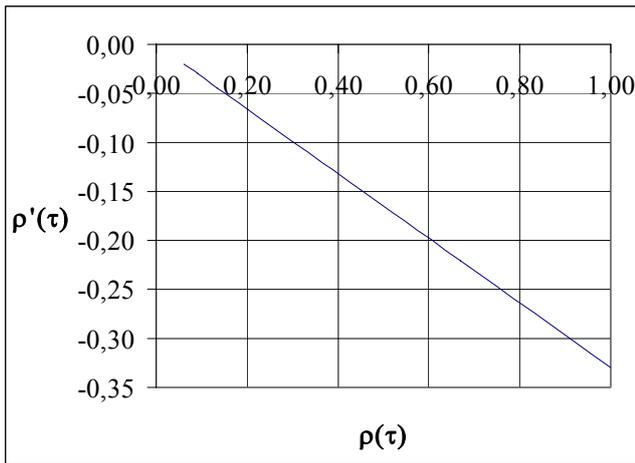


$$\text{б) } \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|), \alpha = 1, \Delta\tau = 0,4$$

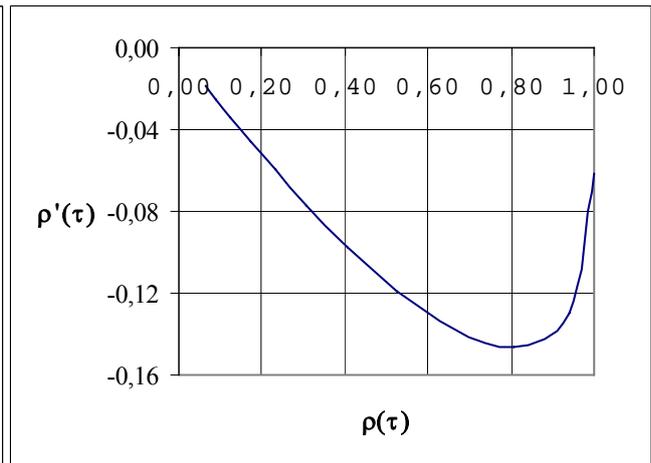


$$\text{в) } \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \alpha = 1, \omega_0 = 5, \Delta\tau = 0,082$$

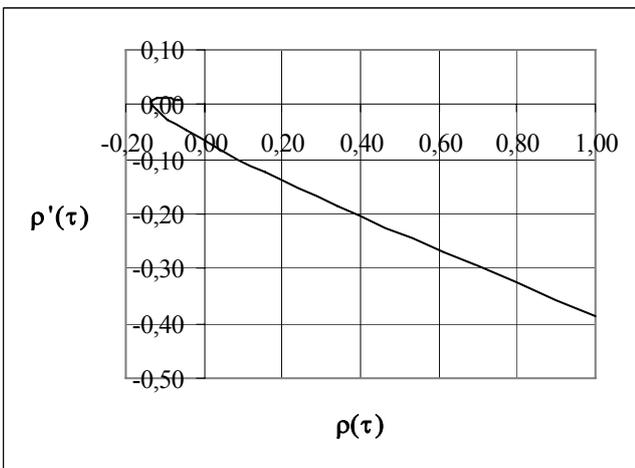
Рисунок 3.6. Проверка качества генерирования ПСП с использованием аппроксимации корреляционных функций



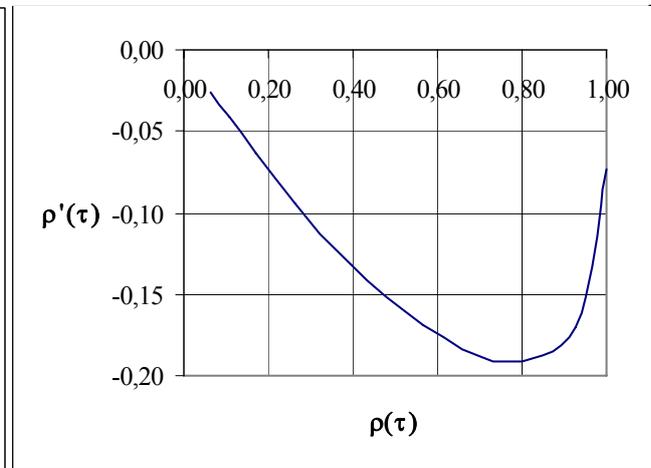
а)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ ,  $\alpha\tau = 0,4$



б)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$ ,  $\alpha\tau = 0,4$



в)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$ ,  $\alpha\tau = 0,23$



г)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau| + \alpha^2\tau^2/3)$ ,  $\alpha\tau = 0,693$

Рисунок 3.7. Фазовые портреты однопараметрических моделей

Алгоритм проверки качества генерирования ПСП с заданным видом КФ на основе анализа фазовых портретов (идентификации корреляционной функции ПСП) заключается в выполнении следующих этапов:

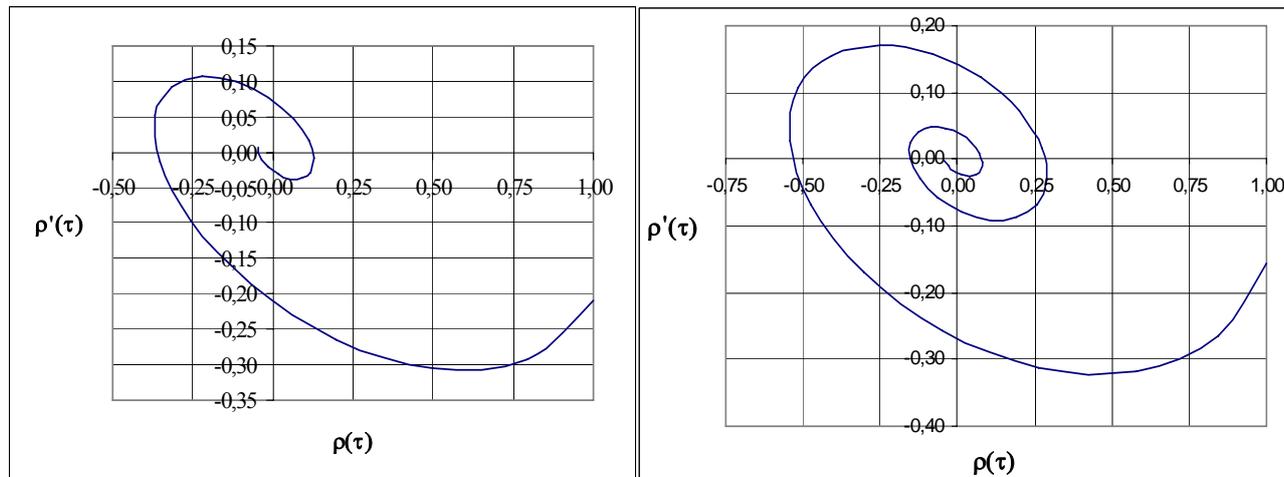
1. построения фазового портрета КФ сгенерированной ПСП с заданными параметрами;
2. построения фазового портрета заданной КФ - эталона;
3. сравнения фазовых портретов (вычисление квадратической погрешности).

На рис 3.9 представлены результаты анализа качества генерирования ПСП при различных объёмах выборки с  $\rho_{x2}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$ , а на рис. 3.10 – с  $\rho_{x5}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ .

Как и следовало ожидать, погрешность идентификации КФ по фазовым портретам уменьшается с увеличением объёма выборки. Исследования показали, что фазовые портреты являются устойчивыми при отношении интервала наблюдения к интервалу корреляции  $\geq 10$ .

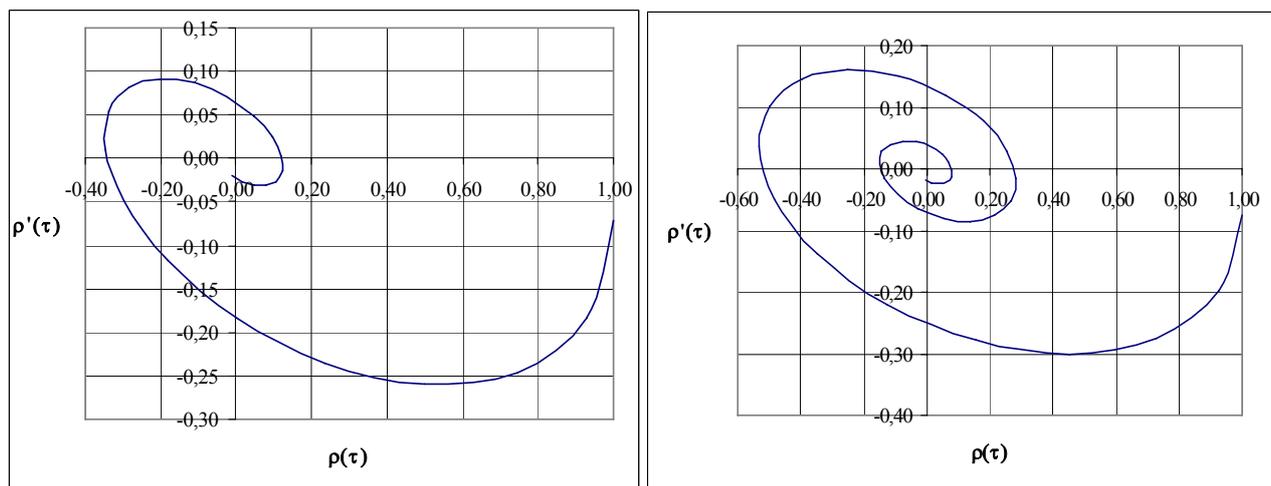
Тем не менее, проверять качество генерирования ПСП рекомендуется на выборке объёмом 5000-10000 отсчётов.

Поскольку при увеличении показателя колебательности наибольшие различия наблюдаются вблизи «нуля» корреляционной функции, наиболее информативным у фазового портрета является «хвост» [38].



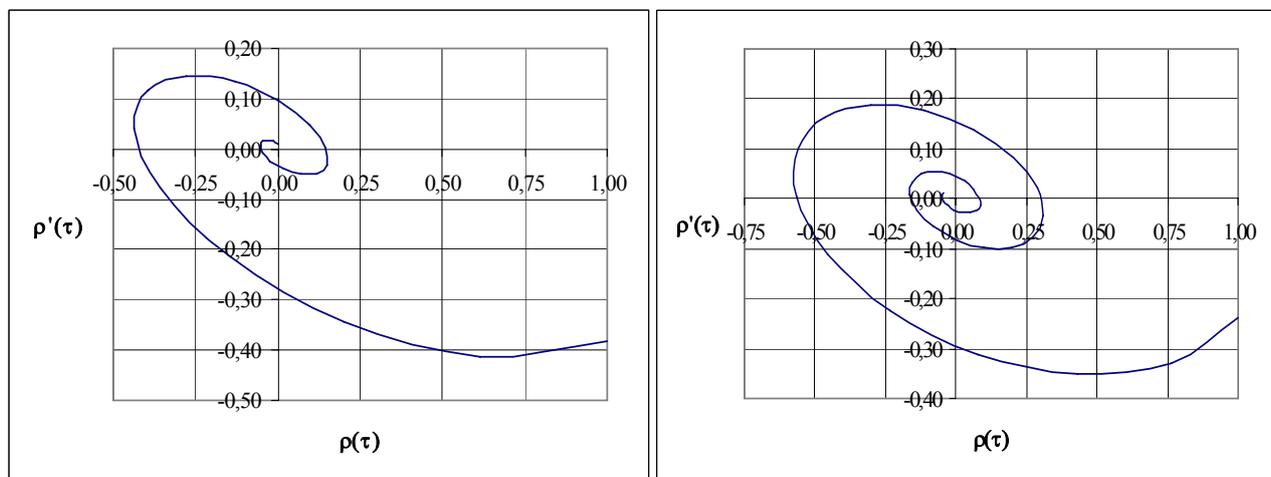
а)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \mu = 3$

б)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \mu = 5$



в)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 3$

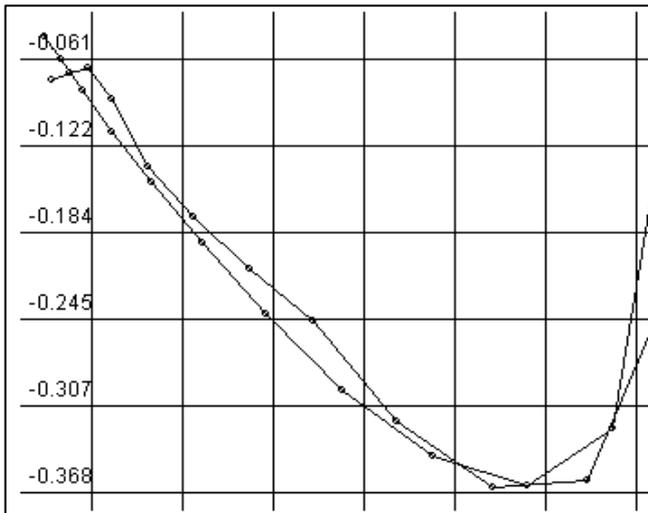
г)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 5$



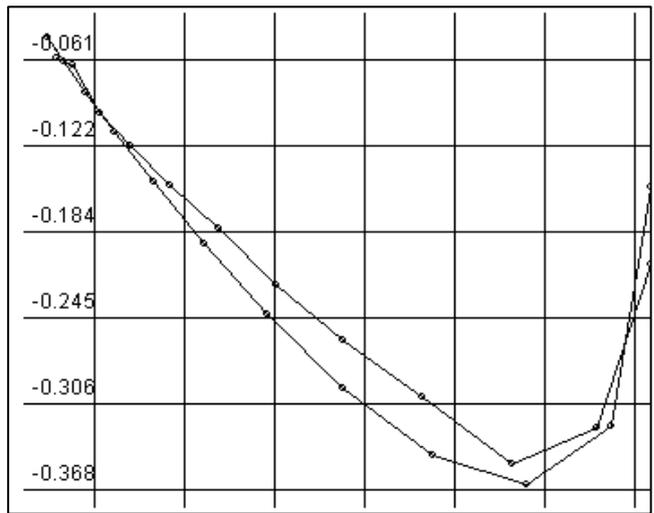
д)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 3$

е)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 5$

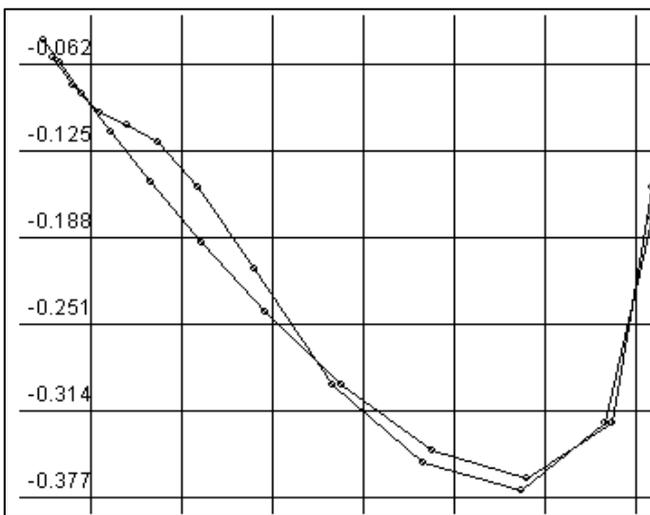
Рисунок 3.8. Фазовые портреты колебательных корреляционных функций



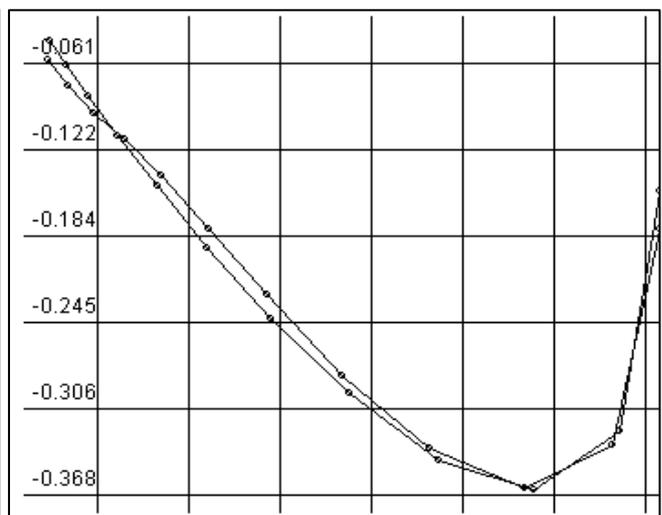
а)  $M=100; \delta^2=0,0283;$



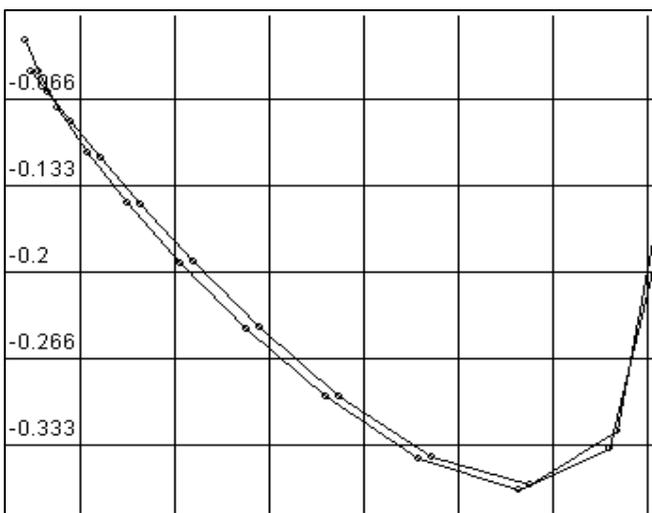
б)  $M=500; \delta^2=0,0165;$



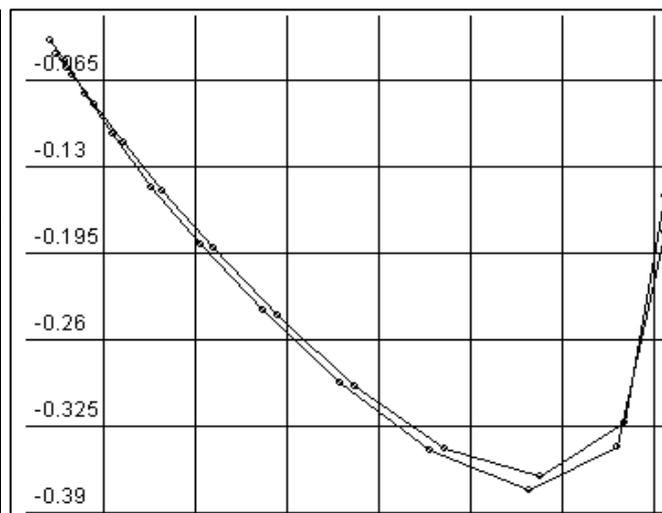
в)  $M=1000; \delta^2=0,0122;$



г)  $M=2000; \delta^2=0,0043;$

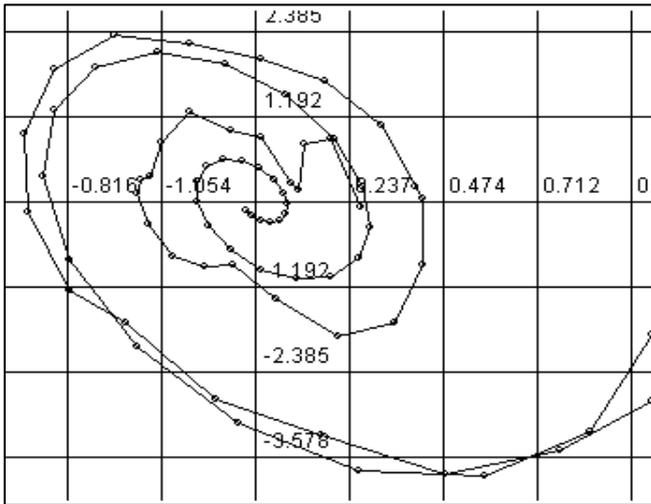


д)  $N=5000; \delta^2=0,0034;$

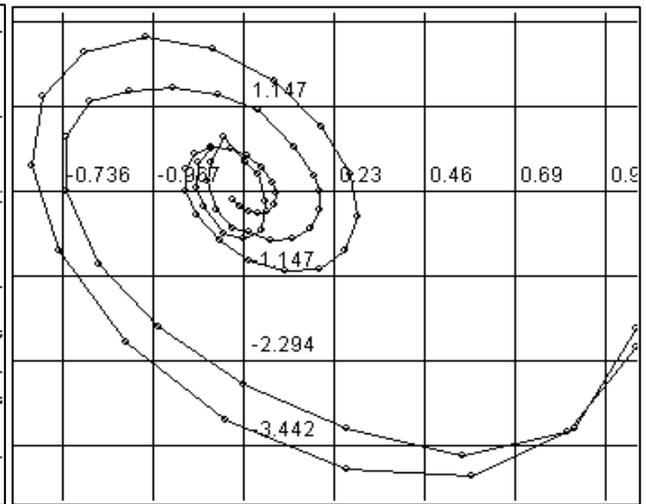


е)  $N=10000; \delta^2=0,0023;$

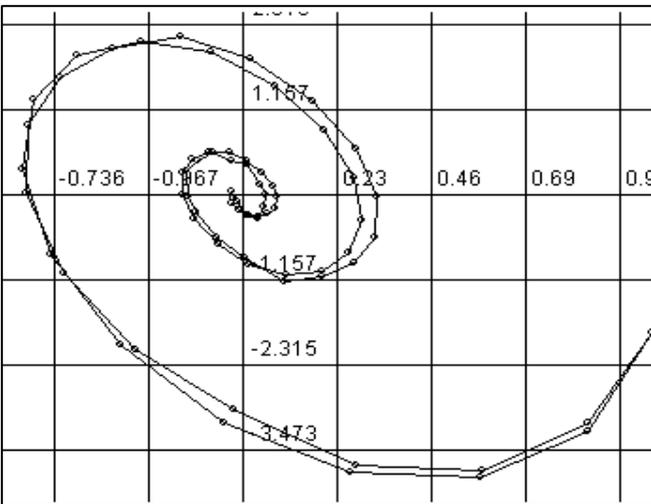
Рисунок 3.9. Влияние объёма выборки на результат идентификации монотонной корреляционной функции



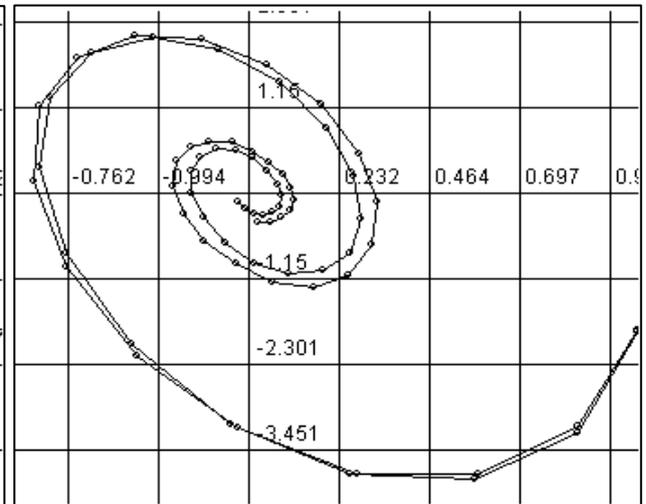
а)  $M=100$ ;  $\delta^2=0,5753$ ;



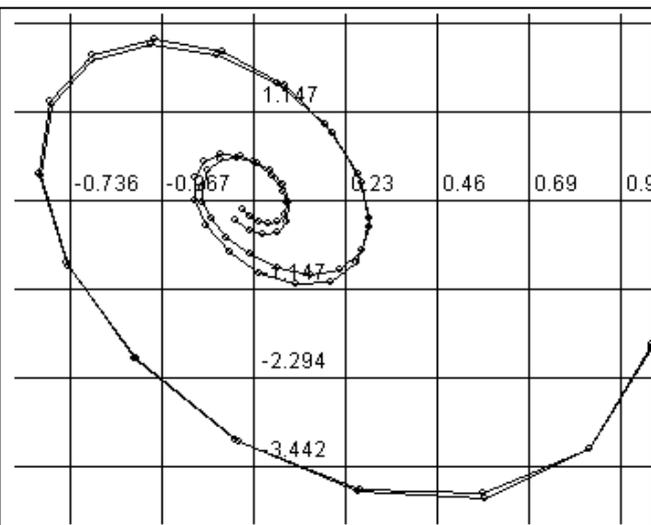
б)  $M=500$ ;  $\delta^2=0,1213$



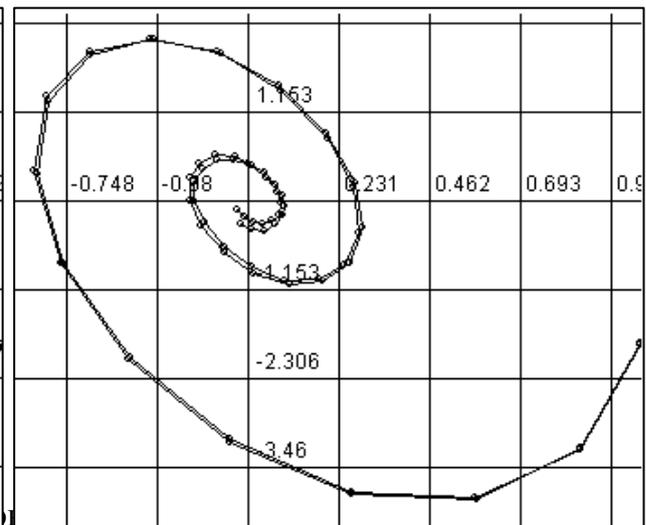
в)  $M=1000$ ;  $\delta^2=0,0289$ ;



г)  $M=2000$ ;  $\delta^2=0,0083$ ;

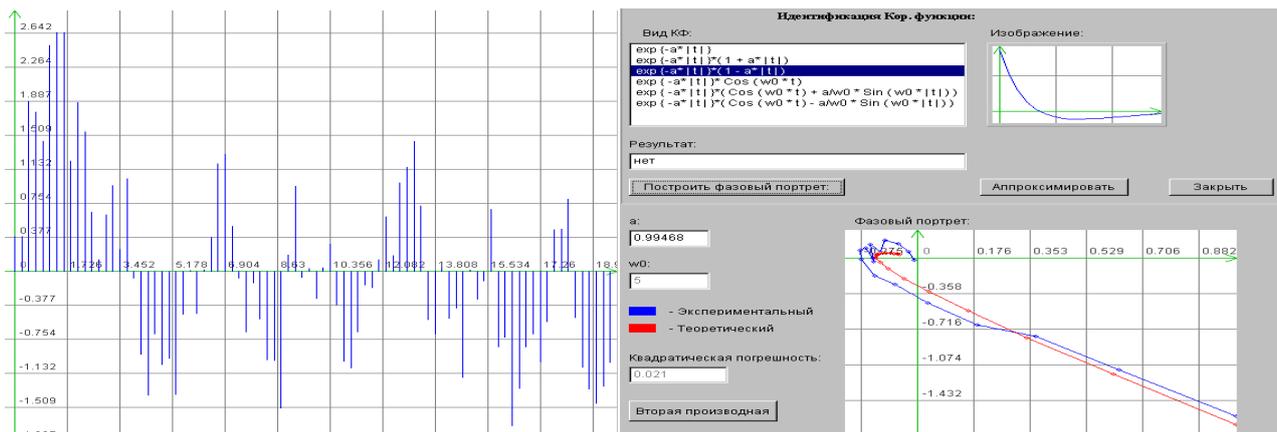


д)  $N=5000$ ;  $\delta^2=0,0025$ ;

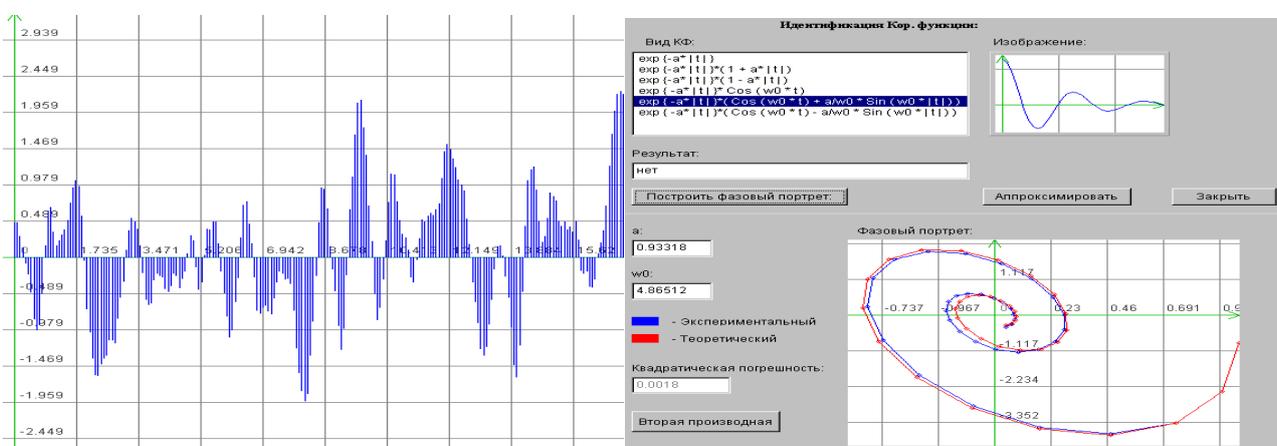


е)  $N=10000$ ;  $\delta^2=0,0019$ ;

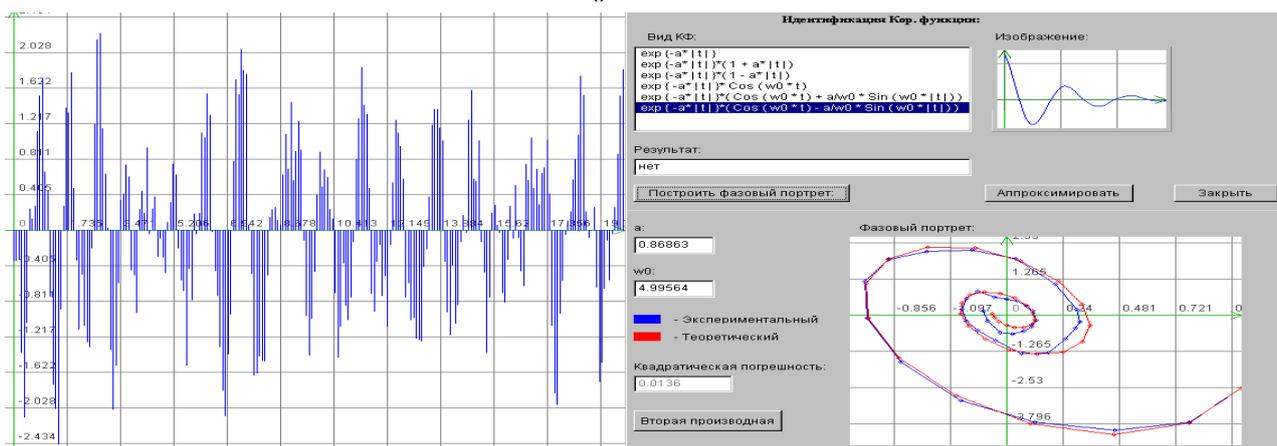
Рисунок 3.10. Влияние объема выборки на результат идентификации колебательной корреляционной функции



$$a) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|), \alpha = 1, \Delta\tau = 0,23$$



$$b) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right), \alpha = 1, \omega_0 = 5, \Delta\tau = 0,078$$



$$b) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right), \alpha = 1, \omega_0 = 5, \Delta\tau = 0,085$$

Рисунок 3.11. Проверка качества генерирования ПСП с использованием фазовых портретов

### 3.5. Моделирование N ПСП с заданным видом корреляционных функций, некоррелированных между собой

При исследовании методами имитационного моделирования многоканальных систем возникает необходимость в моделировании N ПСП с заданным видом корреляционной функции с определенными параметрами и некоррелированных между собой.

При решении этой задачи возможно как использование N независимых первичных ПСП, так и одного источника [9].

Более предпочтителен метод моделирования, использующий единственный источник ПСП. Один из подходов к моделированию заключается в применении ортогональных фильтров: Лагерра, Лежандра, Чебышева и т.д. [5]. Учитывая, что в приложениях очень часто применяются ортогональные функции Лагерра:

$$L_k(\tau) = \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)!} \frac{(-\alpha\tau)^s}{(s!)^2} e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}, \quad (3.27)$$

обладающие свойством

$$\int_0^{\infty} L_k(\tau, \alpha) L_n(\tau, \alpha) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n; \\ \frac{1}{\alpha}, & \text{если } k = n \end{cases}, \quad (3.28)$$

найдем выходные сигналы ортогонального фильтра Лагерра.

Частотная характеристика фильтра Лагерра равна

$$W_k(j\omega) = \alpha \int_0^{\infty} L_k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha/2} \left( \frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k = \left( \frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right) W_{k-1}(j\omega). \quad (3.29)$$

Отсюда видно, что фильтр Лагерра имеет каноническую структуру (см. рис. 3.12). Выходные сигналы ячеек фильтра будут иметь вид:

$$y_k(t) = \alpha \int_0^{\infty} L_k(\tau) \overset{\circ}{x}(t - \tau) d\tau. \quad (3.30)$$

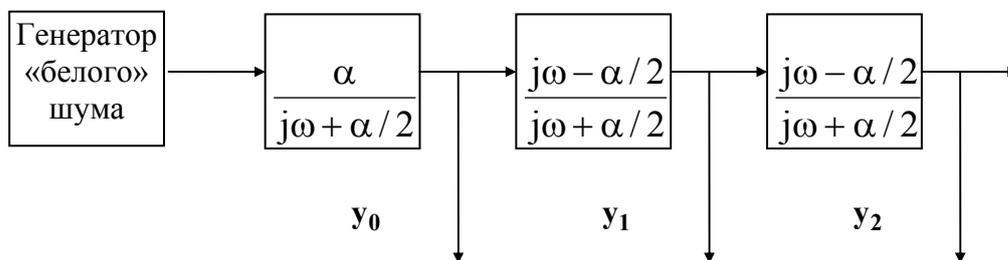


Рисунок 3.12. Генерирование N не коррелированных ПСП с заданным видом корреляционных функций

Покажем, что два различных выходных сигнала соответствующих фильтров не коррелированы между собой. В соответствии с определением корреляционный момент между двумя сигналами равен:

$$K_{kn} = \alpha^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} L_k(\tau) L_n(\tau_1) K_x(\tau - \tau_1) d\tau d\tau_1. \quad (3.31)$$

Если входной сигнал является «белым» шумом, воспользовавшись свойствами ортогональных функций Лагерра (3.28) и  $\delta$ -функции, получим:

$$K_{kn} = 2\pi S_0 \alpha^2 \int_0^{\infty} L_k(\tau) L_n(\tau) d\tau = 0. \quad (3.32)$$

Определим вид корреляционных функций выходных сигналов фильтра. Спектральная плотность мощности выходных сигналов фильтра с учётом (3.29) равна:

$$S_{y_k}(\omega) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2/4 + \omega^2} S_0. \quad (3.33)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье [18], определим корреляционные функции выходных сигналов фильтра:

$$K_{y_k}(\tau) = 2\pi\alpha S_0 e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}. \quad (3.34)$$

Отсюда видно, что корреляционные функции выходных сигналов соответствующих фильтров Лагерра имеют один и тот же вид и одинаковые параметры. Кроме того, как следует из выражения (3.32), выходные сигналы фильтра не коррелированы между собой.

При реализации алгоритма моделирования на ЭВМ возможно воспользоваться рекуррентной формулой для определения ортогональных функций  $n+1$  порядка [5]:

$$L_{n+1}(\tau) = (2n + 1 - \tau)L_n(\tau) - n^2 L_{n-1}(\tau), \quad (3.35)$$

$$\text{где } \begin{cases} L_0(\tau) = e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}; \\ L_1(\tau) = e^{-\frac{\alpha\tau}{2}} (1 - \alpha\tau). \end{cases} \quad (3.36)$$

Аналогично может быть решена задача и для других ортогональных функций, рассмотренных, например, в [5].

### 3.6. Генерирование 2-х ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функций

При исследовании взаимных коррелометров, спектроанализаторов, анализаторов структурных функций возникает необходимость в генерировании ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функций.

Самый простой вариант решения этой задачи заключается в генерировании ПСП с заданным видом корреляционной функции и её задержке на заданный временной интервал. В качестве критерия качества генерирования ПСП можно также воспользоваться косвенным методом:

- оценить взаимную корреляционную функцию;
- аппроксимировать её заданным аналитическим выражением с параметрами, удовлетворяющими минимуму квадратической погрешности аппроксимации;

- сравнить найденные параметры модели с требуемыми значениями параметров корреляционной функции (см. рис. 3.13).

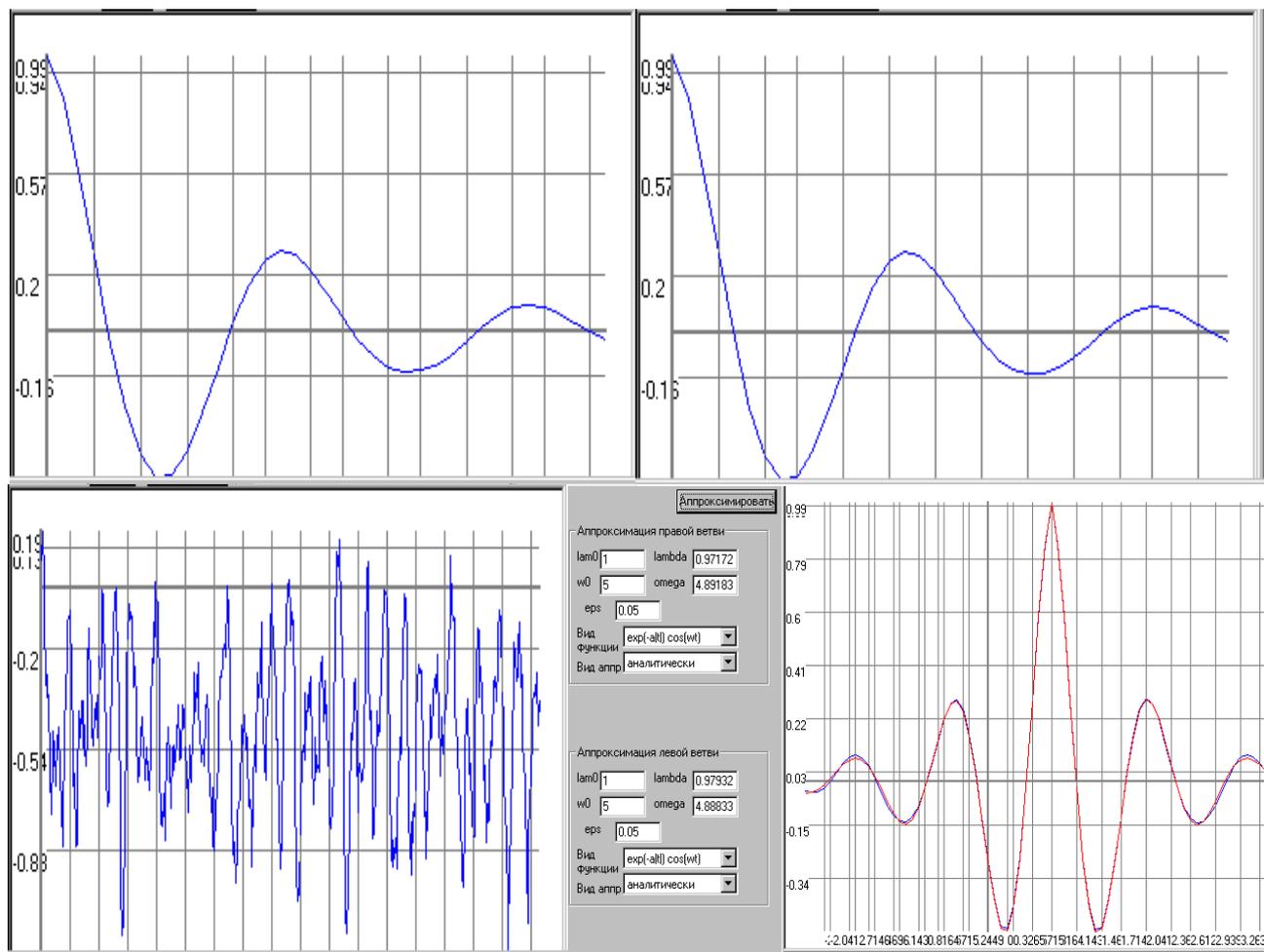


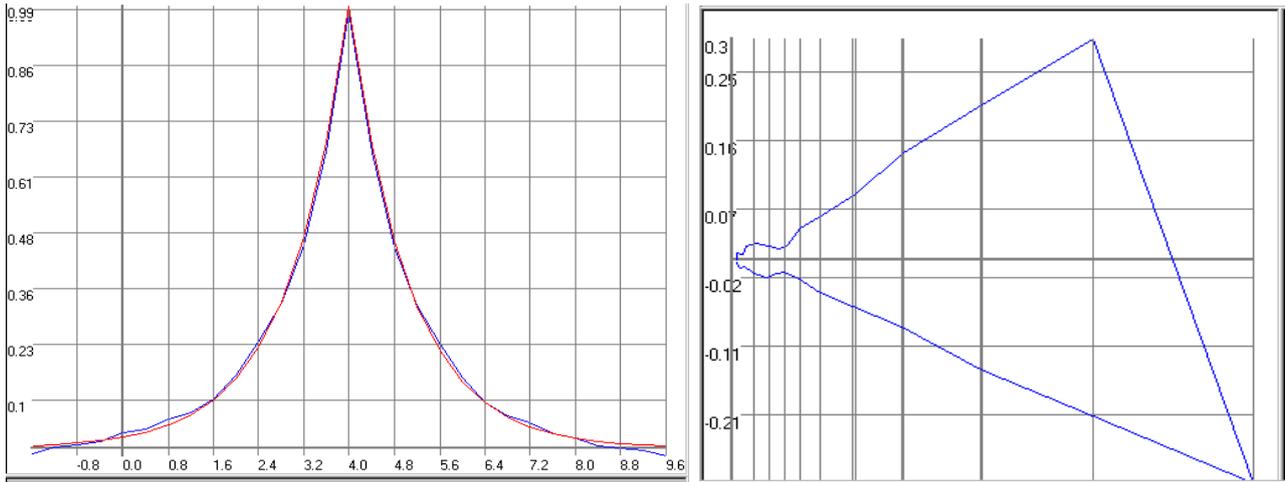
Рисунок 3.13. Пример генерирования ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функции

Вторым методом косвенной проверки качества генерирования двух процессов с заданным видом взаимной корреляционной функции является применение фазовых портретов. Методика проверки заключается в выполнении следующих этапов:

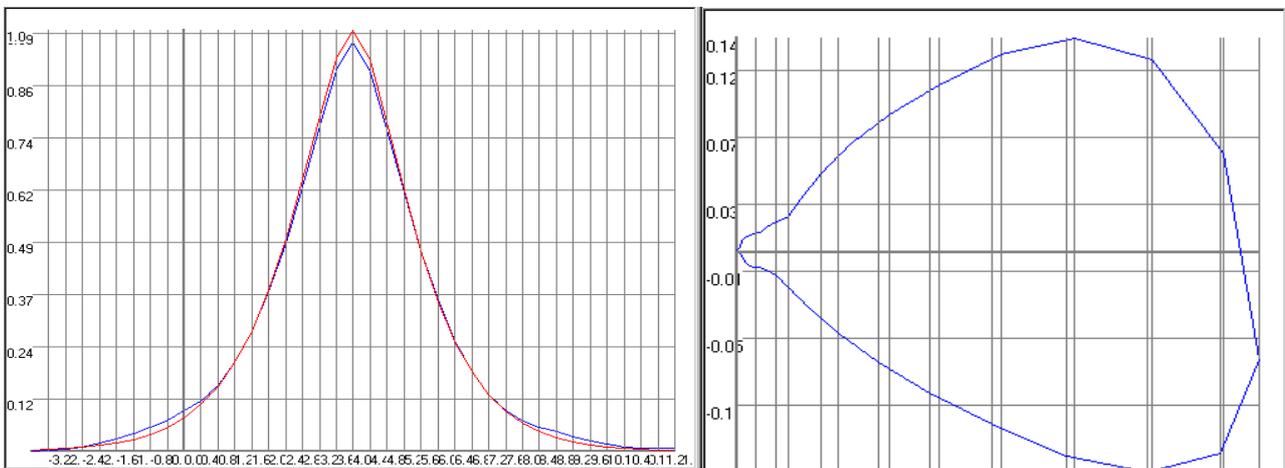
- генерирования ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функций;
- построения фазового портрета по взаимной корреляционной функции;
- сравнения фазового полученного фазового портрета с эталонным, определенным по аналитической модели требуемой взаимной корреляционной функции.

Преимущество такого способа проверки качества генерирования заключается в простоте, наглядности и отсутствия необходимости решать аппроксимативную задачу. На рис. 3.14-3.15 приведены примеры фазовых портретов типовых моделей взаимных корреляционных функций. Для сравнения приведены результаты аппроксимации взаимных корреляционных функций соответствующими параметрическими моделями.

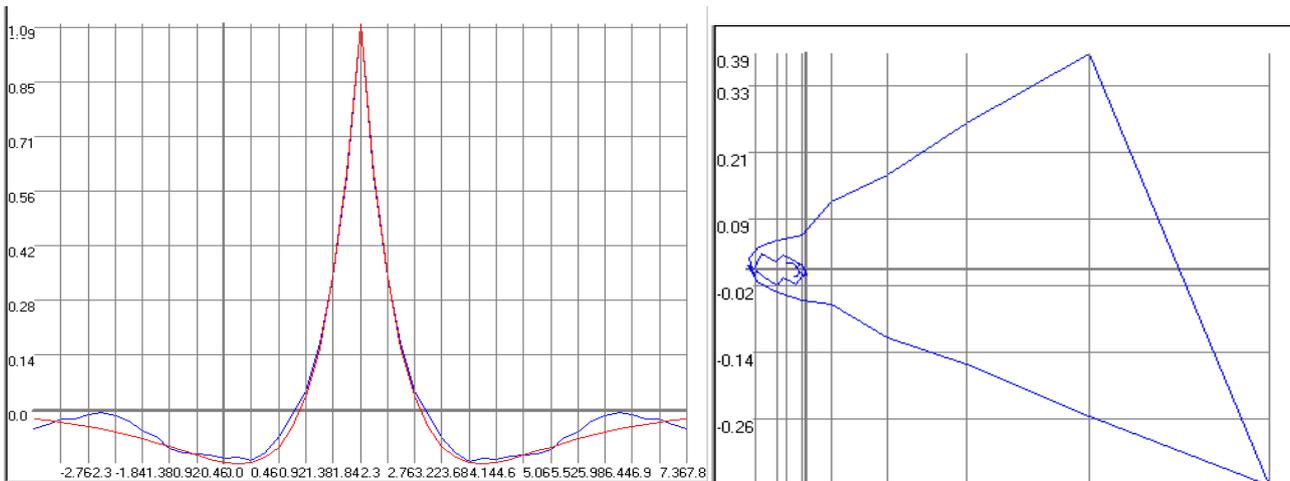
Следует отметить, что задача проверки качества подобным способом требует предварительного определения фазового портрета корреляционной функции для генерируемого процесса.



а)  $\rho_x(\rho) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|}$ ,  $\alpha = 1, \tau_m = 10$

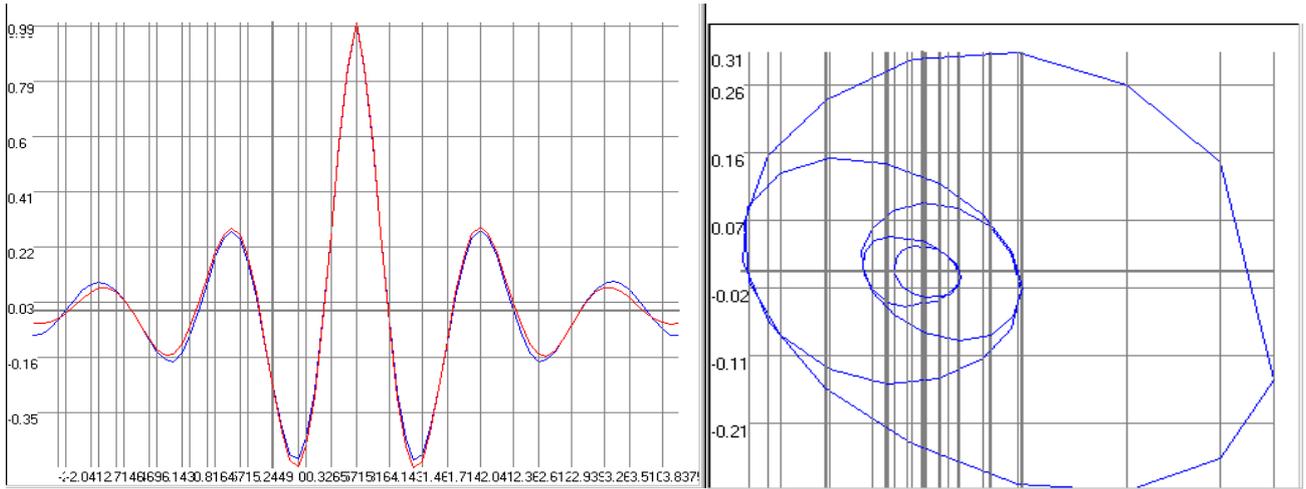


б)  $\rho_x(\rho) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|} (1 + \alpha|\tau - \tau_m|)$ ,  $\alpha = 1, \tau_m = 10$

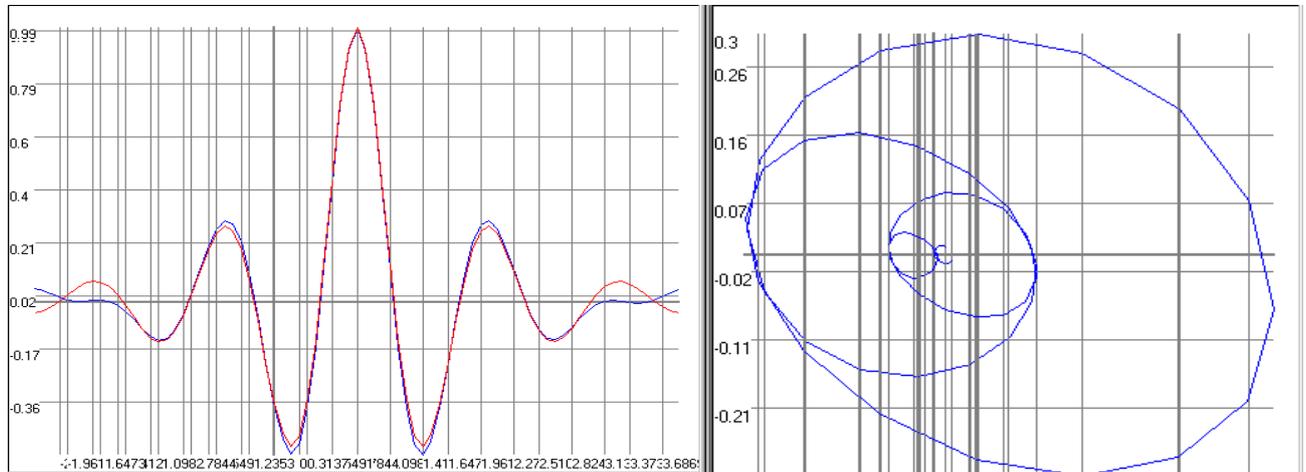


в)  $\rho_x(\rho) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|} (1 - \alpha|\tau - \tau_m|)$ ,  $\alpha = 1, \tau_m = 10$

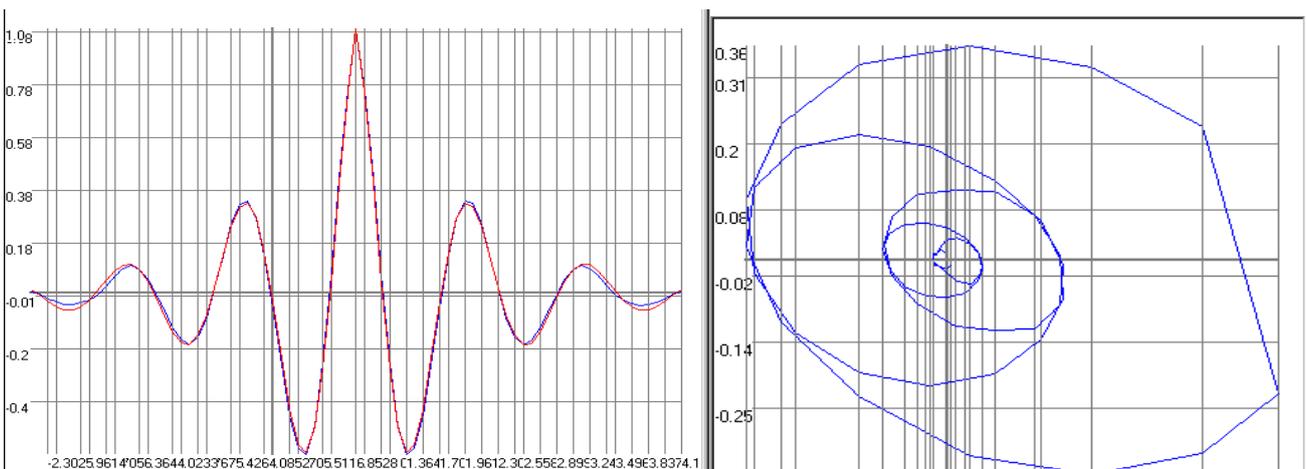
Рисунок 3.14. Взаимные корреляционные функции и фазовые портреты монотонных моделей



a)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|} \cos \omega_0(\tau - \tau_m)$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\omega_0 = 5$ ,  $\tau_m = 10$



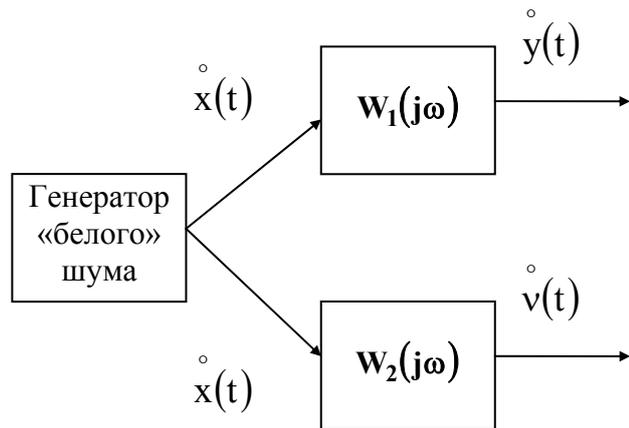
a)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|} (\cos \omega_0(\tau - \tau_m) + \alpha/\omega_0 \sin \omega_0(\tau - \tau_m))$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\omega_0 = 5$ ,  $\tau_m = 10$



a)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|} (\cos \omega_0(\tau - \tau_m) - \alpha/\omega_0 \sin \omega_0(\tau - \tau_m))$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\omega_0 = 5$ ,  $\tau_m = 10$

Рисунок 3.15. Взаимные корреляционные функции и фазовые портреты колебательных моделей

Эта задача также может быть решена и методом фильтрации с использованием единственного источника первичного сигнала (см. рис. 3.16).



Спектральные плотности мощности

сигналов  $\dot{z}(t)$  и  $\dot{v}(t)$  соответственно равны:

$$\begin{cases} S_z(\omega) = S_0 |W_1(j\omega)|^2; \\ S_v(\omega) = S_0 |W_2(j\omega)|^2; \\ S_{zv}(\omega) = S_0 W_1(j\omega)W_2(-j\omega); \\ S_{vz}(\omega) = S_0 W_1(-j\omega)W_2(j\omega), \end{cases} \quad (3.37)$$

где  $W_1(j\omega)$ ,  $W_2(j\omega)$  - частотные характеристики формирующих фильтров.

Рисунок 3.16. Генерирование коррелированных ПСП с заданным видом корреляционных функций

В таблице 3.8 для примера приведены выражения для импульсных переходных характеристик формирующих фильтров и соответствующие им корреляционные функции.

ные функции.

Импульсные характеристики формирующих фильтров

Таблица 3.8

$h_1(\tau)$	$h_2(\tau)$	$K_z(\tau)$	$K_v(\tau)$	$K_{zv}(\tau)$	$K_{vz}(\tau)$
$k_1 \alpha e^{-\alpha\tau}$	$k_2 \alpha^2 \tau e^{-\alpha\tau}$	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } * (1 + \alpha \tau )$
$k_1 \alpha e^{-\alpha\tau}$	$k_2 \alpha e^{-\alpha\tau} (1 - \alpha\tau)$	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau )$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } * (1 - \alpha \tau )$
$k_2 \alpha^2 \tau e^{-\alpha\tau}$	$k_2 \alpha e^{-\alpha\tau} (1 - \alpha\tau)$	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau )$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_x^2 \alpha\tau * e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_x^2 \alpha\tau * e^{-\alpha \tau }$

В таблице 3.8. приняты следующие обозначения:

$$k_1 = \sigma_x \sqrt{\frac{1}{\alpha\pi S_0}}, \quad k_2 = \sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi S_0}}.$$

Реализация формирующих фильтров упрощается в случае применения почти канонических структур (см. рис. 3.17).

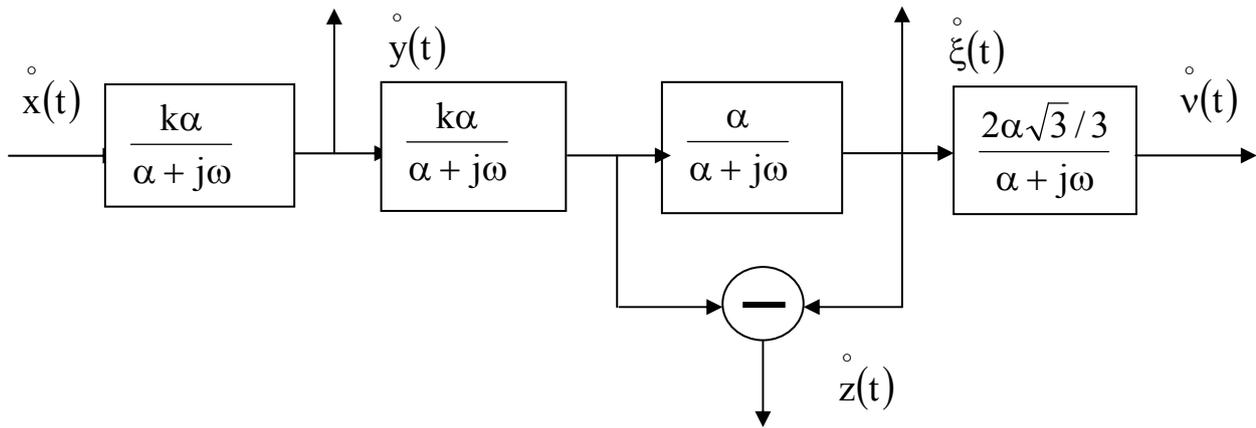


Рис. 3.19 Пример реализации формирующего фильтра

Корреляционные функции выходных сигналов ячеек формирующего фильтра равны:

$$\begin{cases} K_y(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}; \\ K_\xi(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|); \\ K_z(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|); \\ K_v(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau| + \alpha^2 \tau^2 / 3). \end{cases} \quad (3.38)$$

Приведем приближенные уравнения, полученные при замене производной выходного сигнала в дифференциальном уравнении, описывающим работу фильтра, отношениями приращений:

$$\begin{cases} y_m = y_{m-1} + \frac{\alpha \Delta k}{1 + \alpha \Delta} x_m; \\ \xi_m = \xi_{m-1} + \frac{\sqrt{2} \alpha \Delta}{1 + \alpha \Delta} y_m; \\ z_m = \sqrt{2} y_m - \xi_m; \\ v_m = v_{m-1} + \frac{2\sqrt{3} \alpha \Delta / 3}{1 + \alpha \Delta}, \end{cases} \quad (3.39)$$

где  $k = \sqrt{\frac{2}{\alpha \Delta}}$ , а  $\alpha \Delta$  выбирается исходя из допустимой погрешности вычисления корреляционных функций (см. таблицы 3.1).

### 3.7. Генерирование ПСП с заданным видом корреляционной функции и законом распределения отличным от нормального

При решении ряда задач возникает необходимость в анализе нелинейных систем при случайном входном воздействии. Аналитическое решение этой задачи возможно в некоторых случаях только для нормальных входных процессов, и даже в этом случае, как правило, применяют приближенные методы и оценивают погрешность приближения. Эта процедура достаточно сложна и громоздка [17]. Если же входной процесс отличен от нормального, аналитическое решение задачи практичес-

ки невозможно. Тем не менее, успешное исследование подобных систем возможно методами имитационного моделирования на ЭВМ.

Первым шагом в этом направлении является генерирование ПСП с требуемым видом корреляционной функции и закона распределения. Следует отметить, что в настоящее время удовлетворительного решения этой задачи не найдено. Это объясняется рядом причин. Для генерирования подобных ПСП применяют две процедуры: линейную фильтрацию и нелинейное преобразование. Выходной сигнал фильтра при выполнении условия, а оно для «белого» шума всегда выполняется,

$$\Delta\omega_c \ll \Delta\omega_\varphi, \quad (3.40)$$

где  $\Delta\omega_c$  и  $\Delta\omega_\varphi$  эквивалентная полоса пропускания фильтра и эквивалентная ширина спектра мощности случайного процесса, распределен по закону близкому к нормальному. Нормализация процесса выполняется тем лучше, чем лучше выполняется условие (3.40). С другой стороны, нелинейное преобразование изменяет форму и значения параметров корреляционной функции.

Однако, как показали исследования, при удачном подборе функции преобразования возможно приемлемое решение задачи [47] (см. рис. 3.20).

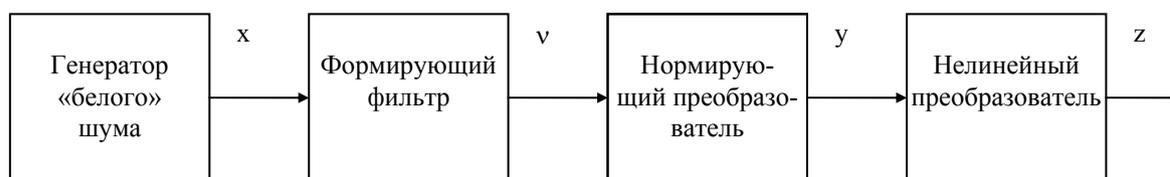


Рисунок 3.20. Генерирование ПСП с заданным видом корреляционной функции и законом распределения отличным от нормального

Выходной сигнал генератора «белого» шума  $x(t)$  распределен по равномерному закону и  $x(t) \in [0, 1]$ . Выходной сигнал формирующего фильтра  $v(t)$  распределен по нормальному закону и находится в диапазоне  $v \in [v_{\min}, v_{\max}]$ . Для нормальной работы нелинейного преобразователя необходимо, чтобы  $y \in [0, 1]$  (см. подраздел 2.2). Следовательно, нормирующий преобразователь должен выполнять преобразование:

$$y(t) = \frac{v(t) - v_{\min}}{v_{\max} - v_{\min}}. \quad (3.41)$$

Предположим, что корреляционная функция выходного сигнала формирующего фильтра известна (импульсная переходная характеристика формирующего фильтра определена), а нелинейная функция преобразования имеет вид:

$$z(t) = 1 - \exp(-\lambda y(t)), \quad y(t) \in [0, 1]. \quad (3.42)$$

Разложим экспоненту в ряд Маклорена, ограничившись для простоты тремя членами ряда. Тогда

$$z(t) = \lambda y(t) - \frac{\lambda^2}{2} y^2(t). \quad (3.43)$$

Математическое значение сигнала  $z(t)$  равно:

$$m_z = \lambda m_y - \frac{\lambda^2}{2} (m_y^2 + \sigma_y^2). \quad (3.44)$$

Центрированное значение случайной величины  $\overset{\circ}{z}(t)$  примет вид:

$$\overset{\circ}{z}(t) = \lambda \overset{\circ}{y}(t) - \frac{\lambda^2}{2} [y^2(t) - m_y^2 - \sigma_y^2]. \quad (3.45)$$

Корреляционная функция сигнала  $z(t)$  равна:

$$\begin{aligned} K_z(\tau) = & K_y(\tau) (\lambda^2 - 2\lambda^3 m_y + \lambda^4 m_y^2) - \frac{1}{2} M \left[ \overset{\circ}{y}(t) \overset{\circ}{y}^2(t-\tau) \right] (\lambda^3 - \lambda^4 m_y) - \\ & - \frac{1}{2} M \left[ \overset{\circ}{y}^2(t) \overset{\circ}{y}(t-\tau) \right] (\lambda^3 - \lambda^4 m_y) + \frac{\lambda^4}{4} M \left[ \overset{\circ}{y}^2(t) \overset{\circ}{y}^2(t-\tau) \right] - \frac{\lambda^4}{4} \sigma_y^4. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Для определения  $K_z(\tau)$  необходимо вычислить:

$$\begin{cases} \mu_{1,2} = M \left[ \overset{\circ}{y}(t) \overset{\circ}{y}^2(t-\tau) \right]; \\ \mu_{2,1} = M \left[ \overset{\circ}{y}^2(t) \overset{\circ}{y}(t-\tau) \right]; \\ \mu_{2,2} = M \left[ \overset{\circ}{y}^2(t) \overset{\circ}{y}^2(t-\tau) \right]. \end{cases} \quad (3.47)$$

Воспользовавшись результатами таблицы 1.3, определим, что

$$\begin{cases} \mu_{1,2} = \mu_{2,1} = 0; \\ \mu_{2,2} = \sigma_y^4 + 2K_y^2(\tau). \end{cases} \quad (3.48)$$

Подставив выражения (3.47) в (3.46), окончательно получим:

$$K_z(\tau) = K_y(\tau) \lambda^2 (1 - \lambda m_y)^2 + \frac{\lambda^2}{2} K_y^2(\tau). \quad (3.49)$$

Выражение (3.49) позволяет с некоторым приближением определить корреляционную функцию выходного сигнала.

Следующим шагом является определение закона распределение выходного сигнала. Для рассматриваемого случая, воспользовавшись теорией функции случайного аргумента (см. подраздел 1.3), закон распределения ПСП  $z$  равен:

$$f_z(z) = f_y[\psi(z)] \left| \frac{dy}{dz} \right|, \quad (3.50)$$

где

$$\begin{cases} f_y(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}; \\ y = \psi(z) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-z); \\ \left| \frac{dy}{dz} \right| = \frac{1}{\lambda(1-z)}. \end{cases} \quad (3.51)$$

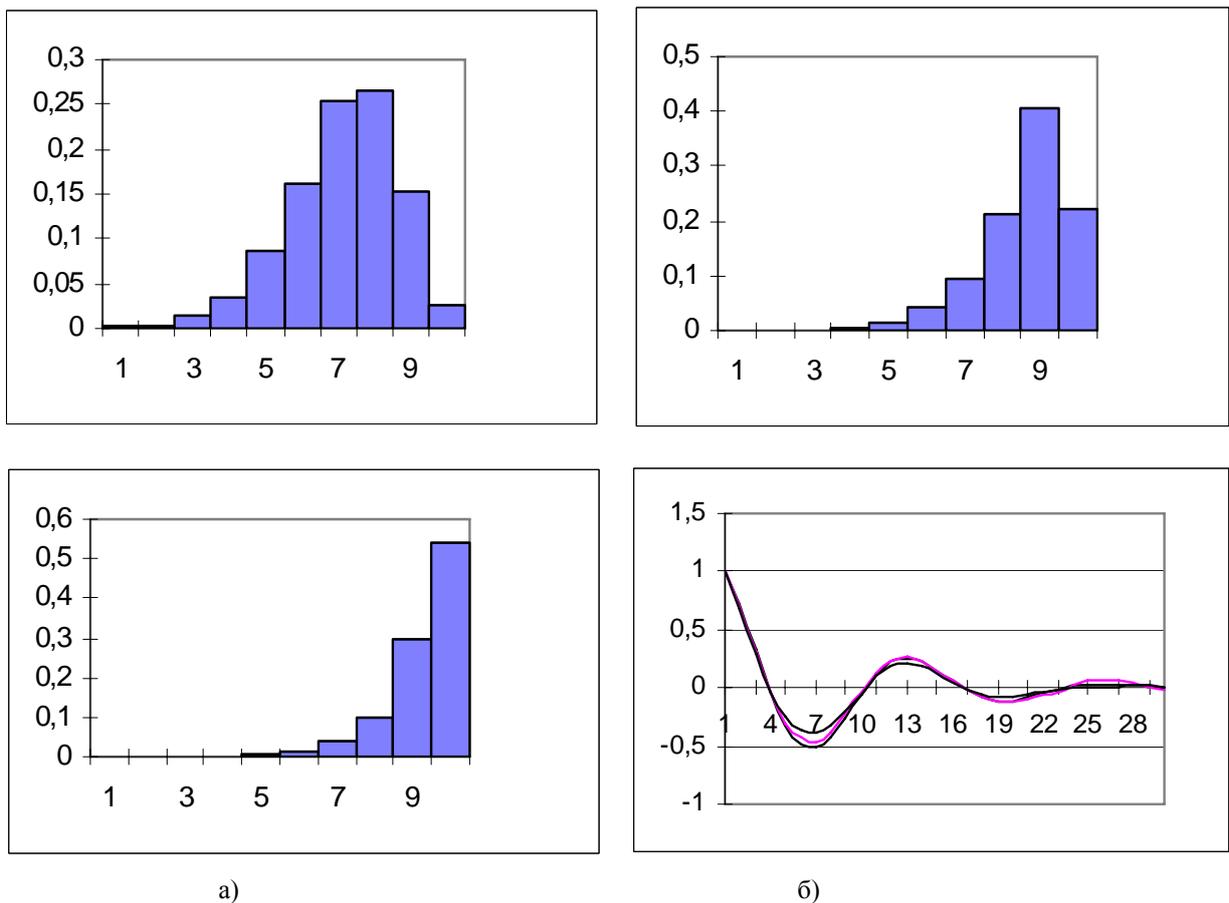
Подставив выражение (3.51) в (3.50), окончательно получим:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sigma_y \lambda \sqrt{2\pi(1-z)}} e^{-\frac{[\ln(1-z) + m_y]^2}{2\lambda^2 \sigma_y^2}} \quad (3.52)$$

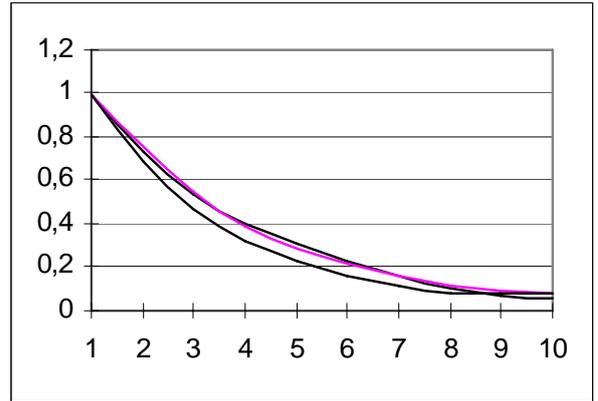
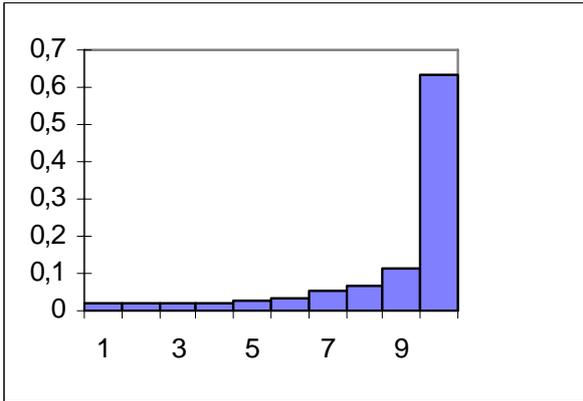
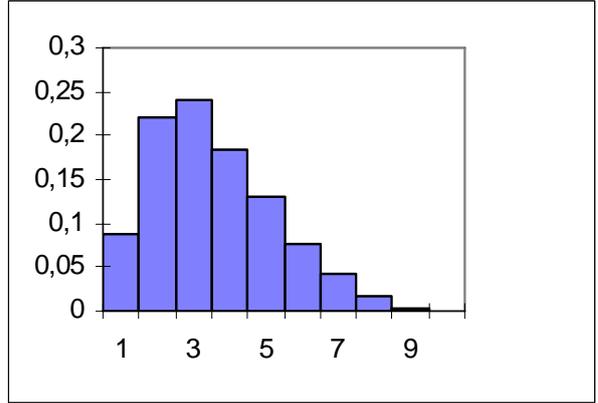
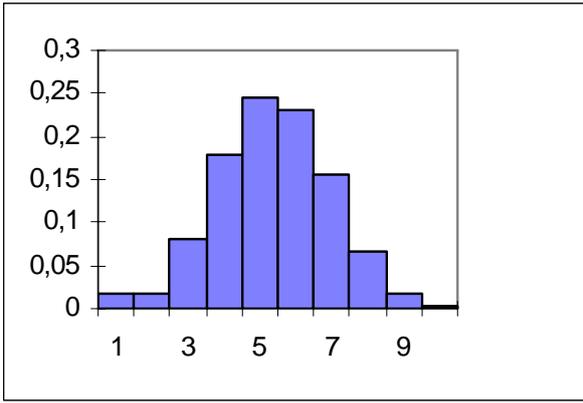
Задаваясь различным видом функций преобразования, значениями их параметров и импульсными переходными характеристиками формирующих фильтров, в соответствии с предложенной методикой можно определить корреляционные функции и плотности распределения вероятностей генерируемой ПСП.

Результаты генерирования ПСП с заданным видом корреляционной функции для различных видов функционального преобразования представлены на рис. 3.21-3.25 [62]:

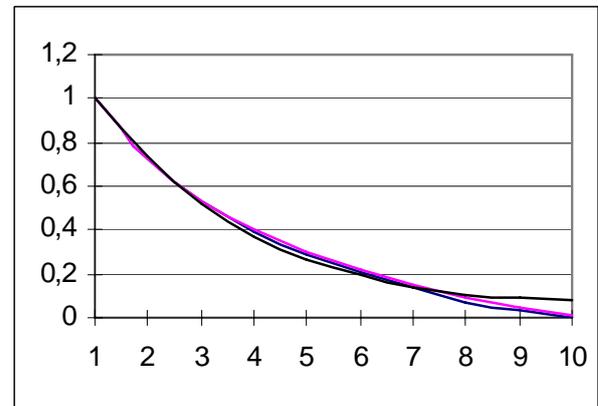
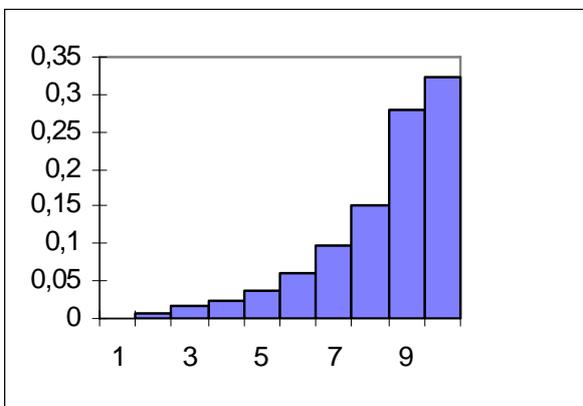
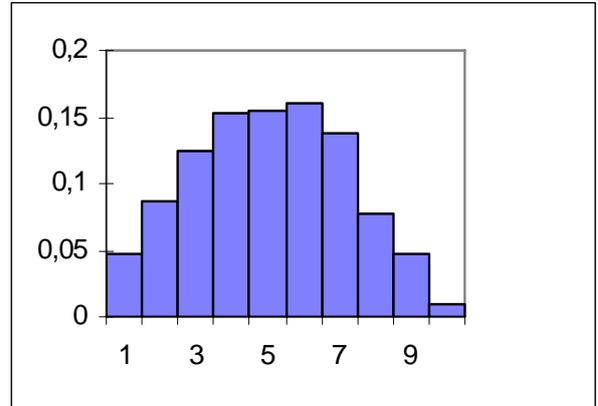
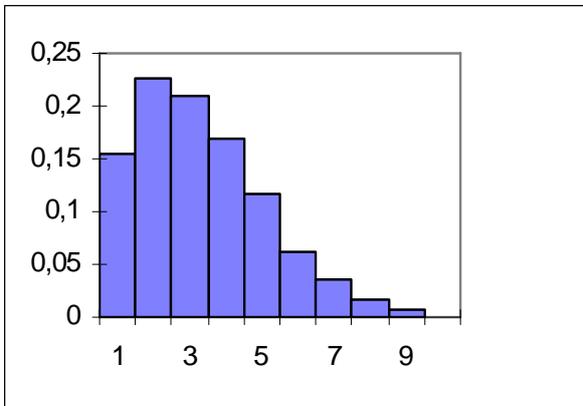
- на рис. 3.21 -  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ ,  $\alpha = 1 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\omega_0 = 5 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\Delta \tau = 0,1 \text{ сек}$ ;  $z(t) = 1 - \exp(-\lambda y(t))$ ,
- на рис. 3.22 -  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ ,  $z(t) = 1 - \exp(-\lambda y(t))$ ;
- на рис. 3.23 -  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ ,  $z(t) = 1 - \exp(-\lambda y(t))(1 + \lambda y(t) + \lambda^2 y(t)^2 / 3)$ .



а) б)  
Рисунок 3.21. Гистограммы и корреляционные функции ПСП



а) б)  
Рисунок 3.22. Гистограммы и корреляционные функции ПСП



а) б)  
Рисунок 3.23. Гистограммы и корреляционные функции ПСП

В таблице 3.9 приведены характеристики законов распределения, представленных на рис. 3.21-3.23.

### Характеристики законов распределения

Таблица 3.9

№ рисунка	$\lambda$	$X_{\min}$	$X_{\max}$	$k_a$	$k_\varepsilon$
3.21	5	-4,4469	2,2672	-0,6613	0,4969
	10	-6,7074	1,5922	-1,5109	3,5249
	15	-8,3298	1,1531	-2,3375	8,7062
3.22	0,1	-3,2973	3,3879	0,0874	-0,3046
	0,5	-1,8204	4,1507	0,6516	-0,0657
	5	-3,6871	0,06731	-1,8887	2,8578
3.23	1	-1,5769	4,0065	0,7694	0,2326
	5	-2,1405	2,5557	0,0254	-0,7388
	10	-4,3998	1,1921	-1,3581	1,5223

Результаты, представленные на рис. 3.21-3.23 и в таблице 3.9, показывают возможность генерирования ПСП с заданным видом корреляционной функции и законом распределения отличным от нормального. Дальнейшее направление исследований заключается в выборе функций нелинейного преобразования и оценке полученных результатов.

### 3.8. Генерирование неэквидистантных временных рядов

Генерирование неэквидистантных временных рядов основано на «прореживании» регулярного ( $\Delta t_i = \text{const}$ ) временного ряда с учётом модели потока событий.

При этом выделим два случая:

- регулярный временной ряд и поток событий генерируются независимо;
- характеристики потока событий определяются характеристиками регулярного временного ряда.

В первом случае (см. рис. 1.21) на вход ключа поступает временной ряд, содержащий  $N$  отсчётов. На выходе ключа неэквидистантный временной ряд содержит лишь  $M$  отсчётов  $x(t_i)$  в моменты времени, совпадающими с отсчётами потока событий  $t_i$ . При этом  $M < N$ .

Таким образом, генерируются неэквидистантные временные ряды в случае непреднамеренной нерегулярной дискретизации. Для генерирования регулярных временных рядов, а также потоков событий с заданными характеристиками необходимо воспользоваться результатами подразделов 3.1 и 2.3.

Случай, когда характеристики потока событий определяются характеристиками процесса (регулярного временного ряда) представлен на рис. 1.22.

Как следует из подраздела 1.7 к такому виду нерегулярной дискретизации приводит адаптивная, спорадическая дискретизация и адаптивная коммутация, которые и определяют алгоритм функционирования анализатора активности сигнала.

Неэквидистантные временные ряды используются как для определения их статистических характеристик, так и для проведения метрологического анализа результатов оценивания вероятностных характеристик с применением тех или иных аппаратно-программных средств.

На рис. 3.24 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ , полученного в результате р-преобразования регулярного ряда со следующими параметрами:  $\alpha = 1$ ,  $\Delta\tau = 0,4$ ,  $p = 0,3$ ,  $N = 5000$ .

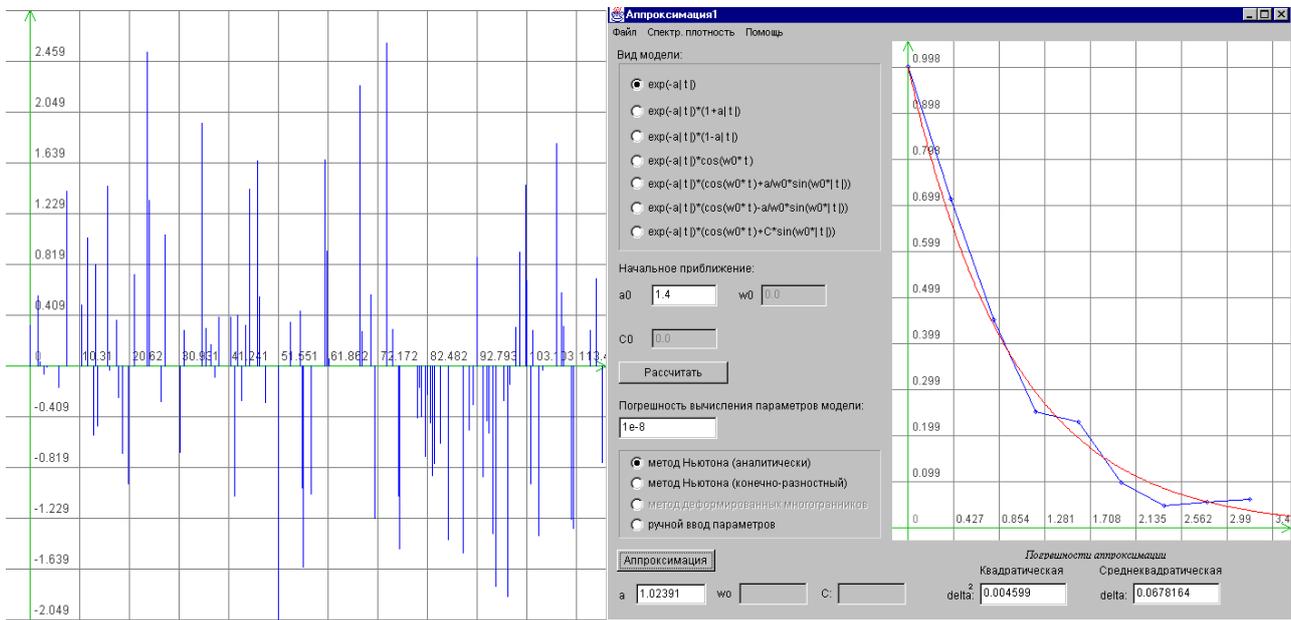


Рисунок 3.24. Результаты генерирования неэквидистантного временного ряда (р-преобразование)

На рис. 3.25 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ , полученного в результате р-преобразования регулярного ряда со следующими параметрами:  $\alpha = 1$ ,  $\omega_0 = 5$ ,  $\Delta\tau = 0,082$ ,  $p = 0,3$ ,  $N=5000$ .

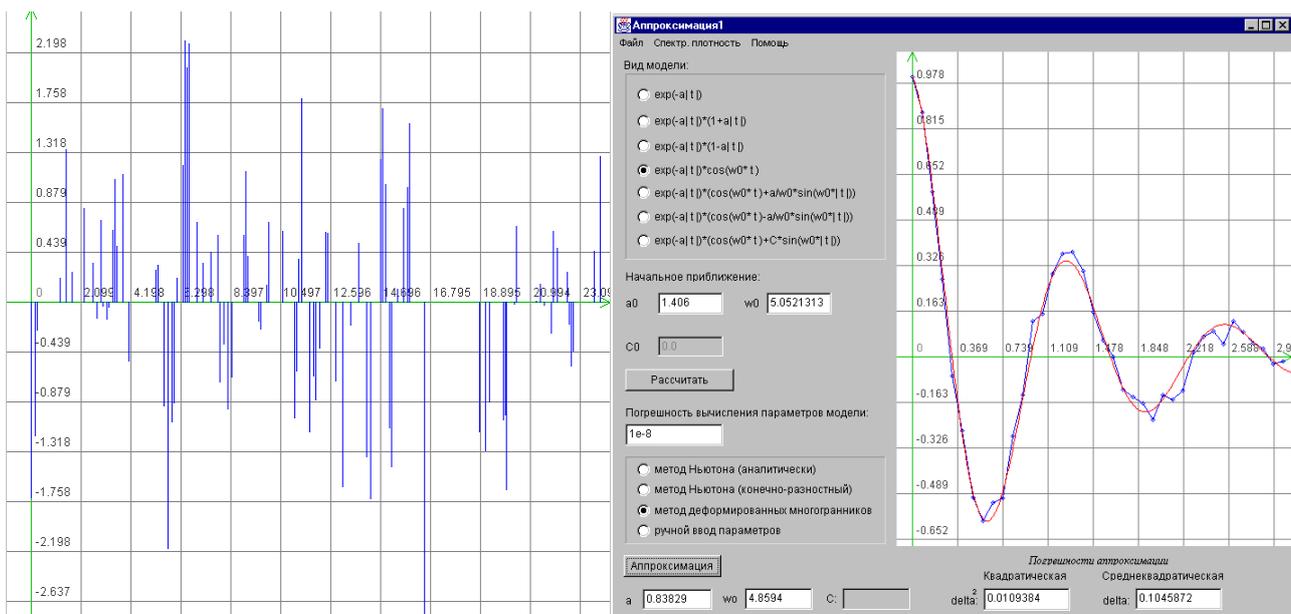


Рисунок 3.25. Результаты генерирования неэквидистантного временного ряда (р-преобразование)

На рис. 3.26 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ , полученного в результате «дрожания» регулярного ряда со следующими параметрами:  $\alpha = 1$ ,  $\Delta\tau = 0,4$ ,  $N = 5000$ .

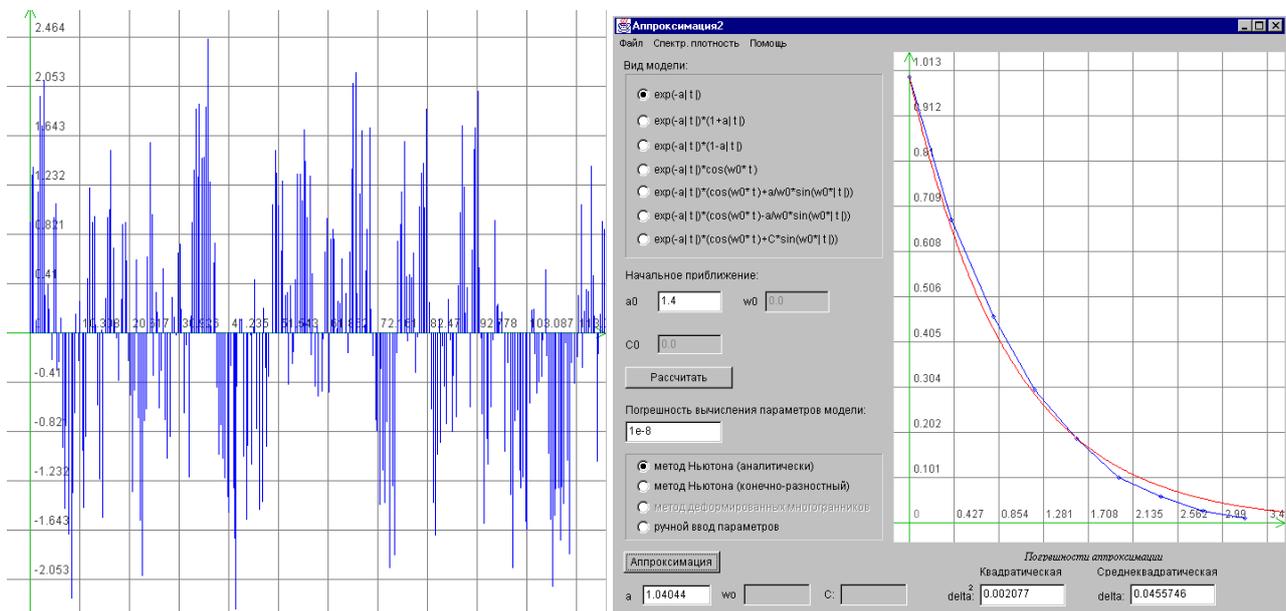


Рисунок 3.26. Результаты генерирования неэквидистантного временного ряда («дрожание»)

На рис.3.27 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ , полученного в результате «дрожания» регулярного ряда со следующими параметрами:  $\alpha = 1$ ,  $\omega_0 = 5$ ,  $\Delta\tau = 0,082$ ,  $N = 5000$ .

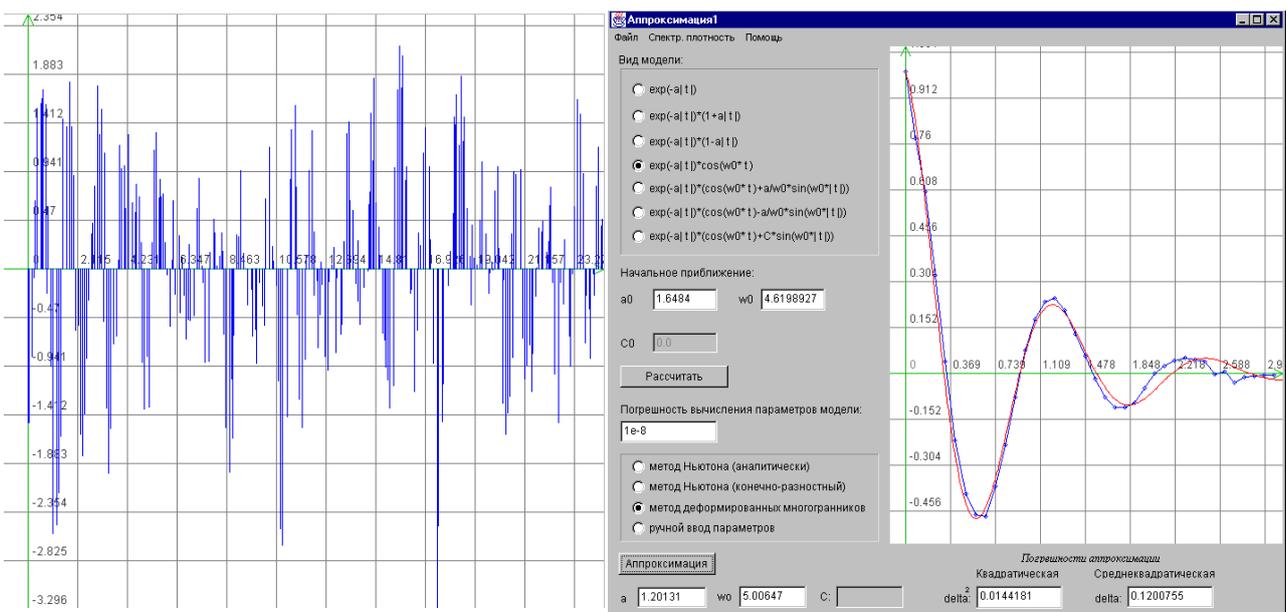


Рисунок 3.27. Результаты генерирования неэквидистантного временного ряда («дрожание»)

На рис. 3.28 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ , полученного в результате адаптивно-временной дискретизацией регулярного ряда со следующими параметрами:  $\alpha = 1, \omega_0 = 5, \Delta\tau = 0,4, \gamma = 0,5, N=5000$ .

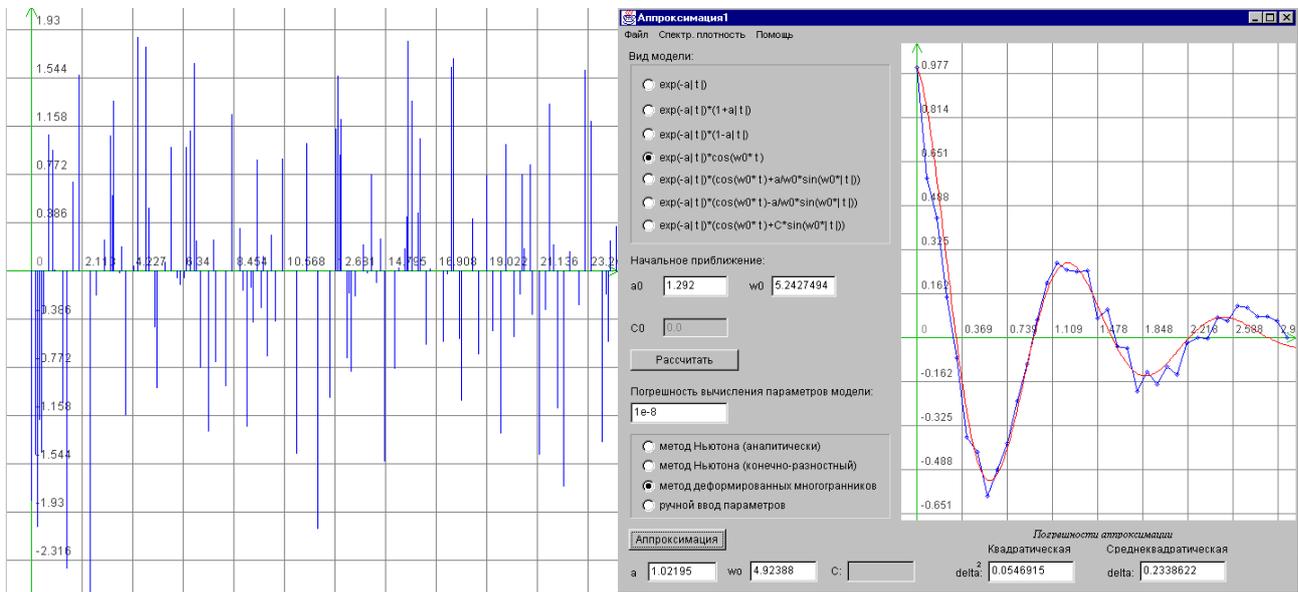


Рисунок 3.28. Результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с адаптивно-временной дискретизацией

На рис. 3.29 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ , полученного в результате адаптивно-временной дискретизацией регулярного ряда со следующими параметрами:  $\alpha = 1, \omega_0 = 5, \Delta\tau = 0,4, \gamma = 0,75, N=5000$ .

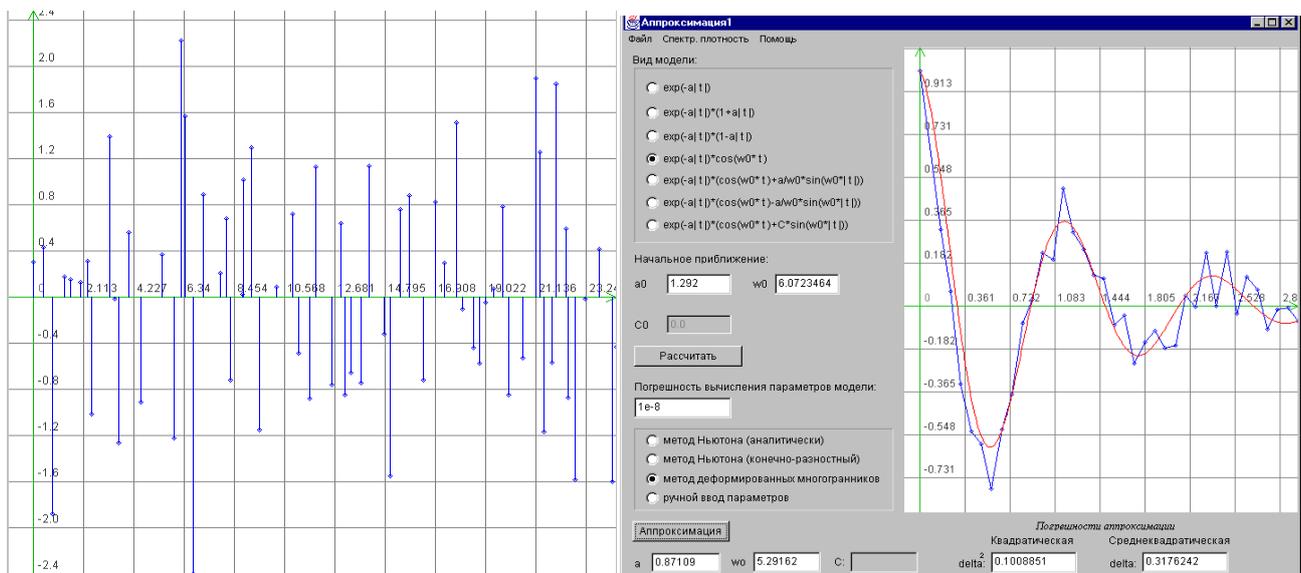


Рисунок 3.29. Результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с адаптивно-временной дискретизацией

Аналогичным образом можно генерировать неэквидистантные временные ряды и для других моделей нерегулярной дискретизации.

## 4. АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ АППРОКСИМАТИВНОГО КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

### 4.1. Аппроксимативный анализ авто корреляционно-спектральных характеристик

Для моделирования и аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа под руководством автора была разработана автоматизированная система [2, 28, 33, 38, 56], структурная схема которой представлена на рис. 4.1.

Автоматизированная система состоит из следующих подсистем:

- задания входных воздействий;
- генерирования неэквидистантных временных рядов (НВР);
- первичной и вторичной статистической обработки;
- идентификации КФ;
- аппроксимативного корреляционного анализа;
- аппроксимативного спектрального анализа.

Рассмотрим функции каждой подсистемы в отдельности.

**Подсистема задания входных воздействий** состоит из двух частей: генерирования псевдослучайной последовательности (ПСП) с заданным видом КФ и ввода данных из файла.

Данные, получаемые в первой подсистеме, поступают на вход подсистемы генерирования НВР, а также на вход подсистемы первичной статистической обработки. В обоих случаях передается объем выборки  $N$ , интервал дискретизации  $\Delta t_0$  и массив отсчетов СП.

**Подсистема генерирования НВР** включает в себя следующие способы получения НВР:  $p$ -преобразование, адаптивно-временная дискретизация, дискретизация с «дрожанием» и их комбинации. На выход подсистемы поступают два массива: массив времен (меток времени) и массив соответствующих им отсчетов СП, - а также объем выборки  $N$  и интервал дискретизации  $\Delta t_0$ .

**Подсистема первичной статистической обработки** включает в себя оценку числовых характеристик, центрирование и нормирование СП и оценку КФ. В данную подсистему передаются массивы меток времени и соответствующих им отсчетов СП, объем выборки  $N$  и интервал дискретизации  $\Delta t_0$ . При регулярной дискретизации оценка КФ производится с помощью мультипликативного алгоритма, а при обработке НВР - с помощью интервальной корреляционной функции [38, 39]. Выходными данными данной подсистемы являются количество отсчетов КФ, интервал дискретизации  $\Delta t_0$  и массив отсчетов КФ. Эти данные поступают на входы подсистем идентификации КФ и аппроксимации КФ.

**Подсистема идентификации КФ** состоит из двух частей: построения и анализа фазовых портретов и проверки качества идентификации. Данные в эту подсистему поступают из подсистемы первичной статистической обработки.

Используя переданные значения отсчетов КФ, в данной подсистеме производится построение фазового портрета данной КФ, а затем его последовательное сравнение с фазовыми портретами типовых КФ, используемых в системе. На основании результатов сравнения выбирается одна из типовых моделей КФ, при помощи которой в следующей подсистеме производится аппроксимация исходной КФ. Проверка качества идентификации производится на основании расчета квадратической погрешности фазового портрета.



Рисунок 4.1 Структура автоматизированной системы

**Подсистема аппроксимативного анализа** состоит из двух частей: аппроксимация КФ функциями заданного вида и функциями Лагерра с возможностью построения спектральной плотности мощности по параметрам модели.

На вход подсистемы аппроксимативного анализа поступают отсчеты КФ и вид аппроксимирующей функции (для случая аппроксимации функциями заданного вида) или количество членов разложения (при аппроксимации функциями Лагерра).

Используя переданные значения, в данной подсистеме вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующих выражений и среднеквадратическая погрешность аппроксимации. Затем, по желанию исследователя, возможно построение спектральной плотности мощности по параметрам модели.

Благодаря такому блочному построению структуры программы в систему можно добавлять новые возможности, не видоизменяя ее принципиально. Схема алгоритма приведена в приложении П.11. Рассмотрим подробнее работу подсистем, обеспечивающих генерирование ПСП с заданным видом корреляционных функций и проверку качества генерирования.

## Программная реализация

### Начало работы

При запуске программы на экране появляется форма, изображенная на рис. 4.2. В первую очередь следует выбрать тип дискретизации СП (регулярная или нерегулярная) и нажать кнопку «**Новая модель**» для генерирования случайного процесса. Или же нажать кнопку «**Загрузить КФ из файла**» и выбрать нужный файл с данными.

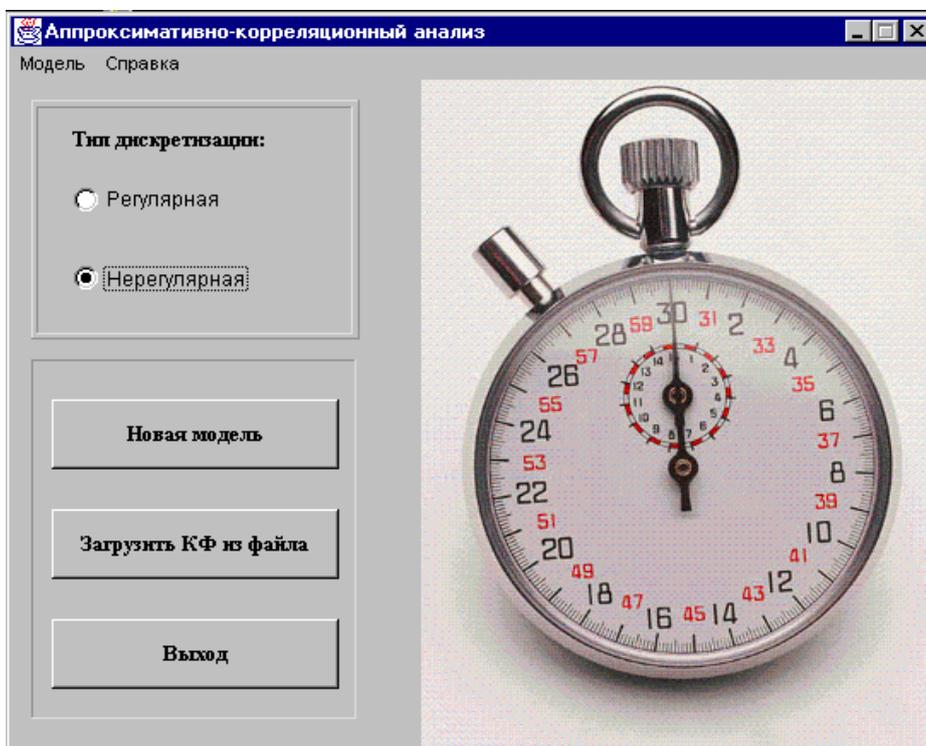


Рисунок 4.2. Вид формы начала работы в системе при регулярной дискретизации СП

## Генерирование СП с заданным видом КФ

На рис. 4.3 можно увидеть вид формы генерирования СП с заданным видом КФ при регулярной дискретизации.

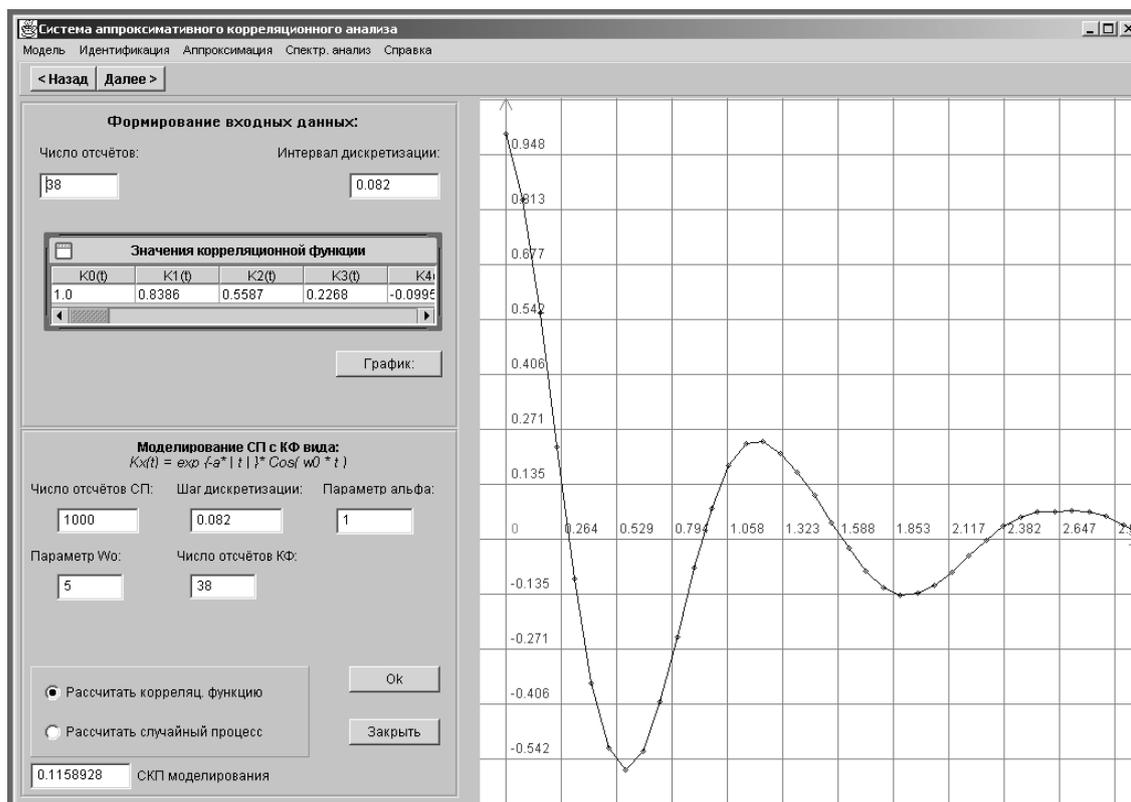


Рисунок 4.3. Вид формы генерирования СП с заданным видом КФ

Данная форма появляется на экране после того, как пользователь выберет регулярную дискретизацию в форме начала работы в системе.

Основными элементами формы расчета КФ при регулярной дискретизации СП являются:

- панель главного меню,
- кнопки движения по программе,
- панель данных,
- панель задания параметров моделируемого СП,
- панель графиков функций.

Перечислим функции, которые выполняют нижеследующие пункты главного меню:

**Модель** – выбор вида КФ моделируемого СП (один из шести), работа с файлами (запись в файл и открытие файла), завершение работы с программой;

**Идентификация** – выбор способа идентификации (автоматическая – позволяет строить фазовые портреты КФ и на основании их схожести с фазовыми портретами стандартных КФ выбирать вид аппроксимирующей модели, аналитическая – позволяет выбирать вид КФ на основании визуальных представлений стандартных КФ);

**Аппроксимация** – выбор способа аппроксимации (функциями заданного вида – при схожести исследуемой КФ с одним из стандартных ее видов, функциями Лагерра – в случае, если КФ не похожа ни на один из предложенных ее видов);

**Справка** – предоставление справки о программе.

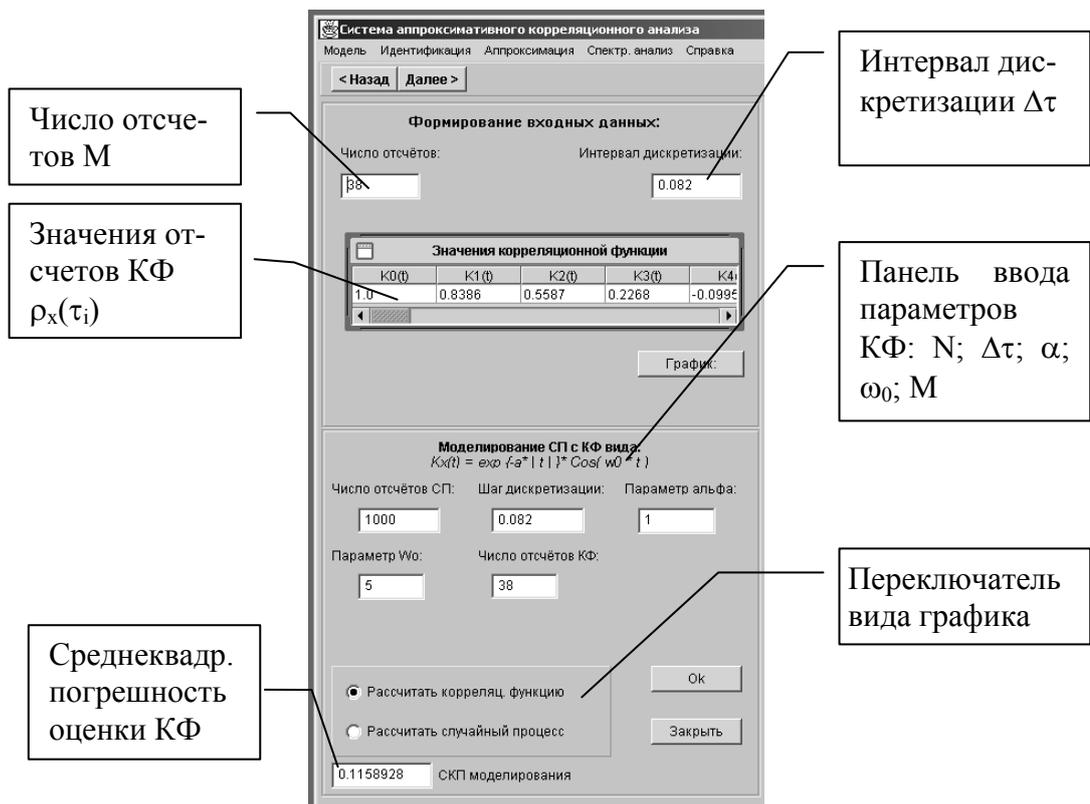


Рисунок 4.4. Описание основной формы

Кнопки движения по программе играют роль «гида», то есть позволяют пользователю, не знакомому с программой, двигаться в нужном направлении, которое соответствует последовательности действий, приведенных в схеме алгоритма (см. приложение П.11).

Панель данных предназначена для ввода и хранения отсчетов СП или отсчетов КФ (в зависимости от того, в каком положении находится переключатель вида графика). Отсчеты КФ (или СП) хранятся в таблице на панели данных (см. рис. 4.4). Данные в эту таблицу заносятся автоматически после того, как выбран вид КФ и смоделирован СП.

В этом случае график КФ (или СП) строится автоматически. При желании пользователь может вручную задать значения отсчетов, тогда ему придется нажать на кнопку «График» для того, чтобы отобразить график функции, построенный по введенным отсчетам.

На панели задания параметров моделируемого СП находятся поля ввода следующих параметров:

- число отсчетов СП,
- шаг дискретизации,
- число отсчетов КФ,
- параметр  $\alpha$ ,
- параметр  $\omega_0$ .

Для корректного расчета шага дискретизации и минимального числа отсчетов КФ необходимо щелкнуть по панели задания параметров правой клавишей «мыши» и после появления всплывающего меню выбрать нужную погрешность моделирования, после чего вышеуказанные параметры автоматически будут пересчитаны для конкретного случая.

Итак, для начала работы в данной форме необходимо выбрать в пункте меню «**Модель**» (подменю «**Моделировать СП с КФ заданного вида:**») нужный вид СП. Затем, задав необходимые параметры модели и скорректировав шаг дискретизации и число отсчетов КФ, моделировать СП. Для этого нужно нажать кнопку «ОК». Возможные модели КФ СП представлены на рис. 4.5.

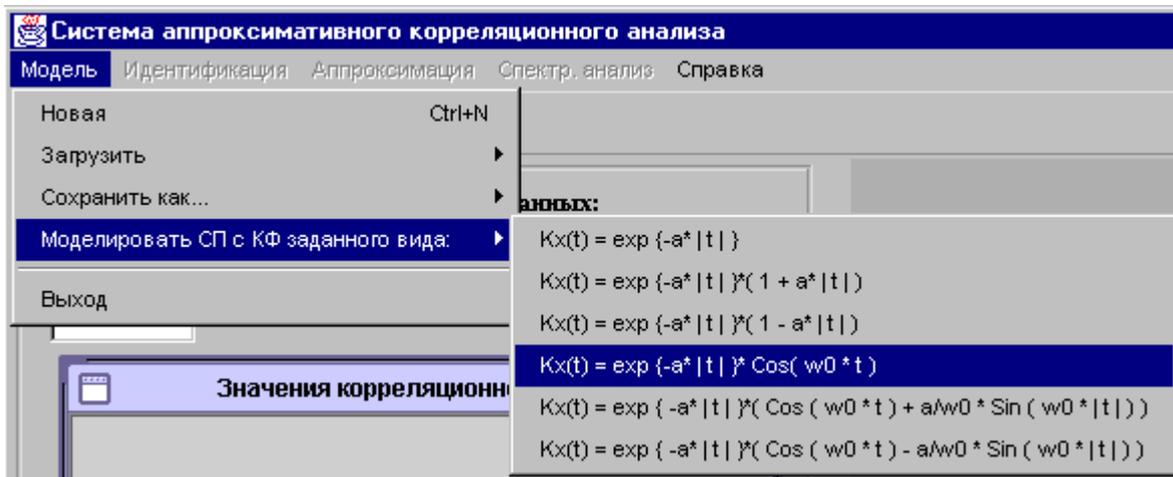


Рисунок 4.5. Модели корреляционных функций

После окончания моделирования на панели графиков появится изображение СП или соответствующей ему КФ, в таблице на панели данных будут занесены отсчеты СП (или КФ), а в поле вывода погрешности занесется среднеквадратическая погрешность моделирования.

### Генерирование НВР с заданным видом КФ

Для задания генерирования НВР необходимо обратиться к форме начала работы системы (см. рис. 4.6).

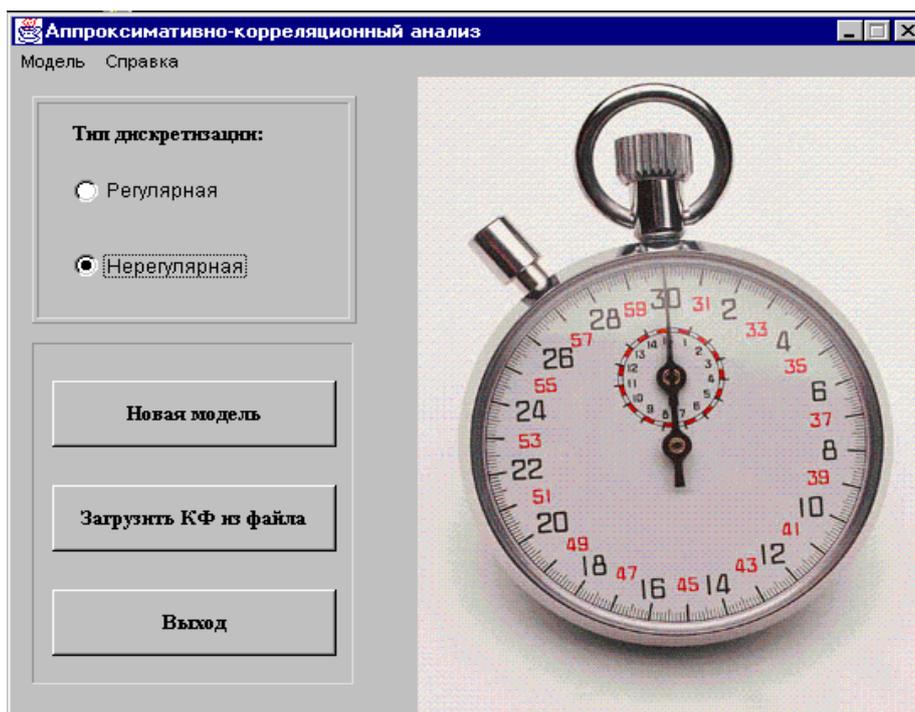


Рисунок 4.6. Вид формы начала работы в системе при регулярной дискретизации СП

После этого на экране появляется форма задания генерирования неэкви-  
стантных временных рядов (НВР) с заданным видом КФ (см. рис. 4.7).

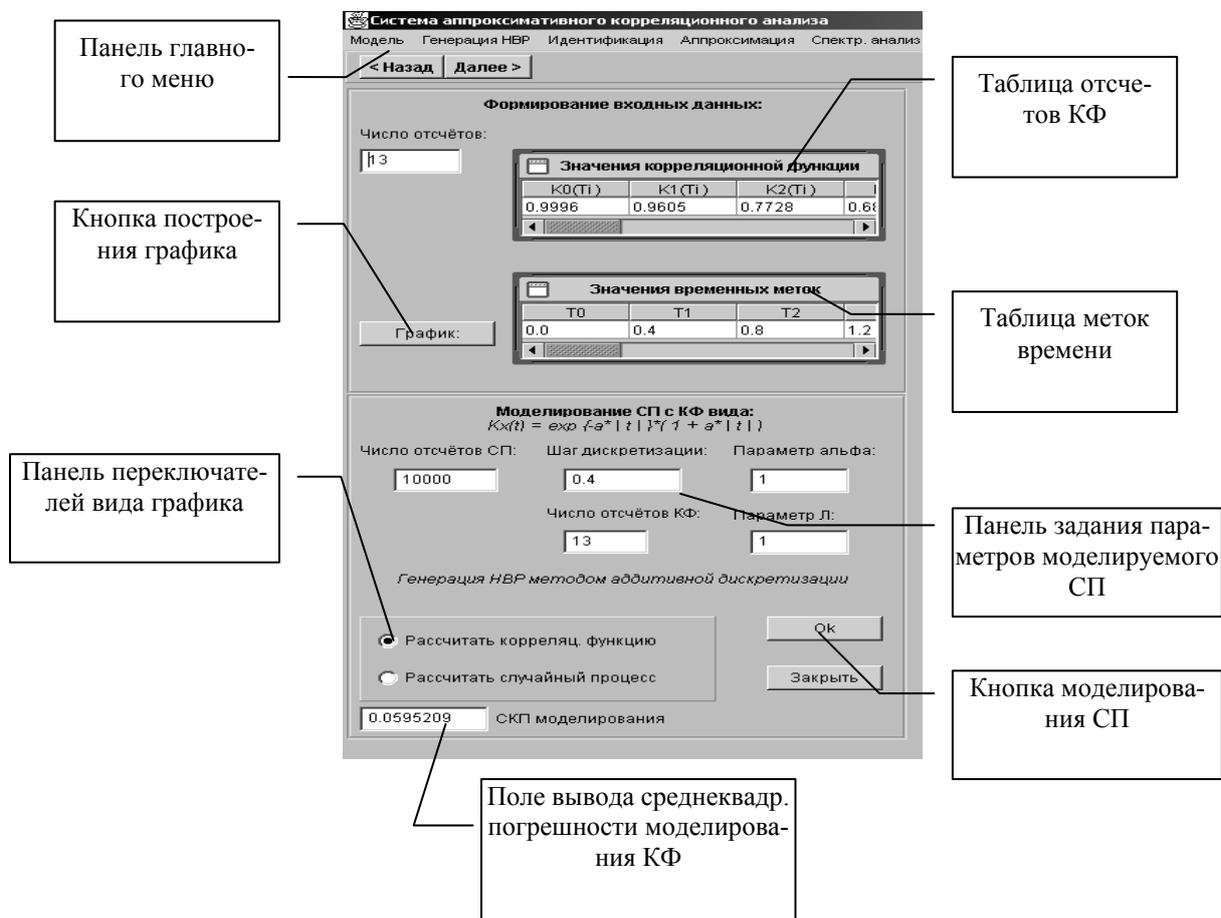
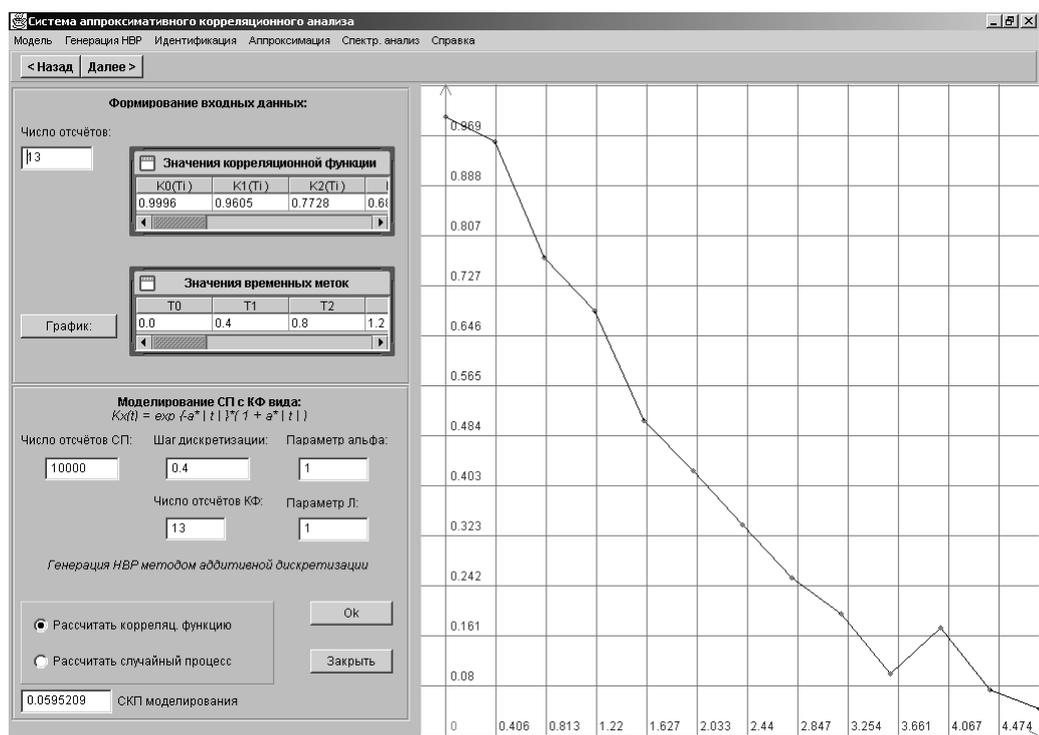


Рисунок 4.7. Вид формы генерирования НВР с заданным видом КФ

Для начала работы в данной форме необходимо сначала выбрать вид КФ моделируемого СП (пункт меню «**Модель**»). Задать параметры модели ( $\alpha$ ,  $\omega_0$ ), число отсчетов СП, интервал дискретизации и число отсчетов КФ. Далее выбрать модель и параметры нерегулярной дискретизации, например, значение вероятности  $p$  – преобразования (модели нерегулярной дискретизации представлены на рис. 4.8).

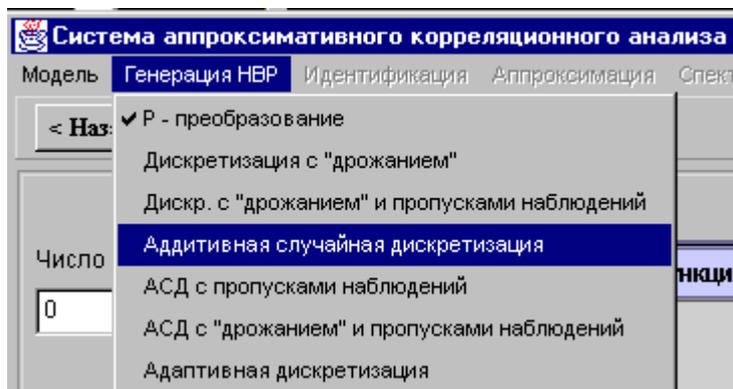


Рисунок 4.8. Модели нерегулярной дискретизации

После данных приготовлений следует нажать кнопку «**ОК**» для моделирования СП с заданным видом КФ.

### Идентификация вида КФ

Форму для идентификации КФ можно вызвать из пункта «**Идентификация**» - «**Автоматически**» главного меню любой из основных форм. Общий вид формы идентификации КФ на основе анализа фазовых портретов представлен на рис. 4.9. Для идентификации КФ, необходимо сравнивать саму КФ (в простейшем случае) с шестью основными видами КФ, приведенными в списке, и ее фазовый портрет с типовыми фазовыми портретами. При выборе одной из КФ списка (щелчком мыши), появляется ее схематическое изображение. Затем, после нажатия кнопки «**Построить фазовый портрет:**», в области построения отобразятся портреты исходной (экспериментальной) и выбранной из списка (теоретической) КФ, **синим** и **красным** цветами соответственно. В поле «**Погрешность**» отобразится квадратическая погрешность сравнения фазовых портретов.

Задавая параметры  $\alpha$  и  $\omega_0$  для теоретической модели КФ в полях «**a:**» и «**w0:**», можно подобрать их таким образом, чтобы квадратическая погрешность была минимальной. В этом случае будет определен не только вид экспериментальной КФ, но и ее параметры, что особенно важно при аппроксимации параметрическими моделями.

Если результаты идентификации удовлетворительны, и вид КФ определен однозначно, то, нажав кнопку «**Аппроксимировать**», мы перейдем в форму аппроксимации КФ параметрическими моделями, где будет производиться аппроксимация КФ моделью, выбранной при идентификации.

Отметим, что по найденным параметрам модели корреляционной функции можно более точно построить теоретический фазовый портрет. Это, в свою очередь, даст возможность наглядно убедиться в качестве аппроксимации и генерирования СП.



Рисунок 4.9. Окно идентификации КФ при помощи анализа фазовых портретов

### Аппроксимация КФ функциями заданного вида

Форму для аппроксимации КФ функциями заданного вида можно вызвать из пункта «Аппроксимация» главного меню, а также нажатием кнопки «Аппроксимация» на панели идентификации КФ после выбора вида аппроксимирующей функции.

Общий вид формы аппроксимации КФ функциями заданного вида представлен на рис 4.10.

При работе в данной форме в первую очередь нужно задать вид аппроксимирующей функции при помощи переключателей на панели выбора вида аппроксимирующей модели. Затем рассчитать начальные приближения параметров модели автоматически или задать вручную. Для автоматического расчета начальных приближений необходимо нажать кнопку «Рассчитать» на панели управления ходом аппроксимации. В некоторых случаях, особенно при аппроксимации методом Ньютона, процесс может не сойтись из данных точек. В таком случае следует вручную подкорректировать начальные приближения в их полях ввода (рис.4.11).

Иногда эту процедуру приходится выполнять многократно.

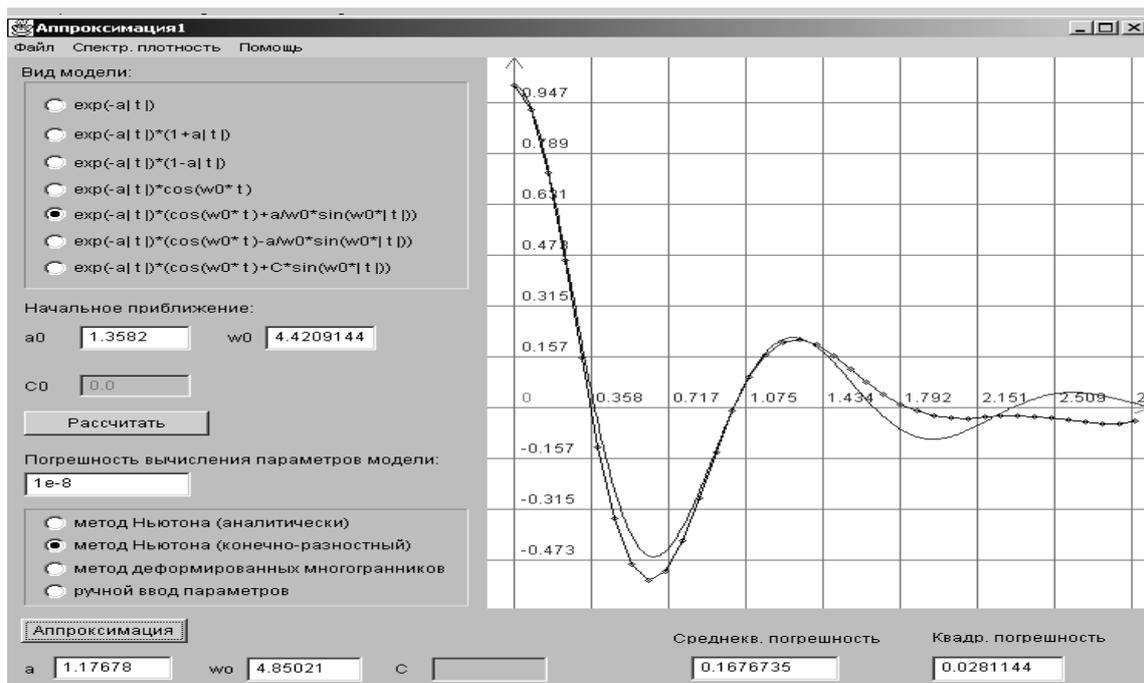


Рисунок 4.10 Вид формы аппроксимации КФ функциями заданного вида

Далее следует задать значение погрешности вычислений параметров модели (критерия сходимости) в соответствующем поле (рис. 4.11). Данное значение используется как критерий окончания вычислений при аппроксимации –  $\epsilon$ .

После задания всех вышеуказанных числовых параметров следует выбрать метод аппроксимации на соответствующей панели. На панели выбора метода аппроксимации присутствуют следующие опции:

- метод Ньютона (аналитический),
- метод Ньютона (конечно-разностный),
- метод деформированного многогранника,
- ручной ввод параметров.

При выборе опции ручного ввода параметров после нажатия кнопки «**Аппроксимация**» происходит простой перенос значений полей ввода начальных приближений в поля вывода рассчитанных параметров и строится соответствующий график аппроксимирующей функции. Таким образом, предоставляется возможность пользователю самостоятельно подбирать значения параметров аппроксимирующего выражения.

При нажатии кнопки «**Аппроксимация**» (рис. 4.12) производится запуск алгоритма аппроксимации. В поля вывода рассчитанных параметров модели заносятся значения  $\alpha$  и  $\omega_0$ , которые были вычислены одним из методов. В поля вывода погрешности аппроксимации заносятся значения среднеквадратической и квадратической погрешности.

Отметим, что по «умолчанию» система выбирает метод деформированного многогранника, обладающий лучшей сходимостью [28, 38]. Выбрав в качестве начального приближения параметров найденные значения модели указанным методом, возможно дальнейшее уточнение параметров модели. Для этого необходимо воспользоваться одним из методов Ньютона.

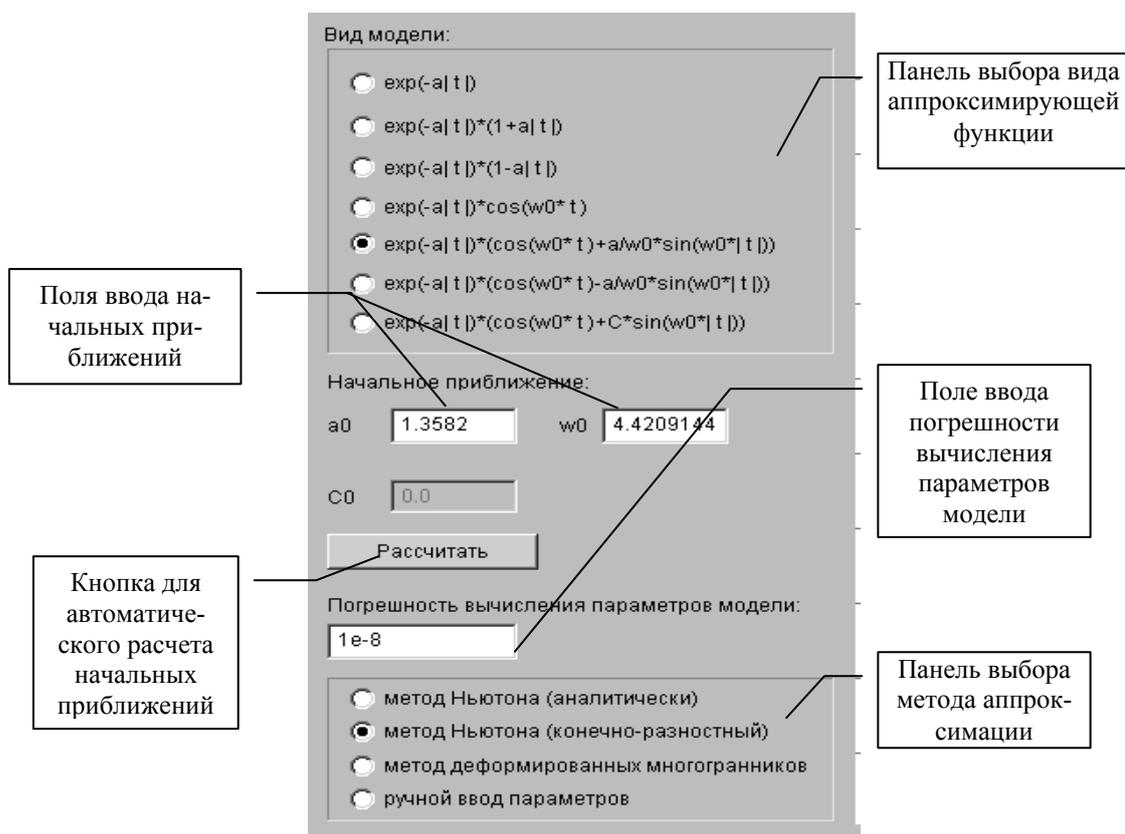


Рисунок 4.11. Панель управления параметрами аппроксимации

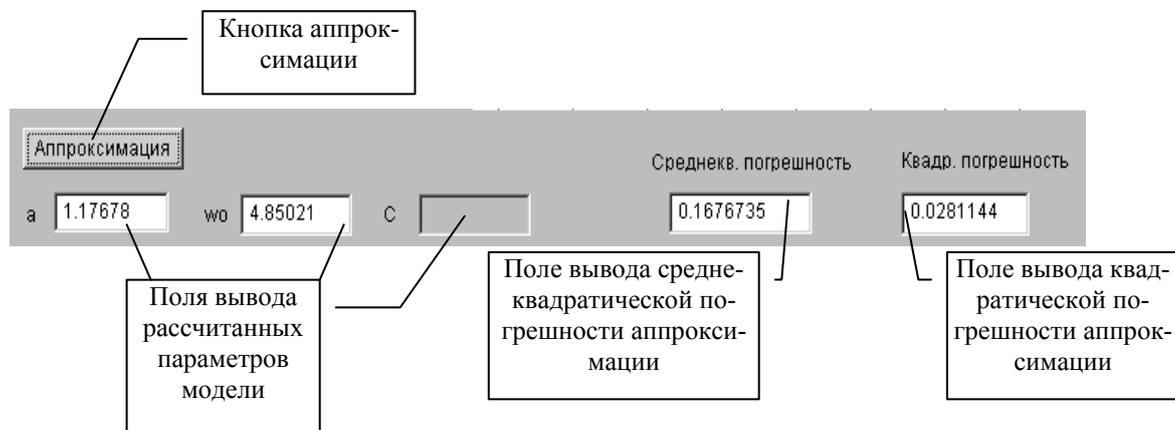


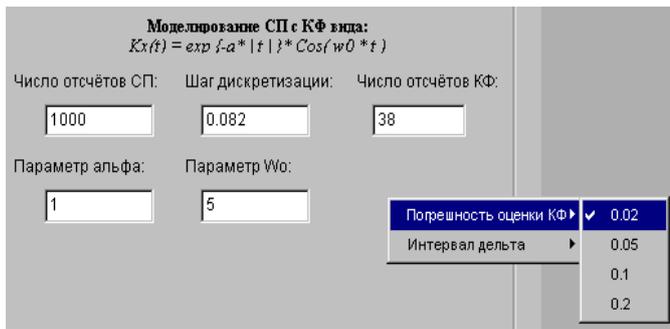
Рисунок 4.12. Панель вывода результатов аппроксимации

Отметим, что для удобства пользователей в системе предусмотрены следующие возможности:

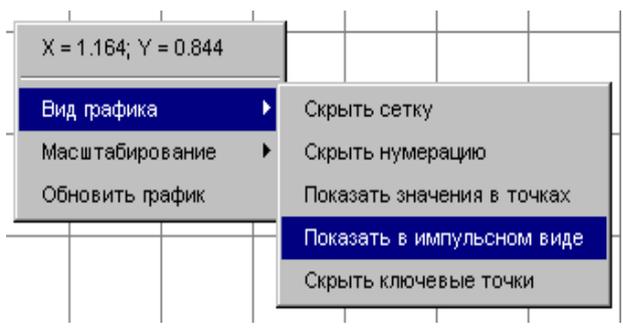
1. при моделировании СП возможно изменение интервала дискретизации, обеспечивающего восстановление корреляционной функции с заданной погрешностью (см. рис. 4.13 а).

2. При отображении графической информации возможно изменение формы представления результатов (см. рис. 4.13 б).

Для этого необходимо нажать правую кнопку «мыши», поместив курсор в соответствующее окно.



а)



б)

Рисунок 4.13.

Пример результатов генерирования представлен на рис. 4.14, где последовательно представлены: процесс, результаты идентификации, аппроксимации параметрической моделью и уточнение идентификации по параметрам модели.

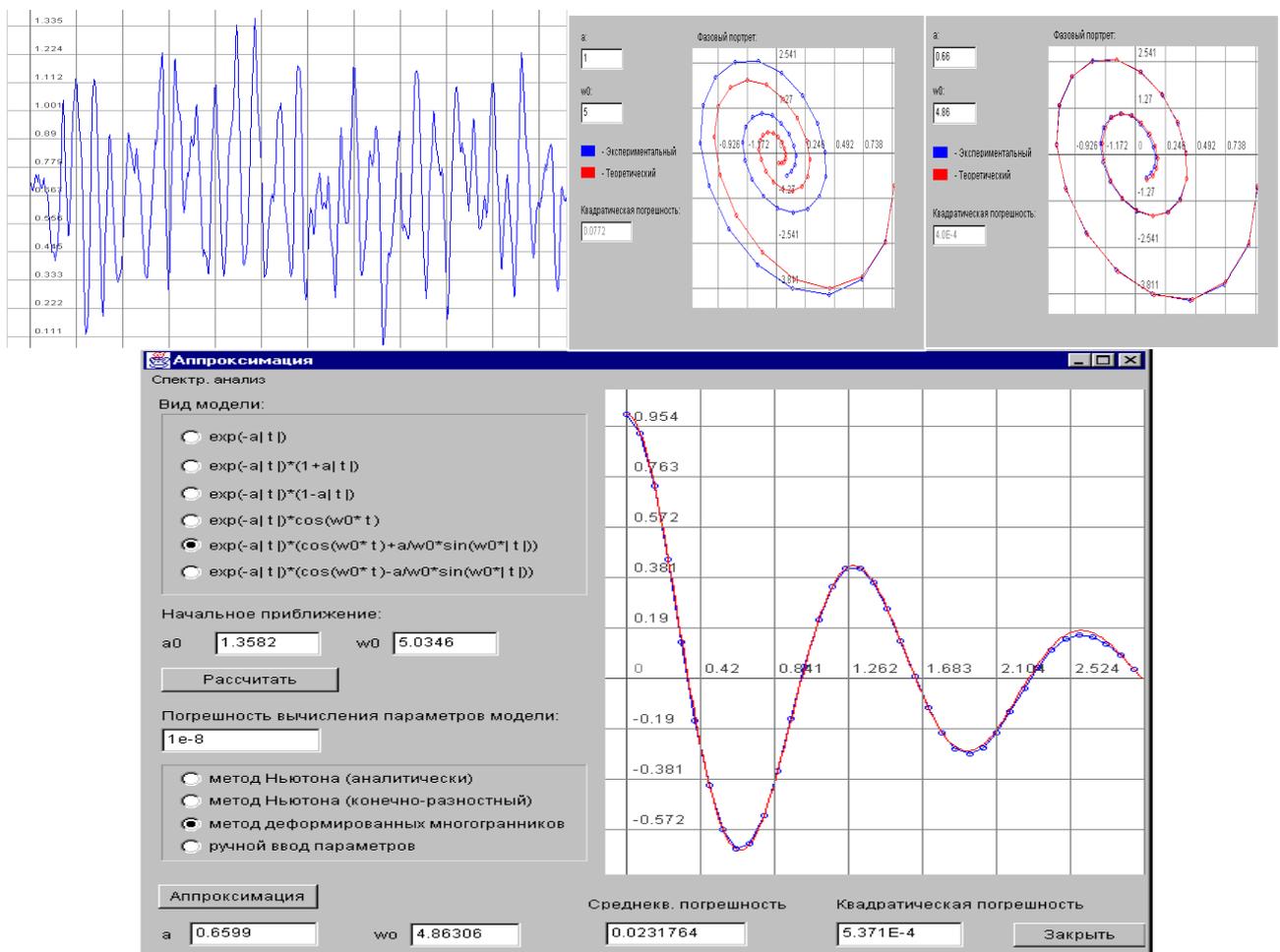


Рисунок 4.14. Результаты генерирования ПСП с заданным видом корреляционной функции

**Программные требования системы:** Microsoft Windows'98-2000; необходимые библиотеки поддержки Java.

**Аппаратные требования системы:** Процессор Pentium-166-MMX и выше; ОЗУ 32Мб; свободное место на диске 50Мб, разрешение монитора 1024×768 точек.

## 4.2. Аппроксимативный анализ взаимных корреляционно-спектральных характеристик

Разработанная система служит для моделирования и аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов [1, 38]. Структурная схема системы приведена на рис 4.15. В соответствии с выполняемыми функциями можно выделить следующие подсистемы:

1. задания входных воздействий и генерирования НВР;
2. первичной статистической обработки;
3. аппроксимации взаимной корреляционной функции;
4. аппроксимации взаимной спектральной плотности мощности.

**Подсистема задания входных воздействий и генерирования НВР** состоит из двух модулей.

В первом модуле производится генерирование псевдослучайной последовательности с заданным видом корреляционной функции (КФ) и получение НВР. Полученные данные: массив меток времени и соответствующие им отсчеты СП, объем выборки  $M$  и интервал дискретизации  $\Delta t_0$ , - поступают на вход подсистемы первичной статистической обработки, могут служить для получения второго СП и являются входными данными для подсистемы аппроксимации взаимной корреляционной функции.

Во втором модуле производится генерирование новой псевдослучайной последовательности с заданным видом КФ или обработка первого СП.

Получаемые в результате работы первой подсистемы данные поступают на вход следующих двух подсистем.

**Подсистема первичной статистической обработки** производит оценку числовых характеристик, центрирование, нормирование случайных процессов, оценку и построение фазового портрета КФ. При регулярной дискретизации оценка КФ производится с помощью мультипликативного алгоритма, а при обработке НВР - с помощью интервальной корреляционной функции.

**Подсистема аппроксимации взаимной корреляционной функции** состоит из двух частей: оценки ВКФ и аппроксимации ВКФ функциями Лагерра или типовыми параметрическими моделями. На вход этой подсистемы кроме данных, полученных в подсистеме 1, поступает число членов разложения и интервал, на котором производится оценка ВКФ, или начальные значения параметров параметрической модели. Затем вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующих выражений и среднеквадратическая погрешность аппроксимации как для положительной, так и отрицательной областей определения ВКФ. Полученные аппроксимирующие выражения поступают в подсистему 4.

**Подсистема аппроксимации спектральной плотности мощности.** На основе данных, полученных в подсистеме 3, производится построение взаимной спектральной плотности мощности как в ортогональном базисе Лагерра, так и с использованием параметрических моделей.

**Минимальные аппаратные требования:** Процессор Pentium 100, ОЗУ 16 Мб, разрешение монитора 600x800, HighColor, Microsoft Windows 95.

При запуске программы на экране появляется форма, изображенная на рис 4.16.

Основными элементами формы является панель главного меню и страницы, выбирая которые пользователь переходит между частями программы.



Рисунок 4.15. Структура автоматизированной системы

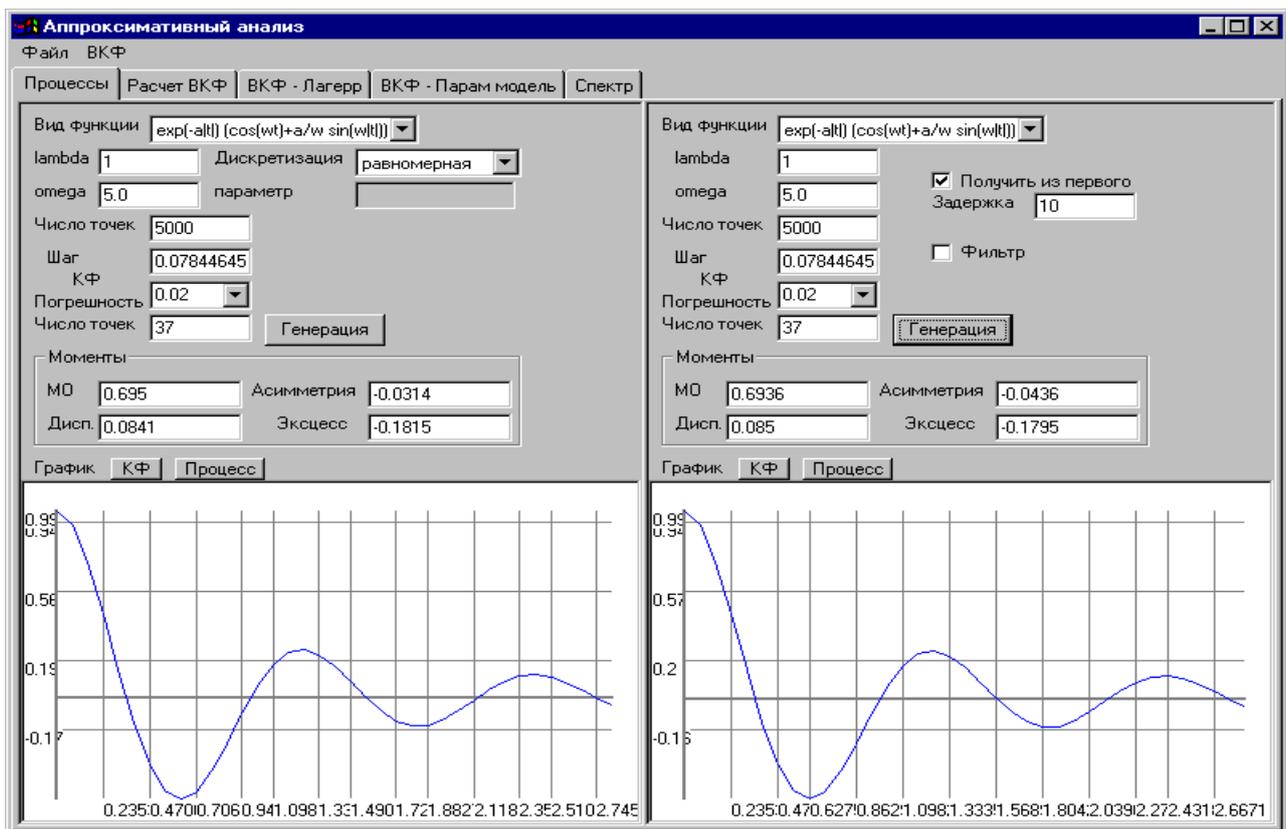


Рисунок 4.16. Первая страница системы

### Задание входных воздействий и генерирование НВР

С помощью первой страницы осуществляется задание входных воздействий, генерирование НВР и первичная статистическая обработка. Она содержит две панели: **левую** - для генерирования и первичной обработки первого процесса и **правую** - для генерирования и первичной обработки второго процесса. На левой панели необходимо ввести следующие параметры:

- число отсчетов СП;
- шаг дискретизации;
- параметры  $\alpha$ ,  $\omega_0$ ;
- погрешность моделирования.

В случае генерирования НВР необходимо ввести параметры нерегулярной дискретизации.

После нажатия на кнопку «Генерация» СП будет смоделирован. Сразу же будут рассчитаны математическое ожидание, дисперсия, коэффициент асимметрии, эксцесс и КФ процесса и отображены на панели. Предусмотрена возможность отображения КФ и самого СП. Для этого нужно нажать на соответствующие кнопки над графиком.

Генерирование второго процесса производится на правой панели. Для этого необходимо сгенерировать СП с заданным видом КФ аналогично рассмотренному выше или установить флаг «получить из первого». При этом второй процесс будет получен из первого с помощью задержки на указанное число отсчетов.

Характеристики процесса расположены в нижней половине панели.

После генерирования двух процессов можно перейти на страницу 2, выбрав закладку «ВКФ» в левом верхнем углу формы.

Для расчета ВКФ двух сгенерированных процессов необходимо ввести количество точек левой и правой ветвей и нажать на кнопку «**Рассчитать**» (см. рис. 4.17).

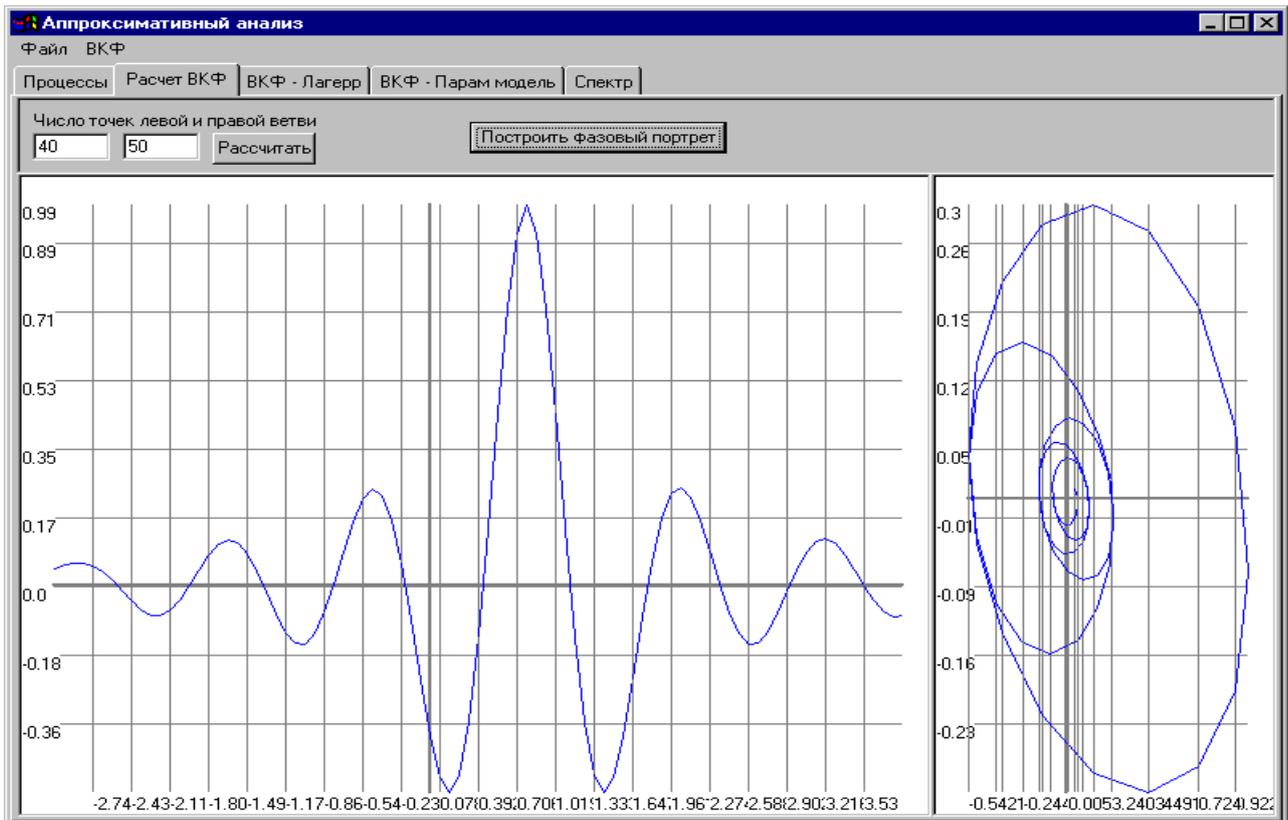


Рисунок 4.17. Вторая страница системы

Исследователь по своему усмотрению в ручном режиме может установить требуемое количество точек правой и левой ветвей взаимной корреляционной функции. Кроме этого возможно построение её фазового портрета.

После определения вида модели возможен переход либо на третью, либо четвертую страницы. С помощью третьей страницы осуществляется аппроксимация ВКФ ортогональными функциями Лагерра [1, 53]. Эта задача решается при построении аналитической модели корреляционной функции в случае, когда не удастся идентифицировать вид корреляционной функции. При генерировании случайного процесса с заданным видом корреляционной функции для проверки качества генерирования производят аппроксимацию взаимной корреляционной функции параметрическими моделями [1, 53].

### **Аппроксимация ВКФ параметрическими моделями**

Для этого необходимо вызвать на экран четвертую страницу (см. рис. 4.18).

При аппроксимации ВКФ необходимо:

1. выбрать вид модели;
2. задать начальные значения её параметров (отдельно для правой и левой ветвей ВКФ);
3. установить значения погрешности оценки параметров модели;
4. если для заданных начальных значений уточнить параметры модели не удалось, необходимо ввести новые начальные значения.

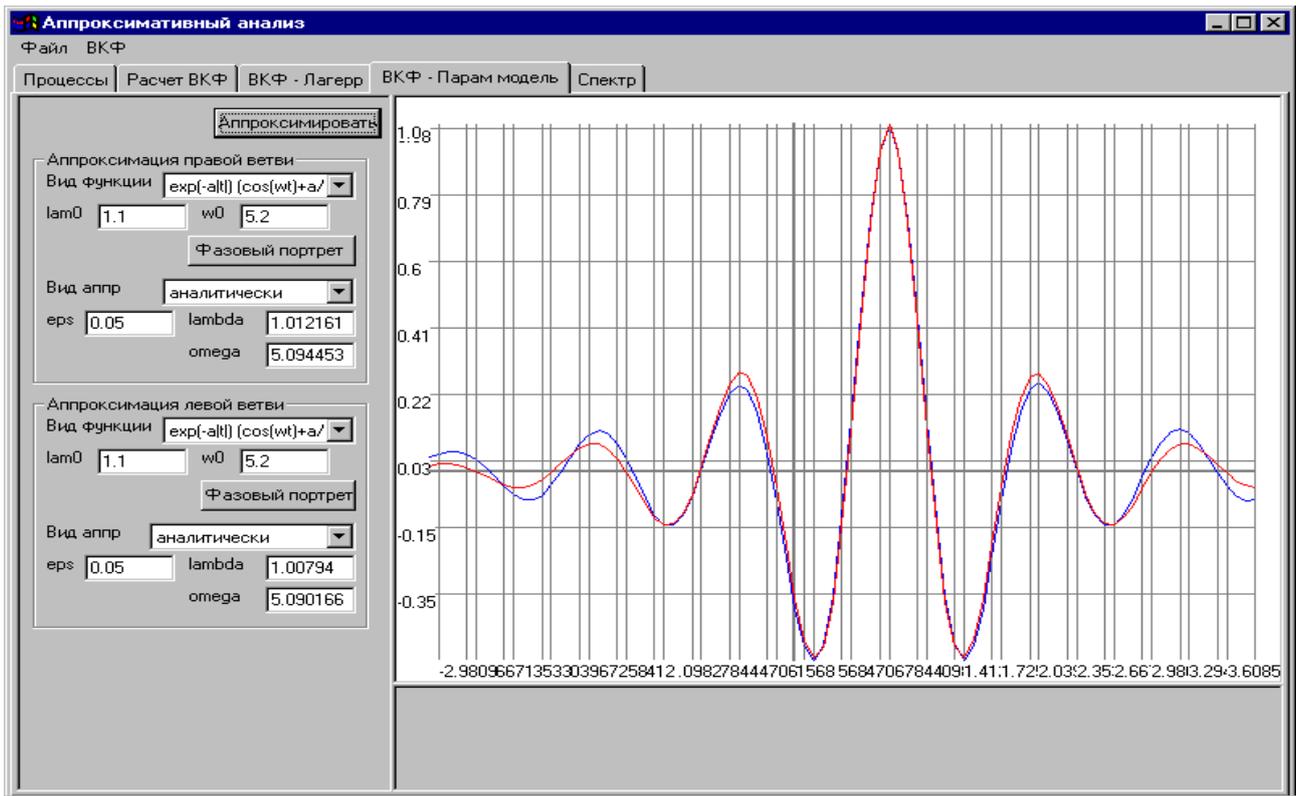


Рисунок 4.18. Четвертая страница системы

В случае необходимости, после аппроксимации ВКФ с помощью этой страницы можно уточнить фазовые портреты правой (см. рис. 4.19) и левой ветвей ВКФ (см. рис. 4.20).

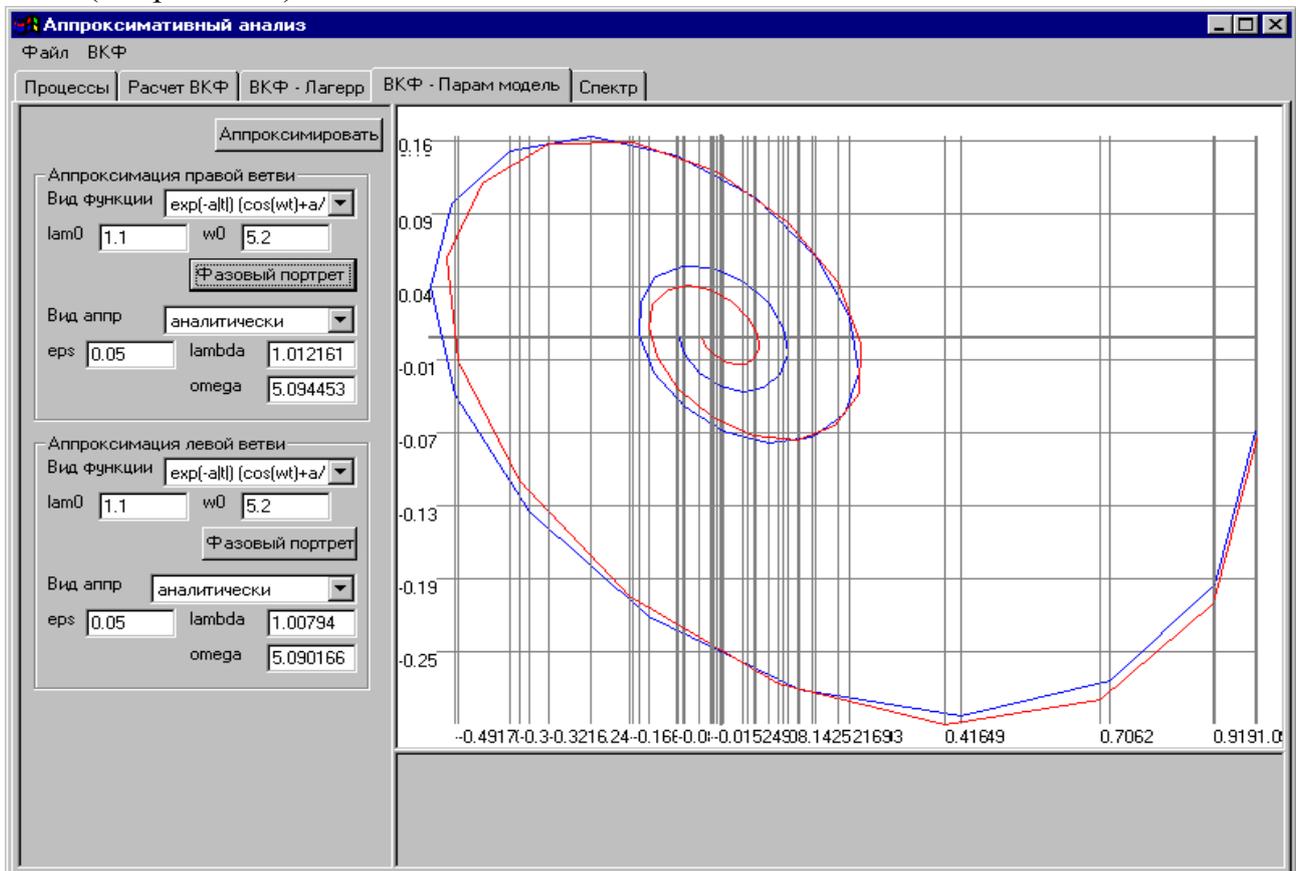


Рисунок 4.19. Фазовый портрет правой ветви ВКФ

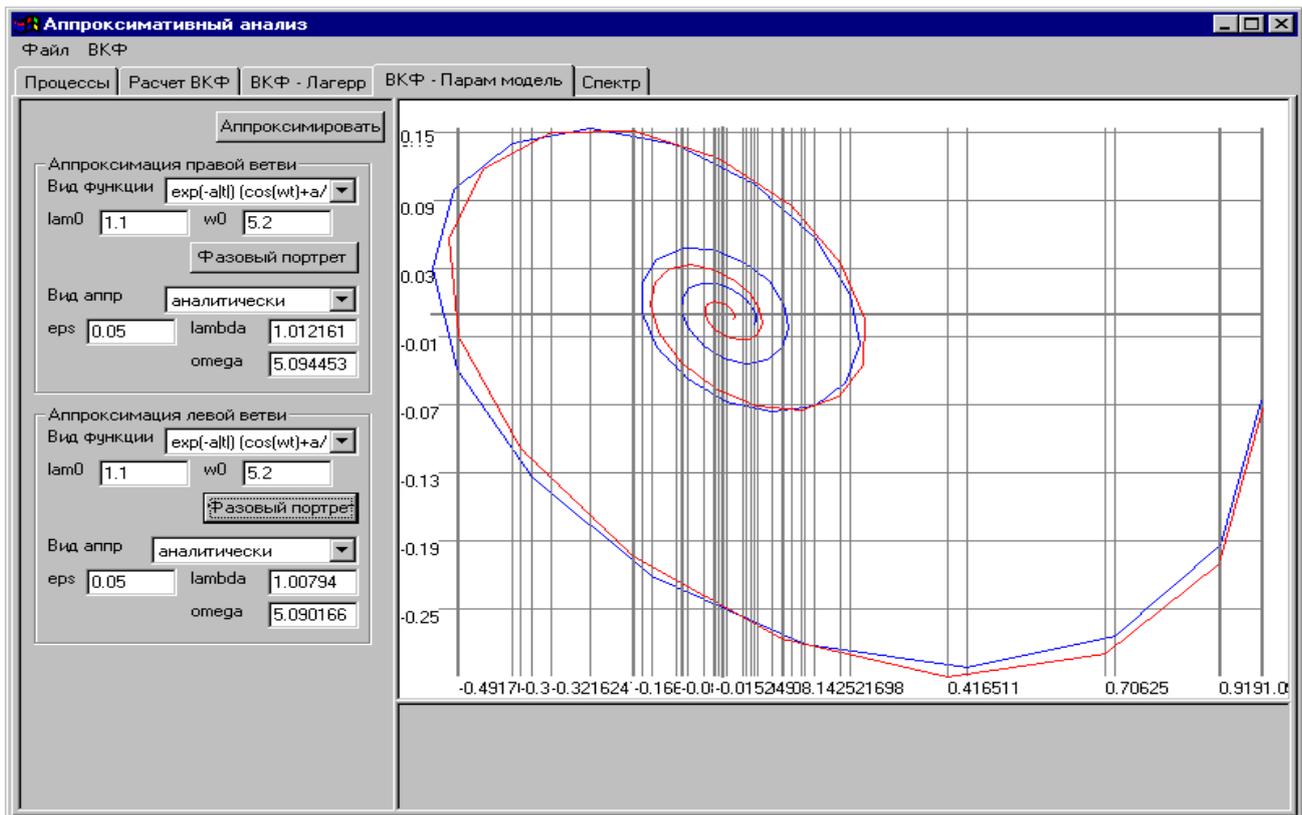


Рисунок 4.20. Фазовый портрет левой ветви ВКФ

Отметим, что с помощью разработанной системы возможна аппроксимация правой и левой ветвей ВКФ разными параметрическими моделями (см. рис.4.21).

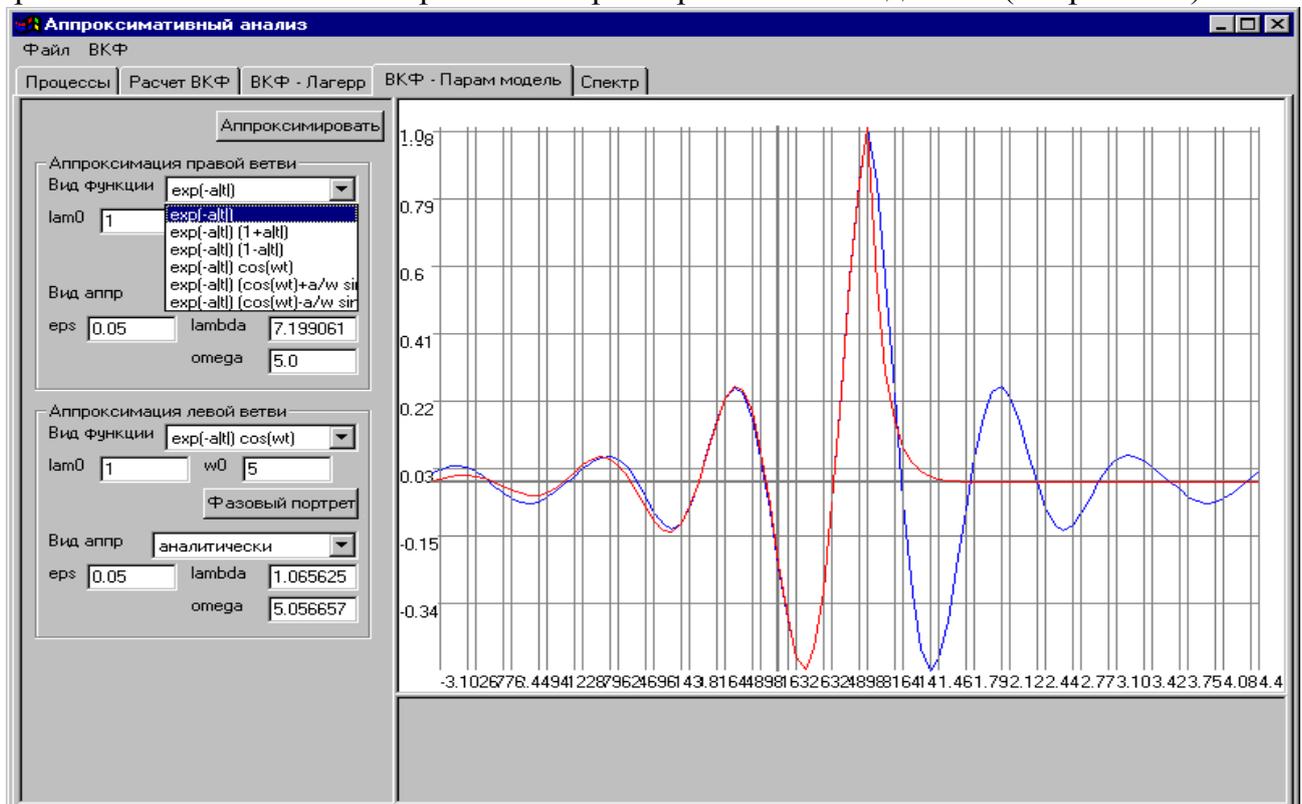


Рисунок 4.21. Аппроксимация правой и левой ветвей ВКФ разными параметрическими моделями

### 4.3. Применение имитационного моделирования для исследования статистических характеристик временных рядов

С помощью разработанных систем возможно решение разнообразных научно-технических задач методом имитационного моделирования. Имитационное моделирование в прикладном анализе временных рядов применяется для решения следующих задач:

- оценки вероятностных характеристик временных рядов;
- метрологического анализа алгоритмов оценки вероятностных характеристик временных рядов, положенных в основу работы программных, аппаратных или аппаратно-программных средств.

Рассмотрим решение первой, наиболее простой задачи моделирования, для анализа вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов, которая сводится к последовательному выполнению следующих этапов:

1. генерированию ПСП с равномерным законом распределения в диапазоне  $[0,1]$ ;
2. генерированию ПСП с заданными статистическими характеристиками;
3. оценки статистических характеристик ПСП;
4. нерегулярной дискретизации ПСП в соответствии с заданной моделью потока событий;
5. формированию массивов данных, для оценки требуемых статистических характеристик неэквидистантного временного ряда;
6. оценки требуемых статистических характеристик неэквидистантного временного ряда;
7. отображению полученных результатов;
8. анализу полученных результатов;
9. формулировки выводов, необходимых для принятия решения.



Рисунок 4.22. Блок-схема анализа коэффициентов сжатия данных

Следует подчеркнуть, что для получения достоверных результатов, этапы 5,6 выполняются многократно. Количество испытаний зависит от принятой методики оценки достоверности результатов оценивания полученных характеристик. Воспользовавшись рекомендациями РТМ 25 139-74 [29] и задавшись доверительной вероятностью  $P_d = 0,95$ , число испытаний независимо от закона распределения оцениваемой характеристики равно 29.

При анализе неэквидистантных временных рядов часто возникает необходимость в определении коэффициента сжатия, численные значения которого используются при метрологическом анализе результатов измерения, расчёте параметров аппаратно-программных средств и т.д. [39]. Решение этой задачи проведем методом имитационного моделирования, блок схема которого приведена на рис. 4.22.

Численное значение коэффициента сжатия, определяемого в соответствии с выражением (1.107), зависит от вида неравномерной дискретизации, модели процесса на интервале дискретизации, закона распре-

деления, корреляционной функции и их параметров, погрешности восстановления [4].

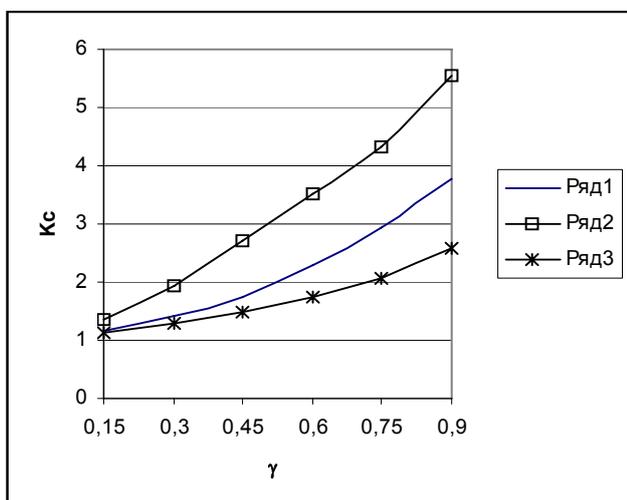
Приведем результаты имитационного моделирования. В качестве входных воздействий применялись типовые стационарные ПСП, широко используемые в приложениях. Неэквидистантный временной ряд получался в результате применения процедуры адаптивной временной дискретизации экстраполятором нулевого порядка к входной ПСП [4]. Следует подчеркнуть, что экстраполяторы обладают простотой реализации и позволяют работать в реальном масштабе времени.

На рис. 4.23-4.24 представлены результаты определения  $k_{сж}$  в зависимости от величины уставки  $\gamma = \varepsilon / \sigma_x$  ( $\varepsilon$  - погрешность восстановления случайного процесса)

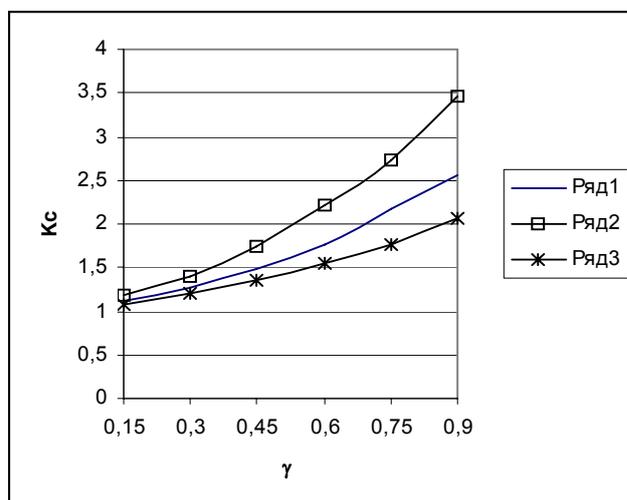
для моделей:  $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  - ряд 1,  $e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$  - ряд 2,

$e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$  - ряд 3, - для различных показателей колебательности  $\mu$  и по-

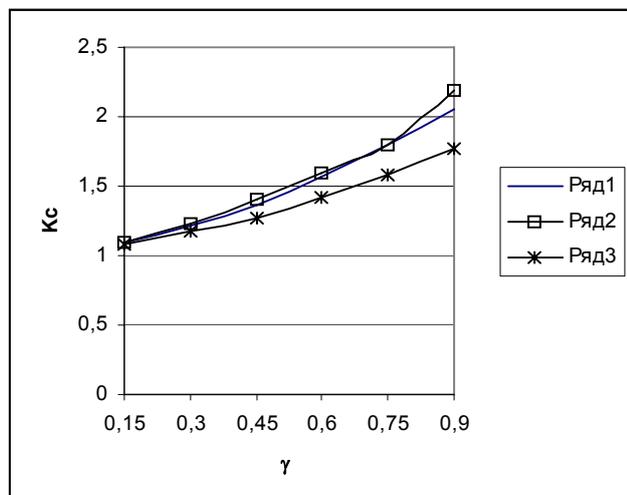
грешностей восстановления корреляционных функций  $\delta$ , определяющих интервал дискретизации входной ПСП (см. таблицу 3.1).



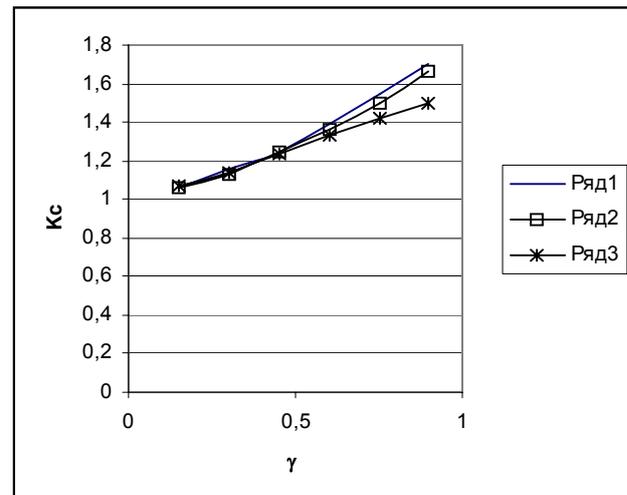
а)  $\mu=2, \delta=0,02$



б)  $\mu=2, \delta=0,05$

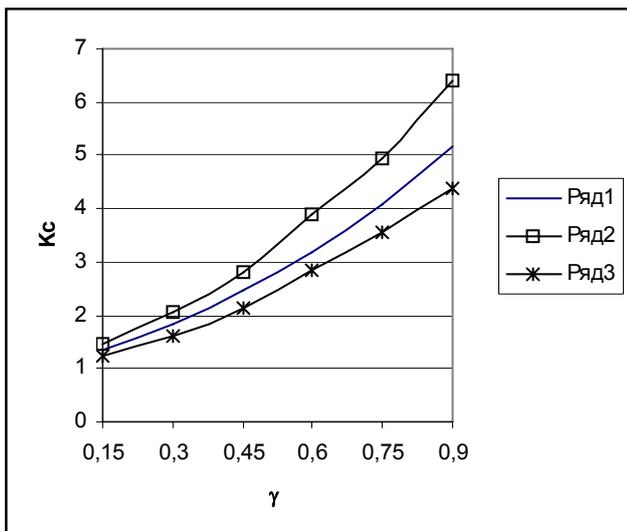


в)  $\mu=2, \delta=0,10$

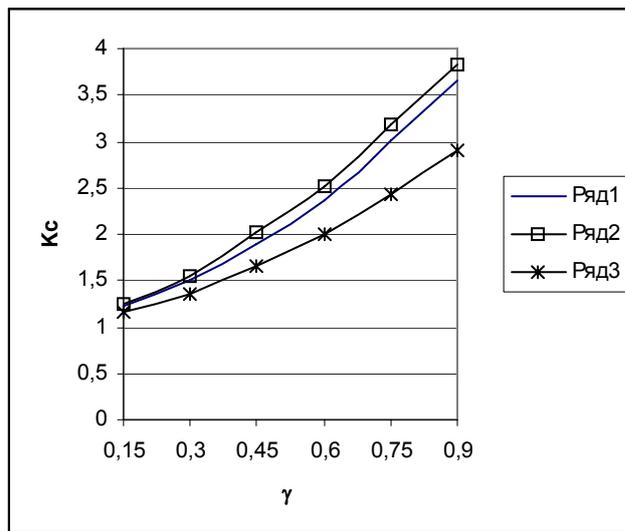


г)  $\mu=2, \delta=0,20$

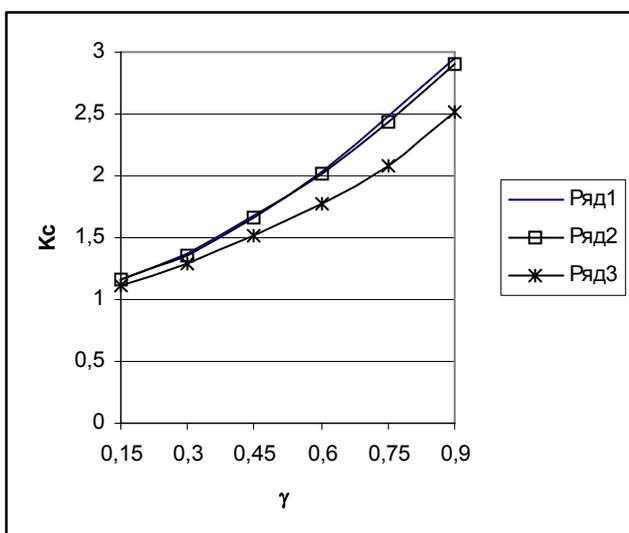
Рисунок 4.23. Результаты определения коэффициентов сжатия



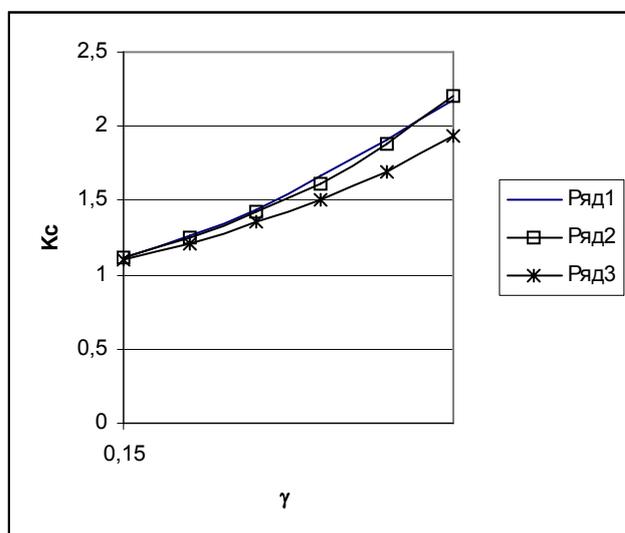
а)  $\mu=6, \delta=0.02$



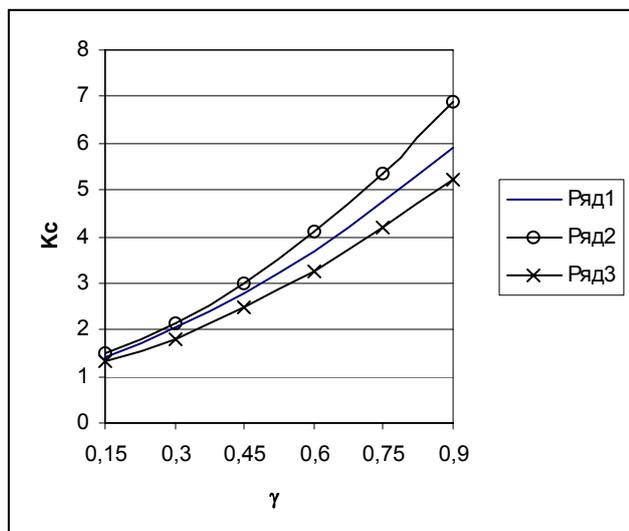
б)  $\mu=6, \delta=0.05$



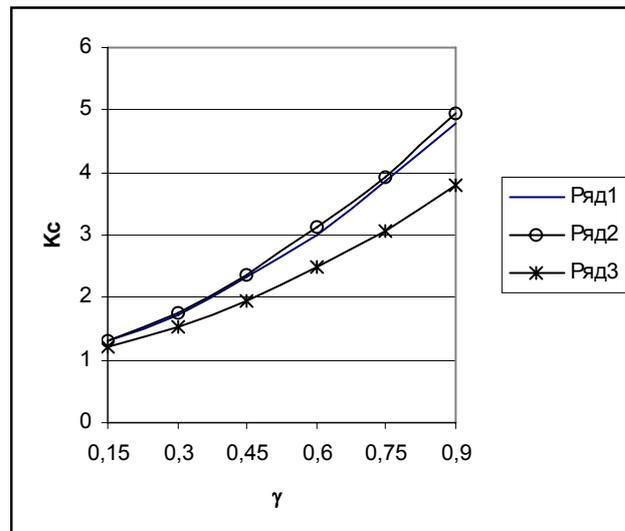
в)  $\mu=6, \delta=0.10$



г)  $\mu=6, \delta=0.20$



д)  $\mu=10, \delta=0.02$



е)  $\mu=10, \delta=0.05$

Рисунок 4.24. Результаты определения коэффициентов сжатия

Сравнительный анализ полученных результатов и результатов имитационного моделирования позволяет сделать следующие выводы:

1.  $k_{сж}$  при постоянной погрешности интерполяции КФ с увеличением уставки  $\gamma$  возрастают;
2.  $k_{сж}$  возрастают с уменьшением погрешности интерполяции КФ;
3.  $k_{сж}$  больше для дифференцируемых моделей КФ;
4. Для колебательных моделей КФ  $k_{сж}$  растут с увеличением показателя колебательности  $\mu$  КФ;
5. Наименьшие  $k_{сж}$  наблюдаются для процессов, у которых  $S_x(0)=0$ .

Аналогичным образом с помощью имитационного моделирования определялись:

- минимальный интервал дискретизации (см. таблицу 1.12) [31];
- плотность и функция распределения вероятностей суммы интервалов дискретизации на максимальном интервале дискретизации  $\tau_{kmax}$  для различных видов нерегулярной дискретизации (см. рис. 1.19, 1.20) [39];
  - интервальные корреляционные функции (см. рис. 1.21);
  - качество генерирования ПСП с заданным законом распределения с использованием аппроксимации законов распределения параметрическими моделями и фазовых портретов (см. подраздел 2.5);
  - точностные характеристики программных генераторов ПСП с заданным видом корреляционных функций (см. подраздел 3.3);
  - качество генерирования ПСП с заданным видом корреляционных функций с использованием аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями и фазовых портретов (см. подраздел 3.4);
  - качество генерирования ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функции (см. рис. 3.13-3.15);
  - качество генерирования ПСП с заданным видом корреляционной функции и законом распределения отличным от нормального (см. рис. 3.21-3.23, таблицу 3.9);
  - качество генерирования неэквидистантного временного ряда (см. рис. 3.24-3.29);
  - качество генерирования нестационарных временных рядов (см. рис. 3.30-3.32).

#### **4.4. Анализ методических погрешностей результатов измерений вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов методом имитационного моделирования**

Определение погрешностей результатов измерения и их характеристик составляет важнейший раздел метрологии. Объектом исследования при этом являются методы описания и количественного анализа методических погрешностей, а также методы экспериментального определения инструментальных и результирующих погрешностей [51, 53].

В соответствии с определением представим погрешность  $j$ -го измерения в виде

$$\Delta \Theta_j [\hat{X}(t)] = \Theta_j [\hat{X}(t)] - \Theta [X(t)]. \quad (4.1)$$

Это выражение для полной погрешности состоит из составляющих, зависящих от свойств объекта измерений - процесса  $X(t)$  и измеряемой характеристики  $\Theta[X(t)]$ , вида алгоритма измерений и особенностей реализации этого алгоритма [53]. Для выделения составляющих погрешности применяются различные подходы. Один из них основан на выборе в качестве классификационных признаков факторов, обуславливающих появление погрешностей, например: методические, инструментальные, из-за конечности объема выборки и т.д. При втором подходе за классификационные признаки принимаются виды погрешности, характер их проявления: систематическая и случайная погрешности, абсолютная, относительная, приведенная и т.д.

Изучение составляющих погрешностей, вызванных той или иной причиной, позволяет определить пути их уменьшения.

Представим погрешность результата  $j$ -го измерения в виде суммы методической  $\Delta_M \Theta_j[X(t)]$  и инструментальной  $\Delta_{ин} \Theta_j[X(t)]$  составляющих

$$\Delta \Theta_j[X(t)] = \Delta_M \Theta_j[X(t)] + \Delta_{ин} \Theta_j[X(t)]. \quad (4.2)$$

Содержательное определение этих составляющих сводится к следующему: методические погрешности обусловлены несовершенством метода измерений, а инструментальные - несовершенством технических средств [53]:

$$\Delta_M \Theta_j[X(t)] = L_M[X(t)] - \Theta[X(t)]; \quad (4.3)$$

$$\Delta_{ин} \Theta_j[X(t)] = L_{ин}[X(t)] - L_M[X(t)], \quad (4.4)$$

где

$L_M$  - алгоритм, положенный в основу измерительной процедуры;

$L_{ин}$  - алгоритм, реализуемый техническими средствами.

Выделим составляющие методической погрешности, обусловленные:

**1. неадекватностью (смешенностью) -**

$$\Delta_{на} = \Theta_j^{(1)}[x_{ji}, t_{ji}, d \rightarrow \infty] - \Theta[X(t)]; \quad (4.5)$$

**2. конечностью объема выборки  $d$  -**

$$\Delta_{кв} = \Theta_j^{(2)}[x_{ji}, t_{ji}, d] - \Theta_j^{(1)}[x_{ji}, t_{ji}, d \rightarrow \infty]; \quad (4.6)$$

**3. Конечностью числа каналов  $L$  -**

$$\Delta_{кк} = \Theta_j^{(3)}[x_{ji}, t_{ji}, d, L] - \Theta_j^{(2)}[x_{ji}, t_{ji}, d]; \quad (4.7)$$

**4. дискретизацией -**

$$\Delta_{д} = \Theta_j^{(4)}[x_{ji}, l_{ji}, \Delta t_0, d, L] - \Theta_j^{(3)}[x_{ji}, t_{ji}, d, L]; \quad (4.8)$$

где

$$l_{ji} = \text{ent} \left[ \frac{t_{ji}}{\Delta t_0} + \lambda \right];$$

$\Delta t_0$ - интервал дискретизации.

### 5. Квантованием

$$\Delta_K = \hat{\Theta}_j^{(5)}[\eta_{ji}, q, l_{ji}, \Delta t_0, d, L] - \hat{\Theta}_j^{(4)}[x_{ji}, l_{ji}, \Delta t_0, d, L]; \quad (4.9)$$

где

$$\eta_{ji} = \text{ent} \left[ \frac{|x_{ji}|}{q} + \lambda \right] \text{sign } x_{ji};$$

$q$ - величина кванта.

### 6. Конечной разрядностью аппаратно - программных средств

$$\Delta_p = \hat{\Theta}_j^{(6)}[\eta_{ji}, q, l_{ji}, \Delta t_0, d, L, R] - \hat{\Theta}_j^{(5)}[\eta_{ji}, q, l_{ji}, \Delta t_0, d, L] - \quad (4.10)$$

образующие полную группу погрешностей [53]:

$$\Delta_M = \Delta_{на} + \Delta_{кв} + \Delta_{кк} + \Delta_{д} + \Delta_{к} + \Delta_p. \quad (4.11)$$

Результат  $j$ -го измерительного эксперимента

$$\hat{\Theta}_j[\hat{X}(t)] = \hat{\Theta}_j^{(6)}[\eta_{ji}, q, l_{ji}, \Delta t_0, d, L, R] \quad (4.12)$$

может рассматриваться как функционал  $j$ -го массива выборочных данных о преобразованных мгновенных значениях процесса при выбранных  $\eta_{ji}, q, l_{ji}, \Delta t_0, d, L, R$ .

Методическая погрешность и ее составляющие являются случайными величинами, поэтому они должны оцениваться с вероятностных позиций. В качестве характеристик исследуемых составляющих погрешности будем принимать математическое ожидание погрешности результата измерений (систематическая составляющая)

$$M \left[ \Delta_n \hat{\Theta}_j[\hat{X}(t)] \right] \text{ и среднеквадратическое отклонение (случайная составляющая)}$$

$$\sigma \left[ \Delta_n \hat{\Theta}_j[\hat{X}(t)] \right].$$

Как правило, при исследовании погрешностей анализируют относительные или приведенные погрешности. В соответствии с определением погрешностей под относительными погрешностями от смещенности и статистическими погрешностями будем понимать:

$$\gamma_{см} \left[ \hat{\Theta}_n[\hat{X}(t)] \right] = \frac{M \left[ \Delta_n \hat{\Theta}_j[\hat{X}(t)] \right]}{\Theta[X(t)]}; \quad (4.13)$$

$$\gamma_{ст} \left[ \hat{\Theta}_n[\hat{X}(t)] \right] = \frac{\sigma \left[ \Delta_n \hat{\Theta}_j[\hat{X}(t)] \right]}{\Theta[X(t)]}, \quad (4.14)$$

а под соответствующими приведенными погрешностями -

$$\gamma_{\text{см.пр}} \left[ \hat{\Theta}_n [X(t)] \right] = \frac{M \left[ \Delta_n \Theta_j [\hat{X}(t)] \right]}{\Theta [X(t)]_{\text{max}}}; \quad (4.15)$$

$$\gamma_{\text{ст.пр}} \left[ \hat{\Theta}_n [X(t)] \right] = \frac{\sigma \left[ \Delta_n \Theta_j [\hat{X}(t)] \right]}{\Theta [X(t)]_{\text{max}}}. \quad (4.16)$$

Следует подчеркнуть, что при статистической обработке, как правило, анализируют погрешности от неадекватности (смещенности) и конечности выборки. При проектировании же специализированных или универсальных аппаратно-программных средств реального времени необходимо определить конкретные значения  $\Delta t_0$ ,  $q$ ,  $L$ ,  $R$  [39]. Для этого необходим анализ и остальных составляющих методической погрешности. Результатом анализа является выбор таких значений параметров измерительно-вычислительного канала, чтобы можно было бы пренебречь составляющими  $\Delta_{\text{кк}}$ ,  $\Delta_{\text{д}}$ ,  $\Delta_{\text{к}}$  и  $\Delta_{\text{р}}$ .

Как правило, аналитическое решение задач по оценке методической погрешности и её составляющих возможно только для сравнительно простых вероятностных характеристик и лишь для нормальных процессов. В качестве общего подхода к оценке методических погрешностей можно предложить использование метода имитационного моделирования. [62]. Для этого необходимо выполнить следующие этапы:

1. сгенерировать ПСП с равномерным законом распределения в диапазоне  $[0,1]$ ;
2. сгенерировать ПСП с заданными статистическими характеристиками;
3. оценить статистические характеристики ПСП;
4. провести нерегулярную дискретизацию ПСП в соответствии с заданной моделью потока событий;
5. сформировать массив данных, для оценки требуемых составляющих методической погрешности, образующих полную группу погрешностей; в соответствии с выражениями (4.5)-(4.10);
6. оценить требуемые статистические характеристики составляющих методической погрешности;
7. отобразить полученные результаты;
8. проанализировать полученные результаты;
9. сформулировать выводы, необходимые для принятия решения.

Конкретный вид выражений  $\hat{\Theta}$ , а также  $\Delta_i$  зависит от оцениваемой характеристики, алгоритма измерения.

Рассмотрим, в качестве примера, оценку составляющих методических погрешностей результатов измерения математического ожидания и дисперсии, определяемых для полиномиальных моделей сигнала нулевого и первого порядков с усреднением по времени, а также по классическим алгоритмам без учета неравномерности [39].

В соответствии с выражениями (4.5)-(4.10) составляющие методической погрешности оценки математического ожидания и дисперсии (для центрированного сигнала) для алгоритмов с использованием полиномиальной модели нулевого порядка определяются в виде [39]:

- неадекватности

$$\Delta_{\text{на}} \hat{\mu}_{mj} = \lim_{T_j \rightarrow \infty} \frac{1}{T_j} \sum_{i=1}^{Mj-1} x_{ji}^m \Delta t_{ji} - \mu_m, \quad (4.17)$$

где  $\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji}$ ;

- конечности объема выборки

$$\Delta_{\text{кв}} \hat{\mu}_{mo} = \frac{1}{T_j} \sum_{i=1}^{Mj-1} x_{ji}^m \Delta t_{ji} - \lim_{T_j \rightarrow \infty} \frac{1}{T_j} \sum_{i=1}^{Mj-1} x_{ji}^m \Delta t_{ji}; \quad (4.18)$$

- конечности числа каналов - отсутствует;

- дискретизации

$$\Delta_{\text{д}} \hat{\mu}_{mj} = \frac{\Delta t_0}{T_j} \sum_{i=1}^{Mj-1} x_{ji}^m l_{ji} - \frac{1}{T_j} \sum_{i=1}^{Mj-1} x_{ji}^m \Delta t_{ji}; \quad (4.19)$$

- квантования

$$\Delta_{\text{д}} \hat{\mu}_{mj} = \frac{q^m \Delta t_0}{T_j} \sum_{i=1}^{Mj-1} \eta_{ji}^m l_{ji} - \frac{\Delta t_0}{T_j} \sum_{i=1}^{Mj-1} x_{ji}^m l_{ji}; \quad (4.20)$$

- конечной разрядности ПРИС

$$\Delta_{\text{р}} \hat{\mu}_{mj} = \left\{ \frac{q^m \Delta t_0}{T_j} \sum_{i=1}^{Mj-1} \eta_{ji}^m l_{ji} \right\}_R - \frac{q^m \Delta t_0}{T_j} \sum_{i=1}^{Mj-1} \eta_{ji}^m l_{ji}; \quad (4.21)$$

Для алгоритмов с использованием полиномиальной модели сигнала первого порядка соответствующие составляющие методической погрешности равны [39]:

- неадекватности

$$\Delta_{\text{на}} \hat{\mu}_{mj} = \lim_{T_k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_j(m+1)} \sum_{i=1}^{Mj-1} \Delta t_{ji} \sum_{s=0}^m x_{ji}^{m-s} x_{j,i+1}^s - \mu_m, \quad (4.22)$$

- конечности объема выборки

$$\Delta_{\text{кв}} \hat{\mu}_{mj} = \frac{1}{T_j(m+1)} \sum_{i=1}^{Mj-1} \Delta t_{ji} \sum_{s=0}^m x_{ji}^{m-s} x_{j,i+1}^s - \lim_{T_s \rightarrow \infty} \frac{1}{T_s(m+1)} \sum_{i=1}^{Mj-1} \Delta t_{ji} \sum_{j=0}^m x_{ji}^{m-s} x_{j,i+1}^s - \mu_m, \quad (4.23)$$

конечности числа каналов - отсутствует;

- дискретизации

$$\Delta_{\text{д}} \hat{\mu}_{mj} = \frac{\Delta t_0}{T_j(m+1)} \sum_{i=1}^{Mj-1} l_{ji} \sum_{s=0}^m x_{ji}^{m-s} x_{j,i+1}^s - \frac{1}{T_j(m+1)} \sum_{i=1}^{Mj-1} \Delta t_{ji} \sum_{s=0}^m x_{ji}^{m-s} x_{j,i+1}^s, \quad (4.24)$$

- квантования

$$\Delta_{\text{к}} \hat{\mu}_{mj} = \frac{q^m \Delta t_0}{T_j(m+1)} \sum_{i=1}^{Mj-1} l_{ji} \sum_{s=0}^m \eta_{ji}^{m-s} \eta_{j,i+1}^s - \frac{\Delta t_0}{T_j(m+1)} \sum_{i=1}^{Mj-1} l_{ji} \sum_{s=0}^m x_{ji}^{m-s} x_{j,i+1}^s, \quad (4.25)$$

- конечной разрядности ПРИС

$$\Delta_p \hat{\mu}_{mj} = \left\{ \frac{q^m \Delta t_0}{T_j(m+1)} \sum_{i=1}^{M_j-1} l_{ji} \sum_{s=0}^m \eta_{ji}^{m-s} \eta_{j,i+1}^s \right\}_R - \frac{q^m \Delta t_0}{T_j(m+1)} \sum_{i=1}^{M_j-1} l_{ji} \sum_{s=0}^m \eta_{ji}^{m-s} \eta_{j,i+1}^s, \quad (4.26)$$

Для классических алгоритмов оценки математического ожидания и дисперсии составляющие методической погрешности, вызванные конечностью числа каналов, дискретизацией, отсутствуют, а остальные составляющие определяются из выражений (4.17) - (4.21) при  $\Delta t_{ji} = \Delta t_0$ ,  $N = M_j - 1$ .

В качестве входного процесса использовался стационарный случайный процесс с экспоненциальной КФ, подвергнутый принудительной адаптивной дискретизации полиномом нулевого порядка с заданной величиной уставки [39].

Результаты имитационного моделирования представлены на рис. 4.25 – 4.31.

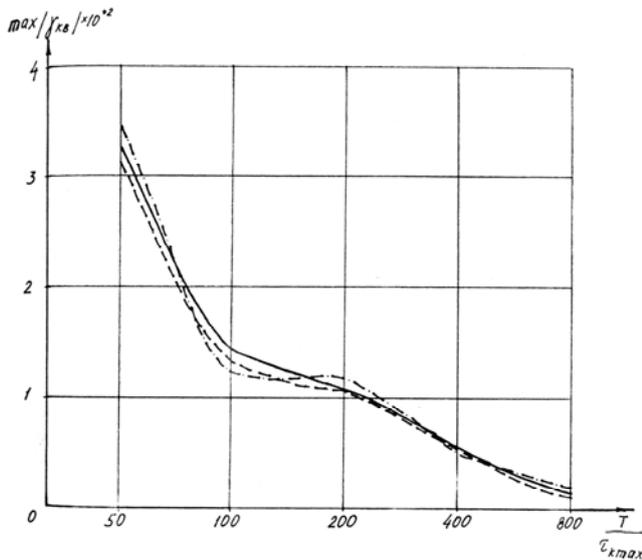


Рисунок 4.25. Погрешности конечности выборки  
 —  $\epsilon = 0,5$ ; - - -  $\epsilon = 0,75$ ; - · -  $\epsilon = 1$

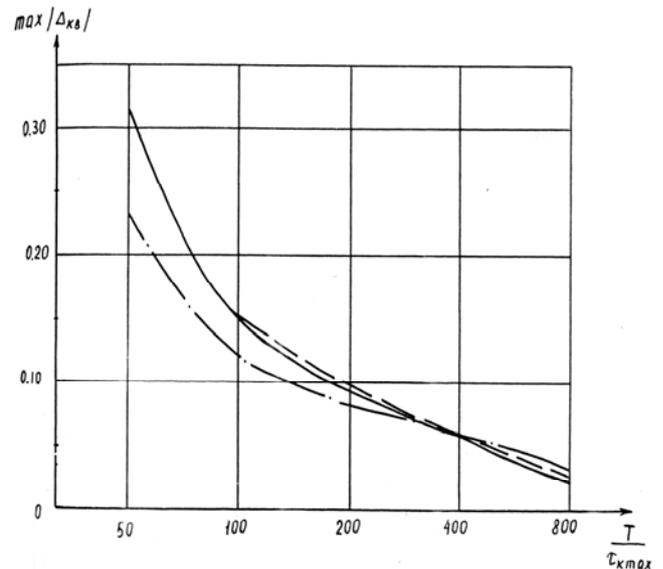


Рисунок 4.26. Погрешности конечности выборки для различных алгоритмов  
 —  $N=1$ ; - - -  $N=0$ ; - · - классический  
 $\sigma_x = 1$ ;  $\epsilon = 0,5$

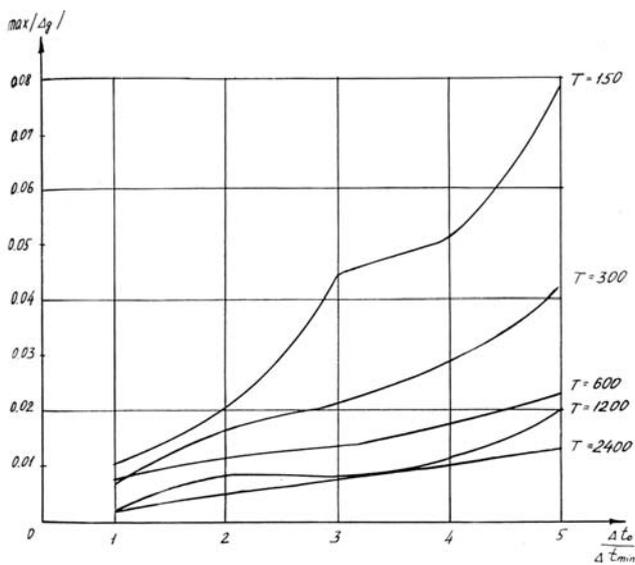


Рисунок 4.27. Погрешности дискретизации  
 $N=0$ ;  $\sigma_x = 1$ ;  $\epsilon = 1$

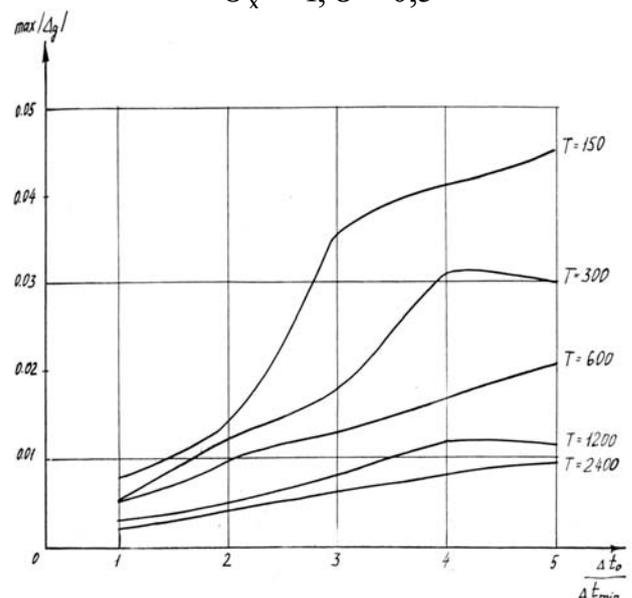


Рисунок 4.28. Погрешности дискретизации  
 $N=1$ ;  $\sigma_x = 1$ ;  $\epsilon = 1$

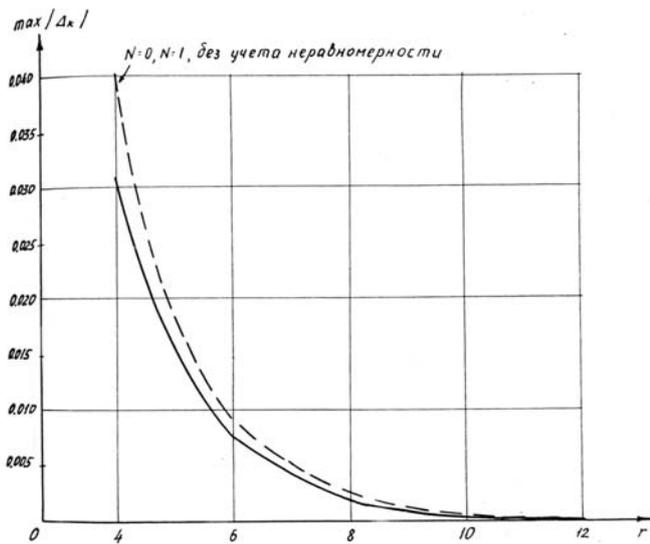


Рисунок 4.29. Погрешности квантования  
 $\sigma_x = 1$ ; —  $\varepsilon = 0,5$ ; - - -  $\varepsilon = 1$

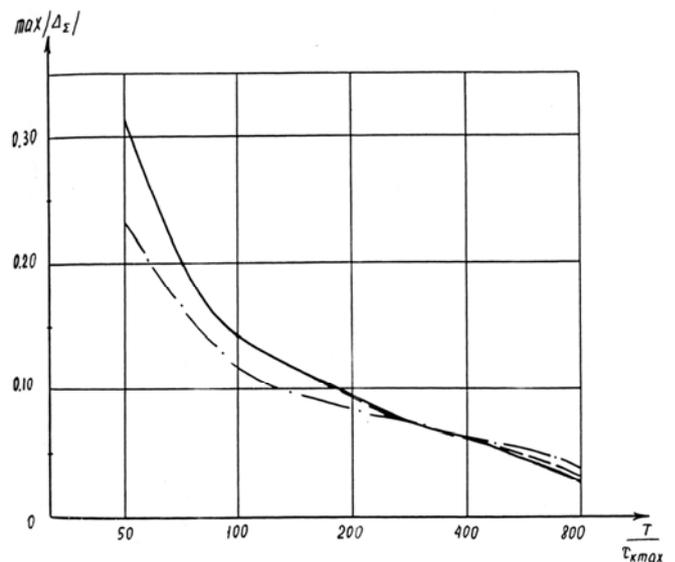


Рисунок 4.30. Полная погрешность  
 для различных алгоритмов  
 —  $N=1$ ; - - -  $N=0$ ; - · - · - классический  
 $\sigma_x = 1$ ;  $\varepsilon = 0,5$ ;  $\Delta t_0 = \Delta t_{\min}$ ;  $r=6$

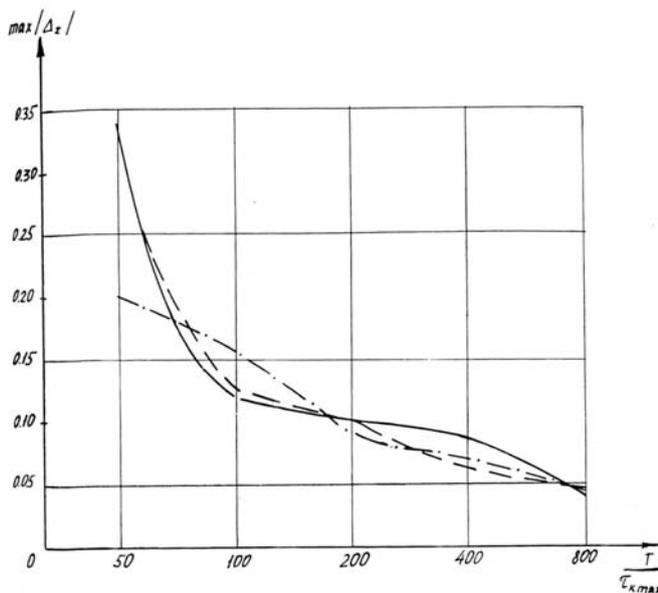


Рисунок 4.31. Полная погрешность  
 для различных алгоритмов  
 —  $N=1$ ; - - -  $N=0$ ; - · - · - классический  
 $\sigma_x = 1$ ;  $\varepsilon = 1$ ;  $\Delta t_0 = \Delta t_{\min}$ ;  $r=6$

По результатам имитационного моделирования при оценке математического ожидания можно сделать следующие выводы:

- любой из рассмотренных алгоритмов дает асимптотически несмещенную оценку, т.е. погрешность неадекватности равна нулю;
- погрешность конечности выборки уменьшается с увеличением длительности реализации (см. рис. 4.25-4.26), становясь, например, при  $m_x=0, \sigma_x^2=1, T_k/\tau_{kmax}=800$  меньше 0,05; это дает погрешность центрирования при оценке дисперсии 0,0025, что в практических случаях вполне допустимо;
- изменение значения уставки с  $0,5\sigma_x$  до  $\sigma_x$ , сохраняя вид зависимости

погрешности от различных факторов, практически не изменяет ее значения, что дает возможность при оценке математического ожидания выбирать большую уставку (см. рис. 4.25);

- погрешность дискретизации зависит от значения интервала принудительной дискретизации  $\Delta t_0$ ; выбор  $\Delta t_0 = \Delta t_{\min}$  обеспечивает допустимые значения погрешности (см. рис. 4.27-4.28), однако, возможно увеличение  $\Delta t_0 < 4 \Delta t_{\min}$ , при этом  $\Delta_d < 0,005$  при  $T_k > 150\tau_{kmax}$  и  $\varepsilon \leq \sigma_x$ ;

- значение погрешности квантования уменьшается с увеличением числа уровней квантования (см. рис. 4.29), при этом для обеспечения  $\Delta_k < 0,01, r \geq 6$ ;

• полная погрешность  $\Delta_M$  оценки математического ожидания  $m_x=0$ ,  $\sigma_x^2=1$ ,  $\varepsilon=\sigma_x$ ,  $\Delta t_0=\Delta t_{\min}$ ,  $r=6$  и  $T_k/\tau_{k\max}=800$  принимает значения  $\leq 0,05$  для любого из рассмотренных алгоритмов, поэтому при оценке математического ожидания возможно применение классического алгоритма, для которого меньше время анализа (см. рис. 9.30-9.31).

Результаты имитационного моделирования при оценке дисперсии представлены на рис. 4.32 – 4.40.

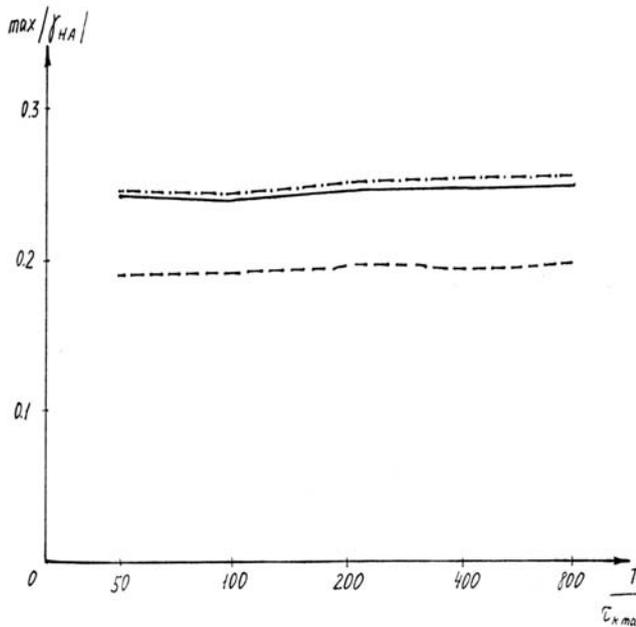


Рисунок 4.32. Погрешность неадекватности  
 — N=1; - - - N=0; - · - · - классический  
 $\sigma_x = 1; \varepsilon = 0,5;$

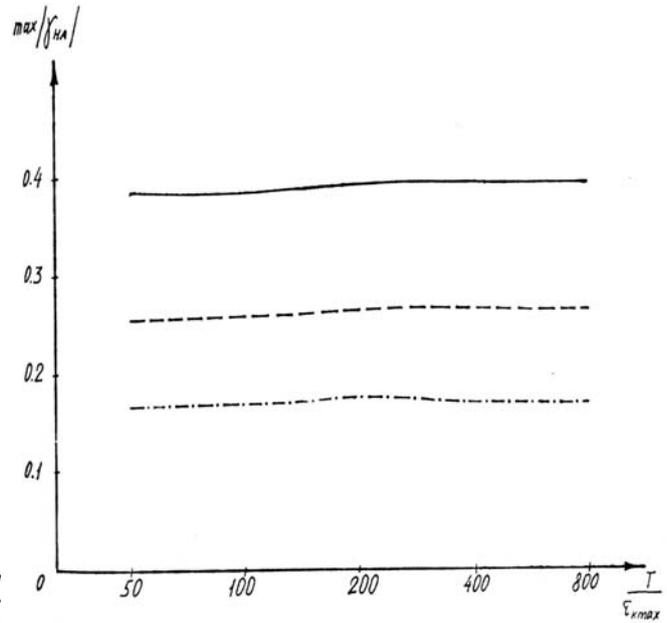


Рисунок 4.33. Погрешность неадекватности  
 — N=1; - - - N=0; - · - · - классический  
 $\sigma_x = 1; \varepsilon = 1;$

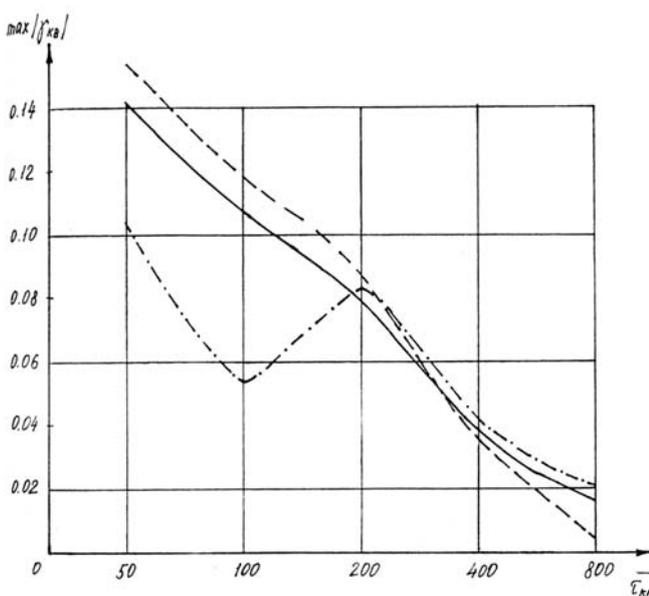


Рисунок 4.34. Погрешность неадекватности  
 — N=1; - - - N=0; - · - · - классический  
 $\sigma_x = 1; \varepsilon = 0,5;$

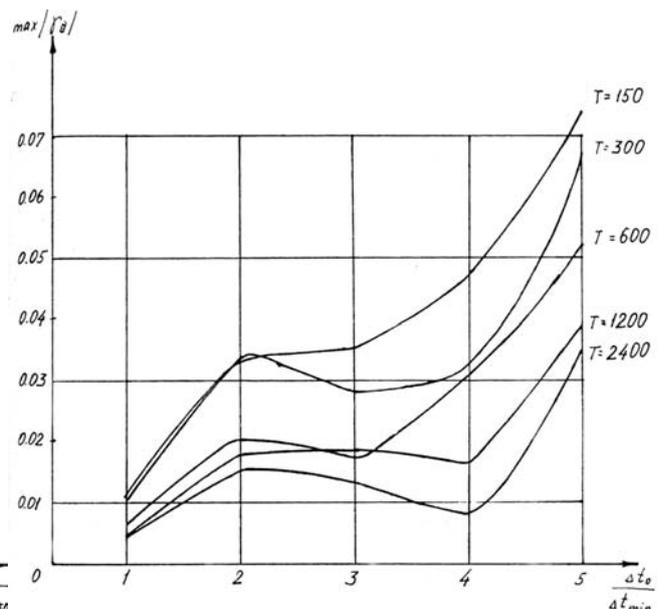


Рисунок 4.35. Погрешность дискретизации  
 N=0;  $\sigma_x = 1; \varepsilon = 0,5;$

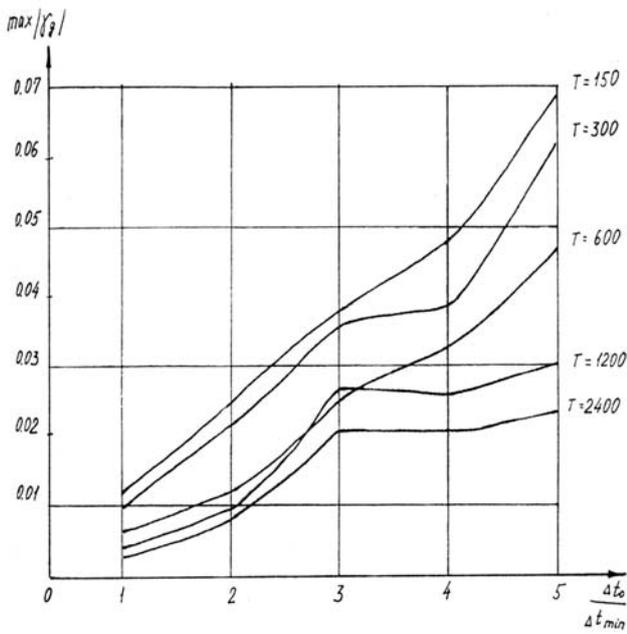


Рисунок 4.36. Погрешность дискретизации  
 $N=1$ ;  $\sigma_x = 1$ ;  $\varepsilon = 0,5$ ;

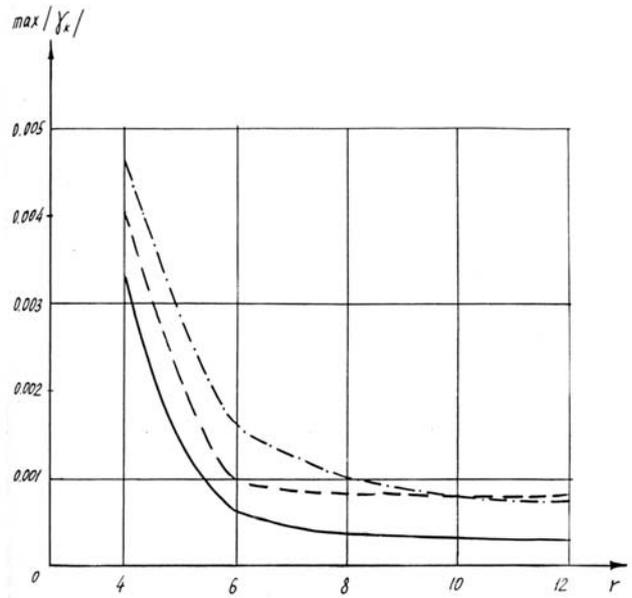


Рисунок 4.37. Погрешность неадекватности  
 —  $N=1$ ; - - -  $N=0$ ; - · - · - классический  
 $\sigma_x = 1$ ;  $\varepsilon = 0,5$ ;

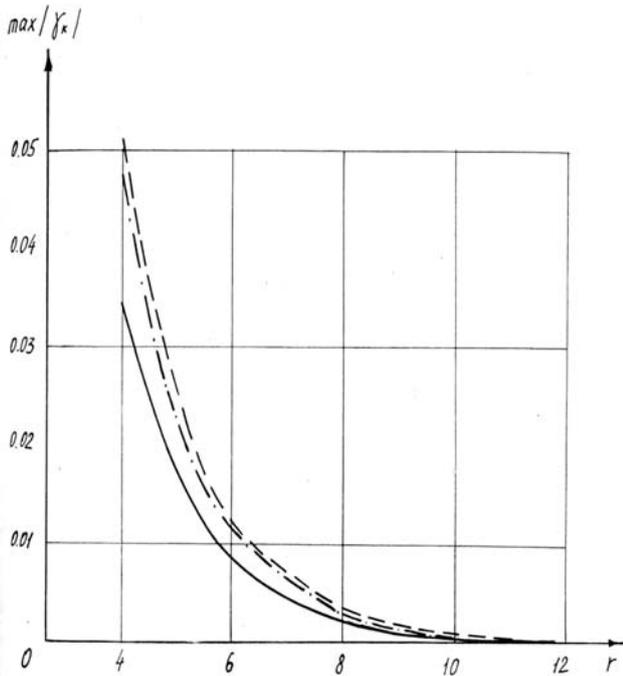


Рисунок 4.38. Погрешность квантования  
 —  $N=1$ ; - - -  $N=0$ ; - · - · - классический  
 $\sigma_x = 1$ ;  $\varepsilon = 1$

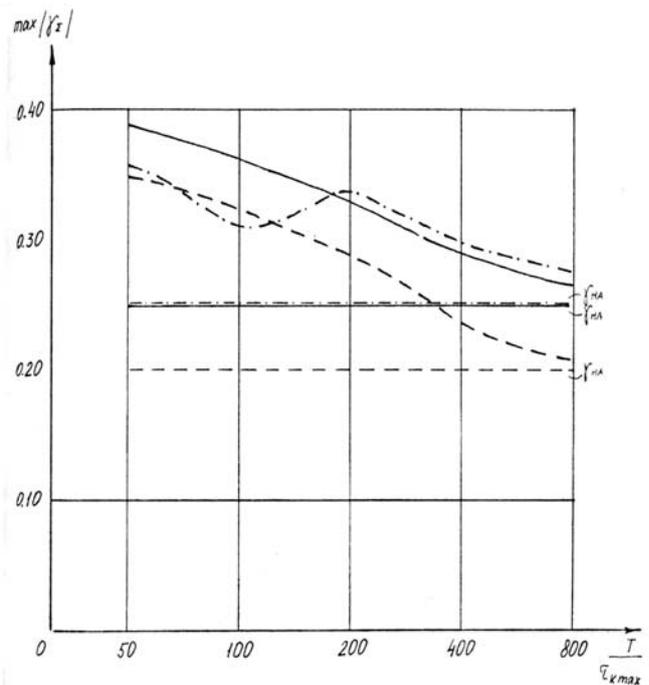


Рисунок 4.39. Полная погрешность  
 —  $N=1$ ; - - -  $N=0$ ; - · - · - классический  
 $\sigma_x = 1$ ;  $\varepsilon = 0,5$ ;  $\Delta t_0 = \Delta t_{\min}$ ;  $r=6$

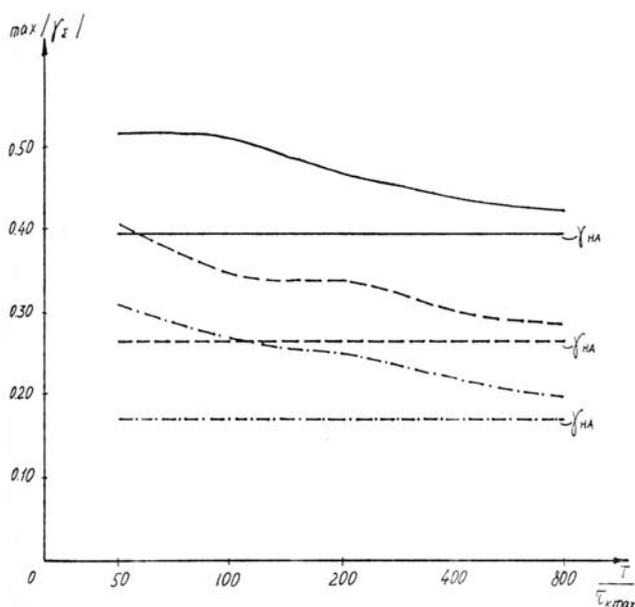


Рисунок 4.40. Полная погрешность  
 —  $N=1$ ; - - -  $N=0$ ; - · - · - классический  
 $\sigma_x = 1$ ;  $\varepsilon = 1$ ;  $\Delta t_0 = \Delta t_{\min}$ ;  $r=6$

Выводы при оценке дисперсии:

- адаптивная дискретизация изменяет значение дисперсии входного сигнала ( $\sigma_x^2 = 1$  изменяется до  $\hat{\sigma}_x^2 = 0,74$  при  $n=0$ ,  $n=1$  при  $\varepsilon=0,5 \sigma_x$ ), причем, тем больше, чем больше значение уставки;
- любой из рассмотренных алгоритмов дает смещенную оценку (см. рис. 4.32, 4.33);
- характер зависимостей  $\Delta_{кв}$ ,  $\Delta_{д}$ ,  $\Delta_{к}$  при оценке дисперсии похож на характер соответствующих зависимостей оценки математического ожидания (см. рис. 4.34-4.38), появление локальных минимумов при оценке объясняется пропаданием ряда существенных отсчетов при  $\Delta t_0 > \Delta t_{\min}$  и уменьшением из-за этого объема выборки;

- при увеличении  $T_k/\tau_{kmax}$  значение полной погрешности стремится к значению погрешности неадекватности (см. рис. 4.39, 4.40);
- при оценке дисперсии также возможно применение классического алгоритма.

#### 4.5. Анализ составляющей погрешности конечной разрядности процессора методом имитационного моделирования

Определим составляющую погрешности, обусловленную конечной разрядностью процессора, при измерении корреляционной функции [39, 64].

В качестве алгоритма оценки корреляционной функции применялся мультипликативный алгоритм с усреднением по времени, широко применяемый для анализа как нормальных, так и ненормальных стационарных случайных процессов [31].

Для моделирования случайного процесса применялись две процедуры:

- линейная фильтрация с импульсной характеристикой формирующего фильтра, определяемым требуемым видом корреляционной функции:

$$y(J) = \Delta t \sum_{I=1}^{N1} h(J)z(I - J), \tag{4.27}$$

где  $\Delta t$ - интервал дискретизации;

$h(J)$  - импульсная характеристика фильтра;

$z(I)$  - входная псевдослучайная последовательность типа «белого шума» с равномерным законом распределения;

- «S» образное нелинейное преобразование, изменяющее форму плотности распределения вероятностей:

$$x = f(y). \tag{4.28}$$

Алгоритм моделирования содержит следующие блоки:

1. **блок 1** - ввод исходных данных для моделирования:
  - N - объема выборки;
  - M - числа ординат корреляционной функции;
  - $[z_{\min}, z_{\max}]$  - диапазона генерирования псевдослучайных чисел с равномерным законом распределения;
  - характеристик линейного фильтра;
  - характеристик нелинейного преобразования;
  - $\Delta t$  - значения интервала дискретизации.
2. **блок 2** - генерирование псевдослучайной последовательности в диапазоне  $[z_{\min}, z_{\max}]$ ;
3. **блок 3** - генерирование псевдослучайной последовательности с требуемым видом корреляционной функции;
4. **блок 4** - преобразование псевдослучайной последовательности в диапазоне  $[0,1]$ ;
5. **блок 5** - нелинейное преобразование псевдослучайной последовательности;
6. **блок 6** - первичная обработка: центрирование, нормализация и т.д.;
7. **блок 7** - проверка характеристик сгенерированной последовательности;
8. **блок 8** - ввод числа десятичных знаков после запятой;
9. **блок 9** - ограничение числа десятичных знаков после запятой псевдослучайной последовательности;
10. **блок 10** - вычисление корреляционной функции с ограниченным числом десятичных разрядов после запятой;
11. **блок 11** - вычисление погрешности конечной разрядности при определении корреляционной функции.

**Замечания:**

- для моделирования коррелометра с различной разрядностью необходимо повторить блоки 8-11.
- при анализе нормальных последовательностей блоки 4 и 5 должны быть опущены.

Результаты моделирования для различных программ моделирования и различных параметров представлены в таблицах 4.1-4.3.

**Случай 1.**

Основные параметры моделирующей программы:

- объем выборки  $N = 5000$ ;
- интервал дискретизации  $\Delta t = 0,3$ ;
- импульсная характеристика формирующего фильтра

$$h(\tau) = \frac{1}{T} \exp(-\tau / T);$$

- постоянная времени  $T = 1$ ;
- число ординат импульсной характеристики  $N1 = 15$ ;
- число ординат корреляционной функции  $M = 10$ ;
- нелинейная функция преобразования:  $x = 1 - e^{-\alpha y} (1 + \alpha y + \alpha^2 y^2 / 3)$ ;
- коэффициент асимметрии  $k_a$ ;
- коэффициент эксцесса  $k_\varepsilon$ ;

- погрешность

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{s=0}^M [K_x(s\Delta t) - K_{xl}(s\Delta t)]^2}{\sum_{s=0}^M K_x^2(s\Delta t)}}; \quad (4.29)$$

- число десятичных разрядов после запятой  $l$ .

Результаты моделирования представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

$\alpha$	$k_a$	$k_\varepsilon$	$l$	$\delta$
0,1	0,09	-0,20	2	0,01
			1	0,06
0,5	0,65	-0,07	2	0,01
			1	0,06
6	-1,89	2,56	2	0,01
			1	0,05

### Случай 2.

Основные параметры моделирующей программы:

- $N = 5000$ ;
- $\Delta t = 0,3$ ;
- $h(\tau) = \frac{1}{T} \exp(-\tau/T)$ ;
- $T=1$ ;
- $N1=15$ ;
- $M=10$ ;
- $x = 1 - \exp(-\alpha y)$ .

Результаты моделирования представлены в таблице 4.2

Таблица 4.2

$\alpha$	$k_a$	$k_\varepsilon$	$l$	$\delta$
0,0005	-0,08	-0,48	2	0,01
			1	0,09
1	-0,38	-0,29	2	0,01
			1	0,06
7,5	-2,43	8,07	2	0,01
			1	0,08
10	-3,51	17,39	2	0,01
			1	0,07

### Случай 3.

Основные параметры моделирующей программы:

- $N = 5000$ ;
- $h(\tau) = \frac{1}{T} \exp(-\tau/T) \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\sqrt{1+T^2 \omega_0^2} - 1}{T \omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$ ;
- $T = 1$ ;
- $x = 1 - \exp(-\alpha y)$ .

Результаты моделирования представлены в таблице 4.3

Таблица 4.3

$\Delta t$	$\omega_0$	N1	$\alpha$	$k_a$	$k_\varepsilon$	l	$\delta$
0,1	5	30	5	-0,66	0,50	2	0,01
						1	0,09
0,1	5	30	10	-1,61	3,52	2	0,01
						1	0,10
0,1	5	30	15	-2,34	8,71	2	0,01
						1	0,09
0,05	10	60	0,0015	0,02	-0,18	2	0,01
						1	0,10
0,05	10	60	10	-0,91	1,33	2	0,01
						1	0,09
0,05	10	60	15	-1,79	5,42	2	0,01
						1	0,09

Результаты моделирования показали, что для обеспечения погрешности конечной разрядности 0,01 необходимо обеспечить две десятичные цифры после запятой (при нормализации последовательности по среднеквадратичному отклонению), что соответствует 7-8 битам. Результат не зависит существенным образом от вида корреляционных функций, плотности распределения вероятности и их характеристик.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены вопросы описания и моделирования случайных процессов с заданными вероятностными характеристиками, а также проверки качества моделирования с использованием аппроксимативного подхода и фазовых портретов. Разработанные модели и методы легли в основу построения трёх автоматизированных информационных систем для моделирования и аппроксимативного анализа базовых функциональных вероятностных характеристик:

- функций и плотностей распределения вероятностей;
- корреляционных функций;
- спектральных плотностей мощности, -

параметрическими моделями, удовлетворяющими минимуму квадратической погрешности аппроксимации.

Учитывая разнообразие случайных процессов, естественно, работу в этой области нельзя считать решенной в полной мере. Однако полученные результаты предоставляют возможность для решения разнообразных задач науки и техники методом имитационного моделирования, так как позволяют:

1. генерировать процессы с заданными вероятностными характеристиками и проверять качество генерирования с использованием аппроксимативного подхода и фазовых портретов функциональных характеристик;

2. получить аналитические выражения вероятностных функциональных характеристик в виде параметрических моделей как при регулярной, так и при нерегулярной дискретизации, удобные для дальнейших исследований и хранения результатов, что особенно важно при большом объеме статистических испытаний;

3. без существенных вычислительных затрат определить обобщенные корреляционно-спектральные характеристики: интервалы корреляции, корреляционные моменты, эквивалентную ширину спектра мощности и. т.д., – по параметрам модели;

4. за счёт встроенных подсистем имитации случайных процессов с заданными вероятностными характеристиками отладить и включить в системы новые алгоритмы оценивания вероятностных характеристик;

5. за счёт визуализации имитации случайных процессов, идентификации и аппроксимации функциональных характеристик, использования ручного и автоматизированного режимов работы, применять автоматизированные системы в учебном процессе при подготовке специалистов по специальностям, связанным со статистической обработкой информации, автоматизацией научных исследований.

На наш взгляд представляет практический интерес решение следующих задач:

1. расширение круга математических моделей для описания случайных процессов, особенно нестационарных и отличных от нормальных с заданным видом корреляционных функций;

2. поиск и исследования новых методов идентификации случайных процессов;

3. совершенствование автоматизированных систем для генерирования и аппроксимативного анализа вероятностных характеристик случайных процессов.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Автоматизированная информационная система для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик/ С.А. Прохоров, А.В. Иващенко// Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении. – Самара, СГАУ, 2001. – 135-141 с.
2. Автоматизированная учебно-исследовательская система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа/ Прохоров С.А., Кудрина М.А., Новиченкова И.Ю., Шевченко Д.В.//Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении. – Самара, СГАУ, 2001. – 142-156 с.
3. Автоматизированные системы научных исследований /Прохоров С.А., Фурсов В.А., Кривошеев А.О., и др.:НПЦ «Авиатор», Самара, 1995. - 137 с.
4. Адаптивные телеизмерительные системы /Авдеев Б.Я., Антонюк Е.М., Долинов С.Н., Журавин Л.Г., Семенов Е.И., Фремке А.В./ Л.: Энергоатомиздат, 1981. - 246 с.
5. Анго А. Математика для электро и радиоинженеров. М.: Мир, 1965.
6. Артамонов Г.Т., Тюрин В.Д. Анализ информационно-управляющих систем со случайным интервалом квантования сигнала по времени. -М.: Энергия, 1977. - 112 с.
7. Белолипецкий В.Н. Алгоритмы и устройства корреляционного анализа неравномернодискретизированных сигналов. Дисс.... канд. техн. наук - Куйбышев, 1984. - 233 с.
8. Билинский И.Я., Микелсон А.К. Стохастическая цифровая обработка непрерывных сигналов. - Рига: Зинатне, 1983. - 292 с.
9. Бобнев М.П. Генерирование случайных сигналов. Изд. 2-е перераб. и доп. М.: «Энергия», 1971, 239.
10. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1968 – 355 с.
11. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1971
12. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1969. - 576 с.
13. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1965. - 368 с.
14. Волков И.И., Мартовой В.П. Генератор тестового случайного сигнала на микро-ЭВМ для статистической оптимизации и контроля АСУ ТП. В кн.: II Всесоюзная конференция по перспективам и опыту внедрения статистических методов в АСУ ТП. Тезисы докладов. Секция 2. – М.: 1984, С. 114-115.
15. Горелов Г.В. Нерегулярная дискретизация сигналов. - М.: Радио и связь, 1982. - 256 с., ил. (стат. теория связи. Вып. 17)
16. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Физматгиз, 1963. - 1100 с.
17. Дёч Р.А. Нелинейные преобразования случайных процессов. М.: ИЛ, 1961.
18. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Ч.1. - М.:Мир,1971. -320 с.
19. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения.Ч.2. - М.:Мир,1972. -288 с.
20. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – М.: Наука, 1971, 327 с.
21. Заездный А.М. Основы расчётов по статистической радиотехнике. – М.: Связь, 1969. - 447 с.
22. Кавалеров Г.И., Мандельштам С.М. Введение в информационную теорию измерений. - М.: Энергия, 1974. - 375 с.
23. Калашников И.Д., Степанов В.С., Чуркин А.В. Адаптивные системы сбора и передачи информации. - М.: Энергия,1975. - 240 с.
24. Карпов И.Г. Модификация уравнений Пирсона для односторонних законов распределения непрерывной случайной величины. - Радиотехника, 1999, №3, С. 22 – 26.

25. Кей С.М., Марил С.Л. Современные методы спектрального анализа. ТИИЭР т. 69, № 11, 1981, С. 3-47.
26. Кнут Д.Е. Искусство программирования для ЭВМ. – М.: Мир, 1976, 724 с.
27. Козлов А.Н. Автоматизированная информационная система аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов. Дипломная работа. каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2000. - 94 с.
28. Кудрина М.А. Автоматизированная учебно- исследовательская система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа. Дипломная работа, каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2000.- 116 с.
29. Методы нормирования метрологических характеристик, оценки и контроля характеристик погрешностей средств статистических измерений. РТМ 25 139-74/Минприбор. – 1974. – 76 с.
30. Мидлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. – М: «Сов. Радио», 1961, т. 1.
31. Мирский Г.Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. - М.: Энергия, 1972.-456 с., ил.
32. Мирский Г.Я. Характеристика стохастической взаимосвязи и их измерения.- М.: Энергоиздат, 1982. – 319 с.
33. Новиченкова И.Ю. Автоматизированная учебно- исследовательская система аппроксимативного корреляционно- спектрального анализа. Дипломная работа, каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2000. - 126 с.
34. Орищенко В.И., Санников В.Г., Свириденко В.А. Сжатие данных в системах сбора и передачи информации. – М.: Радио и связь, 1985. – 184 с., ил.
35. Перспективные средства вычислительной техники и автоматизации для создания интеллектуальных АСНИ /Прохоров С.А., Дерябкин В.П., Кривошеев А.О. и др.: НПЦ «Авиатор». Самара, 1994. 99 с.
36. Полляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. – М.: Сов. радио, 1971 400 с.
37. Попов Ю.П., Самарский А.А. Вычислительный эксперимент. - Новое в жизни, науке и технике. Сер. Мат-ка, киб., 1983, №11, М.: Знание. - 64 с.
38. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – Самара, СНЦ РАН, 2001 329 с.
39. Прохоров С.А. Измерение вероятностных характеристик при неравномерной дискретизации. - Дисс.... докт. техн. наук - Куйбышев: 1987. - 409 с.
40. Пугачёв В.С. Введение в теорию вероятностей. - М.: Наука, 1968. - 368 с.
41. Пугачёв В.С. Теория случайных функций. - М.: Физматиздат., 1962. – 884 с.
42. Рабинер П., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов.//Пер. с англ./Под ред. Ю.Н. Александрова. - М.: Мир, 1978.-848 с.
43. Романенко А.Ф. Сергеев Г.А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. - М.: Сов.радио, 1968.-256 с.
44. Свириденко В.А. Анализ систем со сжатием данных. - М.:Связь, 1977.-184с.
45. Смышляева Л.Г., Уланов В.А. Моделирование на ЭВМ дискретных случайных процессов с заданной корреляционной функцией. В кн.: Всесоюзный симпозиум « Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей». Тезисы докладов. Секция 4. – Л., 1976, С. 26-30.
46. Современные методы идентификации систем./п/р П. Эйкхоффа. – М.; Мир, 1983, 400 с.
47. Соучек Б. Мини-ЭВМ в системах обработки информации. - М.: Мир, 1976. – 520 с.
48. Сушков В.С. Синтез цифрового фильтра для моделирования на ЦВМ стационарных гауссовских процессов и корреляционной функции произвольного вида. В кн.: Всесоюзный симпозиум « Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей». Тезисы докладов. Секция 4. – Л., 1976, С. 35-39.

49. Учеватов С.В. Автоматизированная информационная система аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов. Дипломная работа, каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2000.- 69 с.
50. Хуснутдинов Г.Н., Яролошвили Р.В. Погрешность воспроизведения образцовой корреляционной функции. В кн.: Всесоюзный симпозиум «Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей». Тезисы докладов. Секция 4. – Л., 1971, С. 61-67.
51. Цветков Э.И. Методические погрешности статистических измерений - Л.: Ленинградское отд-ние Энергоатомиздата, 1984. - 144с., ил.
52. Цветков Э.И. Нестационарные случайные процессы и их анализ. - М.: Энергия, 1973.-128с., ил.
53. Цветков Э.И. Основы теории статистических измерений.-2-е изд., перераб. и доп.- Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отделение, 1982.- 256 с.
54. Чеголин П.М. Автоматизация спектрального и корреляционного анализа. – М.: Энергия, 1969. – 383 с.
55. Численные методы: Курс лекций/ А.Н. Коварцев. Самар. гос. аэрокосм. Ун-т, 2000, 177 с.
56. Шевченко Д.В. Автоматизированная учебно-исследовательская система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа. Дипломная работа, каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2001.- 139 с.
57. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. – М.: Мир, 1972.
58. Ященко В.В. Разработка и исследование методов определения вероятностных характеристик сигналов, представленных нерегулярной выборкой. Дисс.... канд. техн. наук. - Л.:1986.-164 с.
59. Akaike H. Autoregression Model Fitting for Control. Ann. Inst. Statist. Math. 23, 1969, pp. 163-180.
60. Akaike H. Fitting Autoregression for Prediction. Ann. Inst. Statist. Math. 21, 1969, pp. 243-247.
61. Chow J.C. On the Estimation the Orders of an Autoregressive Moving Everage Process with Uncertain Abservations. IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-17, 1972, pp. 386-387.
62. Prokhorov S. Manual for the Simulation of Random Processes and Dynamic Systems. - IRB. - Zagreb. - 1980. - 62 p.
63. Soucek B. and Carlson A.D. Computers in Neurobiology and Behaviour (John Wiley, New York, 1976).
64. Soucek B., Prokhorov S. Amplitude Correlator Based on Small Computers//Proceedings of the IV International Symp. «MIMI 80».- Budapest. - 1980. - P.264-267.
65. Soucek B., Prokhorov S. Event-Train Correlation and Real-Time Microcomputer Systems//Microprocessing and Microprograming. - vol. 11 (1983).- № 1. - North Holland Publishing Company. - P. 23-29.
66. Soucek B., Prokhorov S. Event-Train Correlator Based on Small Computers//Proceedings of the IV International Symp. «MIMI 80». - Budapest. - 1980. - P.260-263.

Типовые законы распределения

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$	
1	Равномерный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{1}{b-a}, & (a < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{x-a}{b-a}, & (a < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	0; 0;	$(b-a)^4/80;$ -1,2;	$a = \alpha_1 - \sqrt{3\mu_2};$ $b = \alpha_1 + \sqrt{3\mu_2};$	
2	Симсона	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & (a < x < (a+b)/2); \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & (a < x < (a+b)/2); \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/24$	0; 0;	$(b-a)^4/240;$ -0,6;	$a = \alpha_1 - \sqrt{6\mu_2};$ $b = \alpha_1 + \sqrt{6\mu_2};$	
3	Арксинуса	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & (-a < x < a), \\ 0, & (a < x < \infty), \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a}, & (-a < x < a), \\ 1, & (a < x < \infty), \end{cases}$	
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	0	$a^2/2$	0; 0;	$3a^4/8;$ -1,5;	$a = \sqrt{2\mu_2}$	
4	Коши	$\frac{a}{\pi[(x-\mu)^2 + a^2]}$			$\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-\mu}{a} + \frac{1}{2}$	
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$		
	Начальных и центральных моментов не существует, так как соответствующие интегралы расходятся					

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$
5	Лапласа	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x-\mu }$			$\begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda(x-\mu)}, & (-\infty < x < \mu), \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda(x-\mu)}, & (\mu < x < \infty), \end{cases}$
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$\mu$	$2/\lambda^2$	$6/\lambda^3;$ $\approx 2,1;$	$24/\lambda^4;$ $3;$	$\mu = \alpha_1;$ $\lambda = \sqrt{2/\mu_2};$
6	Вейбулла	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha\beta x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha), & (0 < x < \infty) \end{cases}$ $\alpha > 0, \beta > 0$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0), \\ 1 - \exp(-\beta x^\alpha), & (0 < x < \infty) \end{cases}$
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	
	$\Gamma(1+1/\alpha)\beta^{-1/\alpha}$	$[\Gamma(1+2/\alpha) - \Gamma^2(1+1/\alpha)] \times \beta^{-2/\alpha}$	$[\Gamma(1+3/\alpha) - 3\Gamma(1+1/\alpha) \times \Gamma(1+2/\alpha) + 2\Gamma^3(1+1/\alpha)] \times \beta^{-3/\alpha};$ $\mu_3 / \mu_2^{3/2};$	$[\Gamma(1+4/\alpha) - 4\Gamma(1+3/\alpha) \times \Gamma(1+1/\alpha) + 6\Gamma(1+2/\alpha) \times \Gamma^2(1+1/\alpha) - 3\Gamma^4(1+1/\alpha)] \times \beta^{-4/\alpha};$ $\mu_4 / \mu_2^2 - 3;$	
7	Рэля	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & (0 < x < \infty) \end{cases}$
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$\frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \approx 1,25\sigma$	$\frac{4-\pi}{2} \sigma^2 \approx 0,43 \sigma^2$	$\frac{(\pi-3)\sqrt{\pi}}{2} \times \sigma^3 \sqrt{2};$ $\approx 0,63;$	$\frac{32-3\pi^2}{4} \sigma^4;$ $\approx -0,3;$	$\sigma \approx 0,8\alpha_1$
8	Экспоненциальный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha e^{-\alpha x}, & (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ 1 - e^{-\alpha x}, & (0 < x < \infty) \end{cases}$
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$1/\alpha$	$1/\alpha^2$	$2/\alpha^3;$ $2;$	$9/\alpha^4;$ $6;$	$\alpha = 1/\alpha_1$

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$
9	$\operatorname{sech}^2 x$	$\frac{a}{2} \operatorname{sech}^2 ax$			$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} ax$
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	0	$\frac{\pi^2}{12a^2}$	0; 0;	$\frac{7\pi^4}{240a^4};$ 4,2;	$a = \frac{\pi}{2\sqrt{3}\mu_2}$
10	Нормальный	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$			$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) dt$
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	a	$\sigma^2$	0; 0;	$3\sigma^4;$ 0;	$a = \alpha_1;$ $\sigma = \sqrt{\mu_2};$
11	Односторонний нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp\left(-x^2/2\sigma^2\right), x > 0 \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \int_0^x \exp\left(-t^2/2\sigma^2\right) dt, x > 0 \end{cases}$
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$\approx 0,8\sigma$	$\approx 0,36\sigma^2$	$\approx 0,22\sigma^3;$ $\approx 1;$	$\approx 0,54\sigma^4;$ $\approx 0,85;$	$\sigma = 1,25\alpha_1$
12	Пирсона	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}; \end{cases}$ $\lambda = n/2 (n = 1, 2, \dots)$			$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \frac{\Gamma(\lambda, \alpha x)}{\Gamma(\lambda)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$\lambda/\alpha$	$\lambda/\alpha^2$	$2\lambda/\alpha^3;$ $2/\sqrt{\lambda};$	$3\lambda(\lambda+2)/\alpha^4;$ $6/\lambda;$	$\alpha = \alpha_1/\mu_2;$ $\lambda = \alpha_1^2/\mu_2;$

№	Название закона	$f_x(x)$	$F_x(x)$
13	Распределение модуля нормальной случайной величины	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \left[ e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma^2}} \right]; \\ 0 (0 \leq x < \infty) \end{cases}$	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0) \\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, (0 \leq x < \infty) \end{cases}$
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$
	$\frac{\sigma \sqrt{2\pi} (n-1)!!}{2^{n/2} \Gamma(n/2)};$ $\frac{\sigma \sqrt{2\pi} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\Gamma(n/2)};$ $(n = 2k)$ $(n = 2k + 1)$	$\sigma^2 \left[ n - \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \right]$	$\sigma_3 \sqrt{2} \left[ (1-2n) \times \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + 4 \frac{\Gamma^3\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^3\left(\frac{n}{2}\right)} \right];$ $\mu_3 / \mu_2^{3/2};$
14	Усечённый нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty < x \leq x_1); \\ \frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, (x_1 < x \leq x_2); \\ 0, (x_1 < x < x_2); \end{cases}$ $A = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [B(x_2) - B(x_1)]}$ $B(x_i) = \int_0^{\frac{x_i-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$	$\begin{cases} 0, (-\infty < x \leq x_1); \\ \frac{B(x) - B(x_1)}{B(x_2) - B(x_1)}, (x_1 < x \leq x_2); \\ 0, (x_1 < x < x_2); \end{cases}$
	$\alpha_1$	$\mu_2$	
	$a + E\sigma;$ $D(x) = \frac{x-a}{\sigma}; C(x) = \exp\left(-\frac{D^2(x)}{2}\right);$ $E = \frac{C(x_1) - C(x_2)}{B(x_2) - B(x_1)};$		$\sigma^2 \left\{ 1 - E^2 - \frac{A}{\sqrt{2\pi}} [D(x_2)C(x_2) - D(x_1)C(x_1)] \right\}$

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$	
15	Эрланга	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\beta x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\beta x} (\beta x)^k}{k!}, \\ (0 < x < \infty) \end{cases}$	
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$\alpha/\beta$	$\alpha/\beta^2$	$2\alpha/\beta^3;$ $2/\sqrt{\alpha};$	$3\alpha(\alpha+2)/\beta^4;$ $6/\alpha;$	$\alpha = \alpha_1^2 / \mu_2;$ $\beta = \alpha_1 / \mu_2;$	
16	«Гамма-распределение»	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, (0 < x < \infty), \\ \alpha > -1, \beta > 0 \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\Gamma\left(\alpha+1; \frac{x}{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$(\alpha+1)\beta$	$(\alpha+1)\beta^2$	$2(\alpha+1)\beta^3;$ $\frac{2}{\sqrt{\alpha+1}};$	$3(\alpha+3)(\alpha+1)\beta^4$ $\frac{6}{\alpha+1};$	$\alpha = \frac{\alpha_1^2}{\mu_2} - 1;$ $\beta = \frac{\mu_2}{\alpha_1};$	
17	Показательно-степенной	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{x^m}{m!} e^{-x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\Gamma(m+1, x)}{\Gamma(m+1)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$m+1$	$m+1$	$2(m+1);$ $\frac{2}{\sqrt{m+1}};$	$3(m+3)(m+1);$ $\frac{6}{m+1};$	$m = \alpha_1 - 1$	
18	Максвелла	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{4}{\sqrt{\pi} (2\sigma^2)^{3/2}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \end{cases}$	
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$\approx 1,6\sigma$	$\approx 1,73\sigma^2$	$\approx 0,15\sigma^3;$ $\approx 0,07;$	$\approx 13,5\sigma^4;$ $\approx 1,55;$	$\sigma \approx 0,625\alpha_1$	

Характеристические функции

№	Название закона	$f_x(x)$	$\varphi_x(u)$
1	Равномерный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{1}{b-a}, & (a < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	$\frac{e^{iub} - e^{iua}}{iu(b-a)}$
2	Симсона	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & (a < x < (a+b)/2); \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	$-\frac{4}{u^2(b-a)^2} (e^{iub/2} - e^{iua/2})$
3	Арксинуса	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & (-a < x < a), \\ 0, & (a < x < \infty), \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{e^{iux}}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$
4	Коши	$\frac{a}{\pi[(x-\mu)^2 + a^2]}$	$\exp[iu\mu - a u ]$
5	Лапласа	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x-\mu }$	$\frac{\exp(iu\mu)}{1+u^2/\lambda^2}$
6	Вейбулла	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha\beta x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha); & \\ \alpha > 0, \beta > 0 \end{cases}$	$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iu)^2}{k!} \beta^{-k/\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right)$
7	Рэля	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & (0 < x < \infty) \end{cases}$	$1 - \frac{u\sigma}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{(2k+1)!} (u\sigma\sqrt{2})^{2k+2} + i \frac{u\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \exp(-u^2\sigma^2/2)$
8	Экспоненциальный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha e^{-\alpha x}, & (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\alpha - iu}$
9	$\operatorname{sech}^2 x$	$\frac{a}{2} \operatorname{sech}^2 ax$	$\frac{i\pi}{2a \operatorname{sh} \frac{u\pi}{2a}}$
10	Нормальный	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\exp(iua - u^2\sigma^2/2)$

11	Односторонний нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp(-x^2 / 2\sigma^2), x > 0 \end{cases}$	$\exp(u^2\sigma^2 / 2) \times$ $\times \left[ 1 + \Phi\left(\frac{i u \sigma}{\sqrt{2}}\right) \right];$ $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$
12	Пирсона	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}; \end{cases}$ $\lambda = n/2 (n = 1, 2, \dots)$	$\frac{1}{(1 - i u / \alpha)^\lambda}$
13	Эрланга	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\beta x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\left(1 - \frac{i u}{\beta}\right)^{-\alpha}$
14	«Гамма-распределение»	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, (0 < x < \infty), \\ \alpha > -1, \beta > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{(1 - i u \beta)^{\alpha+1}}$
15	Показательно-степенной	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{x^m}{m!} e^{-x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\frac{1}{(1 - i u)^{m+1}}$

## Приложение 3

### Функции распределения

Логарифмически-нормальный закон		Нормальный закон		Усеченный нормальный закон	
x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
1,0000	0,1586	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,5000	0,4666	0,5000	0,2652995E-01	0,1000	0,4987596E-02
4,0000	0,6504	1,0000	0,9021267E-01	0,2000	0,1980038E-01
5,5000	0,7596	1,5000	0,1733	0,3000	0,4400352E-01
7,0000	0,8280	2,0000	0,2643	0,4000	0,7688675E-01
8,5000	0,8730	2,5000	0,3553	0,5000	0,1175
10,0000	0,9037	3,0000	0,4122	0,6000	0,1647
11,5000	0,9255	3,5000	0,5221	0,7000	0,2173
13,0000	0,9413	4,0000	0,5939	0,8000	0,2738
14,5000	0,9531	4,5000	0,6575	0,9000	0,3330
16,0000	0,9619	5,0000	0,7127	1,0000	0,3935
17,5000	0,9688	5,5000	0,7603	1,1000	0,4539
19,0000	0,9742	6,0000	0,8008	1,2000	0,5132
20,5000	0,9785	6,5000	0,8352	1,3000	0,5704
22,0000	0,9818	7,0000	0,8642	1,4000	0,6247
23,5000	0,9846	7,5000	0,8882	1,5000	0,6754
25,0000	0,9869	8,0000	0,9085	1,6000	0,7219
26,5000	0,9888	8,5000	0,9251	1,7000	0,7642
28,0000	0,9903	9,0000	0,9388	1,8000	0,8021
29,5000	0,9916	9,5000	0,9503	1,9000	0,8356
31,0000	0,9926	10,0000	0,9595	2,0000	0,8646
32,5000	0,9935	10,5000	0,9672	2,1000	0,8896
34,0000	0,9943	11,0000	0,9735	2,2000	0,9112
35,5000	0,9951	11,5000	0,9785	2,3000	0,9292
37,0000	0,9957	12,0000	0,9827	2,4000	0,9437
38,5000	0,9962	12,5000	0,9860	2,5000	0,9561
40,0000	0,9965	13,0000	0,9887	2,6000	0,9662
41,5000	0,9969	13,5000	0,9909	2,7000	0,9737
43,0000	0,9972	14,0000	0,9927	2,8000	0,9803
44,5000	0,9975	14,5000	0,9941	2,9000	0,9850
46,0000	0,9978	15,0000	0,9954	3,0000	0,9886
47,5000	0,9980	15,5000	0,9963	3,1000	0,9920
49,0000	0,9983	16,0000	0,9972	3,2000	0,9938
50,5000	0,9985	16,5000	0,9976	3,3000	0,9959
52,0000	0,9986	17,0000	0,9978	3,4000	0,9968
53,5000	0,9987	17,5000	0,9987	3,5000	0,9979
55,0000	0,9988	18,0000	0,9985	3,6000	0,9990
56,5000	0,9989	18,5000	0,9989	3,7000	0,9984
58,0000	0,9989	19,0000	0,9995	3,8000	0,9998
59,5000	0,9991	19,5000	0,9984		

Продолжение приложения 3

«Распределение Накагами»      Усечённый нормальный      Распределения модуля  
многомерного вектора

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1000	0,7965665E-01	0,1000	0,3454	0,1000	0,7967E-01
0,2000	0,1585	0,2000	0,4730	0,2000	0,1586
0,3000	0,2358	0,3000	0,5615	0,3000	0,2358
0,4000	0,3109	0,4000	0,6291	0,4000	0,3109
0,5000	0,3829	0,5000	0,6829	0,5000	0,3830
0,6000	0,4515	0,6000	0,7269	0,6000	0,4516
0,7000	0,5161	0,7000	0,7635	0,7000	0,5162
0,8000	0,5763	0,8000	0,7943	0,8000	0,5764
0,9000	0,6319	0,9000	0,8205	0,9000	0,6320
1,0000	0,6827	1,0000	0,8429	1,0000	0,6829
1,1000	0,7287	1,1000	0,8622	1,1000	0,7289
1,2000	0,7699	1,2000	0,8789	1,2000	0,7700
1,3000	0,8064	1,3000	0,8934	1,3000	0,8066
1,4000	0,8384	1,4000	0,9059	1,4000	0,8387
1,5000	0,8664	1,5000	0,9169	1,5000	0,8666
1,6000	0,8905	1,6000	0,9266	1,6000	0,8906
1,7000	0,9108	1,7000	0,9351	1,7000	0,9111
1,8000	0,9281	1,8000	0,9425	1,8000	0,9284
1,9000	0,9426	1,9000	0,9490	1,9000	0,9428
2,0000	0,9546	2,0000	0,9547	2,0000	0,9547
2,1000	0,9642	2,1000	0,9598	2,1000	0,9645
2,2000	0,9721	2,2000	0,9643	2,2000	0,9725
2,3000	0,9786	2,3000	0,9683	2,3000	0,9788
2,4000	0,9836	2,4000	0,9718	2,4000	0,9838
2,5000	0,9875	2,5000	0,9749	2,5000	0,9879
2,6000	0,9908	2,6000	0,9777	2,6000	0,9909
2,7000	0,9930	2,7000	0,9801	2,7000	0,9933
2,8000	0,9948	2,8000	0,9823	2,8000	0,9952
2,9000	0,9964	2,9000	0,9842	2,9000	0,9965
3,0000	0,9972	3,0000	0,9860	3,0000	0,9976
3,1000	0,9981	3,1000	0,9875	3,1000	0,9983
3,2000	0,9988	3,2000	0,9889	3,2000	0,9989
3,3000	0,9989	3,3000	0,9900	3,3000	0,9993
3,4000	0,9995	3,4000	0,9911	3,4000	0,9995
3,5000	0,9994	3,5000	0,9921	3,5000	0,9998
3,6000	0,9998	3,6000	0,9929	3,6000	0,9999
3,7000	0,9997	3,7000	0,9937		
3,8000	1,0000	3,8000	0,9944		
3,9000	0,9998	3,9000	0,9951		
		4,0000	0,9956		

Продолжение приложения 3

Распределение Пирсона (A=1)

Распределения модуля  
нормальной случайной  
величины

Гамма- распределение

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
-2,5000	0,1642406E-03	0,1000	0,4601441E-01	-1,5000	0,0000
-2,3000	0,4325211E-03	0,2000	0,9199205E-01	-1,4000	0,0063
-2,1000	0,8091927E-03	0,3000	0,1381	-1,3000	0,0138
-1,9000	0,1686186E-02	0,4000	0,1843	-1,2000	0,0229
-1,7000	0,3364801E-02	0,5000	0,2306	-1,1000	0,0336
-1,5000	0,6141722E-02	0,6000	0,2768	-1,0000	0,0462
-1,3000	0,1056147E-01	0,7000	0,3230	-0,9000	0,0608
-1,1000	0,1776525E-01	0,8000	0,3691	-0,8000	0,0776
-0,9000	0,2857542E-01	0,9000	0,4148	-0,7000	0,0967
-0,7000	0,4446378E-01	1,0000	0,4598	-0,6000	0,1183
-0,5000	0,6667840E-01	1,1000	0,5041	-0,5000	0,1424
-0,3000	0,9671339E-01	1,2000	0,5474	-0,4000	0,1640
-1,0000	0,1355	1,3000	0,5892	-0,3000	0,1981
0,1000	0,1840	1,4000	0,6296	-0,2000	0,2297
0,3000	0,2419	1,5000	0,6682	-0,1000	0,2635
0,5000	0,3085	1,6000	0,7047	0,0000	0,2994
0,7000	0,3821	1,7000	0,7391	0,1000	0,3372
0,9000	0,4602	1,8000	0,7711	0,2000	0,3765
1,1000	0,5398	1,9000	0,8006	0,3000	0,4170
1,3000	0,6179	2,0000	0,8277	0,4000	0,4583
1,5000	0,6915	2,1000	0,8522	0,5000	0,5000
1,7000	0,7581	2,2000	0,8743	0,6000	0,5417
1,9000	0,8160	2,3000	0,8938	0,7000	0,5830
2,1000	0,8645	2,4000	0,9111	0,8000	0,6235
2,3000	0,9033	2,5000	0,9262	0,9000	0,6623
2,5000	0,9333	2,6000	0,9392	1,0000	0,7006
2,7000	0,9555	2,7000	0,9504	1,1000	0,7365
2,9000	0,9714	2,8000	0,9597	1,2000	0,7703
3,1000	0,9822	2,9000	0,9677	1,3000	0,8019
3,3000	0,9894	3,0000	0,9743	1,4000	0,8310
3,5000	0,9939	3,1000	0,9797	1,5000	0,8576
3,7000	0,9966	3,2000	0,9841	1,6000	0,8817
3,9000	0,9983	3,3000	0,9876	1,7000	0,9033
4,1000	0,9992	3,4000	0,9906	1,8000	0,9224
4,3000	0,9996	3,5000	0,9927	1,9000	0,9392
		3,6000	0,9944	2,0000	0,9538
		3,7000	0,9959	2,1000	0,9664
		3,8000	0,9967	2,2000	0,9771
		3,9000	0,9976	2,3000	0,9862
		4,0000	0,9981	2,4000	0,9937
		4,1000	0,9984	2,5000	1,0000
		4,2000	0,9994		
		4,3000	0,9997		

Обратные функции законов распределения

Закон распределения	Обратная функция
Симпсона	$\begin{cases} a, y = 0 \\ (b - a) * \sqrt{\frac{y}{2}} + a, (0 < y < \frac{1}{2}) \\ b - \sqrt{\frac{1-y}{2}} * (b - a), [\frac{1}{2} < y < 1) \\ b, y = 1 \end{cases}$
Арксинуса	$\begin{cases} -a, y = 0 \\ -a * \cos(\pi y), (0 < y < 1) \\ a, y = 1 \end{cases}$
Коши	$a * \operatorname{tg}(\pi y - \frac{\pi}{2}) + \mu$
Лапласа	$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} * \ln(2y) + \mu, (0 < y < \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{\lambda} \ln(2 * (1 - y)) + \mu, [\frac{1}{2} < y < 1) \end{cases}$
Вейбулла	$\begin{cases} 0, y = 0 \\ \sqrt[\alpha]{-\frac{1}{\beta} \ln(1 - y)}, (0 < y < 1) \end{cases}$
Рэля	$\begin{cases} 0, y = 0 \\ \sqrt{-2 * \sigma^2 \ln(1 - y)}, (0 < y < 1) \end{cases}$
Экспоненциальный односторонний	$\begin{cases} 0, y = 0 \\ -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y), (0 < y < 1) \end{cases}$
Равномерный	$y(b - a) + a$
$\operatorname{sech}^2 ax$	$\frac{1}{2 * a} \ln\left(\frac{y}{1 - y}\right)$

Характеристики типовых законов распределения (Рд=0,999)

№	Название	$f_x(x)$	$ F''(x) $	$dx$
1	Нормальный	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{1}{2}}$	$6,8 \sigma_x$
2	Односторонний нормальный	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \sigma_x^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$	$\frac{1}{\sigma_x} \sqrt{\frac{2}{\pi} \sigma_x^2} e^{-\frac{1}{2}}$	$3,4 \sigma_x$
3	Усечённый нормальный	$\frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$ $A = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [B(x_2) - B(x_1)]},$ $B(x_i) = \int_0^{\frac{x_i - a}{\sigma_x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$	$\frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma_x^2} e^{-\frac{1}{2}}$	$(x_2 - x_1) \sigma_x$
4	Распределение модуля нормальной случайной величины	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \left[ e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}} - e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma_x^2}} \right]$	$X_3$ определяется из уравнения $\left(x^2 + a^2 - \sigma_x^2\right) \operatorname{ch} \frac{ax}{\sigma_x^2} - 2ax \operatorname{sh} \frac{ax}{\sigma_x^2} = 0;$ $\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x^3} \left[ (x-a) e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}} + (x+a) e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma_x^2}} \right]$	$3,15 \sigma_x$

№	Название	$f_x(x)$	$ F''(x) $	dx
5	Логарифмический нормальный	$\frac{1}{x\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$	$-\frac{1}{\sigma_x^3\sqrt{2\pi}x^2} e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma_x^2}} (\sigma_x^2 + \ln x - a),$ $x = e^{a-1,5\sigma_x^2 \mp \sqrt{0,25\sigma_x^4 + 1}}$	$e^{3,085\sigma_x + a}$
6	Экспоненциальный	$\alpha e^{-\alpha x}$	$\alpha^2$	$\frac{6,9078}{\alpha}$
7	Пирсона	$\frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, \lambda = \frac{n}{2}, (n = 1,2,3...)$	$\frac{\alpha^2 \sqrt{\lambda-1} (\lambda-1-\sqrt{\lambda-1})^{\lambda-2}}{\Gamma(\lambda)} e^{-(\lambda-1-\sqrt{\lambda-1})}$	$\frac{4}{\alpha}$
8	Гамма- распределение	$\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, \alpha > -1, \beta > 0$	$\frac{\sqrt{\alpha}(\alpha-\sqrt{\alpha})^{\alpha-1}}{\beta^2\Gamma(\alpha+1)} e^{-(\alpha-\sqrt{\alpha})}$	$9,5\beta$
9	Максвелла	$\frac{4}{\sqrt{\pi}(2\sigma_x^2)^{3/2}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$	$\frac{4,1357\sigma_x}{\sqrt{\pi}(2\sigma_x^2)^{3/2}} e^{-0,2192}$	$4,1\sigma_x$
10	Распределение модуля многомерного вектора	$\frac{2x^{n-1}}{(2\sigma_x^2)^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}, n = 1,2,3...$	$\frac{[\sigma_x \sqrt{n-0,5(1+\sqrt{8n-7})}]^{n-2} [\sqrt{8n-7}-1]}{(2\sigma_x^2)^{n/2}\Gamma(n/2)} \times e^{-\frac{n-0,5(1+\sqrt{8n-7})}{2}}$	$3,8\sigma_x$
11	«m- распределение» (Накагами)	$\frac{2m^m x^{2m-1}}{\Gamma(m)\sigma_x^{2m}} e^{-\frac{mx^2}{\sigma_x^2}}, m \geq 1/2$	$m = 1/2, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-1/2}}{\sigma_x^2}$ $m = 1, \frac{6}{\sigma_x^2} e^{-3/2}$	$\frac{2,33\sigma_x}{\sqrt{m}}$

№	Название	$f_x(x)$	$ F''(x) $	dx
12	Показательно-степенной	$\frac{x^m}{m!} e^{-x}$	$\sqrt{m} \frac{(m - \sqrt{m})^{m+1}}{m!} e^{-(m - \sqrt{m})}$	
13	Эрланга	$\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha - 1)!} e^{-\beta x}, \alpha = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{\beta^2 \sqrt{\alpha - 1} (\alpha - 1 - \sqrt{\alpha - 1})^{\alpha-2}}{(\alpha - 1)!} e^{-(\alpha - 1 - \sqrt{\alpha - 1})}$	
14	Гиперэкспоненциальный	$\sum_{n=1}^N \alpha_n \lambda_n e^{-\lambda_n x}$	$\sum_{n=1}^N \alpha_n \lambda_n^2$	

Таблица  $\chi^2$  распределения

r/p	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10
1	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60
3	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25
4	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78
5	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24
6	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64
7	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02
8	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36
9	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68
10	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99
11	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28
12	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55
13	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81
14	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,10
15	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,30
16	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,50	23,50
17	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,60	24,80
18	10,86	12,86	14,44	17,34	20,60	22,80	26,00

Таблица значений коэффициента  $\lambda$  к критерию Колмогорова

$\delta \backslash N$	500	1000	2000	5000	8000	10000
0,0025	0,0559	0,0790	0,1118	0,1767	0,2236	0,25
0,005	0,1118	0,1581	0,2236	0,3535	0,4472	0,5
0,01	0,2236	0,3162	0,4472	0,7071	0,8944	1
0,02	0,4472	0,6324	0,8944	1,4142	1,7889	2
0,03	0,6708	0,9486	1,3416	2,1213	2,6833	3
0,04	0,8972	1,2648	1,7888	2,8284	3,5777	4
0,05	1,1208	1,5810	2,2360	3,5355	4,4721	5

Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом нерекурсивной фильтрации

$K_x(\tau)$	$h(\tau)$	K
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	$k\alpha e^{-\alpha\tau}$	$\sigma_x \sqrt{\frac{1}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	$k\alpha^2 \tau e^{-\alpha\tau}$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau )$	$k\alpha e^{-\alpha\tau} (1 - \alpha\tau)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau  + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$k\alpha^3 \tau^2 e^{-\alpha\tau}$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{3\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$k\alpha e^{-\alpha\tau} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} - \alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{1}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\frac{k\alpha \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}}{\omega_0} e^{-\alpha\tau} \sin \omega_0 \tau$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$k\alpha e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$

Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом рекурсивной фильтрации

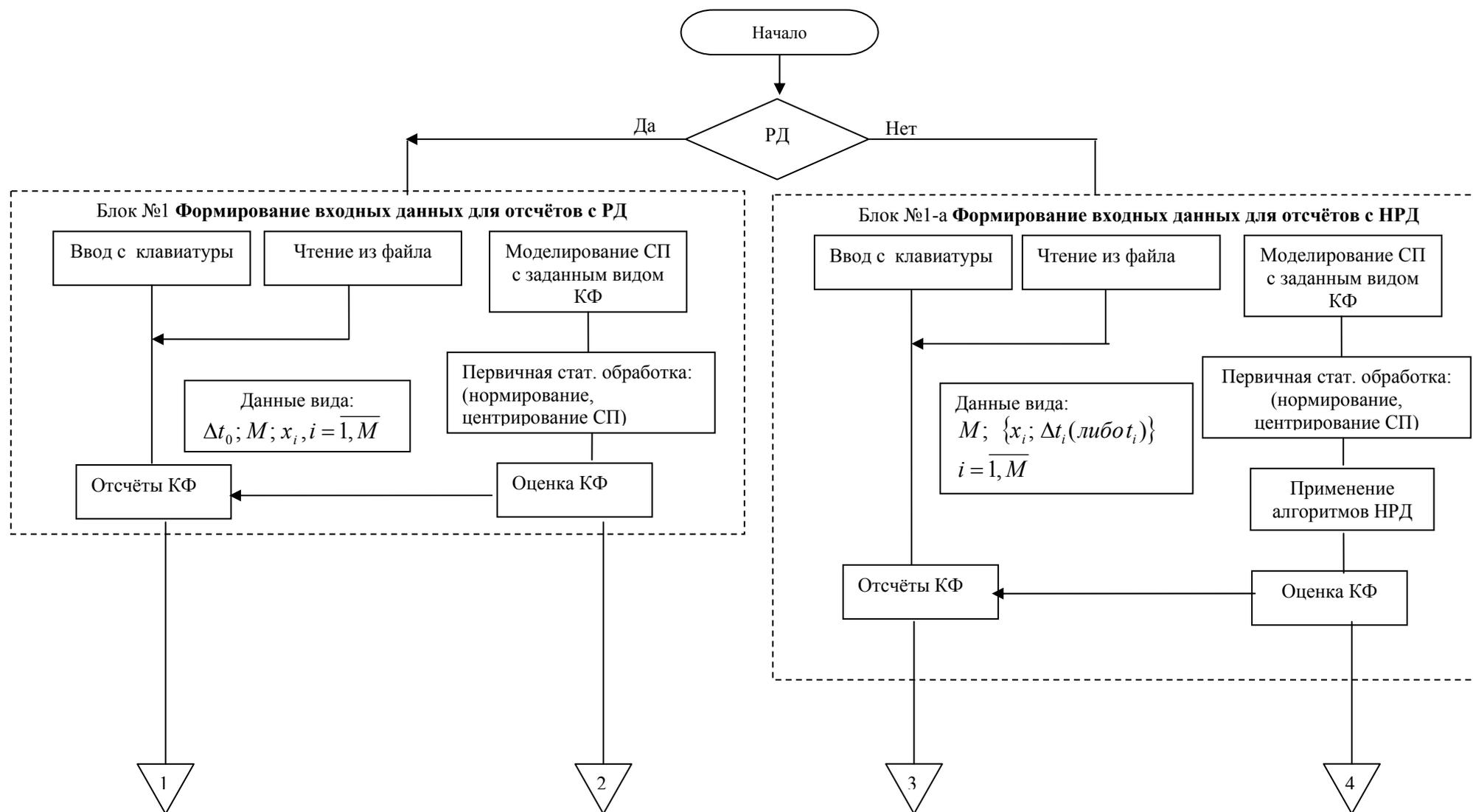
Вид модели	Моделирующий алгоритм	Параметры алгоритма
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	$y_n = a_0 x_n + b_1 y_{n-1}$	$\gamma = \alpha \Delta t; p = e^{-\gamma}; a_0 = \sqrt{1 - p^2}; b_1 = p$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p^3(1 + \gamma) - p(1 - \gamma); \alpha_1 = 1 - 4p^2\gamma - p^4;$ $a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2}; a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p; b_2 = -p^2$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0; \alpha_1 = 1 - p^4;$ $a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2}; a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p \cos \gamma_0; b_2 = -p^2$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0 + \frac{\alpha}{\omega_0} (1 + p^2) p \sin \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - p^4 - 4p^2 \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0; a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2};$ $a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p \cos \gamma_0; b_2 = -p^2$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0 - \frac{\alpha}{\omega_0} (1 + p^2) p \sin \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - p^4 + 4p^2 \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0; a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2};$ $a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p \cos \gamma_0; b_2 = -p^2$

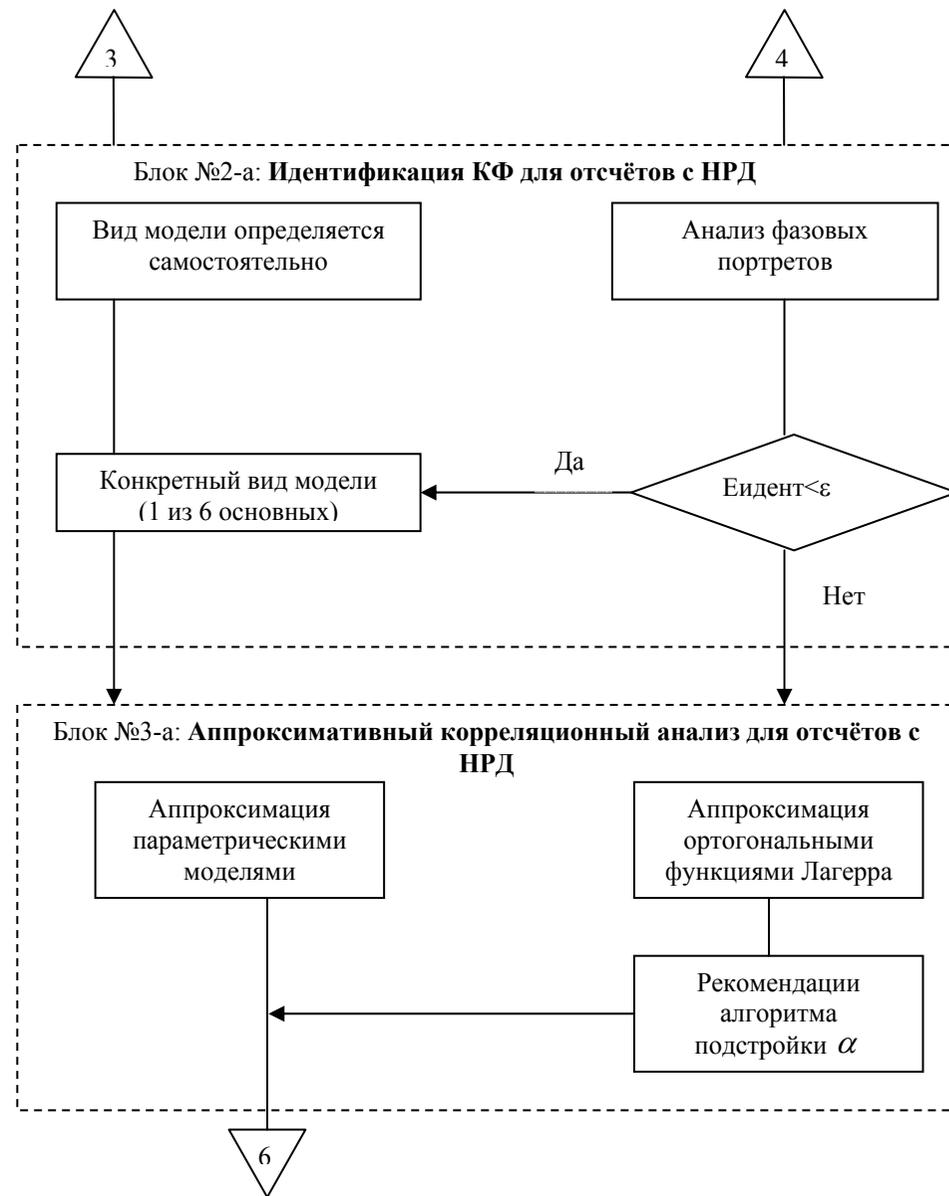
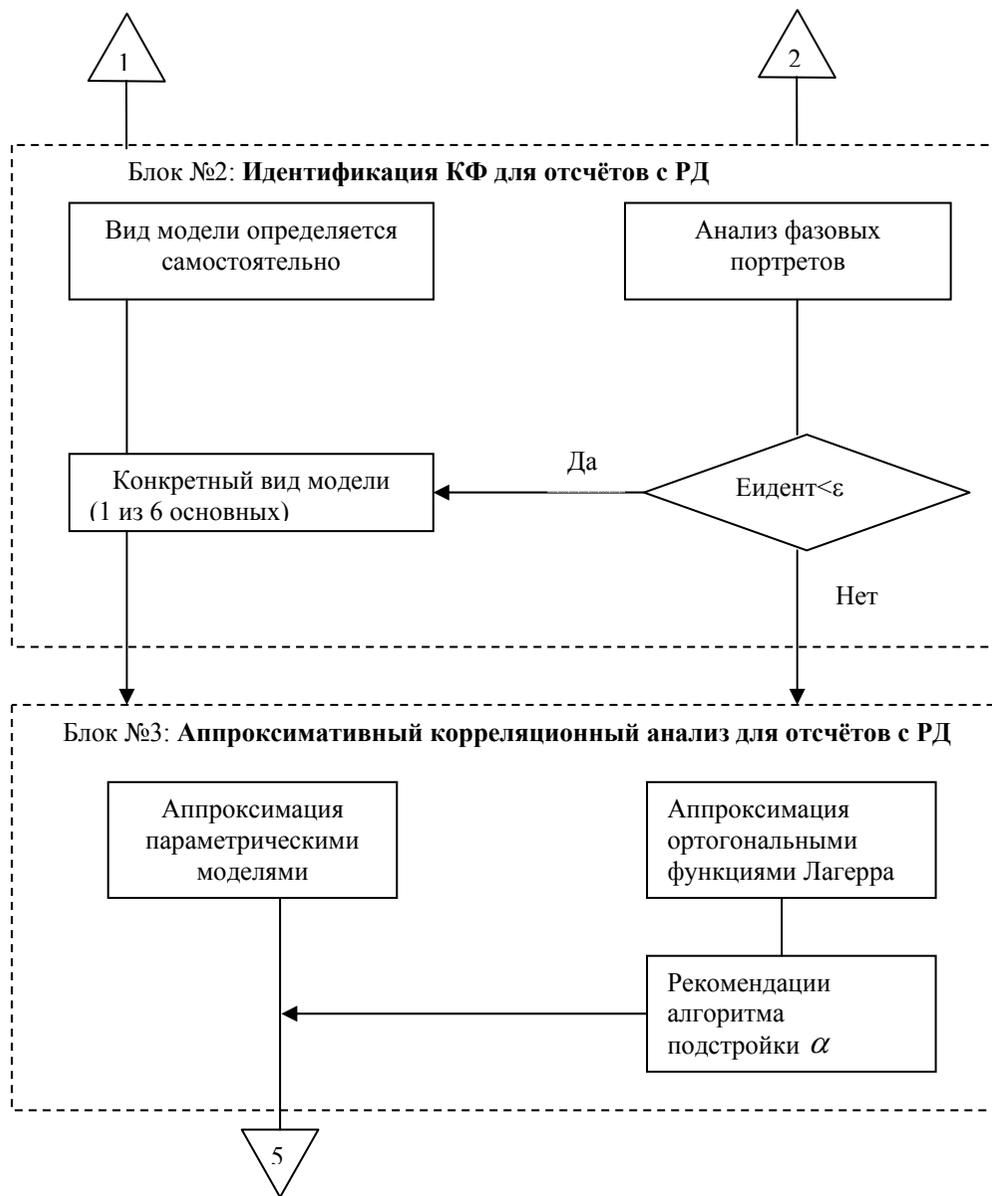
Обобщенные спектральные характеристики

№	$K_x(\tau)$	$\omega_0$	$S_x(\omega_0)$
1	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	0	$\frac{\sigma_x^2}{\pi\alpha}$
2	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau )$	0	$\frac{2\sigma_x^2}{\pi\alpha}$
3	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau )$	$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$	$\frac{2\sigma_x^2}{9\pi\alpha}$
4	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	0	$\frac{8\sigma_x^2}{3\pi\alpha}$
5	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$\sqrt{2\omega_0\sqrt{\omega_0^2+\alpha^2}-\left(\omega_0^2+\alpha^2\right)}$	$\frac{\sigma_x^2\alpha}{\pi} \left\{ \frac{\alpha^2+\omega_0^2+\omega_0^2}{\left[\alpha^2+(\omega_0-\omega_0)^2\right]\left[\alpha^2+(\omega_0+\omega_0)^2\right]} \right\}$
6	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau+\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$	$\frac{2\sigma_x^2\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2+\omega_0^2}{\left[\alpha^2+\left(\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}-\omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2+\left(\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}+\omega_0\right)^2\right]}$
7	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau-\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\sqrt{\omega_0^2+\alpha^2}$	$\frac{2\sigma_x^2\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2+\omega_0^2}{\left[\alpha^2+\left(\sqrt{\omega_0^2+\alpha^2}-\omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2+\left(\sqrt{\omega_0^2+\alpha^2}+\omega_0\right)^2\right]}$

№	$\Delta\omega'_3 = \frac{\sigma_x^2}{2S_x(\omega_3)}$	$\Delta\omega'_3 = \omega_3 + \frac{\Delta\omega'_3}{2}$
1	$\frac{\pi\alpha}{2}$	$\frac{\pi\alpha}{2}$
2	$\frac{\pi\alpha}{4}$	$\frac{\pi\alpha}{4}$
3	$\frac{9\pi\alpha}{4}$	$\frac{\alpha(2\sqrt{2} + 9\pi)}{4}$
4	$\frac{3\pi\alpha}{16}$	$\frac{3\pi\alpha}{16}$
5	$\frac{\pi[\alpha^2 + (\omega_3 - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega_3 + \omega_0)^2]}{2\alpha(\alpha^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2)}$	$\omega_3 + \frac{\pi[\alpha^2 + (\omega_3 - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega_3 + \omega_0)^2]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2)}$
6	$\frac{\pi\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$	$\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \pi\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{8\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
7	$\frac{\pi\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$	$\frac{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \pi\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{8\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$

Блок- схема автоматизированной информационной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа.





5

Блок №4: **Обобщённый анализ корреляционных характеристик для отсчётов с РД**



Блок №5: **Аппроксимативный спектральный анализ для отсчётов с РД**



Блок №6: **Обобщённый анализ спектральных характеристик для отсчётов с РД**

6

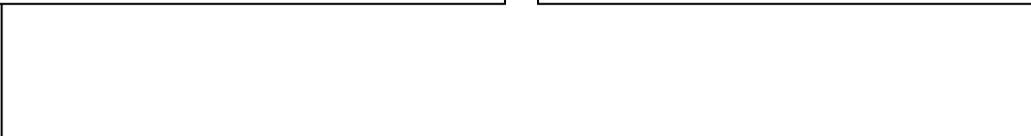
Блок №4-а: **Обобщённый анализ корреляционных характеристик для отсчётов с НРД**



Блок №5-а: **Аппроксимативный спектральный анализ для отсчётов с НРД**



Блок №6-а: **Обобщённый анализ спектральных характеристик для отсчётов с НРД**



Конец

Прохоров Сергей Антонович

Математическое описание и  
моделирование случайных процессов

Компьютерный набор и верстка: С.А. Прохоров

Сдано в набор 25.06.2001 г.  
Формат 1/8. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Гарнитура Times New Roman.  
Усл. печ. л. 28. Тираж 200 экз.

Отпечатано в типографии ТОО «Экспо»  
417000, г. Уральск, пр. Ленина, 244/1