

Прохоров С.А.
Графкин В.В.

СТРУКТУРНО-СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Самара 2010

УДК 681.518.3, 514:681.323/043.3/

Рецензенты:

Заслуженный деятель науки РФ, член-корреспондент РАН, д.т.н.,
профессор Сойфер В.А.;
д.т.н., профессор Тарасов В.Н.

П 18 С.А. Прохоров, В.В. Графкин

Структурно-спектральный анализ случайных процессов/ СНЦ РАН,
2010. 128 с., ил.

ISBN 978-5-93424-469-0

Посвящена исследованию методов и алгоритмов структурно-спектрального анализа случайных процессов, который может быть осуществлен с помощью универсальных и специализированных систем.

Анализируются методики определения ортогональных моделей структурно-спектральных характеристик случайных процессов со стационарными приращениями, а также описывается программный комплекс, разработанный на основе представляемых в монографии алгоритмов.

Предназначена для преподавателей, научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по изучению основ структурно-спектрального анализа случайных процессов.

Печатается по решению издательского совета Самарского научного центра Российской академии наук.

ISBN 978-5-93424-469-0

© С.А. Прохоров, В.В. Графкин, 2010

СОДЕРЖАНИЕ	3
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ	5
ПРЕДИСЛОВИЕ	6
ВВЕДЕНИЕ	7
1 МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ИССЛЕДОВАНИЯ СТРУКТУРНО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	9
1.1 Основные понятия и определения в анализе характеристик взаимосвязи	9
1.2 Случайные процессы со стационарными приращениями. Структурная функция	10
1.3 Аппроксимация функциональных характеристик	14
2 АППРОКСИМАТИВНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА СТРУКТУРНО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	22
2.1 Аппроксимация структурных функций ортогональными функциями Лагерра, Лежандра и Дирихле	22
2.2 Аппроксимация взаимной структурной функции	30
2.3 Спектральная плотность мощности случайных процессов со стационарными приращениями	32
2.4 Взаимная спектральная плотность мощности	36
3 ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ АППРОКСИМАТИВНОГО СТРУКТУРНО-СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	38
3.1 Анализ погрешности аппроксимации структурных функций ортогональными функциями Лагерра, Лежандра и Дирихле	38
3.2 Анализ результатов аппроксимации структурных функций ортогональными функциями Лагерра, Лежандра и Дирихле с учетом применения оценок коэффициентов разложения	51
3.3 Анализ методов вычисления спектральной плотности мощности случайного процесса	55
4 ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС АППРОКСИМАТИВНОГО АНАЛИЗА СТРУКТУРНО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	60
4.1 Описание программного комплекса	60
4.2 Подсистемы моделирования и модифицирования случайных процессов	62
4.3 Подсистема аппроксимативного структурного анализа	70
4.4 Подсистема экспериментальных исследований	74
4.5 Применение программного комплекса для решения прикладных задач	76
5 ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО СТРУКТУРНО-СПЕКТРАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ	86
5.1 Исследование свойств ортогональных полиномов	86
5.2 Исследование свойств ортогональных функций	92
5.3 Определение максимальной длительности и интервала дискретизации ортогональных функций	95
5.4 Частотные характеристики ортогональных функций	97

5.5	Ортогональные модели структурных функций	102
5.6	Аппроксимация структурных функций ортогональными функциями при ограничении на её модель	103
5.7	Аппроксимация спектральных плотностей мощности	104
ЗАКЛЮЧЕНИЕ		106
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ		107
ПРИЛОЖЕНИЯ		114
Приложение 1	Аппроксимация ортогональными полиномами в математическом пакете Mathcad.....	114
Приложение 2	Вид ортогональных функций начальных порядков....	118
Приложение 3	Аппроксимация ортогональными функциями в математическом пакете Mathcad.....	121
Приложение 4	Формы представления ортогональных полиномов и их вид	126
Приложение 5	Основные характеристики ортогональных полиномов и ортогональных функций	127

Список сокращений и обозначений

АСФ – авто структурная функция;
БД – база данных;
БПФ – быстрое преобразование Фурье;
ВСФ – взаимная структурная функция;
ВСПМ – взаимная спектральная плотность мощности;
КФ – корреляционная функция;
МО – математическое ожидание;
НСП – нестационарный случайный процесс;
ОМ – ортогональная модель;
ПА – пункт алгоритма;
ПСП – псевдослучайная последовательность;
ПФ – преобразование Фурье;
СП – случайный процесс;
СПМ – спектральная плотность мощности;
СПСП – случайный процесс со стационарными приращениями;
ССП – стационарный случайный процесс;
СУБД – система управления базой данных;
СФ – структурная функция;
ЦАСФ – центрированная авто структурная функция;
ЦВСФ – центрированная взаимная структурная функция;
ЦСФ – центрированная структурная функция;
 $X(t)$ – случайный процесс;
 $S_x(\tau)$ – структурная функция;
 $\overset{\circ}{S}_x(\tau)$ – центрированная структурная функция;
 $K_x(\tau)$ – корреляционная функция;
 $g_x(\tau)$ – спектральная плотность мощности случайного процесса;
 $Lag_k(\tau, \alpha)$ – ортогональная функция Лагерра k-го порядка;
 $Leg_k(\tau, \alpha)$ – ортогональная функция Лежандра k-го порядка;
 $Drh_k(\tau, \alpha)$ – ортогональная функция Дирихле k-го порядка;
 β_k – коэффициент разложения ортогонального ряда;
 b_k – коэффициент разложения ортогонального ряда при ограничении на модель;
 Δ – абсолютно погрешность аппроксимации;
 δ – относительная погрешность аппроксимации;
 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – параметры аппроксимирующего выражения;
 $ent[]$ – операция взятия целой части числа;
 $M[]$ – операция математического ожидания.

Предисловие

Предлагаемая Вашему вниманию монография, посвященная изучению ортогональных моделей структурно-спектральных характеристик случайных процессов, подготовлена для преподавателей, научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по прикладному анализу случайных процессов.

Материалы, представленные в монографии, получены в результате выполнения научно-исследовательских работ на кафедре «Информационные системы и технологии» Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева (СГАУ).

Отдельные разделы монографии использовались при чтении лекций по ряду дисциплин при подготовке студентов по специальностям «Информационно-измерительная техника», «Автоматизированные системы обработки информации и управления» в СГАУ, СГУ, СГТУ, ВолГУ, ОГУ, СарГТУ, ПГУ, УГАТУ.

В написании раздела 4.5 данной монографии принимал участие ведущий инженер НИИ-201 СГАУ, к.т.н. Кох А.И., которому авторы выражают свою благодарность.

Особую благодарность авторы выражают сотрудникам кафедры информационных систем и технологий СГАУ за обсуждение материалов монографии, критические замечания которых по мере возможности были учтены.

Авторы считают своим долгом выразить глубокую признательность ректору СГАУ член-корреспонденту РАН, д.т.н., профессору Сойферу В.А. за постоянную поддержку, рецензию и неоценимую помощь при издании монографии, а также рецензенту, заведующему кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики д.т.н., профессору Тарасову В.Н. за ценные замечания.

Замечания и пожелания по книге просьба направлять по адресу:

Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва, факультет информатики, кафедра «Информационные системы и технологии», заведующему кафедрой Прохорову С.А.

e-mail: sp@smr.ru grafkinvv@yandex.ru

Введение

Электронные вычислительные машины позволяют обрабатывать данные только в тех случаях, когда четко сформулированы алгоритмы, однозначно определяющие последовательность необходимых вычислений. При этом нередко возникает необходимость представления в аналитическом виде эмпирических зависимостей, описывающих поведение сложной системы.

Первым шагом в анализе является получение исходной выборки. На основе этих данных строятся модели. В этот период необходимо активное участие экспертов для выдвижения гипотез и отбора факторов, влияющих на анализируемый процесс. То есть анализ, в данном случае, представляет собой процесс обнаружения в исходных данных ранее неизвестных, нетривиальных, практически полезных и доступных интерпретации знаний, необходимых для принятия решений в различных сферах человеческой деятельности. Это может быть отнесение результата к одному из ранее известных, установление зависимости непрерывных выходных переменных от входных и многое другое.

Реальные данные для анализа редко бывают хорошего качества. Необходимость предварительной обработки при анализе данных возникает независимо от того, какие технологии и алгоритмы используются. Более того, эта задача может представлять самостоятельную ценность в областях, не имеющих непосредственного отношения к анализу данных. К задачам очистки данных относятся заполнение пропусков, редактирование аномалий, сглаживание, обнаружение дубликатов и противоречий и т.д. Но не стоит забывать, что все это приводит к возникновению дополнительной погрешности. Например, сведение нестационарных процессов к стационарным предполагает возникновение дополнительной погрешности метода, позволяющего выполнить данное преобразование [46]. Таким образом, большой интерес представляет возможность исследования процесса, не подвергающегося подобным предобработкам. Но охватить весь класс НСП не представляется возможным, вследствие чего разрабатываются методы для их популярных подклассов, одним из которых является класс случайных процессов со стационарными приращениями, основной характеристикой которых является структурная функция [46, 71].

В данной монографии рассмотрены методы аппроксимации структурных функций случайных процессов с помощью ортогональных функций Лагерра, Лежандра и Дирихле. Данные функции, по сравнению с другими ортогональными функциями, проще вычисляются на компьютере. Тем более, что для них известны рекурсивные выражения, с помощью которых вычисления функций порядков выше первого производятся значительно быстрее, чем по формулам общего вида. Эти функции применяются в теоретических исследованиях в математической физике и вычислительной математике.

В настоящий момент в большинстве современных математических систем обработки статистической информации имеются как стандартные функ-

ции численной обработки данных, так и средства получения аналитических выражений для функциональных характеристик. Необходимо учитывать, что статистическая обработка данных обычно производится специалистом предметной области, мало знакомым с нюансами анализа случайных процессов, и не должна требовать программирования качественно новых алгоритмов.

Однако при решении различных практических задач эти программы чаще всего используются исследователем «вслепую», так как в их описаниях содержится только минимальное количество информации о реализованных в данных программах математических методов. Затруднения также возникают при более глубоком разборе сущности соответствующих математических методов, которые описаны в различных, часто малодоступных исследователю, изданиях.

Существующие современные автоматизированные системы математических расчетов позволяют на базе известных алгоритмов решить лишь часть задач определения структурных функций временных рядов. В связи с этим, актуальной представляется задача разработки алгоритмов аппроксимации структурно-спектральных характеристик ортогональными функциями и построения комплекса программ, реализующего эти алгоритмы. Различные подзадачи анализа случайных процессов могут быть решены с помощью универсальных и специализированных систем (Mathcad, Matlab, LabView и других), однако, в полном объеме задачи решить нельзя: необходимо либо дописывать подпрограммы для известной математической системы, либо реализовывать свою автоматизированную систему с помощью языка высокого уровня. Подобная автоматизированная система описывается в данной монографии.

1 Методы и средства исследования структурно-спектральных характеристик временных рядов

1.1 Основные понятия и определения в анализе характеристик взаимосвязи

В большинстве случаев исследователь за определенный промежуток времени может получить лишь одну реализацию интересующего его случайного процесса, поэтому вынужден опираться на его эргодические свойства [68]. Исследование неэргодических случайных функций связано с большими ошибками, чем эргодических. Однако можно выделить класс процессов, слабо отклоняющихся от эргодических, так что ошибка, вызванная неэргодичностью, достаточно мала. В реальных случаях анализ процессов всегда ограничен конечным временным интервалом, и погрешность, обусловленная наличием одной реализации (а не ансамбля), по величине конечна. Поэтому исследование процесса, достаточно близкого к эргодическому, может быть связано с ошибками, величина которых значительно меньше обусловленной конечностью временного интервала [68]. Вследствие указанных особенностей работы со случайными процессами, в дальнейшем будут рассматриваться методы и алгоритмы определения характеристик именно эргодических случайных процессов.

Одной из самых распространенных и хорошо изученных характеристик взаимосвязи является корреляционная функция [34, 46, 74]. Эта характеристика удобна в использовании в случае исследования стационарных случайных процессов. Реальные флуктуационные процессы очень часто могут с достаточной степенью точности описываться при помощи стационарных случайных функций [74]. Однако существуют противоположные случаи, когда флуктуационные процессы нельзя рассматривать как стационарные. При анализе таких функций постоянно возникает одна и та же трудность: какие изменения функции следует считать изменениями среднего значения и какие надо рассматривать как медленные флуктуации. От решения этого вопроса очень часто в значительной степени могут зависеть такие характеристики случайной функции, как средний квадрат флуктуаций, время корреляции, форма корреляционной функции и спектральной плотности [74].

Статистический анализ нестационарных процессов предполагает оперирование более сложными понятиями, чем в случае со стационарными процессами. Это обусловлено нелокализуемостью нестационарных процессов по частоте, то есть наличием корреляции между разночастотными гармоническими компонентами [71]. Из-за этой корреляции «энергетические» вклады таких компонент не аддитивны, и моменты второго порядка не представимы в виде однократных разложений Фурье с какой-то постоянной с независимой от времени спектральной интенсивностью, аналогичной интенсивности $G_x(\omega)$ у стационарных процессов. Спектральная «масса» нестационарного процесса двумерна, и средние билинейные (в частности, квадратичные) величины могут быть выражены лишь в виде двукратных интегралов Фурье-Стилтьеса [71].

Неудивительно, что в вопросе о спектральных разложениях билинейных («энергетических») характеристик нестационарных процессов появляются многочисленные работы, связанные с построением эквивалента одномерной и неотрицательной спектральной интенсивности $G_x(\omega)$. Возникли понятия спектра мощности, усредненного по конечному времени, кратковременного спектра, «физического» спектра и тому подобные [71]. Таким образом, для описания нестационарных сигналов вводятся энергетические характеристики, связанные с текущим моментом времени, и средние по времени характеристики. Аналог теоремы Винера-Хинчина для нестационарных процессов представляется соотношением [34]

$$g_x(\omega, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau, t) e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad (1.1)$$

$$K_x(\tau, t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} g_x(\omega, t) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.2)$$

При отсутствии априорной информации о стационарности изучаемого случайного процесса не всегда возникает необходимость использования теории нестационарных процессов общего вида. Существует большой класс нестационарных процессов, охватывающий стационарные процессы в качестве частного случая, и вместе с тем соответствующая теория может быть продвинута гораздо дальше, чем это можно сделать в самом общем случае. Одним из таких классов является класс случайных процессов со стационарными приращениями, для которых сохраняется локализация по частоте для моментов второго порядка, то есть сохраняется понятие спектральной интенсивности [72].

1.2 Случайные процессы со стационарными приращениями. Структурная функция

Случайные процессы со стационарными приращениями относятся к классу случайных процессов, нестационарных по математическому ожиданию [37]. Основной характеристикой случайного процесса со стационарными приращениями является структурная функция (рисунок 1.1), которая инвариантна к изменениям среднего (тренда) СП и функционально связана с характеристиками его спектральных свойств [37]. В качестве примера на рисунке 1.1 приведены графики нормированных корреляционной и структурной функций случайного процесса. Характер изменения структурной функции и ее начальной ветви отчетливо указывает на наличие периодической составляющей в составе исследуемого процесса. В то же время корреляционная функция характеризуется явно выраженной смещенностью, связанной с влиянием низкочастотной составляющей [70].

Таким образом, метод структурного анализа исходит из априорного допущения, что для широкого круга нелинейных динамических систем существует адекватная математическая модель в рамках определенного класса нестационарных функций [71, 72]. Особенно эффективным является использование структурных анализаторов для выявления в шумовом сигнале кратковременных периодических последовательностей, которые не могут быть отфильтрованы

узкополосными фильтрами, обладающими значительной временной инерционностью [72].

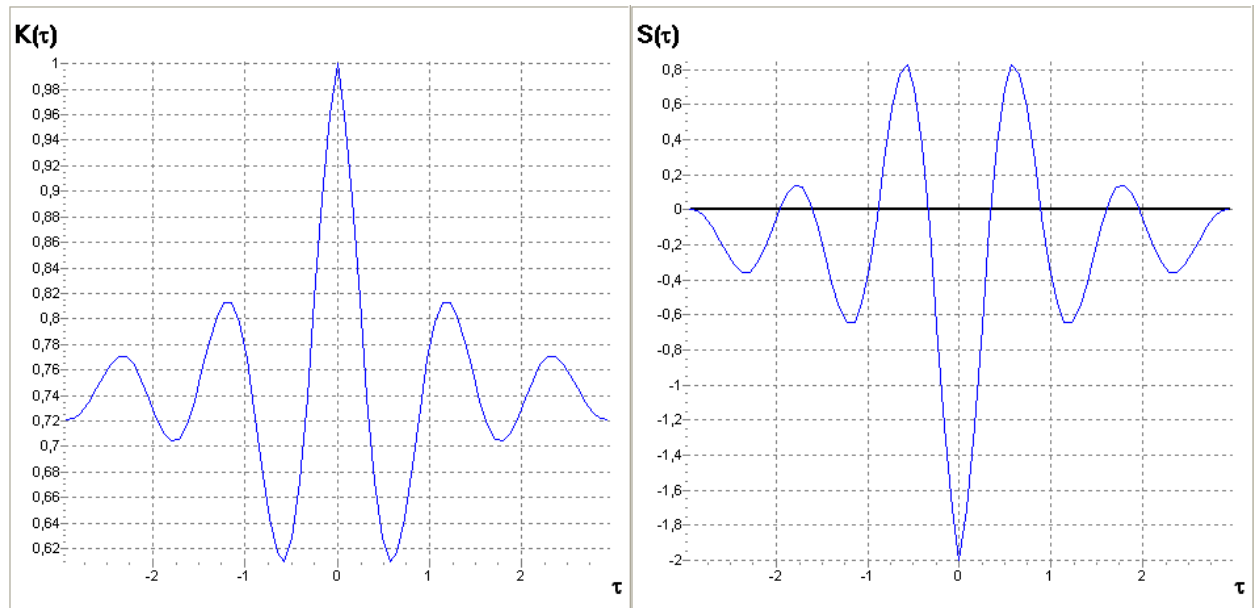


Рисунок 1.1 – Нормированные корреляционная и структурная функции

В случае, когда $X(t)$ представляет собой нестационарную случайную функцию, то есть когда $M[X(t)]$ меняется с течением времени, можно вместо $X(t)$ рассматривать разность $X_\tau(t) = X(t + \tau) - X(t)$. При не слишком большом τ медленные изменения функции $X(t)$ будут мало сказываться на значениях $X_\tau(t)$, и тем меньше, чем они медленнее. Если $X(t)$ содержит постоянную составляющую, то она вообще выпадает из $X_\tau(t)$. В результате подавления компонент с очень большими периодами может оказаться, что приращение $X_\tau(t)$ стационарно. В случае, когда $X_\tau(t)$ есть случайная стационарная функция t , функцию $X(t)$ называют случайной функцией со стационарными первыми приращениями или просто случайной функцией со стационарными приращениями [70, 71].

Структурная функция [71] определяется следующим образом:

$$S_x(\tau) = M[X(t + \tau) - X(t)]^2. \quad (1.3)$$

Структурные функции отражают в своем поведении наличие осциллирующих компонент исследуемого случайного процесса, что может быть использовано для оперативного определения параметров скрытых периодических составляющих процесса [70]. Структурный анализ нестационарных случайных процессов в ряде случаев приводит к более устойчивым характеристикам по сравнению с корреляционным [70]. Параметры структурных функций обладают свойствами инвариантности относительно некоторых форм нестационарности (проявляющихся, например, при смещенности по математическому ожиданию).

К тому же, структурная функция включает в качестве составных параметров корреляционные характеристики, то есть может рассматриваться как результат более общего метода корреляционной обработки случайных процессов.

Структурная функция для СПСП служит столь же основной характеристикой, как корреляционная функция $K_x(\tau)$ для стационарных процессов. Разумеется, структурную функцию можно составить и в случае стационарности процесса $X(t)$ [71]

$$S_x(\tau) = 2[K_x(0) - K_x(\tau)]. \quad (1.4)$$

Если для $X(t)$ выполнено достаточное условие эргодичности ($K_x(\infty) = 0$), то взаимосвязь между структурной и корреляционной функцией ССП можно записать в виде [74]

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2}[S_x(\infty) - S_x(\tau)]. \quad (1.5)$$

Таким образом, для стационарного эргодического случайного процесса можно пользоваться как функцией корреляции, так и структурной функцией (рисунок 1.2). Кроме того, на $S_x(\tau)$ не влияют возможные погрешности в определении $M[X(t)]$. Если оказывается, что $S_x(\infty) = 2M[X^2(t)]$ существует [71], то по выражению (1.5) тотчас же вычисляется $K_x(\tau)$.

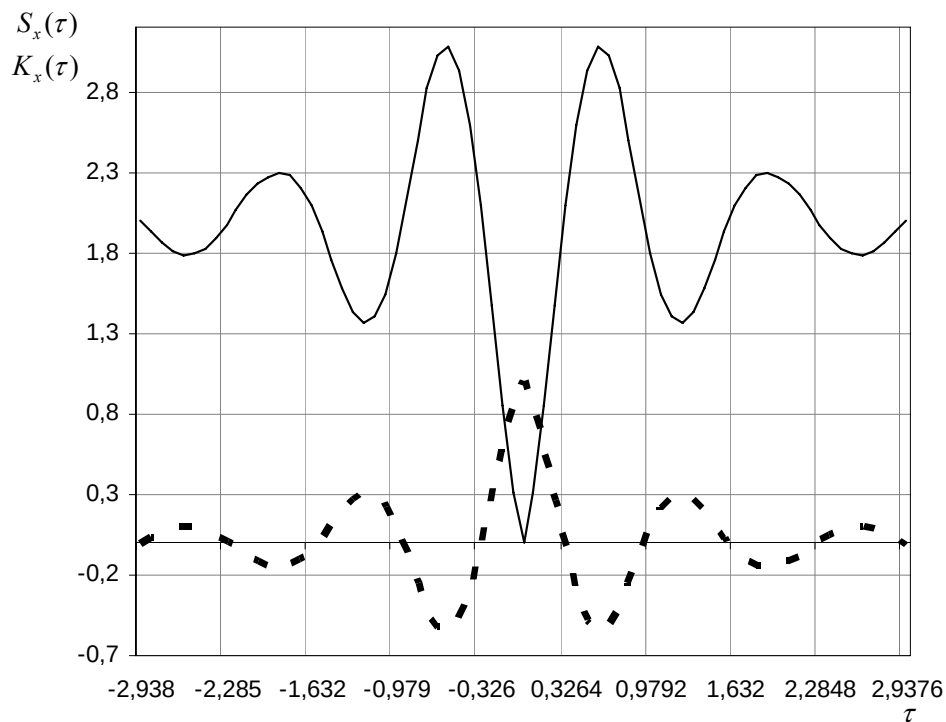


Рисунок 1.2 – СФ (сплошная линия) и КФ (пунктирная) для ССП

В связи с особенностями цифровых вычислительных машин, имеющих ограниченную разрядную сетку и ограниченную память, возникает необходимость в дискретизации математической модели решаемой задачи. Переход от непрерывной к дискретной математической модели заключается в замене функций непрерывного аргумента функциями дискретного аргумента. При этом интеграл заменяется конечной суммой, производные разностными отно-

шениями и т.д. [31]. Учитывая данный факт, дискретная трактовка выражения (1.3) будет следующей [37]:

$$S_x(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=0}^{N-k-1} [x(i+k) - x(i)]^2, \quad (1.6)$$

где $x(i), x(i+k)$ – дискретизированные и квантованные значения СП $X(t)$ в i -й и $(i+k)$ -й моменты времени; N – количество реализаций СП. Соответственно, выражение, определяющее взаимную структурную функцию двух случайных процессов $X(t), Y(t)$, имеет вид [70]

$$S_{xy}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=0}^{N-k-1} [x(i) - y(i+k)]^2. \quad (1.7)$$

Необходимо отметить, что количество анализируемых реализаций случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$, при определении взаимной структурной функции, должно выбираться с учетом количества реализаций каждого процесса в отдельности, а также интервалов дискретизации каждого из процессов. Минимальное число координат структурной функции обычно определяется априорным предположением относительно количества структурных компонент в составе процесса [70].

Структурную функцию $S_x(\tau)$ можно рассматривать как асимптотически несмещенную оценку дисперсии, так как

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} S_x(\tau) = 2\sigma_x^2. \quad (1.8)$$

По аналогии с нормированными корреляционными функциями часто используют нормированную структурную функцию, определяемую соотношением

$$S_{nx}(\tau) = \frac{S_x(\tau)}{S_x(\infty)}. \quad (1.9)$$

Помимо самой структурной функции СПСП, на практике нередко возникает необходимость в ее спектральном разложении, которое можно записать в следующей форме [74]:

$$S_x(\tau) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos \omega \tau) dG_x(\omega). \quad (1.10)$$

Смысл $dG_x(\omega)$ тот же, что и у стационарных процессов: это спектральная интенсивность в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$ [74]. Точно также в случае сплошного спектра производная

$$g_x(\omega) = \frac{dG_x(\omega)}{d\omega} \quad (1.11)$$

имеет для СПСП и для стационарных процессов смысл интенсивности на единичную полосу частот [74]. Это позволяет, пользуясь спектральным описанием, не заботиться заранее о том, стационарен ли рассматриваемый процесс или же является СПСП.

Оперирруя СПСП, охватываются нестационарные процессы $X(t)$, у которых среднее значение может быть функцией t , а спектральная интенсивность

может быть бесконечно велика из-за быстрого роста $dG_x(\omega)$ в области низких частот [74].

Выражения, позволяющие вычислять спектральную плотность по известной структурной функции, имеют следующий вид [46, 71]:

$$g_x(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^\infty \sin \omega\tau \frac{\partial S_x(\tau)}{\partial \tau} d\tau; \quad (1.12)$$

$$g_x(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega^2} \int_0^\infty \cos \omega\tau \frac{\partial^2 S_x(\tau)}{\partial \tau^2} d\tau. \quad (1.13)$$

При этом (1.12) имеет смысл в том случае, если [71]

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\partial S_x(\tau)}{\partial \tau} = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^2 \frac{\partial S_x(\tau)}{\partial \tau} = 0, \quad (1.14)$$

а (1.13) – при выполнении условий:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 S_x(\tau)}{\partial \tau^2} = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \frac{\partial^2 S_x(\tau)}{\partial \tau^2} = 0. \quad (1.15)$$

1.3 Аппроксимация функциональных характеристик

Одной из распространенных задач в науке и технике является аппроксимация экспериментальных данных аналитическими выражениями. Для ученых возможность подобрать параметры уравнения таким образом, чтобы его решение совпадало с данными эксперимента, зачастую является доказательством (или опровержением) теории. Инженерам же часто требуется описать результаты измерений аналитически для определения физических параметров [45].

Начало теории приближения функций положено П.Л. Чебышевым в 1853 году в работе «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов» [12]. Проблематика этой теории тесно связана с основными областями науки и техники.

Замена одних математических объектов (например, чисел или функций) другими, более простыми и в том или ином смысле близкими к исходным (например, кривых линий близкими к ним ломаными) называется аппроксимацией (от латинского *approximo* – приближаюсь) [39].

Основные классы задач, при которых могут эффективно применяться методы теории аппроксимации [12]:

1. Сжатие данных.

Данные обычно представляются в виде громоздких таблиц. Для экономного хранения представляются характеристики этих данных, содержащие сравнительно малое число параметров. Качество решения задачи характеризует коэффициент сжатия C :

$$C = \frac{b(f)}{b(f^*)}. \quad (1.16)$$

2. Восстановление функциональной зависимости.

Особенностью данной задачи является небольшое количество точек исследуемой функции, и требуется найти способ ее вычисления во всей области ее определения. Малое количество измеренных значений может быть обуслов-

лено дороговизной проведения эксперимента. В данном случае качество решения задачи характеризуется сложностью вычисления приближающей (восстанавливающей) функции, измеряемой числом выполняемых элементарных операций.

3. Сглаживание экспериментальных данных, фильтрация помех.

К примеру, в процессе эксперимента производятся измерения некоторой гладкой функции (характеристики) $f(t)$ через малые промежутки времени, при этом ошибка измерения сравнима по величине с длиной промежутка времени между соседними измерениями (t_i, t_{i+1}) . График измеренной функции, полученный последовательным соединением точек $(t_i, f(t_i))$ прямолинейными отрезками, представляет собой ломаную.

Для восстановления гладкой функции по ее дискретным значениям требуется найти способ сглаживания экспериментальных данных. Точность приближения (восстановления) функции f посредством f^* характеризует качество решения данной задачи. В данной работе толкование термина «аппроксимация» будет применяться только в смысле «приближения».

Методы аппроксимации обычно основаны на двух подходах: минимизация суммы квадратов отклонений либо минимизация суммы модулей отклонений. В последнем случае для нахождения минимума нельзя воспользоваться производной, так как абсолютное значение не имеет производной в точке минимума [38]. Поэтому в данной работе применяются методы аппроксимации, основанные на минимизации квадратичного функционала [18], то есть определяется такая функциональная зависимость, при которой

$$\Delta(\bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^N (f(t_i) - f^*(\bar{\alpha}, t_i))^2, \quad (1.17)$$

где $\bar{\alpha}$ – вектор параметров, подлежащих определению, обращается в минимум. Выражение (1.17) называют критерием наименьших квадратов, а метод аппроксимации – методом наименьших квадратов.

Минимизация функционала $\Delta(\bar{\alpha})$

$$\Delta(\bar{\alpha}) \rightarrow \min \quad (1.18)$$

приводит к системе r алгебраических уравнений:

$$\frac{\partial \Delta(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} = 0, j = 1, 2, \dots, r, \quad (1.19)$$

где в левой части уравнения находятся частные производные функционала $\Delta(\bar{\alpha})$ по параметрам α_j . После решения полученной системы уравнений получается искомым r -мерный вектор параметров $\bar{\alpha}$.

Сложность вычисления приближающей функции определяется ее конструкцией, которая, в свою очередь, диктуется особенностями аппроксимируемой функции. Классический способ приближения функций, заданных на отрезке вещественной оси, – это приближение многочленами [12]

$$a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n = \sum_{k=0}^n a_k t^k \quad (1.20)$$

степени не более заданного номера n .

Методы аппроксимации функций, заданных экспериментальными данными, с помощью интерполяционных многочленов на практике применяются в тех случаях, когда ошибки в данных можно не учитывать и число реализаций исследуемой функции мало. При больших количествах реализаций формулы становятся громоздкими, а также возникают трудности, связанные с неустойчивостью интерполяционного процесса на концах отрезка задания аппроксимируемой функции. В реальных же задачах ошибки в экспериментальных данных необходимо учитывать [44].

В свою очередь, выбор модели аппроксимируемой функции является одной из сложных задач при аппроксимации. Решение этой задачи осуществляется на основе априорной информации о свойствах исследуемого процесса. В тех случаях, когда этих данных недостаточно, как подсказывает практика, наиболее целесообразно применять разложение функции в ряд по той или иной системе ортогональных функций [51]. Тем более что это разложение лишено такого недостатка аппроксимации с помощью интерполяционных многочленов, как громоздкость формул при большом числе реализаций.

Две функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ называются ортогональными друг другу на интервале (a, b) с весом $\mu(t)$ [25], если

$$\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\mu(t)dt = 0, \quad (1.21)$$

при этом интервал (a, b) называется интервалом ортогональности. В качестве систем базисных функций в данной работе применяются ортогональные функции Лагерра, Лежандра и Дирихле. Выбор системы базисных функций зависит, в основном, от возможности представления аппроксимируемой функции минимальным числом членов разложения, а также удобством в работе [51]. Выбранные семейства базисных функций ортогональны с весом $\mu(\tau)$ на интервале $[0, \infty)$ (определение данного интервала существования вполне обосновано: вследствие существования на этом интервале структурной функции, ортогональные функции, применяемые при ее аппроксимации, также должны существовать на этом интервале). Семейство ортогональных функций характеризуется интегралом

$$\int_0^\infty \mu(\tau)\psi_m(\tau)\psi_n(\tau)d\tau = \begin{cases} 0, & \text{при } m \neq n; \\ \|\psi_n\|^2, & \text{при } m = n, \end{cases} \quad (1.22)$$

где $\|\psi_n\|^2$ – норма ортогональной функции $\psi_n(\tau)$.

Весовая функция $\mu(\tau)$ на конечном интервале (a, b) должна быть неотрицательной, интегрируемой, ее интеграл должен быть положительным, а также должно выполняться условие

$$0 < \int_a^b \mu(\tau)d\tau < \infty. \quad (1.23)$$

Если же интервал (a, b) бесконечен, то, кроме того, должны абсолютно сходиться интегралы [73]

$$\int_a^b \tau^n \mu(\tau) d\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.24)$$

Для используемых в работе ортогональных функций весовая функция определяется выражением $\mu(\tau) = 1$.

На рисунке 1.3 приведен пример реализации случайного процесса, а также соответствующая ему ковариационная функция и ортогональная модель этой ковариационной функции. Процесс является случайным процессом со стационарными приращениями и характеризуется следующим определяющим его выражением

$$X(t) = SSP(t) + f(t). \quad (1.25)$$

В выражении (1.25) $SSP(t)$ – стационарный случайный процесс, характеризующийся корреляционной функцией $K_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos(5\tau)$, а $f(t)$ – детерминированная функция.

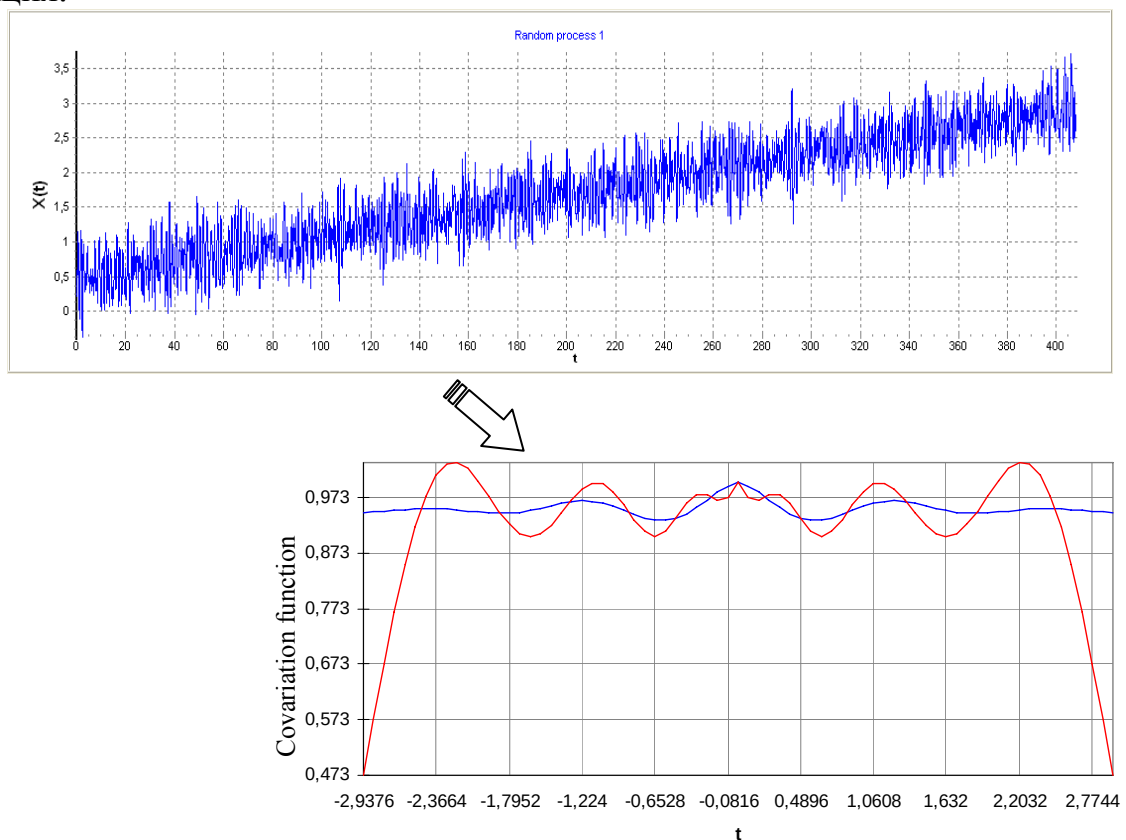


Рисунок 1.3 – СПСП, его ковариационная функция и ее ортогональная модель при $f(t) = 0,006 \cdot t$

Анализируя рисунок 1.3, можно уверенно констатировать, что без центрирования процессов [46], подобных (1.25), аппроксимативный корреляционный анализ не дает приемлемых результатов. Данный факт говорит в пользу применения структурных функций, использование которых не влечет за собой дополнительной погрешности, вызванной центрированием случайных процессов [46].

Также одним из методов аппроксимации структурных функций является параметрическая аппроксимация. Данный метод предполагает наличие априорной информации об исследуемом процессе и подразумевает выбор моделей СФ

из заранее определенного набора и дальнейший подбор параметров выбранной модели. Проводя аппроксимацию СФ данными параметрическими моделями, при необходимости вычисления спектральной плотности мощности, может возникнуть ситуация, в которой невозможно получение аналитического выражения СПМ. Например, в случае, когда модель СФ определена как [11] $S_x(\tau) = 1 - \cos(0,1\tau) + 0,01\tau$, не будут удовлетворяться условия (1.14) и (1.15), а, следовательно, выражения (1.12) и (1.13) не позволят вычислить спектральную плотность мощности. В таблице 1.1 представлены некоторые виды АСФ, встречающиеся на практике [11]; их графическое отображение представлено на рисунке 1.4.

Таблица 1.1 – Виды АСФ

№	Модель СФ
1	$S_x(\tau) = 1 - e^{-0.04\tau}$
2	$S_x(\tau) = 1 - \cos(0.1\tau) + 0.01\tau$
3	$S_x(\tau) = 1 - \cos(0.0314\tau)$
4	$S_x(\tau) = 0.0004\tau^2$
5	$S_x(\tau) = \ln(1 + 0.05\tau)$

Таким образом, если решение задачи заключается не только в определении модели СФ, а предполагает дальнейшее преобразование полученного аналитического выражения, необходимо пользоваться иными методами аппроксимации, например, разложением ее в ряд по некоторой системе ортогональных полиномов.

В работе [58] представлены выражения, определяющие наиболее распространенные ортогональные полиномы, одними из которых являются полиномы Лежандра

$$PLeg_k(\tau) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s \left(\frac{x-1}{2} \right)^s. \quad (1.26)$$

Данные полиномы характеризуются интервалом существования $[-1,1]$ и нормой

$$\|PLeg_k\|^2 = \frac{2}{2k+1}. \quad (1.27)$$

Для построения ортогональных моделей структурных функций (СФ) с помощью данных полиномов необходимо изменить интервал существования

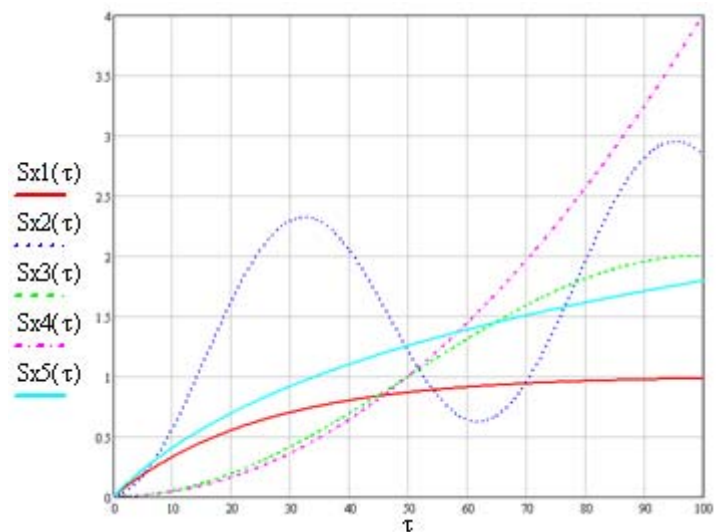


Рисунок 1.4 – Виды АСФ

полиномов с $[-1,1]$ на $[0, \tau_{k \max}]$, соответствующий интервалу, на котором структурная функция вычислена. Данное преобразование можно реализовать прибегнув к линейному преобразованию аргумента полиномов Лежандра:

$$\tau = ax + b \Rightarrow x = \frac{\tau - b}{a}, \quad (1.28)$$

где $a = \frac{\tau_{k \max}}{2}$; $b = \frac{\tau_{k \max}}{2}$.

Таким образом, полиномы Лежандра, определенные на интервале $[0, \tau_{k \max}]$, будут иметь вид

$$PLegM_k(\tau) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s \left(\frac{\tau}{\tau_{k \max}} - 1 \right)^s. \quad (1.29)$$

Учитывая дифференциал

$$dx = \frac{2}{\tau_{k \max}} d\tau, \quad (1.30)$$

можно определить норму полиномов $PLegM_k(\tau)$:

$$\|PLegM_k\|^2 = \frac{\tau_{k \max}}{2k+1}. \quad (1.31)$$

Модель структурной функции $S_x(\tau)$ [46] можно записать в виде

$$S_a(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k PLegM_k(\tau) l(\tau), \quad (1.32)$$

где m — число членов разложения ряда;

$$l(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq \tau \leq \tau_{k \max}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для модели структурной функции (1.32) коэффициенты разложения β_k , обеспечивающие минимум квадратической погрешности аппроксимации [46]

$$\Delta_P = \int_0^{\tau_{k \max}} \left(S_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k PLegM_k(\tau, \alpha) l(\tau) \right)^2 d\tau = \min, \quad (1.33)$$

определяются выражением

$$\beta_k = \frac{1}{\|PLegM_k\|^2} \int_0^{\tau_{k \max}} S_x(\tau) PLegM_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (1.34)$$

При этом качество аппроксимации принято оценивать по значению относительной методической погрешности аппроксимации [46, 55]

$$\delta_P = \frac{\Delta_P}{\int_0^{\tau_{k \max}} S_x(\tau) d\tau}. \quad (1.35)$$

С учетом (1.32) выражение (1.12) примет вид

$$g_a(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \sum_{k=0}^m \beta_k \int_0^{\tau_{k \max}} \sin(\omega\tau) \frac{\partial PLegM_k(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.36)$$

$$\text{где } \frac{\partial P_{\text{Leg}M_k}(\tau)}{\partial \tau} = \begin{cases} 0, \text{ при } k = 0; \\ \frac{1}{\tau_{k \max}} \sum_{s=1}^k s C_k^s C_{k+s}^s \left(\frac{\tau}{\tau_{k \max}} - 1 \right)^{s-1}, \text{ при } k > 0. \end{cases} \quad (1.37)$$

Обозначив $r = k - 1$, выражение (1.37) также можно представить в виде

$$P_r(\tau) = \frac{\partial P_{\text{Leg}M_r}(\tau)}{\partial \tau} = \begin{cases} 0, \text{ при } r < 0; \\ \frac{1}{\tau_{k \max}} \sum_{s=0}^r \frac{(r+s+2)!}{(r-s)!(s+1)!(s)!} \left(\frac{\tau}{\tau_{k \max}} - 1 \right)^s, \text{ при } r \geq 0, \end{cases} \quad (1.38)$$

при этом производную n -го порядка выражения (1.38) можно определить следующим образом:

$$P_r^{(n)}(\tau) = \begin{cases} 0, \text{ при } r < n; \\ \frac{1}{(\tau_{k \max})^{n+1}} \sum_{s=n}^r \frac{(r+s+2)!}{(r-s)!(s+1)!(s-n)!} \left(\frac{\tau}{\tau_{k \max}} - 1 \right)^{s-n}, \text{ при } r \geq n. \end{cases} \quad (1.39)$$

Используя интеграл [31]

$$I(t, a) = \int P_r(t) \sin(a \cdot t) dt = -\frac{\cos(a \cdot t)}{a} \sum_{i=0}^{E\left[\frac{r}{2}\right]} (-1)^i \frac{P_r^{(2i)}(t)}{a^{2i}} + \frac{\sin(a \cdot t)}{a} \sum_{i=1}^{E\left[\frac{r+1}{2}\right]} (-1)^{i-1} \frac{P_r^{(2i-1)}(t)}{a^{2i-1}}, \quad (1.40)$$

где $E[n]$ – целая часть числа n , выражение (1.36) легко преобразовать в вид

$$g_a(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \sum_{k=0}^m \beta_k [I(\tau_{k \max}, \omega) - I(0, \omega)]. \quad (1.41)$$

На рисунке 1.5 представлена структурная функция, заданная выражением $S_x(\tau) = 2(1 - e^{-\lambda\tau} \cos(5\tau))$, ее ортогональная модель, построенная на основе ортогональных полиномов Лежандра, а также спектральная плотность мощности, вычисленная по параметрам полученной ортогональной модели. Данный пример, реализованный в математическом пакете Mathcad, приведен в приложении 1.

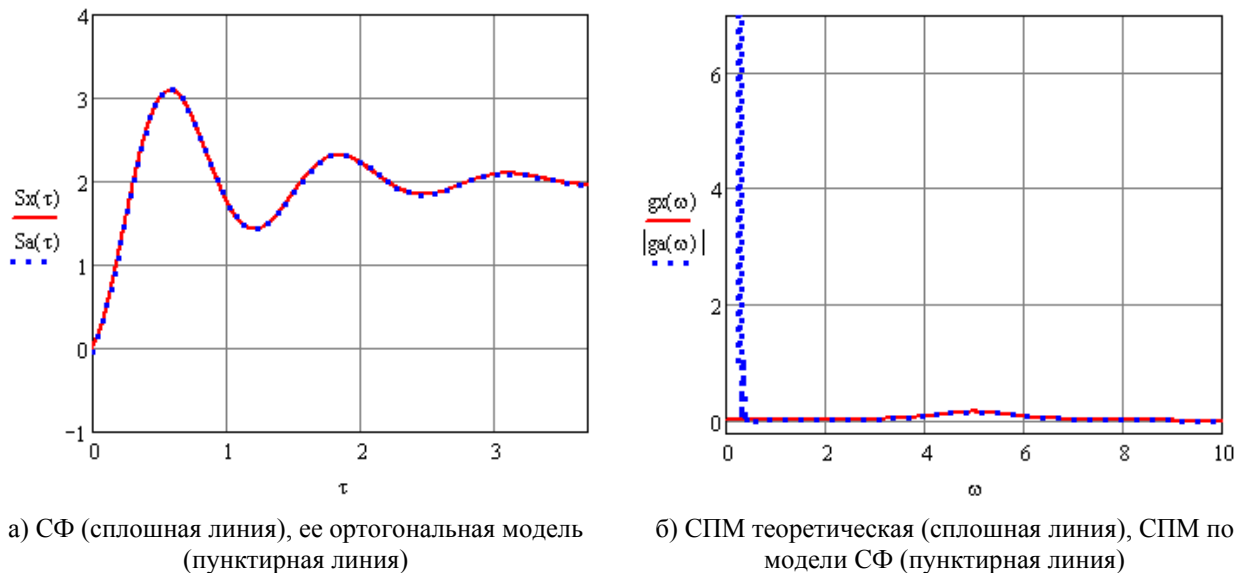


Рисунок 1.5 – Определение СПМ по модели СФ в случае использования ортогональных полиномов Лежандра

Относительная погрешность аппроксимации структурной функции в данном случае составила $\delta_p = 0.0005$, однако в начальной области построения график спектральной мощности, вычисленной по параметрам ортогональной мо-

дели СФ, характеризуется колебаниями, значительно превосходящими по амплитуде экстремум, соответствующий преобладающей частоте. Одной из причин, обуславливающих данный недостаток, является дополнительная погрешность вычисления СПМ, возникающая вследствие ограничения полубесконечного интервала $[0, \infty)$ некоторым конечным интервалом $[0, \tau_{\max}]$ и определяемая как

$$\Delta_{SPD} = \frac{1}{2\pi\omega} \int_{\tau_{k\max}}^{\infty} \sin \omega\tau \frac{\partial S_x(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.42)$$

Необходимо отметить, что использование ортогональных полиномов позволяет получать аппроксимацию СФ, характеризуемую значением относительной погрешности аппроксимации, в большинстве случаев не превышающим $\delta_p = 0.001$. Однако, также как и в случае аппроксимации моделями СФ, представленными в таблице 1.1, если решение задачи исследования не ограничивается определением модели структурной функции, то использование ортогональных полиномов не дает приемлемых результатов.

Описанных недостатков лишено представление моделей структурных функций в базисе ортогональных функций [46]:

$$S_a(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(\tau, \alpha), \quad (1.43)$$

где m – число членов разложения ряда;

β_k – коэффициенты разложения;

$\psi_k(\tau, \alpha)$ – семейство ортогональных функций (α – параметр масштаба ортогональных функций).

Для модели структурной функции (1.43) коэффициенты разложения, обеспечивающие минимум квадратической погрешности аппроксимации [46]

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left(S_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(\tau, \alpha) \right)^2 d\tau = \min, \quad (1.44)$$

определяются выражением

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \int_0^{\infty} S_x(\tau) \psi_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (1.45)$$

При этом погрешность аппроксимации (1.44) можно представить в виде

$$\Delta = \int_0^{\infty} S_x^2(\tau) d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (1.46)$$

На практике также часто используется относительная погрешность аппроксимации [46]

$$\delta = \frac{\Delta}{\int_0^{\infty} S_x^2(\tau) d\tau}. \quad (1.47)$$

2 Аппроксимативные методы анализа структурно-спектральных характеристик временных рядов

2.1 Аппроксимация структурных функций ортогональными функциями

При аппроксимации структурных функций в качестве системы базисных функций предлагается применять ортогональные функции Лагерра, Лежандра и Дирихле, часто используемые в аппроксимативном анализе корреляционных функций [46]. Выражения для их определения представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Ортогональные функции

Базис	$\psi_k(\tau, \alpha)$	$\ \psi_k\ ^2$	$\psi_k(0, \alpha)$
Лагерра	$Lag_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k (-1)^s C_k^s \frac{(\alpha\tau)^s}{s!} e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}$	$\frac{1}{\alpha}$	1
Лежандра	$Leg_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k (-1)^s C_k^s C_{k+s}^s e^{-(2s+1)\alpha\tau}$	$\frac{1}{2(2k+1)\alpha}$	$(-1)^k$
Дирихле	$Drh_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} C_k^s C_{k+s+1}^s e^{-(s+1)\alpha\tau}$	$\frac{1}{2(k+1)\alpha}$	1

Приведенные в таблице 2.1 аналитические выражения обладают существенным недостатком – вычисление факториалов больших чисел, что влечет за собой существенные временные затраты, а в некоторых случаях происходит переполнение памяти, отводящееся для хранения переменной, содержащей результат вычисления, следствием чего, естественно, является ошибка вычисления. Предотвратить подобные ситуации помогает использование рекуррентных алгоритмов вычисления ортогональных функций (таблица 2.2), а возникающее при этом накопление ошибок удастся снизить посредством использования переменных высокой точности.

В приложении 1 представлен внешний вид ортогональных функций Лагерра, Лежандра и Дирихле при различных значениях параметра масштаба α . Легко заметить, что при увеличении параметра масштаба, все три вида рассматриваемых функций имеют свойство стремиться к нулю быстрее. Полезно также отметить, что функции Лагерра и Дирихле всегда имеют начальное значение единицу, а начальное значение функций Лежандра имеет зависимость от порядка функции k и приобретает значение $(-1)^k$. По внешнему виду определить достоинства и недостатки того или иного базиса не представляется возможным. Дать оценку удобства применения базиса можно лишь при решении конкретных задач, когда четко определяются аналитические выражения.

Необходимо отметить, что если с помощью рассматриваемых ортогональных функций проводить аппроксимацию структурной функции, определенной непосредственно по формуле (1.3), то в большинстве случаев результаты будут неудовлетворительны (рисунок 2.1), особенно на «хвосте».

Объясняется это особенностью ортогональных функций:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \psi_k(\tau) = 0. \quad (2.1)$$

Таблица 2.2 – Рекуррентные алгоритмы вычисления

Базис	$\psi_k(\tau, \alpha)$
Лагерра	$Lag_0(\alpha, \tau) = e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}$ $Lag_1(\alpha, \tau) = e^{-\frac{\alpha\tau}{2}} (1 - \alpha\tau)$ $Lag_k(\tau, \alpha) = \frac{2k-1-\alpha\tau}{k} Lag_{k-1}(\tau, \alpha) - \frac{k-1}{k} Lag_{k-2}(\tau, \alpha)$
Лежандра	$Leg_0(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau}$ $Leg_1(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau} - 2e^{-3\alpha\tau}$ $Leg_k(\tau, \alpha) = \frac{2k-1}{k} (1 - 2e^{-2\alpha\tau}) Leg_{k-1}(\tau, \alpha) - \frac{k-1}{k} Leg_{k-2}(\tau, \alpha)$
Дирихле	$Drh_0(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau}$ $Drh_1(\tau, \alpha) = 3e^{-2\alpha\tau} - 2e^{-\alpha\tau}$ $Drh_k(\tau, \alpha) = \frac{2k+1}{k+1} \left(\left(2e^{-\alpha\tau} - \frac{4k^2}{4k^2-1} \right) Drh_{k-1}(\tau, \alpha) - \frac{k-1}{2k-1} Drh_{k-2}(\tau, \alpha) \right)$

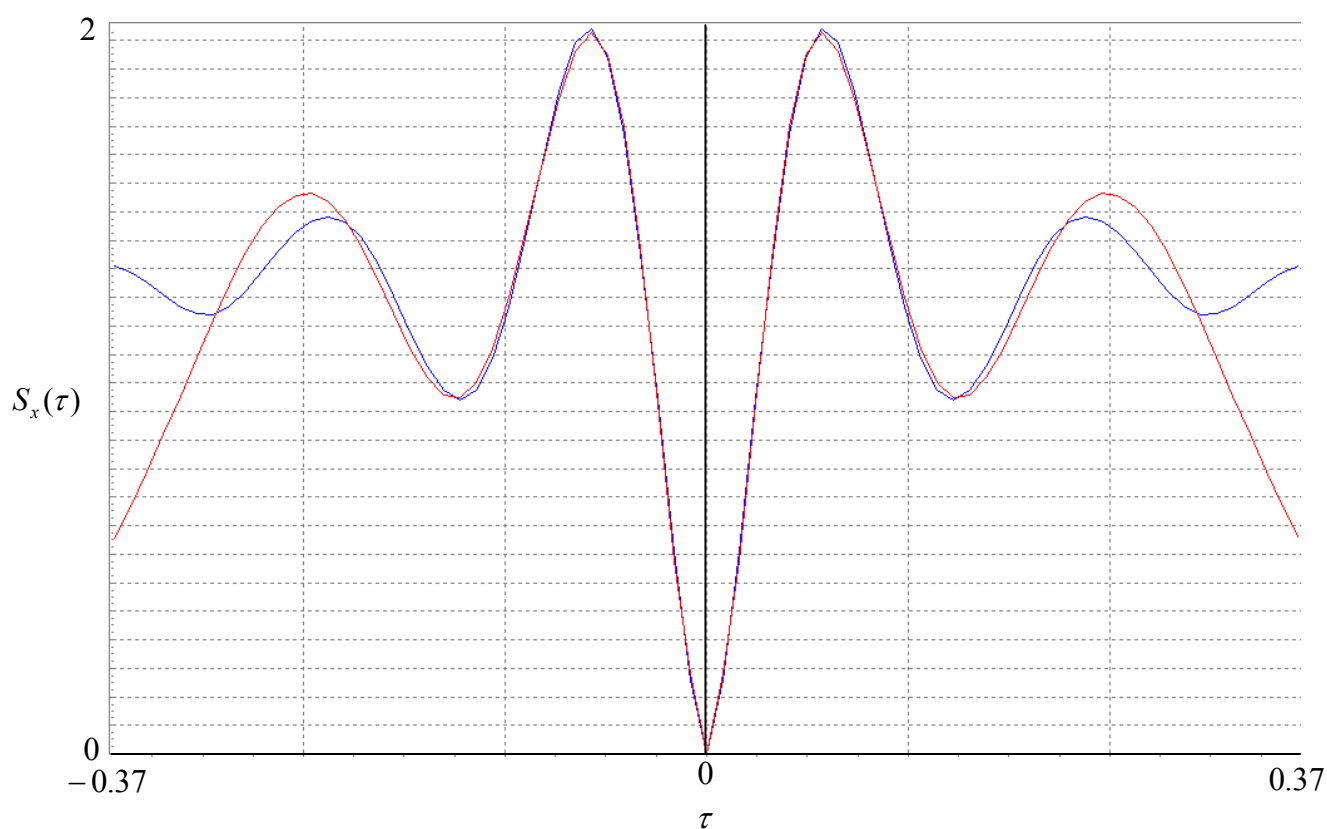


Рисунок 2.1 – Аппроксимация структурной функции

В свою очередь, структурные функции крайне редко стремятся к нулю в бесконечности. Для устранения этого недостатка аппроксимации можно вос-

пользоваться несколько модифицированной исходной СФ, изображенной на рисунке 2.2 (центрированная СФ, представленная на рисунке 2.1).

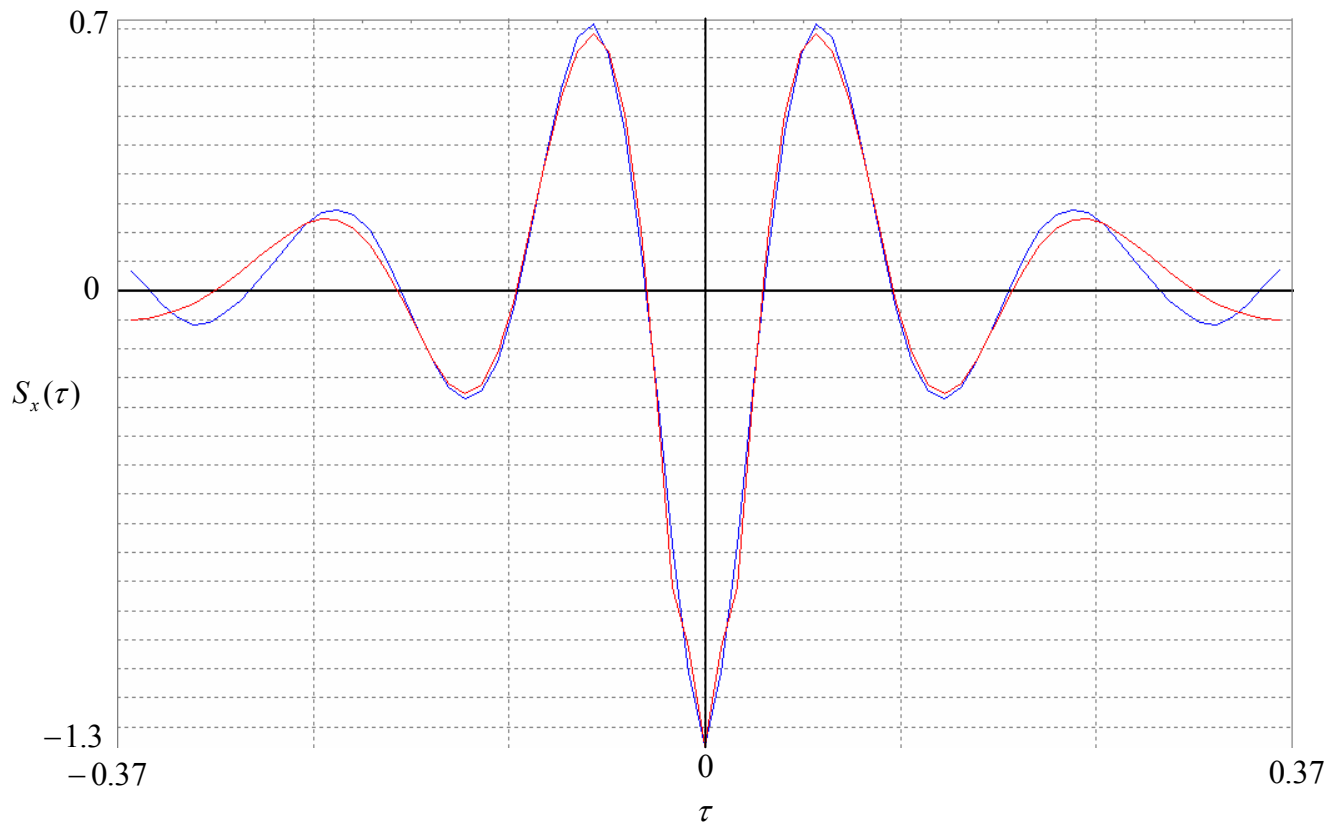


Рисунок 2.2 – Аппроксимация ЦСФ

Анализируя рисунок 2.2, можно с уверенностью утверждать, что аппроксимация структурной функции на концах значительно лучше. При этом число членов разложения ряда в обоих случаях одинаково (в сравнении с аппроксимацией, представленной на рисунке 2.1).

Центрирование исходной структурной функции обычно проводится относительно значения в бесконечности либо относительно среднего значения СФ. Таким образом, раскладывать в ортогональный ряд целесообразнее центрированную структурную функцию

$$\overset{\circ}{S}_x(\tau) = S_x(\tau) - m_s, \quad (2.2)$$

где m_s – величина, относительно которой производится центрирование СФ.

В случае произвольного α и конечного числа членов разложения ряда часто возникают ситуации, когда центрированная структурная функция не совпадает с ортогональной моделью в начальной точке (рисунок 2.3).

Данная особенность может быть устранена наложением ограничения на модель, то есть определяться коэффициенты разложения ЦСФ b_k должны так, чтобы квадратическая погрешность аппроксимации была минимальной при дополнительном условии

$$\overset{\circ}{S}_x(0) = \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(0, \alpha). \quad (2.3)$$

При такой постановке задачи необходимо минимизировать Δ_1 по b_k :

$$\Delta_1 = \int_0^\infty \left(\dot{S}_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) \right)^2 d\tau + \lambda \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(0, \alpha) = \min. \quad (2.4)$$

Определив частную производную и приравняв ее нулю

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial b_n} = -2 \int_0^\infty \left(\dot{S}_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) \right) \psi_n(\tau, \alpha) d\tau + \lambda \psi_n(0, \alpha) = 0, \quad (2.5)$$

можно получить следующее выражение

$$-2\beta_n \|\psi_n\|^2 + 2b_n \|\psi_n\|^2 + \lambda \psi_n(0, \alpha) = 0. \quad (2.6)$$

Следовательно,

$$b_n = \beta_n - \frac{\lambda \psi_n(0, \alpha)}{2\|\psi_n\|^2}. \quad (2.7)$$

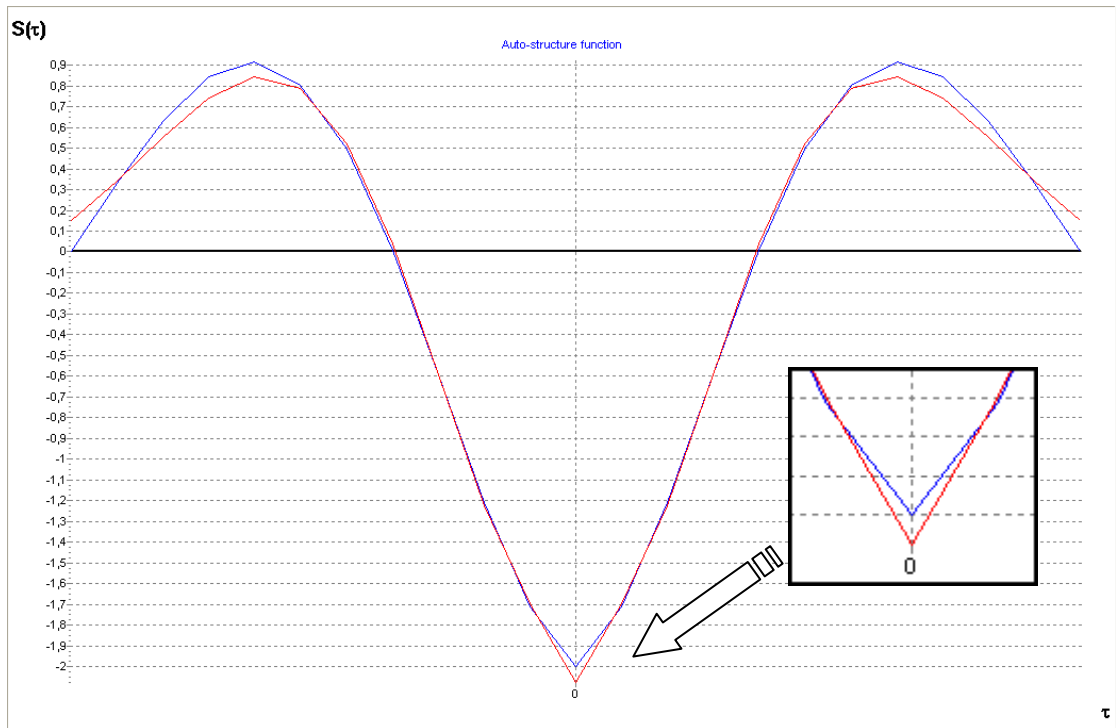


Рисунок 2.3 – Аппроксимация ЦСФ

Подставляя (2.7) в (2.3), можно определить

$$-\frac{\lambda}{2} = \frac{\dot{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(0, \alpha)}{\sum_{k=0}^m \frac{\psi_k^2(0, \alpha)}{\|\psi_k\|^2}}. \quad (2.8)$$

Таким образом, выражение для определения коэффициентов разложения будет иметь вид

$$b_n = \beta_n + \frac{\dot{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(0, \alpha)}{\sum_{k=0}^m \frac{\psi_k^2(0, \alpha)}{\|\psi_k\|^2}} \cdot \frac{\psi_n(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2}. \quad (2.9)$$

Для удобства выражение (2.9) можно представить в виде

$$b_n = \beta_n + C_n, \quad (2.10)$$

где C_n – поправочные коэффициенты, выражения для определения которых представлены в таблице 2.3.

На рисунке 2.4 представлен результат аппроксимации той же структурной функции, что представлена на рисунке 2.3, но при использовании ограничения на модель.

Таблица 2.3 – Значения поправочных коэффициентов

Базис	C_n
Лагерра	$\frac{\dot{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1}$
Лежандра	$(-1)^n (2n+1) \frac{\dot{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k}{(m+1)^2}$
Дирихле	$2(n+1) \frac{\dot{S}_x(0) - \sum_{k=0}^m \beta_k}{(m+1)(m+2)}$

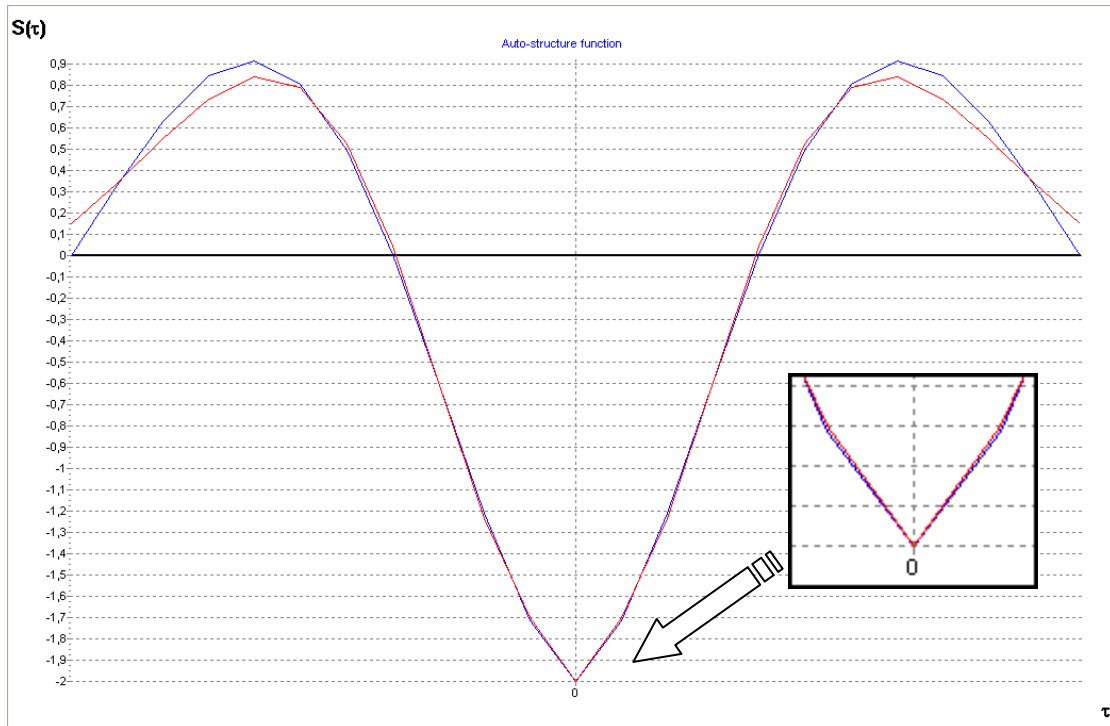


Рисунок 2.4 – Аппроксимация при ограничении на модель

При данных условиях погрешность аппроксимации будет определяться выражением

$$\Delta_1 = \int_0^\infty \left(\dot{S}_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) \right)^2 d\tau = \int_0^\infty \dot{S}_x^2(\tau) d\tau - 2 \sum_{k=0}^m b_k \beta_k \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m b_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (2.11)$$

Далее, учитывая (2.10) и пользуясь выражениями, представленными в таблице 2.3, можно определить выражение (2.11) для каждого базиса.

В случае использования базиса Лагерра:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \int_0^{\infty} \dot{S}_x(\tau) d\tau - 2 \left[\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \left(\dot{S}_x(0) - \sum_{n=0}^m \beta_n \right)}{(m+1)} \right] + \\ & + \left[\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2 + \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(\dot{S}_x(0) - \sum_{n=0}^m \beta_n \right)}{(m+1)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\left(\dot{S}_x(0) - \sum_{n=0}^m \beta_n \right)^2}{(m+1)^2} \right] = \\ & = \int_0^{\infty} \dot{S}_x(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2 + \frac{\left(\dot{S}_x(0) - \sum_{n=0}^m \beta_n \right)^2}{\alpha(m+1)}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Для функций Лежандра:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \int_0^{\infty} \dot{S}_x(\tau) d\tau - \left[\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(\dot{S}_x(0) - \sum_{n=0}^m \beta_n (-1)^n \right) \cdot (-1)^k}{(m+1)^2} \right] + \\ & + \left[\frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(\dot{S}_x(0) - \sum_{n=0}^m \beta_n (-1)^n \right) \cdot (-1)^k}{(m+1)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \frac{\left(\dot{S}_x(0) - \sum_{n=0}^m \beta_n (-1)^n \right)^2}{(m+1)^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Упрощение (2.13) приводит к следующему виду:

$$\Delta_1 = \int_0^{\infty} \dot{S}_x(\tau) d\tau - \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)} + \frac{\left(\dot{S}_x(0) - \sum_{n=0}^m \beta_n (-1)^n \right)^2}{2 \cdot \alpha(m+1)^2}. \quad (2.14)$$

Из выражений (2.12) и (2.14) видно, что погрешность аппроксимации можно разделить на две части Δ и Δ_2 , где Δ – погрешность аппроксимации, вызванная конечным числом членов ряда (1.26), Δ_2 – погрешность аппроксимации, вызванная дополнительным условием (2.3). В случае использования базиса Дирихле, погрешность можно представить в виде выражения (2.15).

$$\begin{aligned}
\Delta_1 = & \int_0^{\infty} \dot{S}_x^2(\tau) d\tau - 2 \left[\frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(\dot{S}_x(0) - \sum_{n=0}^m \beta_n \right)}{(m+1) \cdot (m+2)} \right] + \\
& + \left[\frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)} + \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(\dot{S}_x(0) - \sum_{n=0}^m \beta_n \right)}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{\alpha} \frac{\left(\dot{S}_x(0) - \sum_{n=0}^m \beta_n \right)^2}{(m+1)(m+2)} \right] = \\
& = \int_0^{\infty} \dot{S}_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)} + \frac{\left(\dot{S}_x(0) - \sum_{n=0}^m \beta_n \right)^2}{\alpha(m+1)(m+2)}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Значения составляющих методической погрешности

$$\Delta_1 = \Delta + \Delta_2 \tag{2.16}$$

представлены в таблице 2.4.

Таблица 2.4 – Составляющие методической погрешности

Базис	Δ	Δ_2
Лагерра	$\int_0^{\infty} \dot{S}_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2$	$\frac{\left(\dot{S}_x(0) - \sum_{n=0}^m \beta_n \right)^2}{\alpha(m+1)}$
Лежандра	$\int_0^{\infty} \dot{S}_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)}$	$\frac{\left(\dot{S}_x(0) - \sum_{n=0}^m \beta_n (-1)^n \right)^2}{2\alpha(m+1)^2}$
Дирихле	$\int_0^{\infty} \dot{S}_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)}$	$\frac{\left(\dot{S}_x(0) - \sum_{n=0}^m \beta_n \right)^2}{\alpha(m+1)(m+2)}$

Как показали исследования [46, 58], относительная погрешность аппроксимации зависит от величины параметра масштаба, вида структурной функции и ее показателя колебательности $\mu = \frac{\omega_0}{\lambda}$, а также числа членов разложения ряда m . На рисунках 2.5 – 2.7 приведены результаты определения погрешности аппроксимации нормированной центрированной структурной функции вида $\dot{S}_x(\tau) = 2 \left[1 - e^{-\lambda|\tau|} \cos(\omega\tau) \right] - m_s$ при разных значениях m , в зависимости от отношения параметра ортогональных функций к показателю затухания $\mathcal{X} = \frac{\alpha}{\lambda}$.

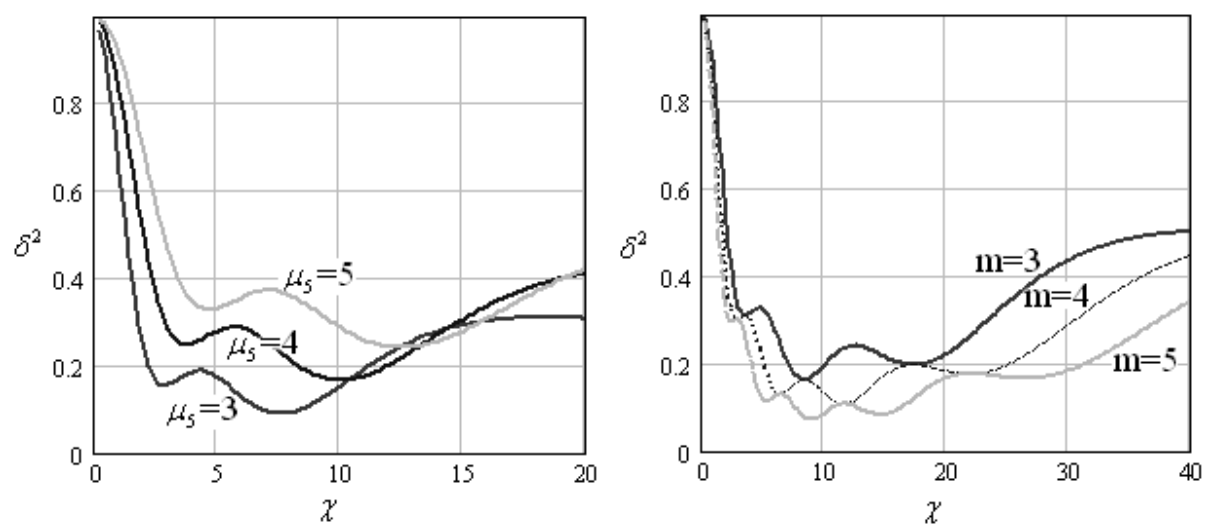


Рисунок 2.5 – Методическая погрешность аппроксимации
(базис Лагерра)

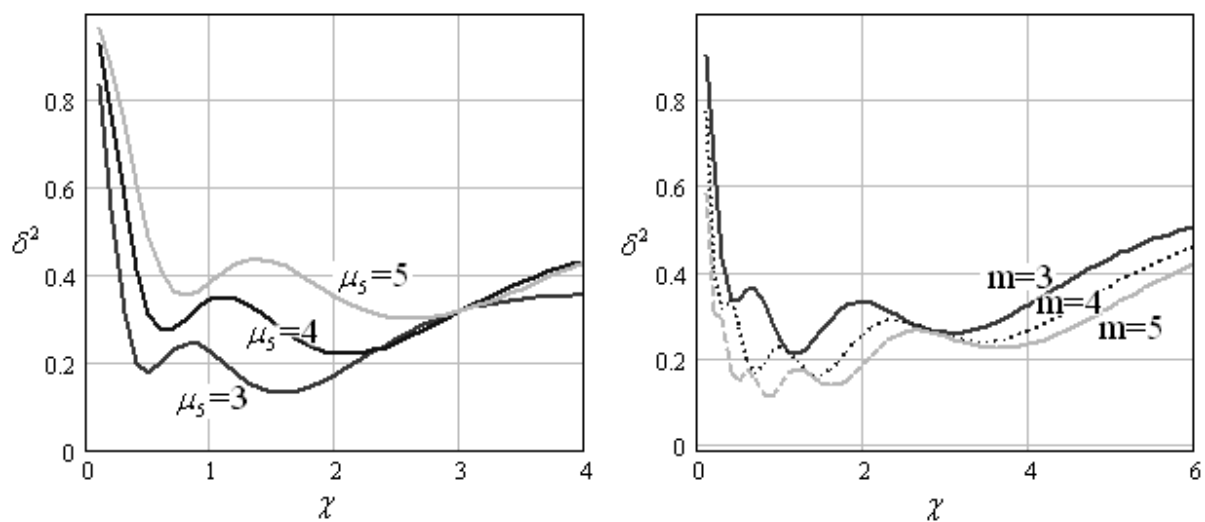


Рисунок 2.6 – Методическая погрешность аппроксимации
(базис Лежандра)

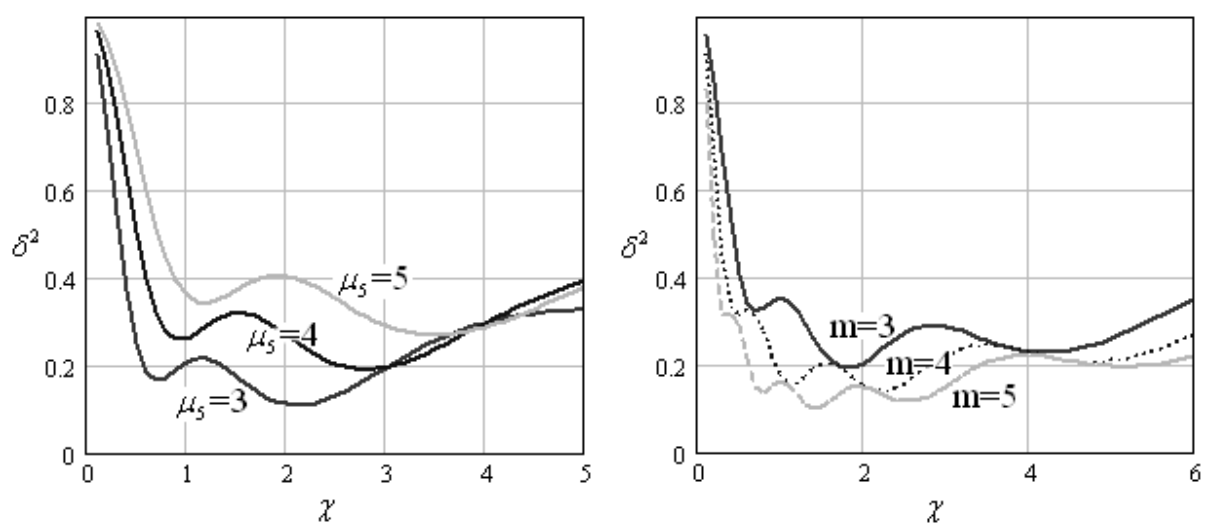


Рисунок 2.7 – Методическая погрешность аппроксимации
(базис Дирихле)

Видно, что при выбранной модели центрированной структурной функции, $\mu = const$, $m = const$, погрешность существенным образом зависит от χ , т.е. и от α . Кроме того, наблюдаются локальные экстремумы погрешности, количество которых зависит от m [56]. Следует отметить, что исследователя интересует значение параметра масштаба, обеспечивающего минимум квадратической погрешности аппроксимации, то есть определение глобального минимума [58]. Значение параметра масштаба, удовлетворяющего данному условию можно определить по выражениям, представленным в таблице 2.5 [58, 61], в которой $\Delta\tau$ является интервалом дискретизации случайного процесса.

Таблица 2.5 – Определение параметра масштаба

Базис	α
Лагерра	$\frac{0,8}{\Delta\tau}$
Лежандра	$\frac{0,4}{(2m+1)\Delta\tau}$
Дирихле	$\frac{0,4}{(m+1)\Delta\tau}$

2.2 Аппроксимация взаимной структурной функции

Результаты, полученные для аппроксимации АСФ, можно обобщить и для построения ортогональных моделей ВСФ. То есть анализировать центрированную ВСФ. Так как ЦВСФ не является четной [46], необходимо аппроксимировать как правую, так и левую её ветви. Причем число членов аппроксимирующего ряда для каждой ветви будет свое:

$$\overset{\circ}{S}_{xy}(\tau) = \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} l(\tau) \psi_k(\tau, \alpha_n) + \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} l(-\tau) \psi_k(-\tau, \alpha_l), \quad (2.17)$$

где

$$l(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0; \\ \frac{1}{2}, & \tau = 0; \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} \text{ и } l(-\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > 0; \\ \frac{1}{2}, & \tau = 0; \\ 1, & \tau < 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Коэффициенты разложения ЦВСФ определяются выражениями (2.19) и (2.20) соответственно.

$$\beta_{k,n} = \frac{1}{\|\psi_{k,n}\|^2} \int_0^\infty \overset{\circ}{S}_{xy}(\tau) \psi_{k,n}(\tau, \alpha_n) d\tau; \quad (2.19)$$

$$\beta_{k,l} = \frac{1}{\|\psi_{k,l}\|^2} \int_0^\infty \overset{\circ}{S}_{yx}(\tau) \psi_{k,l}(\tau, \alpha_l) d\tau. \quad (2.20)$$

Соответственно методическая погрешность аппроксимации будет равна

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{S}_{xy}(\tau) d\tau - \left(\|\psi_{k,n}\|^2 \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n}^2 + \|\psi_{k,l}\|^2 \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l}^2 \right). \quad (2.21)$$

Исследования показали, что модель (2.17) будет справедлива, если максимум ЦВСФ будет находиться в «нуле». В противном случае в нулевой точке будет разрыв первого рода. Результаты аппроксимации нормированной централизованной взаимной структурной функции $\overset{\circ}{S}_{xy}(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau - \tau_m|}] - m_s$, где τ_m – значение аргумента, соответствующее наибольшему по модулю значению ЦВСФ, m_s – значение, относительно которого центрируется ЦВСФ, при $M = 5000$ (рис. 2.8).

Из анализа результатов видно, что даже при аппроксимации простейших моделей центрированных взаимных структурных функций ортогональными функциями Лагерра для обеспечения допустимых погрешностей необходимо определять большое число членов разложения ряда (2.17). Эти обстоятельства без модификации модели затрудняют её применение.

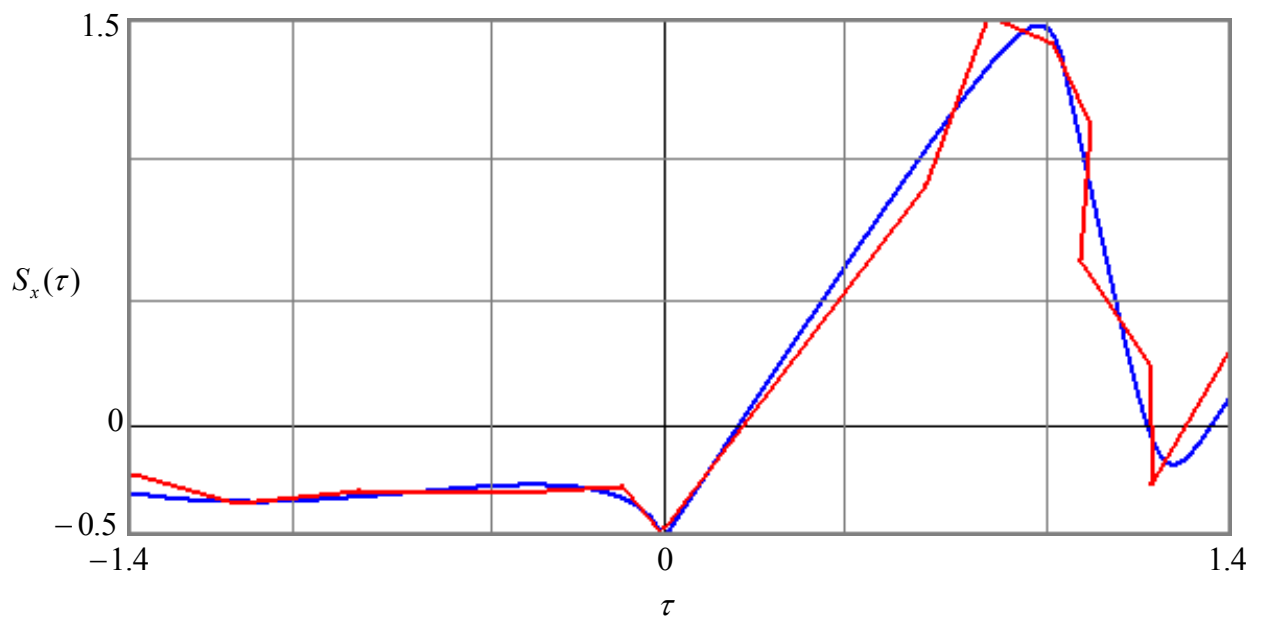


Рисунок 2.8 – Результаты аппроксимации ЦВСФ

Для устранения этих недостатков необходимо, в первую очередь, определить τ_m и искать модель ЦВСФ в виде:

$$\overset{\circ}{S}_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} l(\tau - \tau_m) \psi_{k,n}(\tau - \tau_m, \alpha_n) + \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} l(\tau_m - \tau) \psi_{k,l}(\tau_m - \tau, \alpha_l). \quad (2.22)$$

Коэффициенты разложения для модели (2.22) запишутся в виде:

$$\beta_{k,n} = \frac{1}{\|\psi_{k,n}\|^2} \int_0^\infty \overset{\circ}{S}_{xy}(\tau + \tau_m) \psi_{k,n}(\tau, \alpha_n) d\tau; \quad (2.23)$$

$$\beta_{k,l} = \frac{1}{\|\psi_{k,l}\|^2} \int_0^\infty \overset{\circ}{S}_{xy}(\tau_m - \tau) \psi_{k,l}(\tau, \alpha_l) d\tau. \quad (2.24)$$

Для обеспечения «склеивания» левой и правой ветвей ЦВСФ:

$$\overset{\circ}{S}_{axy}(\tau_m) = \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \psi_k(0, \alpha_n) = \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \psi_k(0, \alpha_l) = 1, \quad (2.25)$$

целесообразнее вместо коэффициентов β_k использовать коэффициенты b_k , определяемые в виде (2.7). С учетом этого выражение, определяющее модель ЦВСФ, можно представить в виде

$$\overset{\circ}{S}_{xy}(\tau) = \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} 1(\tau - \tau_m) \psi_{k,n}(\tau - \tau_m, \alpha_n) + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} 1(\tau_m - \tau) \psi_{k,l}(\tau_m - \tau, \alpha_l). \quad (2.26)$$

На рисунке 2.9 представлена аппроксимация центрированной взаимной структурной функции, которая уже анализировалась ранее (рисунок 2.8), только теперь учтено значение τ_m и применено «склеивание».

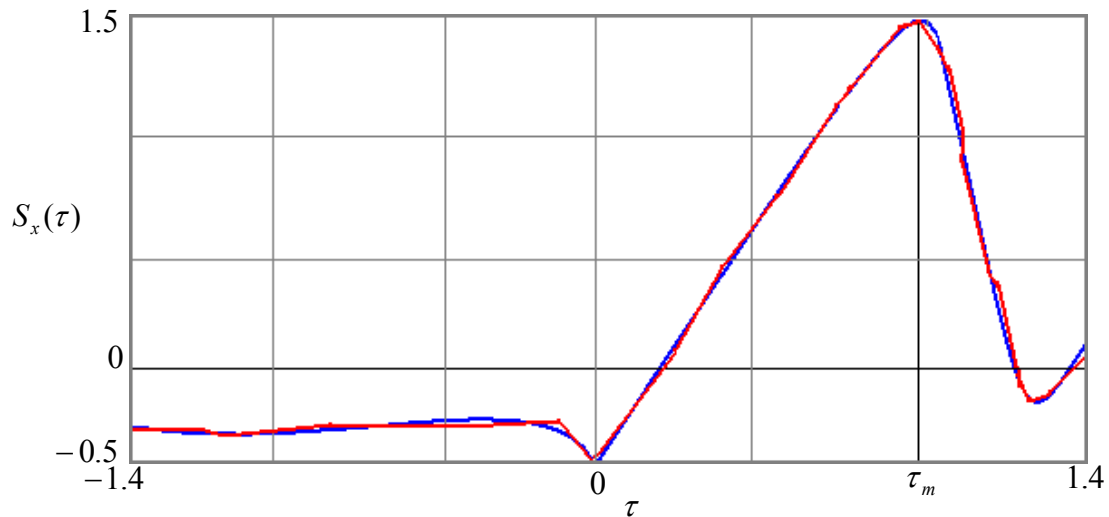


Рисунок 2.9 – Результаты аппроксимации ЦВСФ после применения «склеивания»

Следует отметить, что «склеивание» левой и правой ветвей в точке τ_m позволяет использовать для построения ортогональной модели (2.22) разные базисы.

2.3 Спектральная плотность мощности случайных процессов со стационарными приращениями

Обработка случайных процессов во многих случаях требует определения спектра. Это относится как к стационарным, так и к нестационарным процессам. Существуют различные способы определения спектральных характеристик процесса, например: преобразование Фурье процесса, преобразование Фурье корреляционной функции и многие другие [16, 17, 46].

В случае стационарных процессов справедливо выражение (1.5), связывающее корреляционную и структурную функции процесса. Необходимо отметить, что правая часть выражения (1.5) содержит взятую со знаком минус, уменьшенную в два раза и центрированную относительно значения в бесконечности структурную функцию. Подставляя выражение (1.5) в формулу Винера-Хинчина [15], можно определить спектральную плотность мощности следующим образом:

$$g_x(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \overset{\circ}{S}_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (2.27)$$

Далее, представляя модель СФ в виде (1.26), выражение (2.27) примет вид

$$g_x(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \int_0^\infty \psi_k(\tau, \alpha) \cos(\omega\tau) d\tau = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \operatorname{Re} W_k(j\omega), \quad (2.28)$$

где $\operatorname{Re} W_k(j\omega)$ – вещественная часть частотной характеристики ортогональных функций [46].

В таблице 2.7 представлены выражения для определения СПМ в ортогональных базисах Лагерра, Лежандра и Дирихле. Но выражение (2.28) позволяет определять СПМ только в случае стационарности СП, хотя структурная функция чаще является характеристикой случайных процессов со стационарными приращениями. Это обстоятельство предполагает несколько иное определение СПМ [71]:

$$g_x(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^\infty \sin(\omega\tau) S'_x(\tau) d\tau, \quad (2.29)$$

где $S'_x(\tau) = \frac{\partial S_x(\tau)}{\partial \tau}$.

Таблица 2.6 – СПМ в случае стационарного СП

Базис	$g_x(\omega)$	φ
Лагерра	$-\frac{\cos \varphi}{\pi\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k \cos[(2k+1)\varphi]$	$\arctg\left(\frac{2\omega}{\alpha}\right)$
Лежандра	$-\frac{1}{2\pi\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{2k+1} \cos \varphi_k \cos\left[\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right]$	$\varphi_n = \arctg\left(\frac{\omega}{(2n+1)\alpha}\right)$
Дирихле	$-\frac{1}{2\pi\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{\beta_k}{k+1} \cos \varphi_k \cos\left[\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right]$	$\varphi_n = \arctg\left(\frac{\omega}{(n+1)\alpha}\right)$

После математических преобразований выражение (2.29) примет вид [52]

$$g_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \sum_{s=0}^k A_{k,s}(\alpha) \cdot B_s(\alpha, \omega), \quad (2.30)$$

где $A_{k,s}(\alpha)$ и $B_s(\alpha, \omega)$ для различных базисов представлены в таблице 2.7.

Таблица 2.7 – Коэффициенты в случае СПСП

Базис	$A_{k,s}(\alpha)$	$B_s(\alpha, \omega)$
Лагерра	$(-1)^s \frac{k!}{(k-s)!(s!)^2} \alpha^s$	$\frac{s! \cos^s(\varphi)}{\omega \left(\frac{\alpha}{2}\right)^s} [\sin(s \cdot \varphi) - \sin((s+1)\varphi) \cdot \cos(\varphi)],$ где $\varphi = \arctg\left(\frac{2\omega}{\alpha}\right)$
Лежандра	$(-1)^{s+1} \frac{(k+s)!}{(k-s)!(s!)^2} (2s+1)\alpha$	$\frac{1}{(2s+1)^2 \alpha^2 + \omega^2}$
Дирихле	$(-1)^{k-s+1} \frac{(k+s+1)!}{(k-s)!(s+1)!s!} (s+1)\alpha$	$\frac{1}{(s+1)^2 \alpha^2 + \omega^2}$

Определение СПМ с помощью выражения (2.30) влечет за собой определенные ограничения на его использование: в состав этого выражения входят

коэффициенты $A_{k,s}(\alpha)$, которые представляют собой алгебраические действия с факториалами чисел, пропорциональных числу членов разложения ряда (2.1). Таким образом, при относительно небольшом m (для функций Лагерра это число обычно равно 20-22 члена), во время вычисления $A_{k,s}(\alpha)$ происходит переполнение мантиссы числа, что приводит к некорректным результатам вычисления СПМ (рисунок 2.6). При этом попытка увеличить размер памяти, отводимой под мантиссу, не решает данную проблему [2].

К определению выражения (2.29) можно также применить иной подход. Применяя формулу Эйлера и учитывая, что

$$\frac{\partial \text{Lag}_k(\tau, \alpha)}{\partial \tau} = \sum_{s=0}^k C_k^s (-\alpha)^s \frac{1}{s!} \left[s \tau^{s-1} e^{-\frac{\alpha \tau}{2}} - \frac{\alpha}{2} \tau^s e^{-\frac{\alpha \tau}{2}} \right], \quad (2.31)$$

где $\text{Lag}_k(\tau, \alpha)$ – ортогональная функция Лагерра k -го порядка, выражение (2.29) легко представить в виде

$$g_x(\omega) = -\frac{1}{4j\omega\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \sum_{s=0}^k C_k^s (-\alpha)^s \times \left(\left[\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{2} + j\omega\right)^s} - \frac{\frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2} + j\omega\right)^{s+1}} \right] - \left[\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{2} - j\omega\right)^s} - \frac{\frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2} - j\omega\right)^{s+1}} \right] \right). \quad (2.32)$$

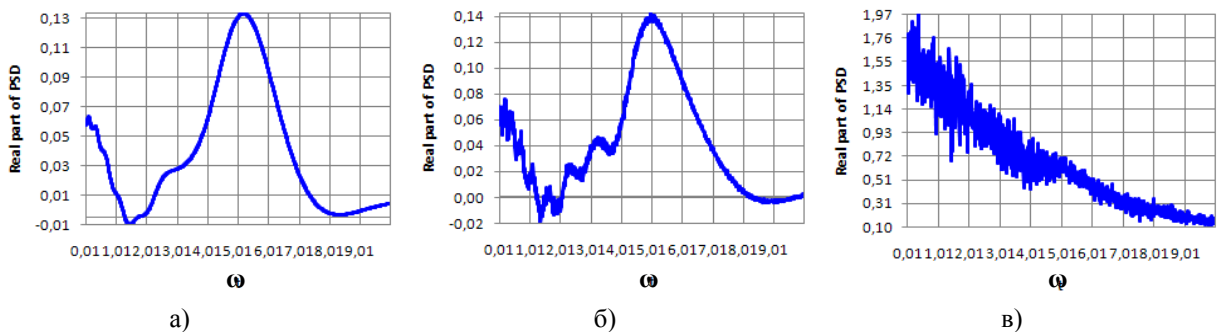


Рисунок 2.10 – СПМ при использовании выражения, содержащего факториалы (базис Лагерра):

- а) относительная погрешность аппроксимации ЦСФ $\delta=0,079$; $m=19$;
- б) относительная погрешность аппроксимации ЦСФ $\delta=0,067$; $m=22$;
- в) относительная погрешность аппроксимации ЦСФ $\delta=0,061$; $m=24$

Выполнив простейшие алгебраические преобразования и используя формулу бинома Ньютона, можно получить конечное выражение, которое будет иметь вид

$$g_x(\omega) = \frac{\cos \varphi}{\pi \alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^{k+1} \beta_k \cos[(2k+1)\varphi], \quad (2.33)$$

где $\varphi = \arctg\left(\frac{2\omega}{\alpha}\right)$.

Полученное выражение может применяться для СПСП и практически не ограничивается числом членов разложения ряда ЦСФ. Пример использования выражения (2.33) приведен на рисунке 2.11.

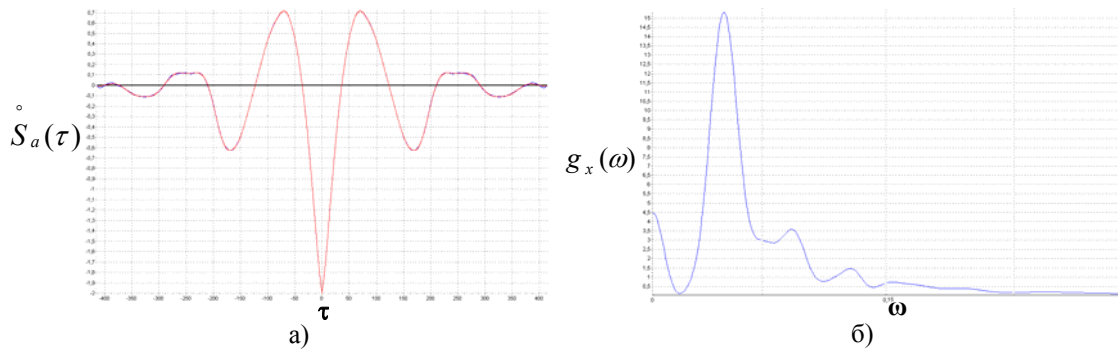


Рисунок 2.11 – Пример определения СПМ без ограничения на число членов разложения ряда (базис Лагерра):

- а) ЦСФ и ее модель. $\delta=0,0003$; $m=170$;
б) СПМ, полученная по модели СФ

Существует также возможность решения обратной задачи: по известной спектральной плотности мощности случайного процесса структурная функция может быть определена следующим выражением [71]:

$$S_X(\tau) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(\omega\tau)] g_X(\omega) d\omega. \quad (2.34)$$

Применяя формулу Эйлера и учитывая при этом, что спектральная плотность мощности является четной функцией [9], выражение (2.34) можно привести к выражению

$$S_X(\tau) = 4 \int_0^{\infty} g_X(\omega) d\omega - 2 \int_0^{\infty} (e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}) g_X(\omega) d\omega. \quad (2.35)$$

В свою очередь, СПМ можно разложить в ряд [51]

$$g_X(\omega) = \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(\omega, \alpha), \quad (2.36)$$

параметры которого определяются аналогично параметрам выражения (1.26). Подставляя (2.36) в (2.35):

$$S_X(\tau) = 4 \sum_{k=0}^m \beta_k \sum_{s=0}^k A_{k,s}^*(\alpha) \cdot B_s^*(\alpha, \tau), \quad (2.37)$$

где $A_{k,s}^*(\alpha)$ и $B_s^*(\alpha, \tau)$ – коэффициенты, выражения для определения которых представлены в таблице 2.8.

Таблица 2.8 – Коэффициенты для определения СФ

Базис	$A_{k,s}^*(\alpha)$	$B_s^*(\alpha, \tau)$
Лагерра	$(-1)^s C_k^s \alpha^s$	$\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{s+1} [1 - \cos^{s+1}(\varphi) \cos((s+1)\varphi)],$ где $\varphi = \arctg\left(\frac{2\tau}{\alpha}\right)$
Лежандра	$(-1)^{s+1} C_k^s C_{k+s}^s$	$\frac{1}{(2s+1)\alpha} - \frac{(2s+1)\alpha}{(2s+1)^2 \alpha^2 + \tau^2}$
Дирихле	$(-1)^{k-s+1} C_k^s C_{k+s+1}^{s+1}$	$\frac{1}{(s+1)\alpha} - \frac{(s+1)\alpha}{(s+1)^2 \alpha^2 + \tau^2}$

На рисунке 2.12 приведены примеры оценивания структурной функции по аппроксимации спектральной плотности мощности. Исследуемый процесс характеризуется структурной функцией вида $S_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda\tau} \cos(\omega_0\tau)]$, где $\omega_0 = 5$, $\lambda = 1$.

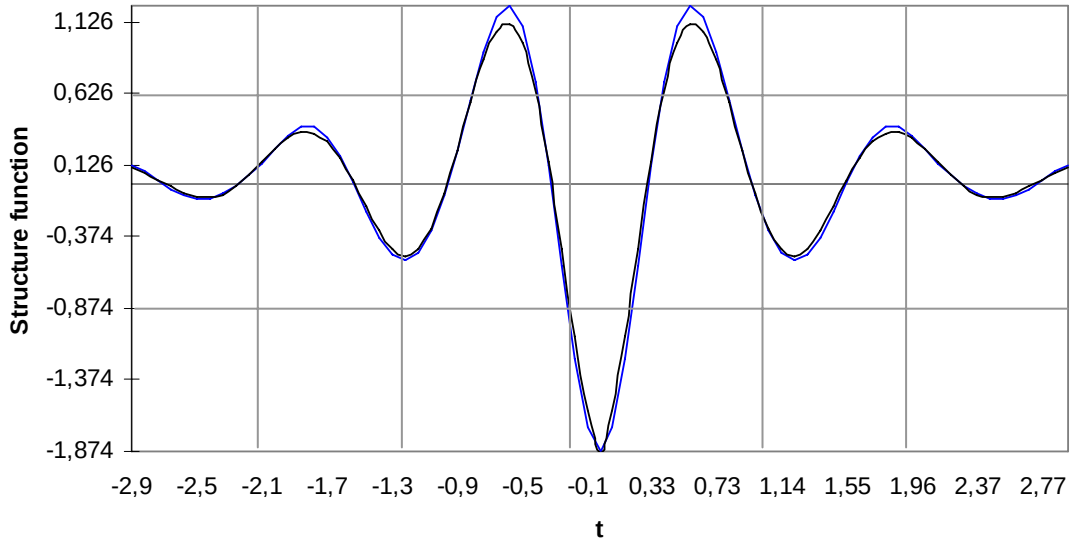


Рисунок 2.12 – СФ, вычисленная по ортогональной модели СПМ

Необходимо отметить, что использование описанного в данной работе метода определения структурной функции по ортогональной модели СПМ уместно только в том случае, если анализируется спектр одного процесса, то есть на случай взаимных характеристик двух процессов данный метод не пригоден.

2.4 Взаимная спектральная плотность мощности

По аналогии с результатами, полученными для взаимного спектрального анализа, в случае использования ортогональных моделей взаимных корреляционных функций [46], можно определить оценку взаимной спектральной плотности мощности и её составляющих по параметрам ортогональных моделей ВСФ. Представляя модель ВСФ в виде (2.37), можно определить взаимную спектральную плотность мощности выражением [46, 71]

$$g_{xy}(j\omega) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} 1(\tau - \tau_m) \psi_{k,n}(\tau - \tau_m, \alpha_n) + \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,l} 1(\tau_m - \tau) \psi_{k,l}(\tau_m - \tau, \alpha_l) \right] \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (2.38)$$

Вводя замену переменных $u = \tau - \tau_m$,

$$\begin{aligned} g_{xy}(j\omega) &= -\frac{\exp(-j\omega\tau_m)}{4\pi} \left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \int_0^{\infty} \psi_{k,n}(u, \alpha_n) \exp(-j\omega u) du + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,l} \int_{-\infty}^0 \psi_{k,l}(-u, \alpha_l) \exp(-j\omega u) du \right] = \\ &= -\frac{\exp(-j\omega\tau_m)}{4\pi} \left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} W_{k,n}(j\omega) + \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,l} W_{k,l}(-j\omega) \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} g_{xy}(j\omega) = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \cos \omega \tau_m \left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \operatorname{Re} W_{k,n}(j\omega) + \sum_{k=0}^{m_a} b_{k,l} \operatorname{Re} W_{k,l}(j\omega) \right] - \sin \omega \tau_m \left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \operatorname{Im} W_{k,n}(j\omega) - \sum_{k=0}^{m_a} b_{k,l} \operatorname{Im} W_{k,l}(j\omega) \right] \right\}; \quad (2.40)$$

$$\operatorname{Im} g_{xy}(j\omega) = -\frac{1}{4\pi} \left\{ -\sin \omega \tau_m \left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \operatorname{Re} W_{k,n}(j\omega) + \sum_{k=0}^{m_a} b_{k,l} \operatorname{Re} W_{k,l}(j\omega) \right] + \cos \omega \tau_m \left[\sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \operatorname{Im} W_{k,n}(j\omega) - \sum_{k=0}^{m_a} b_{k,l} \operatorname{Im} W_{k,l}(j\omega) \right] \right\}. \quad (2.41)$$

Вводя обозначения

$$A(\omega) = \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \operatorname{Re} W_{k,n}(j\omega) + \sum_{k=0}^{m_a} b_{k,l} \operatorname{Re} W_{k,l}(j\omega); \quad (2.42)$$

$$B(\omega) = \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \operatorname{Im} W_{k,n}(j\omega) - \sum_{k=0}^{m_a} b_{k,l} \operatorname{Im} W_{k,l}(j\omega), \quad (2.43)$$

окончательно получают выражения

$$\operatorname{Re} g_{xy}(j\omega) = -\frac{1}{4\pi} [A(\omega) \cos \omega \tau_m - B(\omega) \sin \omega \tau_m]; \quad (2.44)$$

$$\operatorname{Im} g_{xy}(j\omega) = -\frac{1}{4\pi} [B(\omega) \cos \omega \tau_m - A(\omega) \sin \omega \tau_m] \quad (2.45)$$

В таблице 2.9 для различных ортогональных базисов приведены выражения для определения вещественных $\operatorname{Re} W_k(j\omega)$ и мнимых частей $\operatorname{Im} W_k(j\omega)$ преобразования Фурье ортогональных функций [46]

$$W_k(j\omega) = \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.46)$$

Таблица 2.9 – Вещественные и мнимые части преобразования Фурье ортогональных функций

Орт. базис	$\operatorname{Re} W_k(j\omega)$	$\operatorname{Im} W_k(j\omega)$
Лагерра	$\frac{2}{\alpha} (-1)^k \cos \varphi \cos(2k+1)\varphi$	$-\frac{2}{\alpha} (-1)^k \cos \varphi \sin(2k+1)\varphi$
Лежандра	$\frac{1}{(2k+1)\alpha} \cos \varphi_k \cos \left[\left(\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$	$-\frac{1}{(2k+1)\alpha} \cos \varphi_k \sin \left[\left(\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$
Дирихле	$\frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha} \cos \varphi_k \cos \left[\left(\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$	$-\frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha} \cos \varphi_k \sin \left[\left(\varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$

3 Исследование методов аппроксимативного структурно-спектрального анализа временных рядов

3.1 Анализ погрешности аппроксимации структурных функций ортогональными функциями Лагерра, Лежандра и Дирихле

На практике коэффициенты разложения ортогональной модели невозможно определить по выражению (2.4), так как приходится ограничиваться конечным интервалом наблюдения структурной функции:

$$\hat{\beta}_k^{(1)} = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \int_0^{\tau_{k \max}} S_x(\tau) \psi_k(\tau, \alpha) d\tau, \quad (3.1)$$

где $\tau_{k \max}$ – интервал наблюдения структурной функции.

При данном ограничении появляется дополнительная составляющая методической погрешности, вызванная конечным верхним пределом интегрирования:

$$\Delta_{\beta_k}^{(1)} = \hat{\beta}_k^{(1)} - \beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \int_{\tau_{k \max}}^{\infty} S_x(\tau) \psi_k(\tau, \alpha) d\tau, \quad (3.2)$$

Вычисления, производимые при аппроксимативном анализе, в большинстве случаев требуют привлечения ЭВМ для их осуществления. Это обстоятельство обуславливает применение численных методов для вычисления интеграла, входящего в состав выражения (3.1). Обозначив оператор численного интегрирования как $\Phi\{\}$, выражение, определяющее оценку коэффициентов разложения (1.28), примет вид

$$\hat{\beta}_k^{(2)} = \Phi \left\{ S_x(\Delta \tau \cdot i) \cdot \psi_k(\Delta \tau \cdot i, \alpha), J_{\max} \right\}, \quad (3.3)$$

где $\Delta \tau$ – шаг дискретизации структурной функции;

$J_{\max} = \text{ent} \left[\frac{\tau_{k \max}}{\Delta \tau} \right]$ – интервал наблюдения структурной функции;

$i = 1, \dots, J_{\max}$.

В этом случае составляющая методической погрешности

$$\Delta_{\beta_k}^{(2)} = \hat{\beta}_k^{(2)} - \hat{\beta}_k^{(1)}. \quad (3.4)$$

В связи с конечностью выборки значений случайного процесса

$$\hat{\beta}_k^{(3)} = \Phi \left\{ S_x(\Delta \tau \cdot i) \cdot \psi_k(\Delta \tau \cdot i, \alpha), \tau_{k \max}, N \right\}, \quad (3.5)$$

где N – объем выборки процесса.

С учетом выражений (3.3) и (3.5), составляющая методической погрешности, вызванная конечностью объема выборки, будет определяться выражением

$$\Delta_{\beta_k}^{(3)} = \hat{\beta}_k^{(3)} - \hat{\beta}_k^{(2)}. \quad (3.6)$$

Составляющие методической погрешности [58], как следует из выражений (3.2), (3.4), (3.6), образуют полную группу погрешностей. Следовательно,

методическая погрешность вычисления коэффициентов разложения β_k определяется выражением

$$\Delta_{\beta_k} = \Delta_{\beta_k}^{(1)} + \Delta_{\beta_k}^{(2)} + \Delta_{\beta_k}^{(3)} = \hat{\beta}_k^{(3)} - \beta_k. \quad (3.7)$$

Конечность интервала интегрирования и интегрирование выражения (3.1) численными методами будут вносить в результирующую погрешность систематическую составляющую, а ограниченность выборки – случайную составляющую. Таким образом, составляющую погрешности $\Delta_{\beta_k}^{(3)}$ можно определить методом имитационного моделирования.

Необходимо отметить, что составляющая методической погрешности $\Delta_{\beta_k}^{(3)}$ и погрешность определения коэффициентов разложения β_k Δ_{β_k} являются случайными величинами, распределенными по нормальному закону [58]. Следовательно, для описания необходимо найти их математическое ожидание и дисперсию (среднеквадратическое отклонение).

Также как и при аппроксимации корреляционных функций [20, 46], когда получаются не сами коэффициенты разложения, а лишь их оценки, вычисленные с использованием численных методов и при прочих особенностях, упомянутых выше, можно записать погрешность аппроксимации структурной функции [50] в виде следующего выражения:

$$\Delta = \int_0^\infty \left(S_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k \psi_k(\tau, \alpha) \right)^2 d\tau, \quad (3.8)$$

где $\hat{\beta}_k$ – оценка коэффициента β_k .

С учетом свойств ортогональных функций [46, 51],

$$\Delta = \int_0^\infty S_x(\tau) d\tau - 2 \sum_{k=0}^m \beta_k \hat{\beta}_k \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (3.9)$$

Погрешность определения коэффициентов разложения представляется в виде

$$\Delta_{\beta_k} = \hat{\beta}_k - \beta_k. \quad (3.10)$$

С учетом (3.10) выражение (3.9) примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^\infty S_x(\tau) d\tau - 2 \sum_{k=0}^m \beta_k (\Delta_{\beta_k} - \beta_k) \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m (\Delta_{\beta_k}^2 - 2\Delta_{\beta_k} \beta_k + \beta_k^2) \|\psi_k\|^2 = \\ &= \int_0^\infty S_x(\tau) d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m \Delta_{\beta_k}^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Можно представить (3.11) как сумму минимальной погрешности и случайной погрешности, вызванной оценкой коэффициентов разложения:

$$\Delta = \Delta_{\min} + \Delta_R. \quad (3.12)$$

Далее приводятся выражения для определения математического ожидания и дисперсии случайной погрешности аппроксимации.

$$M[\Delta_R] = \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 M[\Delta_{\beta_k}^2], \quad (3.13)$$

где $M[\Delta_{\beta_k}^2]$ – второй начальный момент погрешности.

$$D_{\Delta_R} = M \begin{bmatrix} \circ^2 \\ \Delta_R \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

где $\circ \Delta_R = \Delta_R - M[\Delta_R] = \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 \{\Delta_{\beta_k}^2 - M[\Delta_{\beta_k}^2]\}.$

$$D_{\Delta_R} = \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 M \begin{bmatrix} \circ^2 & \circ^2 \\ \Delta_{\beta_k} & \Delta_{\beta_n} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Допуская (теорема Ляпунова [13]), что закон распределения Δ_{β_k} – нормальный, а также что Δ_{β_k} и Δ_{β_n} некоррелированные:

$$M \begin{bmatrix} \circ^2 & \circ^2 \\ \Delta_{\beta_k} & \Delta_{\beta_n} \end{bmatrix} = \begin{cases} M \begin{bmatrix} \circ^4 \\ \Delta_{\beta_k} \end{bmatrix}, k = n; \\ 0, k \neq n, \end{cases} \quad (3.16)$$

$$D_{\Delta_R} = \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 M \begin{bmatrix} \circ^4 \\ \Delta_{\beta_k} \end{bmatrix} = 3 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 \sigma_{\Delta_{\beta_k}}^4. \quad (3.17)$$

В [55] представлены формулы для определения моментов, которые используются в выражении (3.17), а также они могут быть применены для упрощения выражения (3.15), в случае, когда Δ_{β_k} и Δ_{β_n} имеют корреляцию:

$$D_{\Delta_R} = \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 \sigma_{\Delta_{\beta_k}}^2 \sigma_{\Delta_{\beta_n}}^2 \left(1 + 2\rho_{\Delta_{\beta_k} \Delta_{\beta_n}}\right). \quad (3.18)$$

При аппроксимации также могут применяться коэффициенты (2.13), поэтому возникает необходимость в определении погрешности их вычисления. В данных условиях погрешность аппроксимации (2.14) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \int_0^\infty \left(S_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \hat{b}_k \psi_k(\tau, \alpha) \right)^2 d\tau = \\ &= \int_0^\infty S_x(\tau) d\tau - 2 \sum_{k=0}^m \hat{b}_k \beta_k \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m \hat{b}_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Представляя $b_n = \beta_n + C_n$,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \int_0^\infty S_x(\tau) d\tau - 2 \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k \beta_k \|\psi_k\|^2 - 2 \sum_{k=0}^m \hat{C}_k \beta_k \|\psi_k\|^2 + \\ &+ \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k^2 \|\psi_k\|^2 + 2 \sum_{k=0}^m \hat{C}_k \hat{\beta}_k \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m \hat{C}_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Если теперь учесть (3.10), а также принять

$$\Delta_{C_k} = \hat{C}_k - C_k, \quad (3.21)$$

выражение (3.20) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \int_0^\infty S_x(\tau) d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m \Delta_{\beta_k}^2 \|\psi_k\|^2 + 2 \sum_{k=0}^m C_k \Delta_{\beta_k} \|\psi_k\|^2 + \\ &+ 2 \sum_{k=0}^m \Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k} \|\psi_k\|^2 + 2 \sum_{k=0}^m C_k \Delta_{C_k} \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m C_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m \Delta_{C_k}^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

При этом, (3.22) можно представить в виде

$$\Delta = \Delta_{\min} + \Delta_R + \Delta_{R1}, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{R1} = & 2 \sum_{k=0}^m C_k \Delta_{\beta_k} \|\psi_k\|^2 + 2 \sum_{k=0}^m \Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k} \|\psi_k\|^2 + \\ & + 2 \sum_{k=0}^m C_k \Delta_{C_k} \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m C_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m \Delta_{C_k}^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Теперь необходимо вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной погрешности Δ_{R1}

$$\begin{aligned} M[\Delta_{R1}] = & 2 \sum_{k=0}^m C_k M[\Delta_{\beta_k}] \|\psi_k\|^2 + 2 \sum_{k=0}^m M[\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k}] \|\psi_k\|^2 + \\ & + 2 \sum_{k=0}^m C_k M[\Delta_{C_k}] \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m C_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m M[\Delta_{C_k}^2] \|\psi_k\|^2; \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Delta}_{R1} = & 2 \sum_{k=0}^m C_k \overset{\circ}{\Delta}_{\beta_k} \|\psi_k\|^2 + 2 \sum_{k=0}^m (\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k} - M[\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k}]) \|\psi_k\|^2 + \\ & + 2 \sum_{k=0}^m C_k \overset{\circ}{\Delta}_{C_k} \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m (\Delta_{C_k}^2 - M[\Delta_{C_k}^2]) \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Для определения $\overset{\circ}{\Delta}_{R1}$ можно воспользоваться выражением (3.27).

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Delta}_{R1} = & 4 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m C_k C_n \overset{\circ}{\Delta}_{\beta_k} \overset{\circ}{\Delta}_{\beta_n} \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\ & + 4 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m (\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k} - M[\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k}]) (\Delta_{\beta_n} \Delta_{C_n} - M[\Delta_{\beta_n} \Delta_{C_n}]) \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\ & + 4 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m C_k C_n \overset{\circ}{\Delta}_{C_k} \overset{\circ}{\Delta}_{C_n} \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\ & + \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m (\Delta_{C_k}^2 - M[\Delta_{C_k}^2]) (\Delta_{C_n}^2 - M[\Delta_{C_n}^2]) \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\ & + 4 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m C_k \overset{\circ}{\Delta}_{\beta_k} (\Delta_{\beta_n} \Delta_{C_n} - M[\Delta_{\beta_n} \Delta_{C_n}]) \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\ & + 4 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m C_k C_n \overset{\circ}{\Delta}_{\beta_k} \overset{\circ}{\Delta}_{C_n} \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\ & + 2 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m C_k \overset{\circ}{\Delta}_{\beta_k} (\Delta_{C_n}^2 - M[\Delta_{C_n}^2]) \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\ & + 4 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m (\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k} - M[\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k}]) C_n \overset{\circ}{\Delta}_{C_n} \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\ & + 2 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m (\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k} - M[\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k}]) (\Delta_{C_n}^2 - M[\Delta_{C_n}^2]) \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\ & + 2 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m C_k \overset{\circ}{\Delta}_{C_k} (\Delta_{C_n}^2 - M[\Delta_{C_n}^2]) \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Далее, для определения дисперсии, также как и в случае с оценкой случайной погрешности Δ_R , можно сделать предположение [13], что закон распределения Δ_{β_k} и Δ_{C_k} – нормальный, а также допустить некоррелированность $\overset{\circ}{\Delta}_{\beta_k}$ и $\overset{\circ}{\Delta}_{\beta_n}$, $\overset{\circ}{\Delta}_{C_k}$ и $\overset{\circ}{\Delta}_{C_n}$, $\overset{\circ}{\Delta}_{\beta_k}$ и $\overset{\circ}{\Delta}_{C_n}$: выражения (3.28), (3.29), (3.30).

Для определения дисперсии Δ_{R1} , с учетом предложенных допущений, а также используя выражения для определения моментов [55], можно воспользоваться выражением (2.31).

$$M \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\Delta}_{\beta_k} & \overset{\circ}{\Delta}_{\beta_n} \end{bmatrix} = \begin{cases} M \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\Delta}_{\beta_k}^2 \end{bmatrix}, k = n; \\ 0, k \neq n, \end{cases} \quad (3.28)$$

$$M \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\Delta}_{C_k} & \overset{\circ}{\Delta}_{C_n} \end{bmatrix} = \begin{cases} M \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\Delta}_{C_k}^2 \end{bmatrix}, k = n; \\ 0, k \neq n, \end{cases} \quad (3.29)$$

$$M \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\Delta}_{\beta_k} & \overset{\circ}{\Delta}_{C_n} \end{bmatrix} = \begin{cases} M \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\Delta}_{\beta_k} & \overset{\circ}{\Delta}_{C_k} \end{bmatrix}, k = n; \\ 0, k \neq n. \end{cases} \quad (3.30)$$

Если же нельзя определенно утверждать о некоррелированности случайных величин Δ_{β_k} и Δ_{β_n} , Δ_{C_k} и Δ_{C_n} , а также Δ_{β_k} и Δ_{C_n} , то дисперсия Δ_{R1} может быть определена по формуле (3.32).

$$\begin{aligned} D_{\Delta_{R1}} = & 4 \sum_{k=0}^m C_k^2 \sigma_{\Delta_{\beta_k}}^2 \|\psi_k\|^4 + 4 \sum_{k=0}^m C_k^2 \sigma_{\Delta_{C_k}}^2 \|\psi_k\|^4 + 4 \sum_{k=0}^m C_k^2 \sigma_{\Delta_{\beta_k}} \sigma_{\Delta_{C_k}} \rho_{\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k}} \|\psi_k\|^4 + \\ & + 4 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m M \left[\left(\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k} - M \left[\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k} \right] \right) \left(\Delta_{\beta_n} \Delta_{C_n} - M \left[\Delta_{\beta_n} \Delta_{C_n} \right] \right) \right] \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\ & + \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m M \left[\left(\Delta_{C_k}^2 - M \left[\Delta_{C_k}^2 \right] \right) \left(\Delta_{C_n}^2 - M \left[\Delta_{C_n}^2 \right] \right) \right] \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\ & + 4 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m C_k M \left[\overset{\circ}{\Delta}_{\beta_k} \left(\Delta_{\beta_n} \Delta_{C_n} - M \left[\Delta_{\beta_n} \Delta_{C_n} \right] \right) \right] \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\ & + 2 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m C_k M \left[\overset{\circ}{\Delta}_{\beta_k} \left(\Delta_{C_n}^2 - M \left[\Delta_{C_n}^2 \right] \right) \right] \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\ & + 4 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m C_n M \left[\left(\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k} - M \left[\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k} \right] \right) \overset{\circ}{\Delta}_{C_n} \right] \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\ & + 2 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m M \left[\left(\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k} - M \left[\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k} \right] \right) \left(\Delta_{C_n}^2 - M \left[\Delta_{C_n}^2 \right] \right) \right] \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\ & + 2 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m C_k M \left[\overset{\circ}{\Delta}_{C_k} \left(\Delta_{C_n}^2 - M \left[\Delta_{C_n}^2 \right] \right) \right] \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
D_{\Delta_{R1}} = & 4 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m C_k C_n \sigma_{\Delta_{\beta_k}} \sigma_{\Delta_{\beta_n}} \rho_{\Delta_{\beta_k} \Delta_{\beta_n}} \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\
& + 4 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m M \left[\left(\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k} - M \left[\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k} \right] \right) \left(\Delta_{\beta_n} \Delta_{C_n} - M \left[\Delta_{\beta_n} \Delta_{C_n} \right] \right) \right] \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\
& + 4 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m C_k C_n \sigma_{\Delta_{C_k}} \sigma_{\Delta_{C_n}} \rho_{\Delta_{C_k} \Delta_{C_n}} \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\
& + \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m M \left[\left(\Delta_{C_k}^2 - M \left[\Delta_{C_k}^2 \right] \right) \left(\Delta_{C_n}^2 - M \left[\Delta_{C_n}^2 \right] \right) \right] \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\
& + 4 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m C_k M \left[\overset{\circ}{\Delta}_{\beta_k} \left(\Delta_{\beta_n} \Delta_{C_n} - M \left[\Delta_{\beta_n} \Delta_{C_n} \right] \right) \right] \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\
& + 4 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m C_k C_n \sigma_{\Delta_{\beta_k}} \sigma_{\Delta_{C_n}} \rho_{\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_n}} \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\
& + 2 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m C_k M \left[\overset{\circ}{\Delta}_{\beta_k} \left(\Delta_{C_n}^2 - M \left[\Delta_{C_n}^2 \right] \right) \right] \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\
& + 4 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m C_n M \left[\left(\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k} - M \left[\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k} \right] \right) \overset{\circ}{\Delta}_{C_n} \right] \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\
& + 2 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m M \left[\left(\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k} - M \left[\Delta_{\beta_k} \Delta_{C_k} \right] \right) \left(\Delta_{C_n}^2 - M \left[\Delta_{C_n}^2 \right] \right) \right] \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 + \\
& + 2 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m C_k M \left[\overset{\circ}{\Delta}_{C_k} \left(\Delta_{C_n}^2 - M \left[\Delta_{C_n}^2 \right] \right) \right] \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

В ходе исследований были получены результаты определения погрешности аппроксимации структурных функций различного вида ортогональными функциями Лагерра, Лежандра и Дирихле в зависимости от числа членов разложения ряда m и параметра масштаба ортогональных функций α . Анализ этих результатов помог сделать вывод о том, что при постоянном значении числа членов разложения ряда, погрешность существенно зависит от параметра масштаба α . Также необходимо отметить, что безмерное увеличение числа членов разложения ряда m не приводит к уменьшению погрешности.

Проанализировать случайные составляющие Δ_R можно на примере популярных моделей центрированных структурных функций [46], представленных в таблицах 3.1 – 3.3, в которых также приведены выражения для определения коэффициентов разложения β_k , соответствующие приведенным моделям ЦСФ. В этих таблицах приняты следующие обозначения: λ, ω – параметры структурной функции; m_s – значение, относительно которого производится центрирование анализируемой структурной функции; $\varphi_1 = \arctg\left(\frac{\omega}{\lambda + \alpha/2}\right)$; $\varphi_2 = \arctg\left(\frac{\omega}{\lambda - \alpha/2}\right)$;

$$B_k = \frac{\alpha}{2\lambda + \alpha} \left(\frac{2\lambda - \alpha}{2\lambda + \alpha} \right)^k \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} \right)^k.$$

Используя полученные выражения, можно оценить погрешность вычисления коэффициентов разложения. Согласно методике, изложенной в РТМ 25139-74 [41], в качестве метрологической характеристики может выбираться максимальное значение модуля погрешностей оценки вида

$$\Delta = \max \left\{ \left| \Delta_j \right| \right\}, j = 1, \dots, M, \quad (3.33)$$

где M – число испытаний, зависящее от доверительной вероятности P_D . Например, если $P_D = 0,95$, то число испытаний равно 29, независимо от закона распределения погрешностей.

Таблица 3.1 – Коэффициенты разложения для моделей ЦСФ (Лагерра)

Вид модели $\overset{\circ}{S}_x$	β_k
$2[1 - e^{-\lambda \tau }] - m_s$	$2 \left((-1)^k (2 - m_s) - \frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \left(\frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^k \right)$
$2[1 - e^{-\lambda \tau } (1 + \lambda \tau)] - m_s$	$2 \left((-1)^k (2 - m_s) - \frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \left(\frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^{k-1} \cdot \left(\frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \cdot \frac{2\lambda + \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} - \frac{k\alpha\lambda}{\lambda + \alpha/2} \right) \right)$
$2[1 - e^{-\lambda \tau } (1 - \lambda \tau)] - m_s$	$2 \left((-1)^k (2 - m_s) - \frac{\alpha^2/2}{(\lambda + \alpha/2)^2} \left(\frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^{k-1} \cdot \left(\frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} + \frac{2k\lambda}{\lambda + \alpha/2} \right) \right)$
$2[1 - e^{-\lambda \tau } (1 + \lambda \tau + \lambda^2\tau^2/3)] - m_s$	$2 \left((-1)^k (2 - m_s) - \frac{4\alpha \cdot (2\lambda - \alpha)^{k-2}}{3 \cdot (2\lambda + \alpha)^{k+3}} \cdot \left[\alpha\lambda(3\alpha^2 - 28\lambda^2) \cdot (1 + 2k) + 2\alpha^2\lambda^2(4k(k+1) - 7) + 64\lambda^4 + \frac{3\alpha^4}{2} \right] \right)$
$2[1 - e^{-\lambda \tau } \cos(\omega\tau)] - m_s$	$2 \left((-1)^k (2 - m_s) - 2B_k \cos(\varphi_1) \cos(k\varphi_2 - (k+1)\varphi_1) \right)$
$2 \left[1 - e^{-\lambda \tau } \left(\cos(\omega\tau) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega\tau) \right) \right] - m_s$	$2 \left((-1)^k (2 - m_s) - 2B_k \cos(\varphi_1) (\cos(k\varphi_2 - (k+1)\varphi_1) - \frac{\lambda}{\omega} \sin(k\varphi_2 - (k+1)\varphi_1)) \right)$
$2 \left[1 - e^{-\lambda \tau } \left(\cos(\omega\tau) - \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega\tau) \right) \right] - m_s$	$2 \left((-1)^k (2 - m_s) - 2B_k \cos(\varphi_1) (\cos(k\varphi_2 - (k+1)\varphi_1) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(k\varphi_2 - (k+1)\varphi_1)) \right)$

Таблица 3.2 – Коэффициенты разложения для моделей ЦСФ (Лежандра)

Вид модели $\overset{\circ}{S}_x$	β_k
$2[1 - e^{-\lambda \tau }] - m_s$	$2 \left((2 - m_s) - 2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{1}{(2s+1)\alpha + \lambda} \right)$

Продолжение таблицы 3.2

Вид модели $\overset{\circ}{S}_x$	β_k
$2[1 - e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau)] - m_s$	$2\left((2 - m_s) - 2\alpha(2k + 1)\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{(2s + 1)\alpha + 2\lambda}{((2s + 1)\alpha + \lambda)^2}\right)$
$2[1 - e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau)] - m_s$	$2\left((2 - m_s) - 2\alpha(2k + 1)\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{(2s + 1)\alpha}{((2s + 1)\alpha + \lambda)^2}\right)$
$2[1 - e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau + \lambda^2\tau^2/3)] - m_s$	$2\left((2 - m_s) - 2\alpha(2k + 1)\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \cdot \frac{8\lambda^2 + 9\lambda(2s + 1)\alpha + 3(2s + 1)^2\alpha^2}{3((2s + 1)\alpha + \lambda)^3}\right)$
$2[1 - e^{-\lambda \tau }\cos(\omega\tau)] - m_s$	$2\left((2 - m_s) - 2\alpha(2k + 1)\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \cdot \frac{(2s + 1)\alpha + \lambda}{((2s + 1)\alpha + \lambda)^2 + \omega^2}\right)$
$2\left[1 - e^{-\lambda \tau }\left(\cos(\omega\tau) + \frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega\tau)\right)\right] - m_s$	$2\left((2 - m_s) - 2\alpha(2k + 1)\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \cdot \frac{(2s + 1)\alpha + 2\lambda}{((2s + 1)\alpha + \lambda)^2 + \omega^2}\right)$
$2\left[1 - e^{-\lambda \tau }\left(\cos(\omega\tau) - \frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega\tau)\right)\right] - m_s$	$2\left((2 - m_s) - 2\alpha(2k + 1)\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \cdot \frac{(2s + 1)\alpha}{((2s + 1)\alpha + \lambda)^2 + \omega^2}\right)$

Таблица 3.3 – Коэффициенты разложения для моделей ЦСФ (Дирихле)

Вид модели $\overset{\circ}{S}_x$	β_k
$2[1 - e^{-\lambda \tau }] - m_s$	$2\left((2 - m_s) - 2\alpha(k + 1)\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \frac{1}{(s + 1)\alpha + \lambda}\right)$
$2[1 - e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau)] - m_s$	$2\left((2 - m_s) - 2\alpha(k + 1)\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \frac{(s + 1)\alpha + 2\lambda}{((s + 1)\alpha + \lambda)^2}\right)$
$2[1 - e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau)] - m_s$	$2\left((2 - m_s) - 2\alpha(k + 1)\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \frac{(s + 1)\alpha}{((s + 1)\alpha + \lambda)^2}\right)$
$2[1 - e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau + \lambda^2\tau^2/3)] - m_s$	$2\left((2 - m_s) - 2\alpha(k + 1)\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \cdot \frac{8\lambda^2 + 9\lambda(s + 1)\alpha + 3(s + 1)^2\alpha^2}{3((s + 1)\alpha + \lambda)^3}\right)$

Вид модели $\overset{\circ}{S}_x$	β_k
$2[1 - e^{-\lambda \tau } \cos(\omega\tau)] - m_s$	$2 \left((2 - m_s) - 2\alpha(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \cdot \frac{(s+1)\alpha + \lambda}{((s+1)\alpha + \lambda)^2 + \omega^2} \right)$
$2 \left[1 - e^{-\lambda \tau } \left(\cos(\omega\tau) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega\tau) \right) \right] - m_s$	$2 \left((2 - m_s) - 2\alpha(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \cdot \frac{(s+1)\alpha + 2\lambda}{((s+1)\alpha + \lambda)^2 + \omega^2} \right)$
$2 \left[1 - e^{-\lambda \tau } \left(\cos(\omega\tau) - \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega\tau) \right) \right] - m_s$	$2 \left((2 - m_s) - 2\alpha(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \cdot \frac{(s+1)\alpha}{((s+1)\alpha + \lambda)^2 + \omega^2} \right)$

Таким образом, для оценки погрешности определения коэффициентов разложения β_k , а также для определения математического ожидания и дисперсии случайной составляющей Δ_R погрешности аппроксимации Δ , необходимо провести 29 экспериментов, целью которых будет определение оценок коэффициентов разложения $\hat{\beta}_k$.

Определение математического ожидания и дисперсии погрешности вычисления коэффициентов разложения для различных моделей ЦСФ, различных базисов, а также при различных количествах отсчетов генерируемых случайных процессов можно осуществить, выполняя следующую последовательность действий:

1. Выбор модели СП;
2. Определение количества отсчетов генерируемого СП $N=5000$;
3. Генерация процесса;
4. Определение количества ординат для вычисления СФ;
5. Вычисление СФ;
6. Выбор базиса Лагерра;
7. Вычисление оптимального параметра масштаба;
8. Вычисление оптимального числа членов разложения ряда;
9. Определение теоретических значений коэффициентов β_k ;
10. Аппроксимация структурной функции;
11. Занесение в память значений $\hat{\beta}_k$;
12. Генерация процесса;
13. Вычисление структурной функции процесса;
14. Аппроксимация структурной функции;
15. Занесение в память значений $\hat{\beta}_k$;

16. Повторение действий 12-15 27 раз;
17. Вычисление МО и дисперсии погрешности оценки коэффициентов разложения;
18. Повторение действий 7-17 для базисов Лежандра и Дирихле;
19. Повторение действий 3-18 для $N=2000$ и $N=1000$;
20. Повторение действий 2-19 для других моделей ЦСФ.

Нетрудно заметить, что последовательность предполагает множество однотипных операций. Чтобы не вычислять все оценки, последовательно выполняя пункты алгоритма вручную, можно воспользоваться подсистемой экспериментальных исследований, входящей в состав разработанной в ходе данной работы автоматизированной системы структурно-спектрального анализа случайных процессов. Подробная информация по работе с данной системой и упомянутой выше подсистемой будет приведена в следующей главе. Данная подсистема позволяет составить в определенном порядке выполнение любых операций, которые доступны пользователю в диалоговом режиме, и, к тому же, осуществлять их реализацию без его участия, в дальнейшем. На рисунке 3.1. приведена схема, соответствующая описанной выше последовательности действий, позволяющая получить оценки МО и дисперсий.

После завершения выполнения действий эксперимента все оценки будут находиться в базе данных разработанного программного комплекса (программный комплекс описан в главе 4). Подсистема работы с базой данных, в свою очередь, также имеет инструменты анализа содержащихся в ней данных. Эти инструменты позволяют получить доступ к различным полям в хранящихся записях и производить с их значениями различные арифметические и логические операции (если поля, конечно, содержат численные значения).

С помощью подсистемы экспериментальных исследований и описанных инструментов были получены значения интересующих оценок математических ожиданий Δ_R и среднеквадратических отклонений Δ_R для различных моделей ЦСФ, различных базисов и при нескольких объемах выборки случайного процесса. Результаты представлены в таблицах 3.4 – 3.17.

При вычислениях использовались выражения, в которых предварительно вводились допущения о некоррелированности Δ_{β_k} и Δ_{β_n} . Теперь, имея полученные оценки коэффициентов $\hat{\beta}_k$, можно оценить целесообразность применения этих выражений (например, выражение (3.32)). В таблицах 3.18 – 3.19 представлены корреляционные матрицы, значения для которых определяются следующим выражением:

$$\rho_{\Delta_{\beta_k} \Delta_{\beta_n}} = M[(\Delta_{\beta_k} - M[\Delta_{\beta_k}])(\Delta_{\beta_n} - M[\Delta_{\beta_n}])]. \quad (3.34)$$

В таблицах 3.18 и 3.19 представлены значения $\rho_{\Delta_{\beta_k} \Delta_{\beta_n}}$ для двух моделей ЦСФ, одна из которых является колебательной. Учитывая представленные в этих таблицах значения коэффициентов корреляции, можно с уверенностью сказать, что применять выражения, учитывающие коррелированность Δ_{β_k} и Δ_{β_n} , не имеет смысла. Корреляционные матрицы для остальных, уже рассматривае-

мых выше, моделей ЦСФ имеют схожий вид: во всех случаях наблюдается очень слабая корреляция между $\Delta\beta_k$ и $\Delta\beta_n$, когда $k \neq n$.

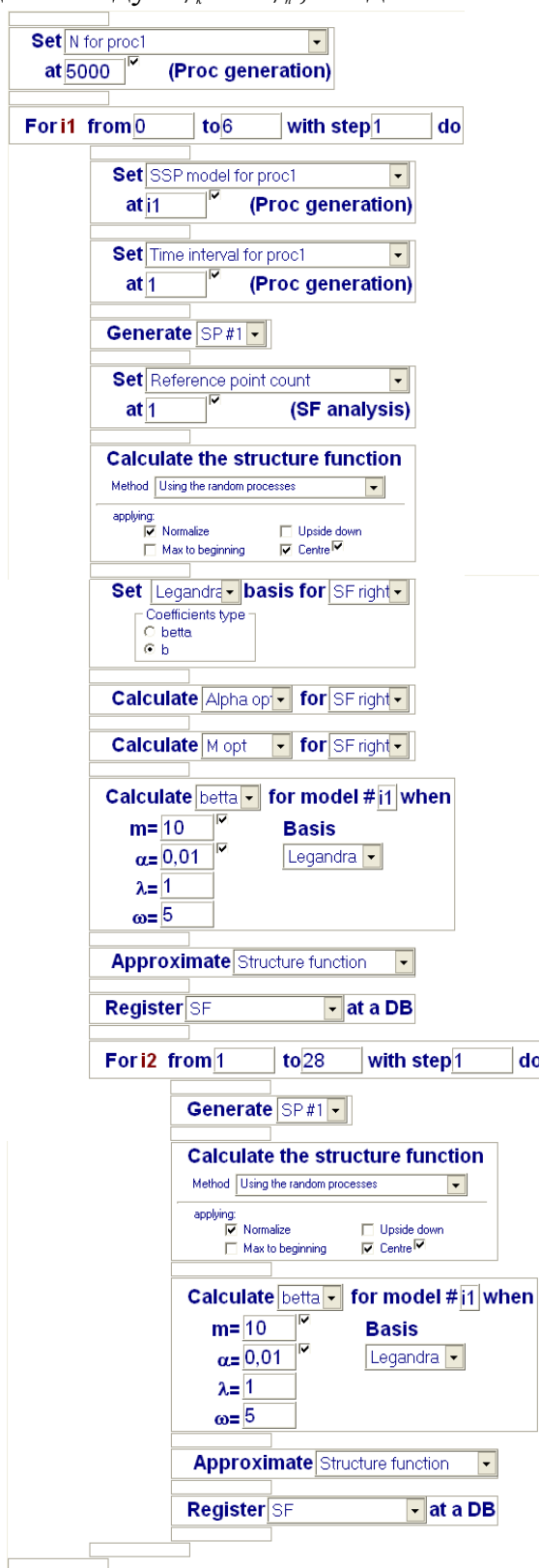


Рисунок 3.1 – Алгоритм эксперимента, составленный в подсистеме экспериментальных исследований разработанной автоматизированной системы

Таблица 3.4 – МО погрешности Δ_R

$$(\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}] - m_s)$$

Базис \ N	5000	2000	1000
Лагерра	0,0015	0,0021	0,0028
Лежандра	0,0009	0,0013	0,0029
Дирихле	0,0011	0,0022	0,0039

Таблица 3.5 – МО погрешности Δ_R

$$(\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau|)] - m_s)$$

Базис \ N	5000	2000	1000
Лагерра	0,0024	0,0035	0,0045
Лежандра	0,0023	0,0039	0,0047
Дирихле	0,0022	0,0029	0,0046

Таблица 3.6 – МО погрешности Δ_R

$$(\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(1 - \lambda|\tau|)] - m_s)$$

Базис \ N	5000	2000	1000
Лагерра	0,0012	0,0029	0,0035
Лежандра	0,0011	0,0024	0,0033
Дирихле	0,0012	0,0018	0,0031

Таблица 3.7 – МО погрешности Δ_R

$$(\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau| + \lambda^2\tau^2/3)] - m_s)$$

Базис \ N	5000	2000	1000
Лагерра	0,0018	0,0031	0,0065
Лежандра	0,0011	0,0037	0,0052
Дирихле	0,0013	0,0029	0,0059

Таблица 3.8 – МО погрешности Δ_R

$$(\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}\cos(\omega\tau)] - m_s)$$

Базис \ N	5000	2000	1000
Лагерра	0,0012	0,0034	0,0065
Лежандра	0,0016	0,0038	0,0069
Дирихле	0,0018	0,0031	0,0068

Таблица 3.9 – МО погрешности Δ_R

$$(\dot{S}_x(\tau) = 2\left[1 - e^{-\lambda|\tau|}\left(\cos(\omega\tau) + \frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega\tau)\right)\right] - m_s)$$

Базис \ N	5000	2000	1000
Лагерра	0,0013	0,0039	0,0059
Лежандра	0,0011	0,0029	0,0049
Дирихле	0,0018	0,0032	0,0065

Таблица 3.10 – МО погрешности Δ_R

$$(\dot{S}_x(\tau) = 2\left[1 - e^{-\lambda|\tau|}\left(\cos(\omega\tau) - \frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega\tau)\right)\right] - m_s)$$

Базис \ N	5000	2000	1000
Лагерра	0,0017	0,0039	0,0045
Лежандра	0,0011	0,0038	0,0052
Дирихле	0,0013	0,0039	0,0059

Таблица 3.11 – СКО погрешности

$$\Delta_R (\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}] - m_s)$$

Базис \ N	5000	2000	1000
Лагерра	0,0003	0,0004	0,0006
Лежандра	0,0002	0,0004	0,0005
Дирихле	0,0003	0,0005	0,0007

Таблица 3.12 – СКО погрешности

$$\Delta_R (\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau|)] - m_s)$$

Базис \ N	5000	2000	1000
Лагерра	0,0002	0,0004	0,0005
Лежандра	0,0004	0,0007	0,0009
Дирихле	0,0003	0,0006	0,0008

Таблица 3.13 – СКО погрешности

$$\Delta_R (\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(1 - \lambda|\tau|)] - m_s)$$

Базис \ N	5000	2000	1000
Лагерра	0,0003	0,0004	0,0006
Лежандра	0,0003	0,0006	0,0007
Дирихле	0,0002	0,0005	0,0006

Таблица 3.14 – СКО погрешности Δ_R

$$(\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau| + \lambda^2\tau^2/3)] - m_s)$$

Базис \ N	5000	2000	1000
Лагерра	0,0002	0,0005	0,0006
Лежандра	0,0002	0,0006	0,0008
Дирихле	0,0003	0,0004	0,0006

Таблица 3.15 – СКО погрешности

$$\Delta_R (\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|} \cos(\omega\tau)] - m_s)$$

Базис \ N	5000	2000	1000
Лагерра	0,0003	0,0008	0,0009
Лежандра	0,0004	0,0008	0,0009
Дирихле	0,0006	0,0007	0,0008

Таблица 3.16 – СКО погрешности Δ_R

$$(\dot{S}_x(\tau) = 2\left[1 - e^{-\lambda|\tau|}\left(\cos(\omega\tau) + \frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega\tau)\right)\right] - m_s)$$

Базис \ N	5000	2000	1000
Лагерра	0,0002	0,0004	0,0007
Лежандра	0,0002	0,0005	0,0007
Дирихле	0,0003	0,0007	0,0009

Таблица 3.17 – СКО погрешности Δ_R

$$(\dot{S}_x(\tau) = 2\left[1 - e^{-\lambda|\tau|}\left(\cos(\omega\tau) - \frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega\tau)\right)\right] - m_s)$$

Базис \ N	5000	2000	1000
Лагерра	0,0003	0,0004	0,0006
Лежандра	0,0002	0,0004	0,0005
Дирихле	0,0003	0,0005	0,0007

Таблица 3.18 – Корреляционные моменты $\rho_{\Delta\beta_k\Delta\beta_n}$

$$(\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau|)] - m_s)$$

k \ n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	-0,001	-0,081	0,016	0,006	-0,002	-0,001	0,004
1	-0,001	1	-0,004	-0,005	-0,028	0,072	0,084	-0,003
2	-0,081	-0,004	1	-0,001	-0,014	0,014	-0,001	0,017
3	0,016	-0,005	-0,001	1	-0,01	-0,091	0,076	-0,005
4	0,006	-0,028	-0,014	-0,01	1	-0,001	0,012	0,002
5	-0,002	0,072	0,014	-0,091	-0,001	1	-0,007	-0,002
6	-0,001	0,084	-0,001	0,076	0,012	-0,007	1	-0,01
7	0,004	-0,003	0,017	-0,005	0,002	-0,002	-0,01	1

Таблица 3.19 – Корреляционные моменты $\rho_{\Delta_{\beta_k} \Delta_{\beta_n}}$

$$(\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|} \cos(\omega\tau)] - m_s)$$

$\begin{smallmatrix} n \\ \backslash k \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	-0,001	-0,005	0,022	-0,013	-0,007	0,075	0,011	-0,014	-0,001	0,004	-0,023	-0,003	0,049	-0,007	-0,005
1	-0,001	1	-0,045	-0,046	0,082	-0,006	0,061	-0,001	0,013	0,006	-0,022	0,03	-0,011	-0,017	0,023	-0,003
2	-0,005	-0,045	1	-0,012	0,013	0,011	-0,001	0,097	-0,001	0,013	-0,035	-0,022	0,039	-0,022	-0,019	0,004
3	0,022	-0,046	-0,012	1	-0,006	-0,029	0,008	-0,008	0,01	-0,014	0,095	0,093	-0,029	0,003	0,003	-0,003
4	-0,013	0,082	0,013	-0,006	1	-0,088	0,086	0,01	-0,017	0,018	-0,011	-0,003	0,02	-0,003	0,017	0,011
5	-0,007	-0,006	0,011	-0,029	-0,088	1	-0,007	-0,002	0,094	-0,091	0,005	-0,028	-0,009	0,069	-0,001	0,009
6	0,075	0,061	-0,001	0,008	0,086	-0,007	1	-0,007	0,002	0,028	-0,071	0,012	-0,001	0,004	0,001	-0,002
7	0,011	-0,001	0,097	-0,008	0,01	-0,002	-0,007	1	-0,012	0,007	0,053	-0,002	0,017	-0,007	-0,069	0,016
8	-0,014	0,013	-0,001	0,01	-0,017	0,094	0,002	-0,012	1	-0,008	-0,061	0,01	-0,013	0,07	0,004	-0,001
9	-0,001	0,006	0,013	-0,014	0,018	-0,091	0,028	0,007	-0,008	1	-0,005	-0,05	0,014	-0,001	0,002	0,095
10	0,004	-0,022	-0,035	0,095	-0,011	0,005	-0,071	0,053	-0,061	-0,005	1	-0,084	-0,02	0,001	-0,014	0,002
11	-0,023	0,03	-0,022	0,093	-0,003	-0,028	0,012	-0,002	0,01	-0,05	-0,084	1	-0,081	-0,016	0,01	-0,094
12	-0,003	-0,011	0,039	-0,029	0,02	-0,009	-0,001	0,017	-0,013	0,014	-0,02	-0,081	1	-0,066	-0,027	0,01
13	0,049	-0,017	-0,022	0,003	-0,003	0,069	0,004	-0,007	0,07	-0,001	0,001	-0,016	-0,066	1	-0,006	-0,004
14	-0,007	0,023	-0,019	0,003	0,017	-0,001	0,001	-0,069	0,004	0,002	-0,014	0,01	-0,027	-0,006	1	-0,004
15	-0,005	-0,003	0,004	-0,003	0,011	0,009	-0,002	0,016	-0,001	0,095	0,002	-0,094	0,01	-0,004	-0,004	1

3.2 Анализ результатов аппроксимации структурных функций ортогональными функциями Лагерра, Лежандра и Дирихле с учетом применения оценок коэффициентов разложения

В результате проведенного эксперимента, описанного в предыдущем разделе, также были посчитаны средние значения оценок коэффициентов разложения $M[\hat{\beta}_k]$ для различных базисов и моделей ЦСФ, и вычислены отклонения $\beta_k - M[\hat{\beta}_k]$. Результаты отображены на рисунках 3.2 – 3.22.

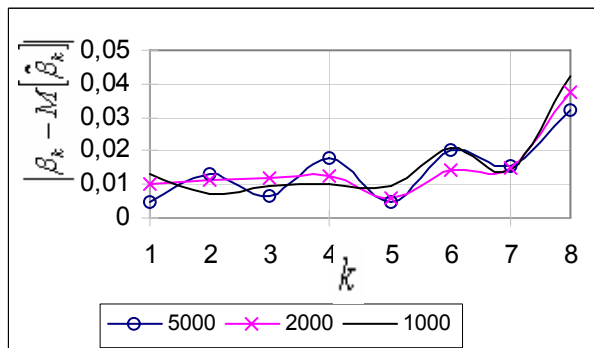


Рисунок 3.2 – Отклонение оценок (Лагерра, $\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}] - m_s$)

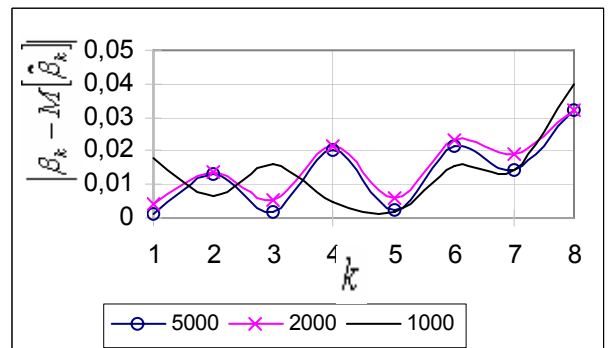


Рисунок 3.3 – Отклонение оценок (Лагерра, $\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau|)] - m_s$)

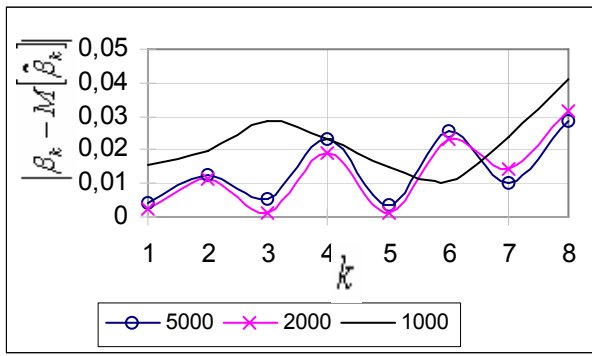


Рисунок 3.4 – Отклонение оценок (Лагер-
ра, $\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(1 - \lambda|\tau|)] - m_s$)

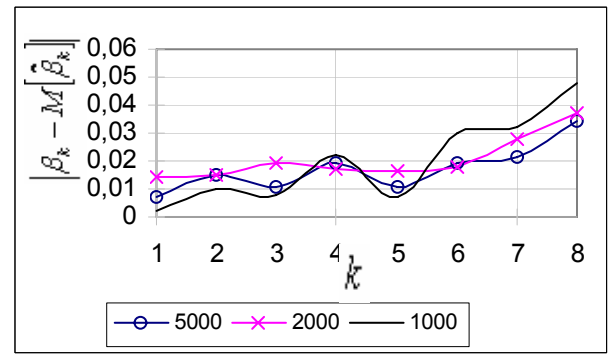


Рисунок 3.5 – Отклонение оценок (Лагер-
ра, $\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau| + \lambda^2\tau^2/3)] - m_s$)

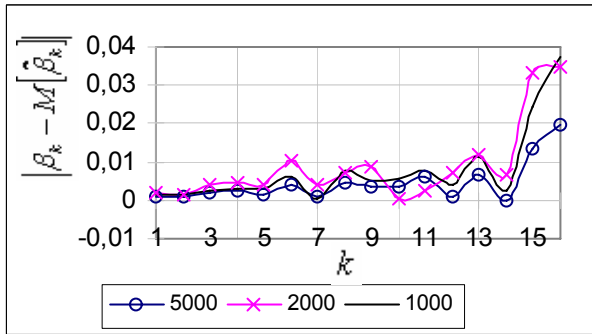


Рисунок 3.6 – Отклонение оценок (Лагер-
ра, $\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|} \cos(\omega\tau)] - m_s$)

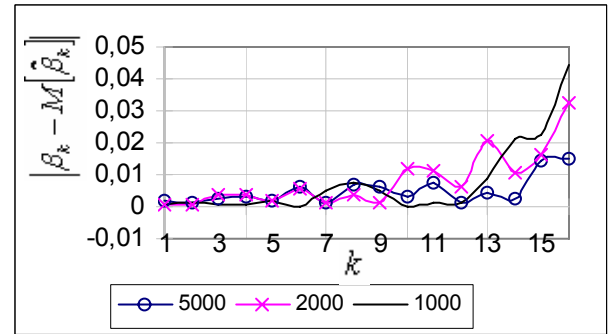


Рисунок 3.7 – Отклонение оценок (Лагер-
ра, $\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(\cos(\omega\tau) + \frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega\tau))] - m_s$)

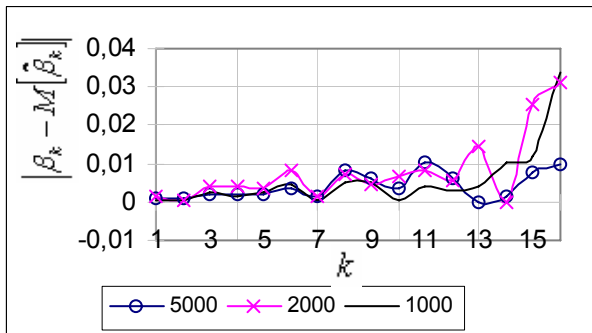


Рисунок 3.8 – Отклонение оценок (Лагер-
ра, $\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(\cos(\omega\tau) - \frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega\tau))] - m_s$)

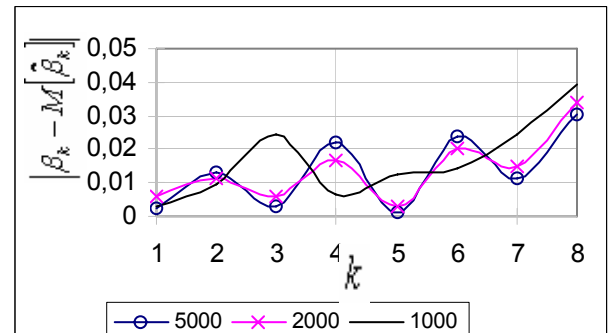


Рисунок 3.9 – Отклонение оценок (Лежан-
дра, $\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}] - m_s$)

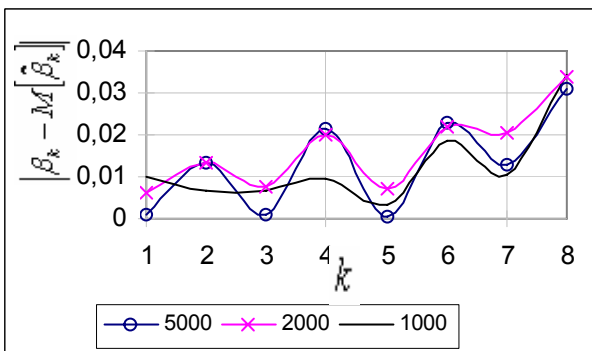


Рисунок 3.10 – Отклонение оценок (Ле-
жандра, $\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau|)] - m_s$)

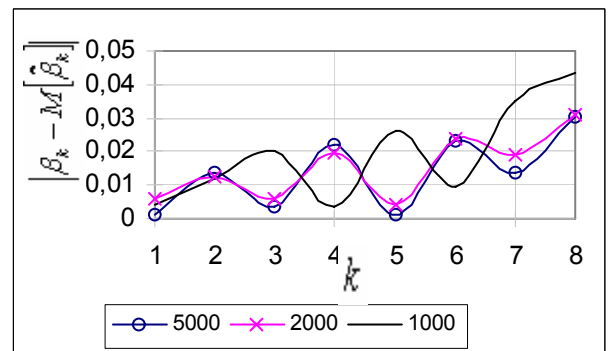


Рисунок 3.11 – Отклонение оценок (Ле-
жандра, $\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(1 - \lambda|\tau|)] - m_s$)

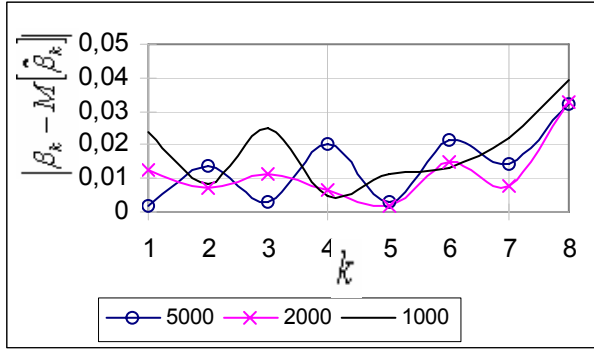


Рисунок 3.12 – Отклонение оценок (Лежандра, $\hat{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau| + \lambda^2\tau^2/3)] - m_s$)

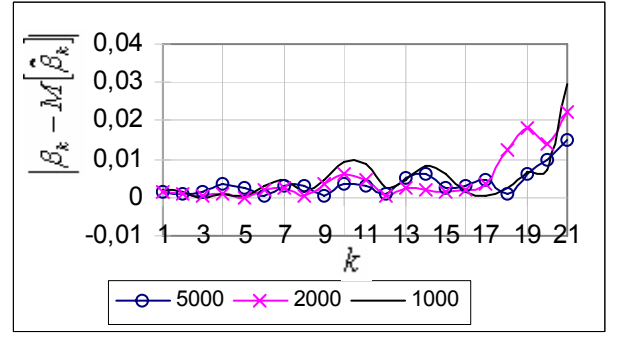


Рисунок 3.13 – Отклонение оценок (Лежандра, $\hat{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|} \cos(\omega\tau)] - m_s$)

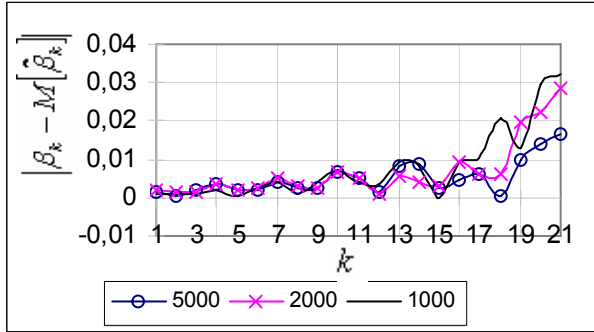


Рисунок 3.14 – Отклонение оценок (Лежандра, $\hat{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(\cos(\omega\tau) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega\tau))] - m_s$)

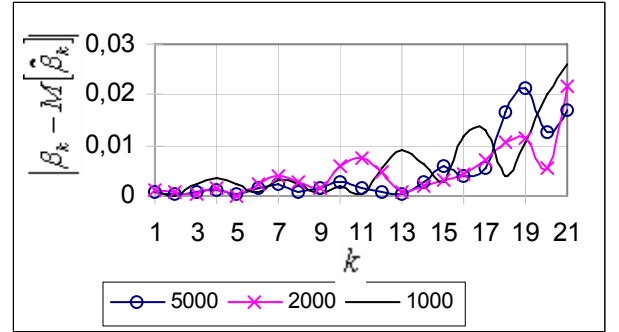


Рисунок 3.15 – Отклонение оценок (Лежандра, $\hat{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(\cos(\omega\tau) - \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega\tau))] - m_s$)

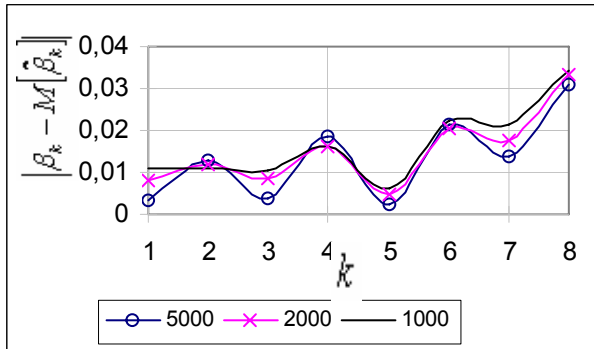


Рисунок 3.16 – Отклонение оценок (Дирихле, $\hat{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}] - m_s$)

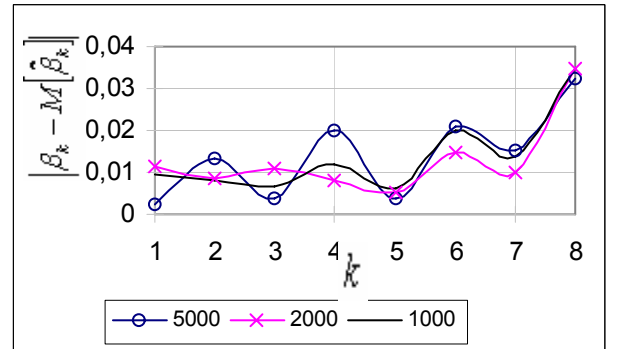


Рисунок 3.17 – Отклонение оценок (Дирихле, $\hat{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau|)] - m_s$)

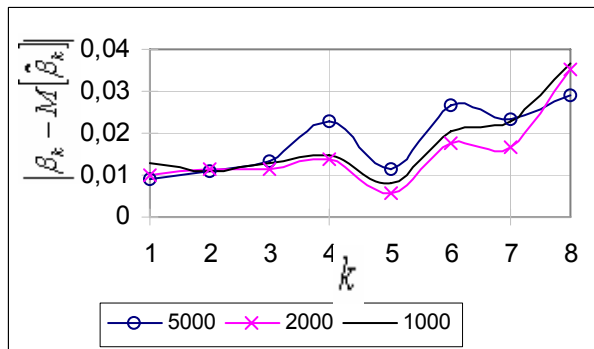


Рисунок 3.18 – Отклонение оценок (Дирихле, $\hat{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(1 - \lambda|\tau|)] - m_s$)

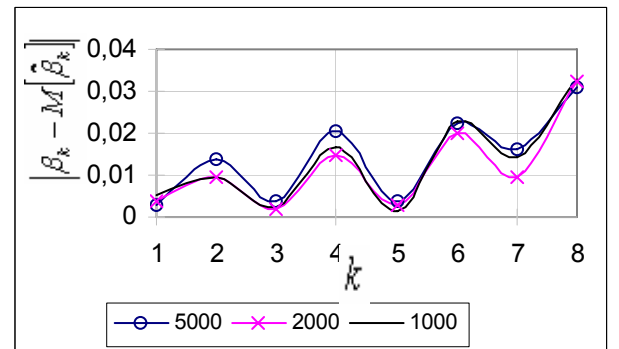


Рисунок 3.19 – Отклонение оценок (Дирихле, $\hat{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau| + \lambda^2\tau^2/3)] - m_s$)

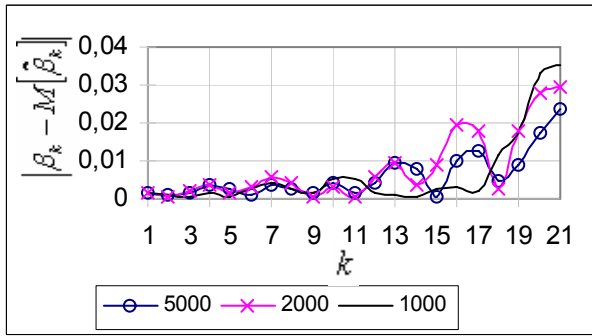


Рисунок 3.20 – Отклонение оценок (Дирихле, $\dot{S}_x(\tau) = 2[1 - e^{-\lambda|\tau|} \cos(\omega\tau)] - m_s$)

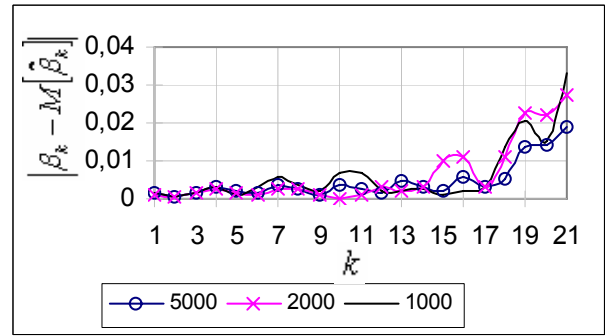


Рисунок 3.21 – Отклонение оценок (Дирихле, $\dot{S}_x(\tau) = 2\left[1 - e^{-\lambda|\tau|}\left(\cos(\omega\tau) + \frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega\tau)\right)\right] - m_s$)

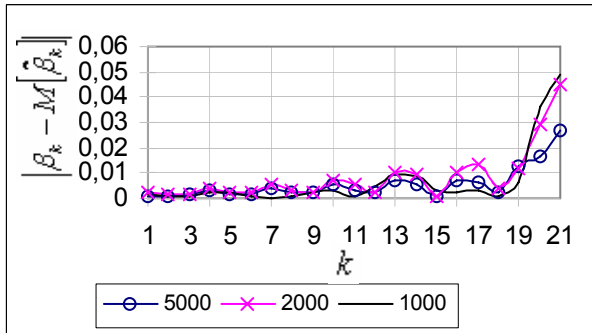


Рисунок 3.22 – Отклонение оценок (Дирихле, $\dot{S}_x(\tau) = 2\left[1 - e^{-\lambda|\tau|}\left(\cos(\omega\tau) - \frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega\tau)\right)\right] - m_s$)

Анализируя графики, представленные на рисунках 3.2 – 3.22, можно отметить, что независимо от того, с помощью каких ортогональных функций (Лагерра, Лежандра или Дирихле) производится аппроксимация, при различных количествах реализаций случайного процесса N погрешность определения коэффициентов разложения Δ_{β_k} возрастает с увеличением порядка ортогональной

функции k (причем, нет существенных отличий для всех использованных моделей ЦСФ).

В свою очередь, коэффициенты разложения β_k должны обеспечивать минимум квадратической погрешности аппроксимации (2.5), которая при $m \rightarrow \infty$ стремится к нулю [56] (рисунок 3.23).

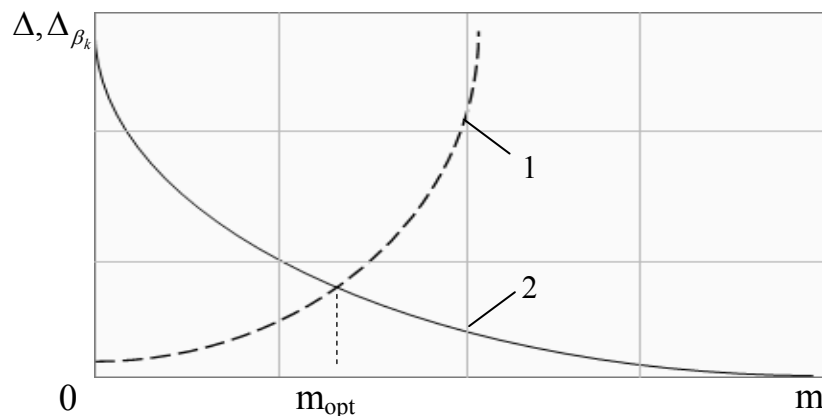


Рисунок 3.23 – Оптимальное число членов разложения ряда:

- 1 – погрешность вычисления коэффициентов разложения;
- 2 – квадратическая погрешность аппроксимации

Из рисунка 3.23 видно, что существует оптимальное число членов разложения ряда m_{opt} , при котором результирующая погрешность аппроксимации, включающая квадратическую погрешность аппроксимации и погрешность вычисления коэффициентов разложения, минимальна. Таким образом, использо-

вание численных методов в вычислении определенных интегралов не позволяет добиться выполнения равенства Парсеваля [58], согласно которому результирующая погрешность аппроксимации уменьшается с увеличением числа членов разложения ряда m .

В работе [66] описан численно-аналитический подход к вычислению интегралов при построении ортогональных моделей. Данный подход можно применить и к определению коэффициентов разложения ряда, представляющего ортогональную модель структурной функции.

На рисунке 3.24 приведена ортогональная модель СФ, характеризующаяся числом членов разложения $m = 30$ как для правой, так и для левой частей. Левая часть ортогональной модели СФ построена с применением численных методов при определении коэффициентов разложения (при этом погрешность аппроксимации составила $\delta = 0.081$), а правая часть определена с помощью методов из работы [66] ($\delta = 0.007$), которые позволяют добиться выполнения равенства Парсеваля [58]. Пример использования численно-аналитического подхода к вычислению коэффициентов разложения ряда, представляющего ортогональную модель структурной функции, приведен в приложении 3 (реализация в математическом пакете Mathcad).

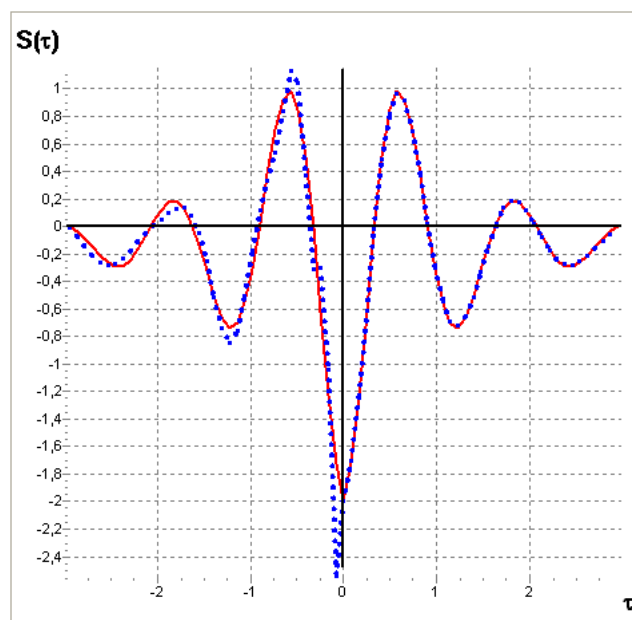


Рисунок – 3.24 Смещенная СФ (сплошная линия) и ее ортогональная модель (пунктирная линия)

3.3 Анализ методов вычисления спектральной плотности мощности случайного процесса

В данной работе в основном уделяется внимание таким характеристикам временных рядов, как структурная функция и спектральная плотность мощности. Более распространенной и изученной является СПМ, а одним из самых популярных методов ее определения является преобразование Фурье [9, 26, 27]. Проведено сравнительное рассмотрение двух методов вычисления спектральной плотности мощности – быстрое преобразование Фурье и вычисление СПМ по ортогональной модели структурной функции случайного процесса [62].

В случае определения спектра $g_X(\omega)$ с помощью прямого ПФ неявно предполагается, что сигнал $X(t)$ задан на бесконечном интервале.

Если бы на практике интервал наблюдения действительно был таковым, ПФ давало бы точную оценку спектра [28]:

$$g_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (3.35)$$

В случае конечного интервала

$$g_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi k}{N}}, \quad (3.36)$$

где n – номер гармоники; k – индекс отсчета сигнала (от 0 до $N-1$). При этом временной ряд, подвергаемый прямому ПФ, является всего лишь частью сигнала, который существует в действительности, то есть преобразованию подвергается не сигнал, существующий на самом деле, а сигнал, составленный из повторенной бесконечное число раз упомянутой части. Данное обстоятельство обуславливает стыки на краях частей, избавляющиеся от которых применением сглаживающих окон [14, 17, 26, 27, 28], что, в свою очередь, требует существенного количества априорной информации об анализируемом сигнале, с дефицитом которой обычно сталкиваются исследователи на практике (в таблице 3.20 представлена информация о наиболее часто используемых сглаживающих окнах, более подробную информацию о которых можно найти в работе [28]).

Определение спектра в этом случае проводится после перемножения исходного сигнала на весовую функцию W_k , то есть выражение (3.36) примет вид:

$$g_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k W_k e^{-j\frac{2\pi k}{N}}. \quad (3.37)$$

Выбор окна – немаловажная проблема, так как его неверный выбор может привести к результату, абсолютно расходящемуся с действительностью [15, 46, 55]. Получается, что при кажущейся, на первый взгляд, простоте прямого ПФ, существует множество нюансов [9, 14, 26, 27, 28], не учитывая которые анализ сигнала будет некорректным.

Таблица 3.20 – Сглаживающие окна

Вид окна	Аналитическое выражение окна, W_k	Характеристики окна
Прямоугольное	1	Очень узкий основной лепесток, хорошее частотное разрешение, плохое амплитудное разрешение, хорошее подавление белого шума
Блэкмана	$0.42 - 0.5 \cos(2\pi k/N) + 0.08 \sin(4\pi k/N)$	Широкий основной лепесток, заметный спад боковых лепестков, хорошее амплитудное разрешение
Хэннинга	$0.5(1 - \cos(2\pi k/N))$	Достаточно широкий входной лепесток, быстрый спад боковых лепестков

Продолжение таблицы 3.20

Вид окна	Аналитическое выражение окна, W_k	Характеристики окна
Хэмминга	$0.54 - 0.46 \cos(2\pi k/N)$	Умеренно широкий основной лепесток, постоянный уровень боковых лепестков
С плоской вершиной	$0.281 - 0.521 \cos(2\pi k/N) + 0.198 \sin(4\pi k/N)$	Размытые пики, хорошее разрешение по амплитуде, плохое разрешение по частоте

Другой метод определения СПМ, рассматриваемый в данной работе, основан на определении СПМ не напрямую по сигналу, а по его СФ, точнее по аппроксимации его СФ [26, 46, 57]. Важной особенностью данного метода является получение аналитической (ортогональной) модели СПМ, а значит и все остальные характеристики сигнала, связанные функционально с СПМ и СФ, могут определяться аналитически [59], то есть вычисления будут производиться значительно проще и быстрее, нежели численными методами.

Наличие ортогональной модели СФ дает ряд преимуществ:

- отсутствие необходимости хранить отсчеты СФ;
- задавать шаг дискретизации функциональных характеристик;
- производить вычисления, имея минимум временных затрат, так как при этом не используются численные методы, и, к тому же, уменьшать количество составляющих погрешности вычислений;
- получать аналитические выражения характеристик, функционально связанных с моделью.

Особенно ценна именно последняя особенность данного метода. Примером ее наглядного представления может служить определение одной из мер частотного анализа – спектральной функции [42] (другое ее название – спектральная мера [14]):

$$G_X(\omega) = \int_0^{\omega} g_X(\omega) d\omega, \quad (3.38)$$

где $g_X(\omega)$ – спектральная плотность мощности, которая может быть выражена через ортогональную модель структурной функции [46]:

$$g_X(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \sum_{k=0}^m \beta_k \int_0^{\infty} \sin(\omega\tau) \frac{\partial \psi_k(\tau, \alpha)}{\partial \tau} d\tau, \quad (3.39)$$

где β_k – коэффициенты разложения структурной функции; $\psi_k(\tau, \alpha)$ – семейство базисных функций; m – число членов разложения; α – параметр масштаба базисных функций.

Далее подстановкой (3.39) в (3.38), в зависимости от используемого ортогонального базиса [46], спектральная функция определяется по выражениям, представленным в таблице 3.21. Переход от спектральной плотности мощности к спектральной функции позволяет получить ряд преимуществ: определение мощности процесса в заданном диапазоне частот $G(\omega_1, \omega_2) = G_X(\omega_2) - G_X(\omega_1)$, а так-

же аналитическое определение эквивалентной ширины спектра. Вычисление спектральной функции случайных процессов по аппроксимации структурной функции характеризуется применимостью данного метода к случайным процессам со стационарными приращениями.

Из таблицы 3.21 видно, что определение спектральной функции в случае ортогональной модели Лагерра структурной функции обладает значительным преимуществом – отсутствие в нем необходимости вычисления факториалов.

Таблица 3.21 – Спектральные функции

Базис	Аналитическое выражение $G_X(\omega)$
Лагерра	$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \left[\sum_{s=1}^k (-1)^{s+1} \frac{\sin(2s\varphi)}{s} - \varphi \right],$ где $\varphi = \arctg\left(\frac{2\omega}{\alpha}\right)$
Лежандра	$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \sum_{s=0}^k (-1)^{s+1} C_{k+s}^s C_k^s \arctg\left[\frac{\omega}{(2s+1)\alpha}\right]$
Дирихле	$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s+1} C_{k+s+1}^{s+1} C_k^s \arctg\left[\frac{\omega}{(s+1)\alpha}\right]$

Это свойство, во-первых, позволяет вычислять ортогональную модель структурной функции очень высоких порядков (сотни членов разложения ряда, тогда как для Лежандра, Дирихле это число обычно ограничивается двадцатью), а, во-вторых, производится меньшее количество операций, что приводит к увеличению скорости вычисления спектральной функции. Примеры определения спектральных функций в различных базисах для одного процесса приведены на рисунке 3.25.

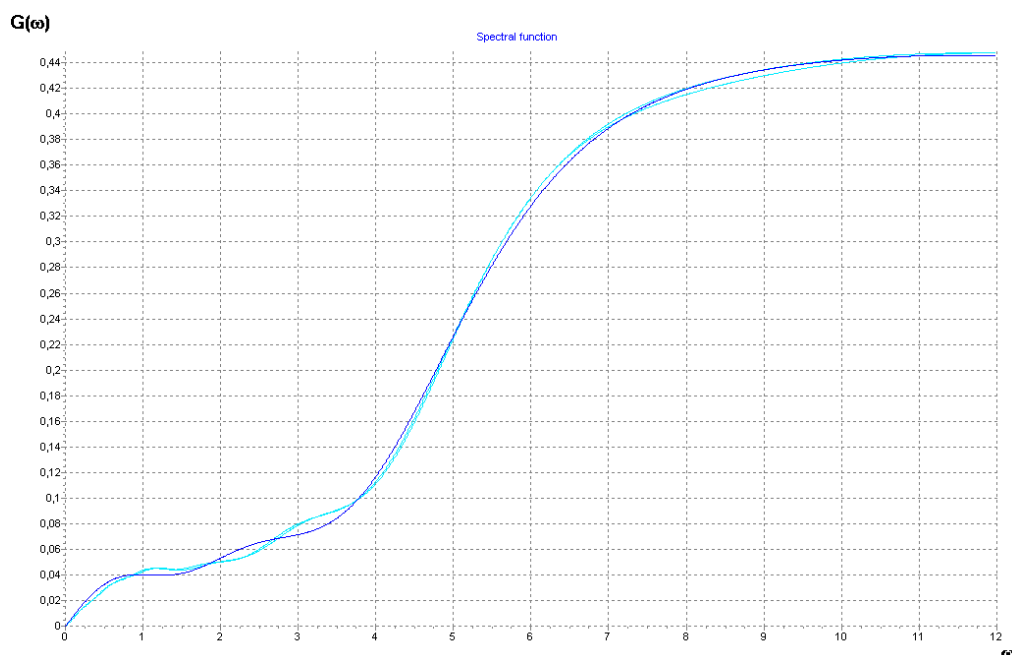


Рисунок 3.25 – Спектральные функции

Таким образом, при своей неоспоримой эффективности спектральный анализ требует аккуратной настройки множества параметров в зависимости от конкретной задачи и специфики анализируемых сигналов (таблица 3.22), а для правильной интерпретации результатов нужен еще и некоторый практический опыт.

Таблица 3.22 – Характеристики методов вычисления СПМ

Особенность вычисления	БПФ	по ОМ СФ
Возможность изменения шага дискретизации по частоте	Требуется модифицирование самого временного ряда	Доступно
Аналитическая модель по результатам вычислений	Недоступно	Доступно
Основные этапы вычисления	1. Непосредственное вычисление СПМ по временному ряду 2. Применение сглаживающих фильтров	1. Вычисление ортогональной модели СФ, вычисленной по временному ряду 2. Вычисление СПМ по ортогональной модели СФ

В таблице 3.22 приведены основные сравнительные характеристики рассмотренных методов вычисления СПМ: БПФ (быстрое преобразование Фурье – метод вычисления прямого ПФ [14, 26, 27, 28]) и косвенный метод, основанный на определении ортогональной модели СФ и дальнейшем вычислении СПМ уже по полученной модели.

4 Комплекс программных средств для аппроксимативного анализа структурно-спектральных характеристик временных рядов

4.1 Описание программного комплекса

Разработанные алгоритмы аппроксимативного структурно-спектрального анализа реализованы в автоматизированной системе [22, 23, 24, 47, 48, 60, 67], реализующей функции, приведенные на рисунке 4.1.



Рисунок 4.1 – Функции автоматизированной системы

Далее функции разделяются по подсистемам:

- моделирования случайных процессов;
- предобработки случайных процессов;
- аппроксимативного структурного анализа;
- аппроксимативного анализа спектральной плотности мощности;
- анализа спектральной функции;
- экспериментальных исследований.

Структурная схема автоматизированной системы приведена на рисунке 4.2. Программно предоставляемые пользователю сервисы сгруппированы по страницам, содержащим необходимый набор компонентов, обеспечивающих интерфейс.

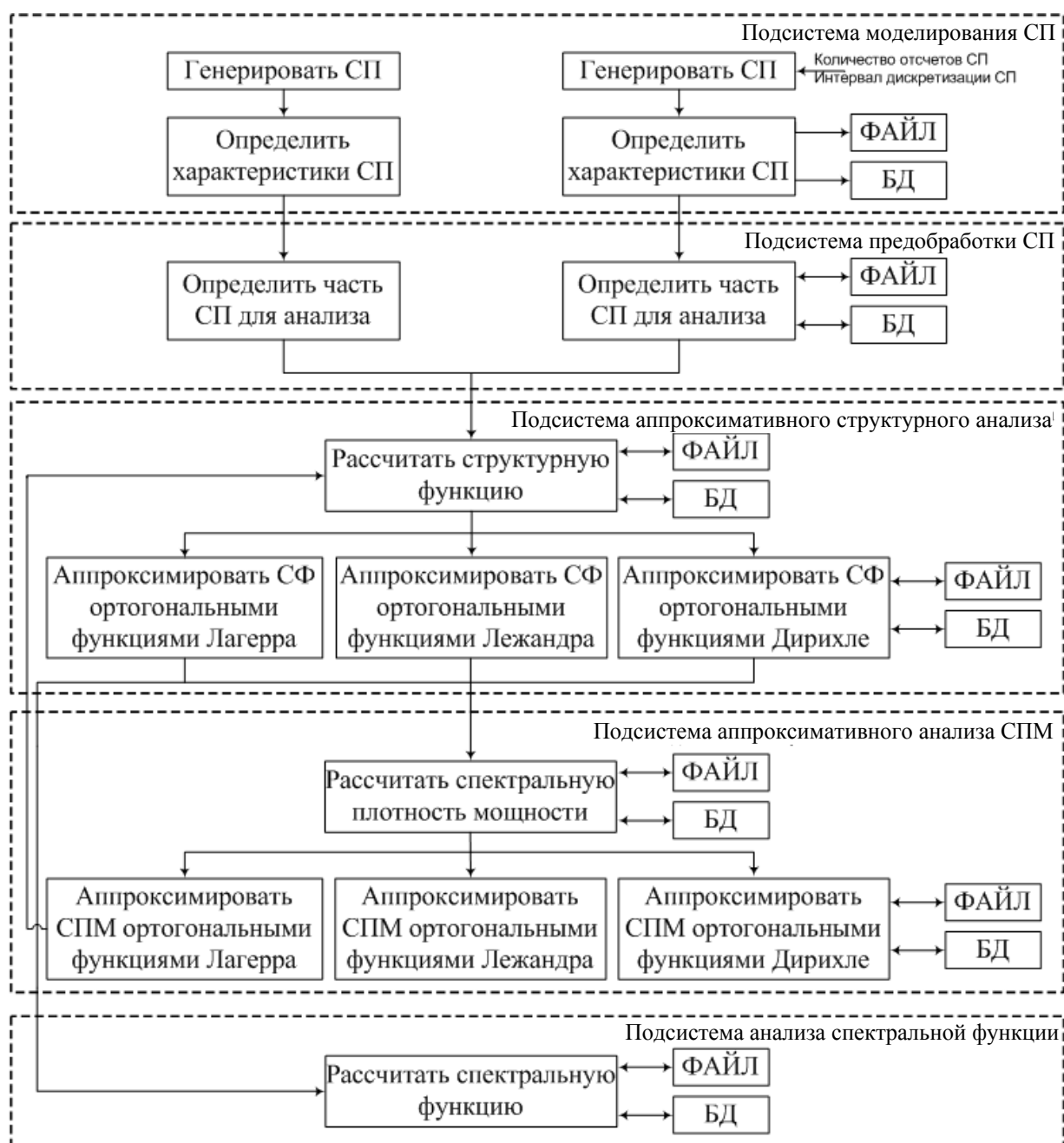


Рисунок 4.2 – Структурная схема автоматизированной системы

Первая подсистема обеспечивает генерирование случайных процессов и объединение их в пары. Целью работы с этой частью является имитационное моделирование случайных процессов с равномерной дискретизацией. Данные функции реализованы в системе для анализа алгоритмов аппроксимации. Возможна генерация исходного процесса с заданным количеством отсчетов и интервалом дискретизации (помимо генерации «белого шума» или процесса с известной автокорреляционной функцией и нормальным законом распределения возможна генерация СПСП). Также предусмотрена генерация коррелированных стационарных случайных процессов.

Далее производится оценка структурной функции и последующая ее аппроксимация, предусматривающая подбор оптимальных параметров выражений при минимуме среднеквадратической погрешности аппроксимации. Значе-

ния параметров аппроксимирующих выражений поступают на вход подсистемы расчета взаимной спектральной плотности мощности, по которым она и рассчитывается. Таким же образом рассчитывается и спектральная функция.

После определения каждой характеристики предоставляется возможность занесения полученных результатов в базу данных либо трансформации в Microsoft Excel для последующего анализа.

Работа может производиться как последовательно по описанной схеме, так и непосредственно в каждой конкретной подсистеме, с использованием информации из файлов.

Всего система содержит 8 страниц. Переход с одной страницы на другую осуществляется выбором вкладки вверху экрана. При нажатии на кнопки происходят действия, сопровождающиеся пересчетом определенных параметров и построением графиков. Для некоторых элементов предусмотрены настройки, определить которые можно с помощью всплывающих меню, активирующихся нажатием правой кнопки мыши непосредственно над ними.

Автоматизированная система создана для достижения следующих целей:

1. Автоматизация аппроксимативного анализа структурно-спектральных характеристик случайных процессов.

2. Исследование алгоритмов аппроксимации структурных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Лагерра, Лежандра и Дирихле.

4.2 Подсистемы моделирования и предобработки случайных процессов

Две эти подсистемы предназначены для подготовки случайных процессов к последующей обработке или просто для изменения их самих. Обработываемые процессы могут быть результатом генерирования в подсистеме моделирования, загружены из файла или из базы данных.

Подсистема моделирования случайных процессов представлена на рисунке 4.3. Смоделированным может быть как стационарный случайный процесс, так и случайный процесс со стационарными приращениями. Генерируются процессы вида

$$X(t) = f(t)Y(t) + g(t), \quad (4.1)$$

где $Y(t)$ – стационарный случайный процесс;

$f(t), g(t)$ – некоторые действительные неслучайные функции.

В свою очередь, стационарная составляющая $Y(t)$ процесса $X(t)$ может быть загружена из файла или сгенерирована, для чего имеется соответствующий переключатель (рисунок 4.4). Для генерации ССП $Y(t)$ переключатель необходимо установить в нижнее положение, выбрать вид корреляционной функции (моделируются ССП с заданным видом корреляционной функции), задать ее параметры (λ, ω), число отсчетов N и интервал дискретизации Δt .

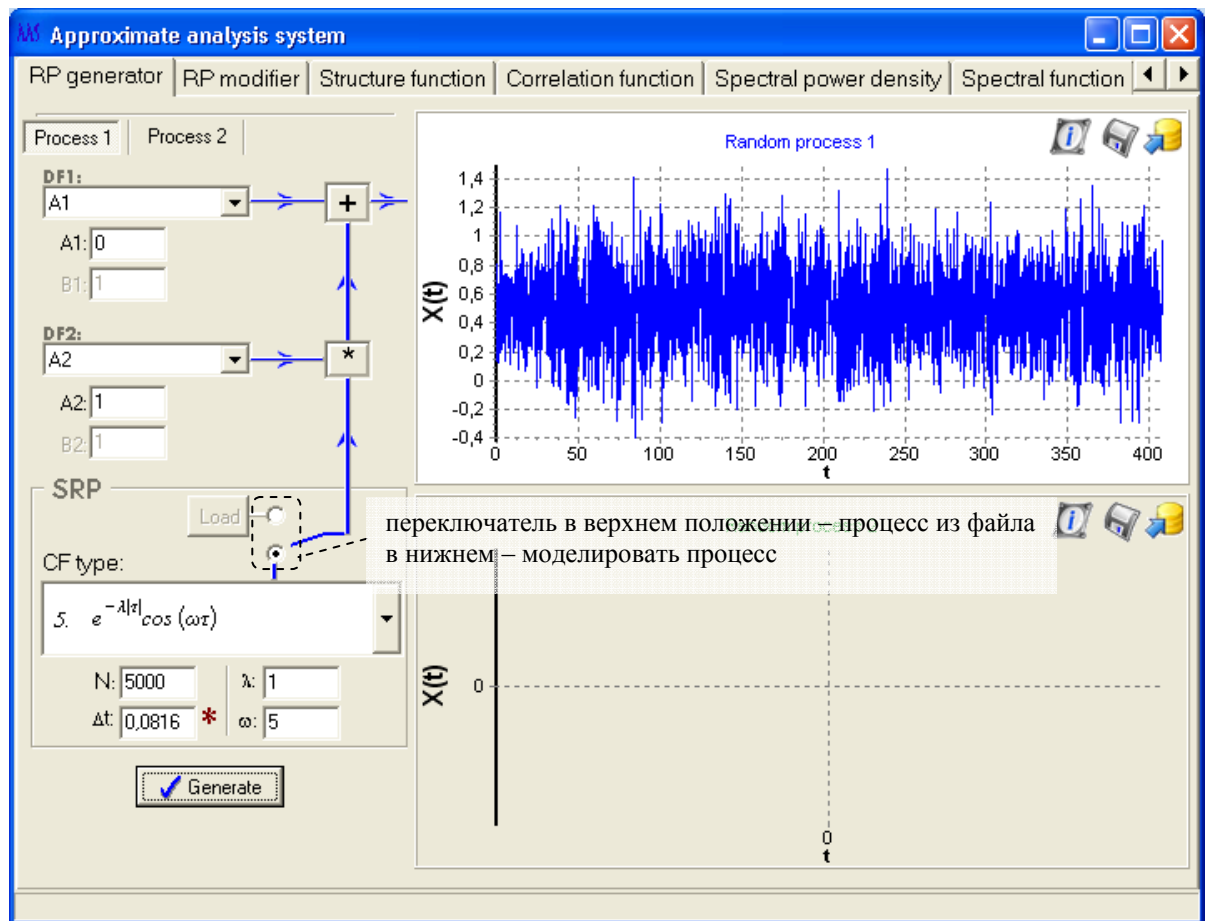


Рисунок 4.3 – Подсистема моделирования случайных процессов

Генерация процесса будет произведена после нажатия на кнопку «Generate». Выбрав вкладку «Process 2», можно аналогичным образом определить вид второго процесса.

Генерация псевдослучайного процесса с заданным видом корреляционной функции осуществляется методом фильтрации и сводится к определению характеристик формирующего фильтра при известных характеристиках входного и выходного сигналов [55] (на рисунке 4.5 $W_1(j\omega)$ – частотная характеристика формирующего фильтра).

Выходной сигнал формирующего фильтра может быть определен различными способами в зависимости от принятого способа преобразования аналогового фильтра в цифровой. Одним из самых простых является метод нерекурсивной фильтрации [55]:

$$z_n = \sum_{i=0}^N a_i v_{n-i} - \sum_{i=1}^N b_i z_{n-i}. \quad (4.2)$$

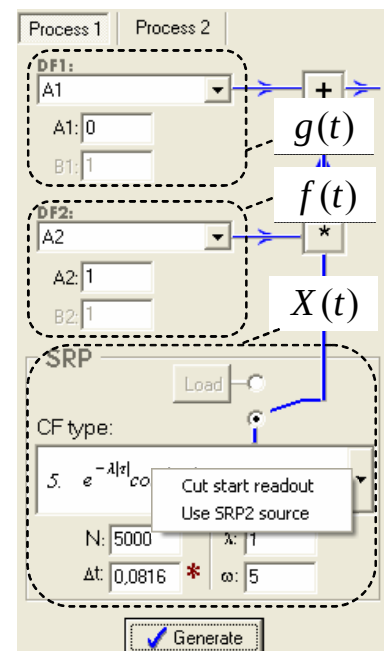


Рисунок 4.4 – Настройки генерации СП

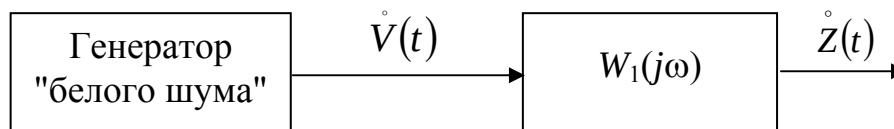


Рисунок 4.5 – Генерация ПСП с заданным видом корреляционной функции

Параметры a_i и b_i для фильтров, генерирующих псевдослучайные процессы с типовыми моделями КФ, рассчитаны в работе [55]. Также в работе [55] для типовых моделей КФ вычислены рекомендуемые значения шага дискретизации, который можно установить, нажав правой кнопкой мыши на «звездочку», находящуюся рядом с полем ввода шага дискретизации СП.

По умолчанию каждый процесс («Process1» и «Process2») генерируется по схеме, представленной на рисунке 4.5. В случае необходимости генерирования коррелированных процессов достаточно установить флаг «Use SRP1 source» или «Use SRP2 source» в опциях одного из процессов (опции процесса доступны после нажатия правой кнопки мыши над кнопкой «Generate»). В этом случае будет использован один и тот же генератор «белого шума» для первого и второго процесса (рисунок 4.6).

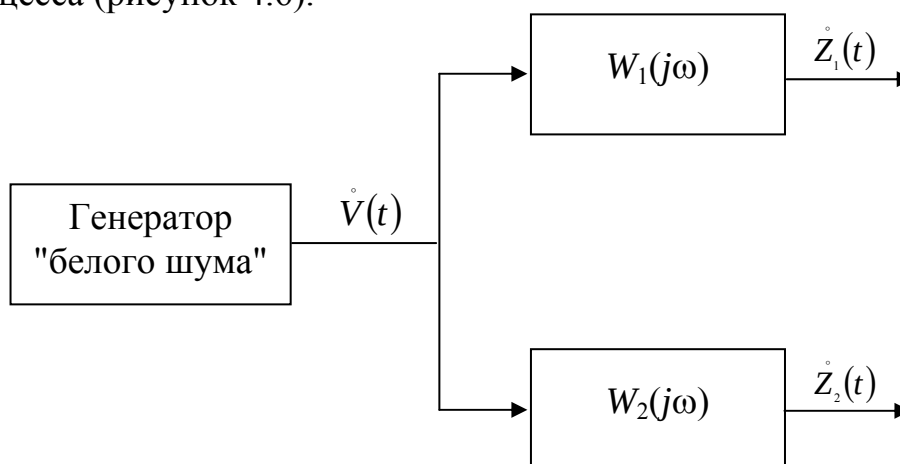


Рисунок 4.6 – Генерация коррелированных псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционной функции

Одной из особенностей генерирования псевдослучайных последовательностей является наличие «переходного процесса», в течение которого случайный процесс не является стационарным. Для устранения «нестационарного участка» (рисунок 4.7) предусмотрена опция «Cut start readout» (рисунок 4.4), при выборе которой данный участок будет убран, при этом число реализаций процесса будет равным установленному значению в параметрах генерации.

Сгенерированный процесс может быть сохранен нажатием кнопки мыши на пиктограмму  (форматы данных приведены в таблицах 4.1, 4.2, 4.3, 4.4), а также может быть занесен в базу данных нажатием кнопки мыши на пиктограмму . Информация о сгенерированном процессе (число отсчетов, шаг

дискретизации, оценка математического ожидания и дисперсии) будет отображаться в отдельном окне, после нажатия кнопкой мыши на пиктограмму .

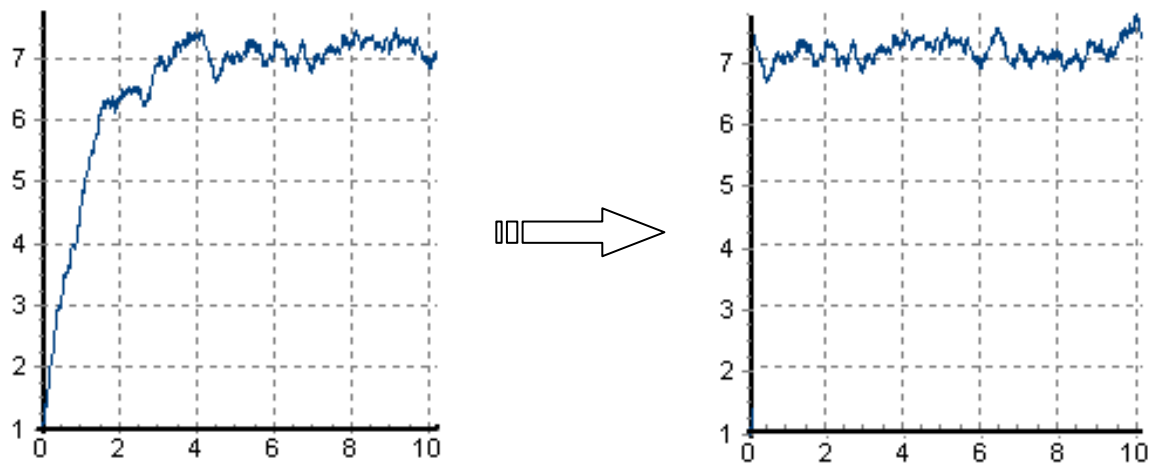


Рисунок 4.7 – Удаление «нестационарного участка»

Окно с информацией также будет доступно в других подсистемах и может быть скрыто нажатием на надпись «Hide» в правом верхнем углу окна. Подобные пиктограммы есть и в других подсистемах, обладают они теми же функциями, только для доминирующих характеристик в конкретной подсистеме.

Таблица 4.1 – Формат СП

[N]	Число отсчетов
[dt]	Шаг дискретизации
[n_0]	Отсчет СП №0
[n_1]	Отсчет СП №1
...	
[n_N-1]	Отсчет СП №N-1

Например, в подсистеме аппроксимативного структурного анализа информационное окно будет содержать не только числовые характеристики самой структурной функции, но и информацию о процессе, который она характеризует.

Таблица 4.2 – Формат СФ

[NR]	Число отсчетов правой ветви
[NL]	Число отсчетов левой ветви
[dt]	Шаг дискретизации
[SxR_0]	Отсчет СФ правой ветви №0
[SxR_1]	Отсчет СФ правой ветви №1

Продолжение таблицы 4.2

...	
[SxR_N-1]	Отсчет СФ правой ветви №N-1
[SxL_0]	Отсчет СФ левой ветви №0
[SxL_1]	Отсчет СФ левой ветви №1
...	
[SxL_N-1]	Отсчет СФ левой ветви №N-1

Таблица 4.3 – Формат СПМ

[df]	Шаг дискретизации
[R0]	Резерв
[R1]	Резерв
[R2]	Резерв
[g_0]	Отсчет СПМ №0
[g_1]	Отсчет СПМ №1
...	
[g_N-1]	Отсчет СПМ №N-1

После генерации процесс (или процессы) автоматически передается в подсистему предобработки (рисунок 4.8). Данная подсистема определяет процессы, которые и будут использованы для анализа, то есть, если в подсистеме предобработки заданы два процесса, то во всех подсистемах, где производятся вычисления, использующие временной ряд, будут определяться взаимные характеристики, в случае одного процесса – авто характеристики.

При этом, если выделена часть процесса, то анализироваться будет именно она, а не весь процесс (то же касается и операции сохранения процесса в файл: при выделении части, сохраняется эта часть, иначе – весь процесс).

Таблица 4.4 – Формат ортогональной модели СФ

[BasisR]	Тип базиса правой ветви
[AlphaR]	Параметр масштаба правой ветви
[mR]	Число членов разложения ряда правой ветви
[bR_0]	Коэффициент разложения правой ветви №0
[bR_1]	Коэффициент разложения правой ветви №1
...	

Продолжение таблицы 4.4

[bR_m]	Коэффициент разложения правой ветви №m
[BasisL]	Тип базиса левой ветви
[AlphaL]	Параметр масштаба левой ветви
[mL]	Число членов разложения ряда левой ветви
[bL_0]	Коэффициент разложения левой ветви №0
[bL_1]	Коэффициент разложения левой ветви №1
...	
[bL_m]	Коэффициент разложения левой ветви №m
[R0]	Резерв
[R1]	Резерв
[R2]	Резерв
[R3]	Резерв
[ErrMetR]	Методическая погрешность аппроксимации правой ветви
[ErrMetL]	Методическая погрешность аппроксимации левой ветви
[ErrSDR]	Среднеквадратическая погрешность аппроксимации правой ветви
[ErrSDL]	Среднеквадратическая погрешность аппроксимации левой ветви
[MList]	Вид и порядок следования модифицирования СФ
[XShft]	Значение величины сдвига СФ по оси абсцисс
[XCntr]	Значение центрирующей величины СФ

Выделение части осуществляется выбором опции «Extract part» и последующим определением интересующей части одним из следующих способов:

- Ввода с клавиатуры номера отсчета, с которого начинается часть процесса – N_s , и номера, которым заканчивается – N_t (рисунок 4.8).
- Определения части процесса посредством использования манипулятора «мышь». Для этого необходимо определить два крайних отсчета части процесса. Нажатием и удержанием левой кнопки мыши определяется номер первого отсчета. Далее перемещением мыши влево или вправо выбирается интересующая часть процесса. После отпускания левой кнопки «мыши» определяется второй крайний отсчет. Номера полученных крайних отсчетов заносятся в N_s , N_t .

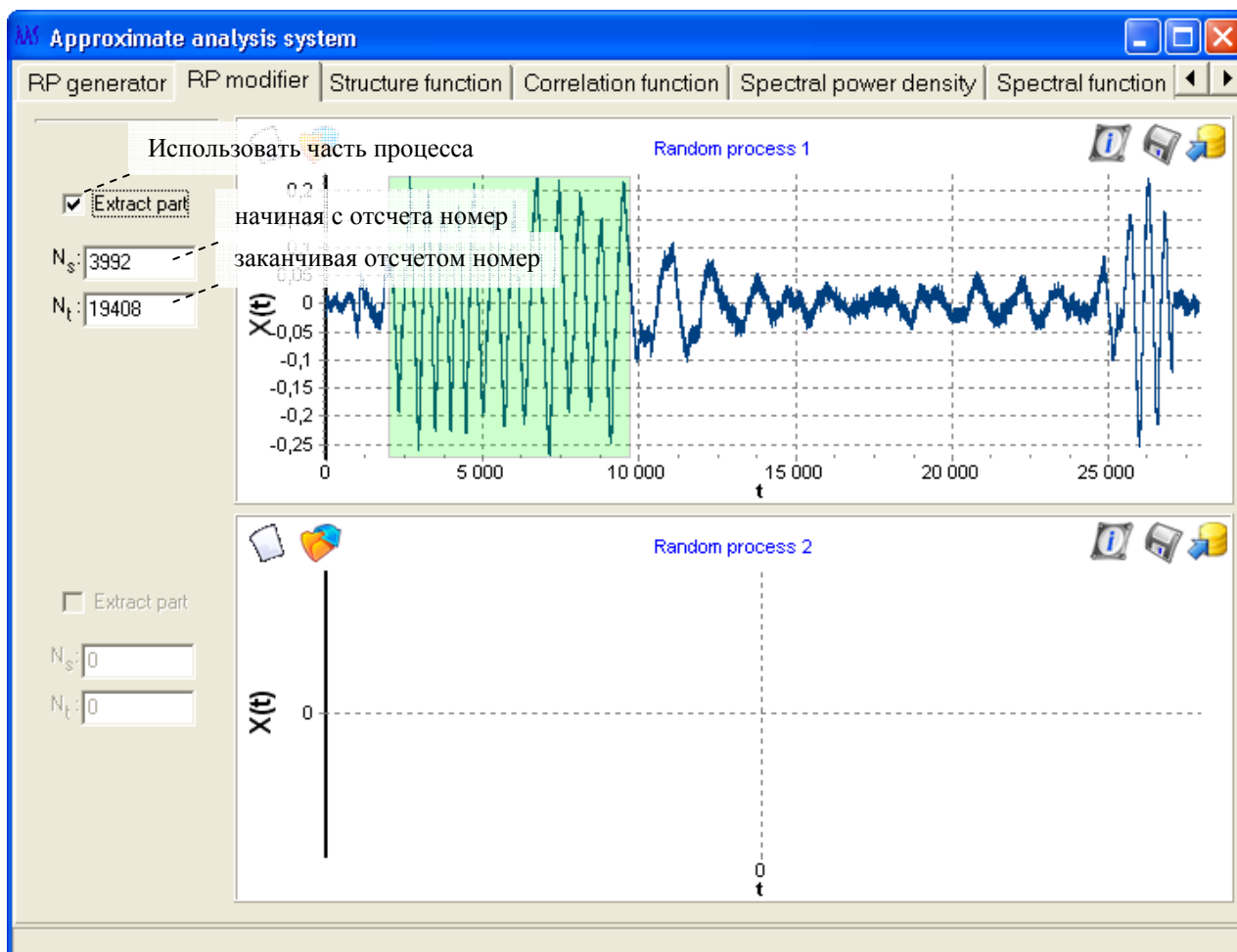


Рисунок 4.8 – Подсистема предобработки СП

В данной подсистеме возможно оперирование процессами, которые были смоделированы в подсистеме генерации, либо загруженными из файла. Для загрузки процесса из файла достаточно нажать на пиктограмму  (рисунок 4.8) и выбрать имя файла, содержащего процесс (в других подсистемах, где присутствует подобная пиктограмма, функция ее аналогична). Если по каким-либо причинам возникла необходимость убрать процесс из дальнейшего рассмотрения, то осуществляется это нажатием на пиктограмму .

Существуют также различные возможности по редактированию текущего или созданию абсолютно нового процесса. Функции редактирования осуществляются выбором соответствующих пунктов меню, вызвать которое можно, нажав правую кнопку мыши над областью отображения процесса (рисунок 4.9).

Все действия производятся с использованием внутреннего буфера обмена, в который либо заносятся данные, либо извлекаются предварительно занесенные. Исключение составляет лишь «Delete», которая просто удаляет выделенную часть процесса, и «Replace by», заменяющая выделенную часть на один единственный отсчет.

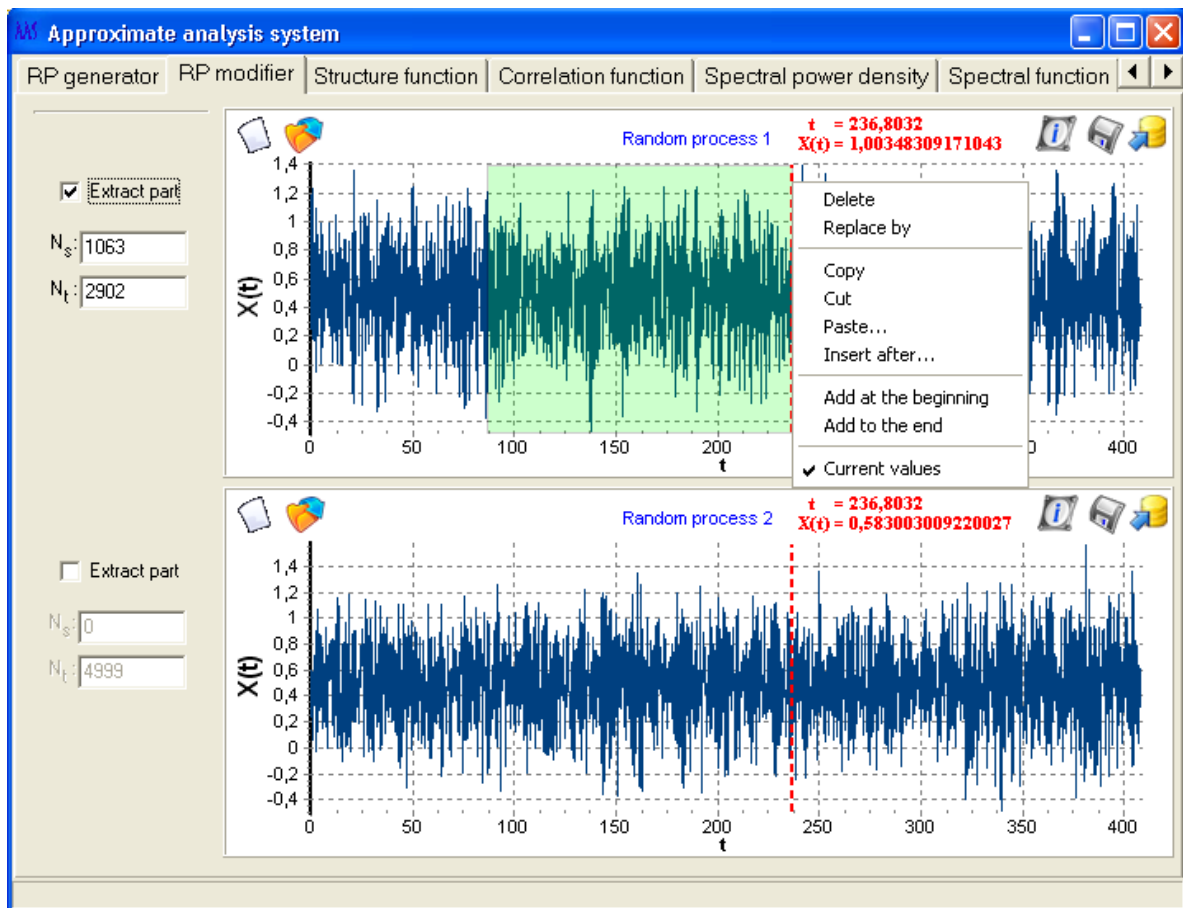


Рисунок 4.9 – Функции редактирования СП

Остальные же функции представляют собой следующие действия:

- Copy – заносит в буфер обмена выделенную часть процесса;
- Cut – заносит в буфер обмена выделенную часть процесса и удаляет эту часть из текущего процесса;
- Paste... – вставляет из буфера обмена предварительно занесенные в него отсчеты, заменяя при этом выделенную часть;
- Insert after... – вставляет из буфера обмена предварительно занесенные в него отсчеты за отсчет номер N_t . При этом не происходит удаления выделенной части, а за вставленной будет находиться часть процесса, начинающаяся с отсчета номер N_{t+1} и заканчивающаяся последним отсчетом текущего процесса.
- Add at the beginning – добавляет в начало текущего процесса отсчеты из буфера обмена;
- Add to the end – добавляет в конец текущего процесса отсчеты из буфера обмена;

Для удобства работы, а именно для точного определения номера отсчета и его значения, предусмотрена функция их отображения, активируемая выбором опции «Current values» (рисунок 4.9). Таким образом, данная подсистема имеет достаточный арсенал не только для создания композиции из нескольких рядов, но и дает возможность тщательно подготавливать временные ряды к обработке.

4.3 Подсистема аппроксимативного структурного анализа

В данной подсистеме существует возможность вычисления структурной функции непосредственно процесса либо с использованием ортогональной модели спектральной плотности мощности. Выбрать один из методов можно с помощью соответствующего селектора (рисунок 4.10). Также возможен анализ структурной функции, загруженной из файла.

Для вычисления структурной функции процесса необходимо задать требуемое количество ординат структурной функции («Reference point count»), затем нажать на кнопку «Define». В случае вычисления СФ по модели СПМ дополнительно необходимо указать шаг дискретизации (рисунок 4.11).

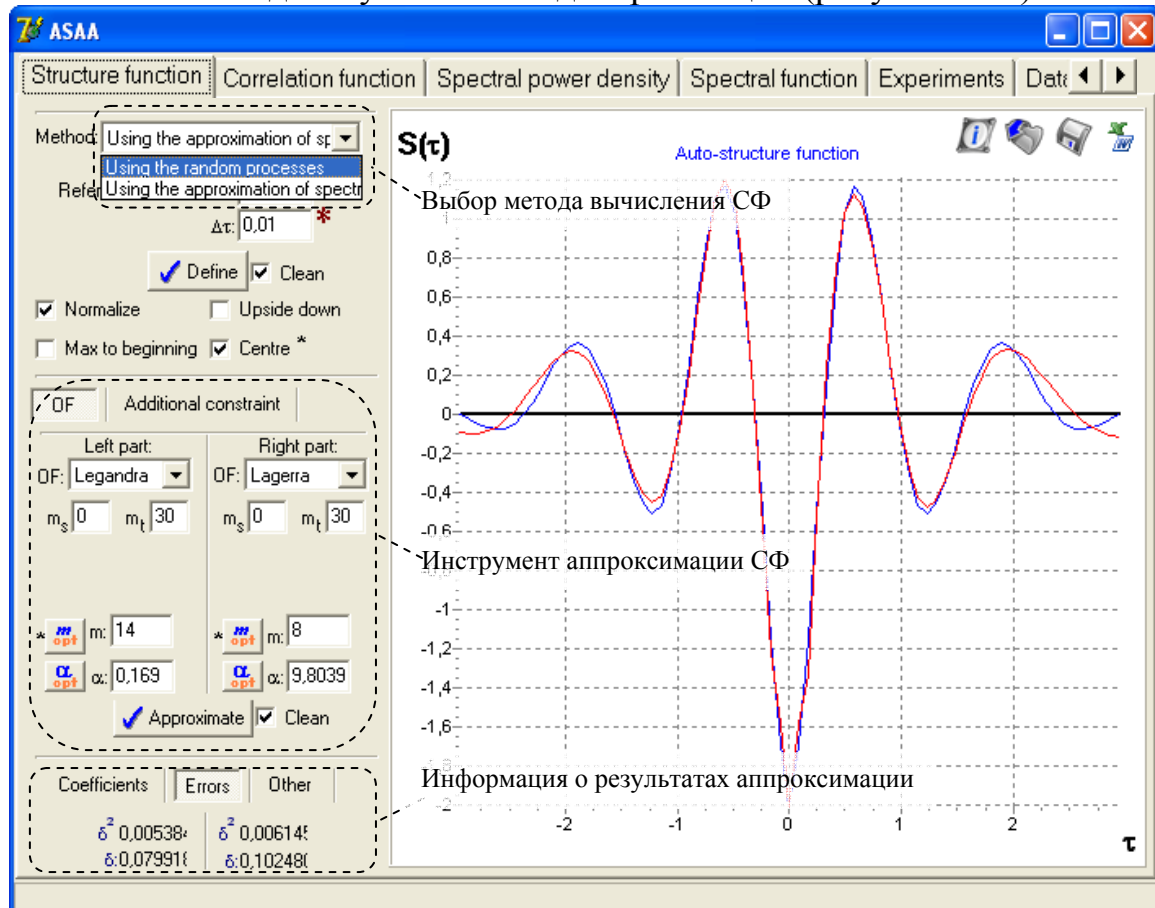


Рисунок 4.10 – Подсистема аппроксимативного структурного анализа

В подсистеме существует возможность видоизменения структурной функции (рисунок 4.11):

- с помощью опции «Upside down» происходит преобразование исходной структурной функции S_x в виде $S_x(t) = -S_x(t)$;
- опция «Max to beginning» предназначена для отыскания максимального значения структурной функции и переноса оси ординат в соответствующую найденному максимуму точку;
- опция «Normalize» приводит значения структурной функции к диапазону $[0,1]$;

- опция «Centre» центрирует структурную функцию. Центрирование производится относительно среднего значения СФ $M[S_x(t)]$ или значения $S_x(\infty)$, если нажата «*» над опцией «Centre».

Данная подсистема, ко всему прочему, содержит инструмент, позволяющий определять ортогональную модель структурной функции. Задание модели

(число членов разложения ряда, вид ортогональных функций, масштабирующий параметр ортогональных функций) производится с помощью специальных полей ввода и всплывающих списков (рисунок 4.12). Предусмотрена возможность выбора оптимального значения числа членов разложения ряда (m), соответствующего минимуму из набора погрешностей, полученных при аппроксимации с различным числом членов разложения ряда. Число членов разложения выбирается из диапазона $[m_s, m_t]$ (рисунок 4.12), после нажатия на кнопку вычисления оптимального значения m последнее будет занесено в соответствующее поле. По какой именно погрешности (методической или среднеквадратической) производится выбор, определяет опция «*», находящаяся рядом с кнопкой определения оптимального m (рисунок 4.12). Если «*» утоплена, то используется среднеквадратическая погрешность, в противном случае – методическая. Выбрав вкладку «Additional constraint», можно установить тип коэффициентов разложения ряда β_k или b_k , характеризующих поведение ортогональной модели в начальной точке (в случае установки b_k будет абсолютное совпадение аппроксимируемой функции и модели в начальной точке).

По результатам аппроксимации определяются коэффициенты разложения и погрешности аппроксимации (рисунок 4.10):

- δ^2 – относительная методическая;
- δ – среднеквадратическая.

Необходимо отметить, что при аппроксимации предусмотрено разделение СФ на левую и правую ветви, то есть и для настройки параметров и для отображения результатов существуют соответствующие независимые поля.

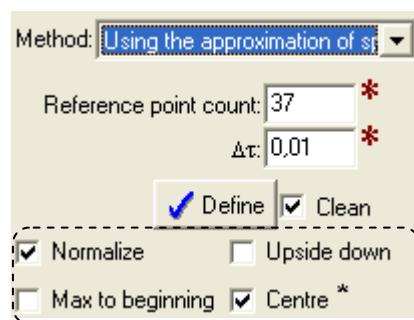


Рисунок 4.11 – Видоизменение СФ

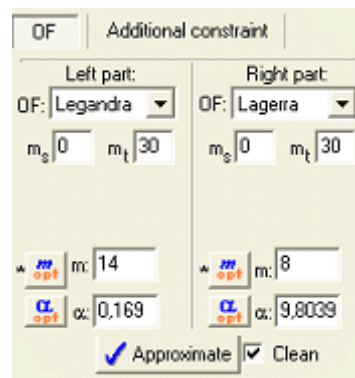


Рисунок 4.12 – Определение параметров аппроксимирующего выражения

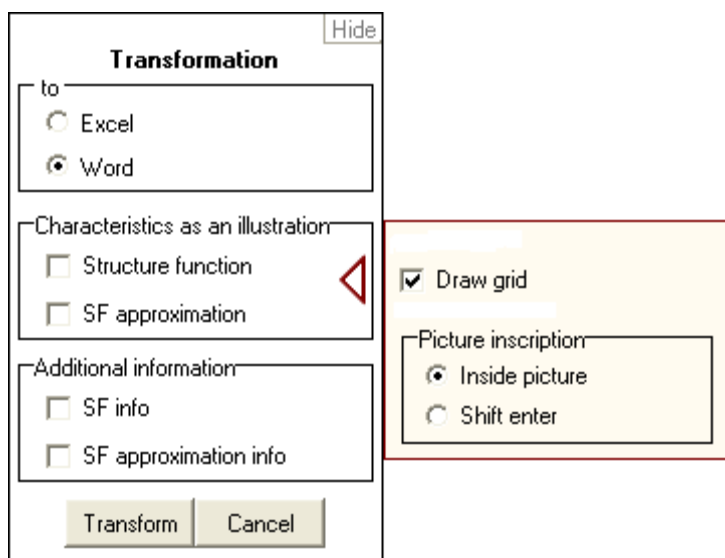


Рисунок 4.13 – Окно настройки трансформации с активной утилитой дополнительных настроек

Для повышения информативности результатов данная подсистема имеет возможность преобразования информации (СФ и ее модель) в формат документов Microsoft Word или электронных таблиц Microsoft Excel. При нажатии на пиктограмму  (рисунок 4.10) появляется окно настройки преобразования (рисунок 4.13). В этом окне ведется настройка трансформации в формат MS Excel или MS Word, варианты отображения графической

информации: при пометке «Structure function» отображается СФ, при пометке «SF approximation» – аппроксимация СФ, а при пометке обоих полей – и СФ, и ее аппроксимация. В свою очередь, можно указать необходимость отображения сетки («Draw grid»), а в случае трансформации в документ Microsoft Word, указать свойства подписи к рисунку: либо подпись объединена с рисунком («Inside picture»), либо будет вставлен рисунок, после чего разрывается строка без создания абзаца, а затем вставляется подпись («Shift enter»).

Помимо графического отображения информации доступна табличная запись числовых характеристик структурной функции («SF info») и ее модели («SF approximation info»). Форматы результатов для документов Microsoft Word и электронных таблиц Microsoft Excel приведены в таблицах 4.5 и 4.6. Благодаря выше описанным возможностям данная подсистема, помимо предоставления исследователю инструмента для аппроксимативного анализа структурных функций, еще и дает широкие возможности по представлению результатов, которые могут быть использованы для дальнейших исследований. Во время преобразования данных работа с текущей подсистемой становится недоступной во избежание изменения преобразуемых данных, однако возможна работа с другими подсистемами, что позволяет пользователю не останавливать процесс исследования.

Таблица 4.5 – Пример таблицы, содержащей информацию об исследуемой характеристике

	Левая часть	Правая часть
N	37	37
dt	0,01	
Исходные данные	Загружена из файла D:\Current business\test	

Таблица 4.6 – Пример таблицы, содержащей информацию об аппроксимации

	Левая часть	Правая часть
Базис	Лагерра	Лагерра
alpha	1	1
m	10	10
betta0	-0,068058	-0,068058
betta1	-0,102896	-0,102896
betta2	-0,131263	-0,131263
betta3	-0,153863	-0,153863
betta4	-0,171345	-0,171345
betta5	-0,184303	-0,184303
betta6	-0,193284	-0,193284
betta7	-0,198786	-0,198786
betta8	-0,201267	-0,201267
betta9	-0,201142	-0,201142
betta10	-0,198791	-0,198791
Мет. погр.	0,684227	0,684227
СК погр.	0,676085	0,676085
Константа сдвига	0,000000	
Константа центрирования	-0,948751	
Исходные данные	Построена для структурной функции, загруженной из файла D:\Current business\test	

Каждая подсистема, входящая в программный комплекс, имеет доступ к любой другой подсистеме, а точнее к ее данным. Таким образом, если осуществляется работа, требующая непосредственного оперирования с временными рядами, то последние определяются подсистемой модифицирования СП. То же самое касается и ортогональных моделей: любая ортогональная модель, определенная в какой-либо подсистеме, полностью доступна во всех других подсистемах.

Содержащиеся в автоматизированной системе подсистема аппроксимативного анализа СПМ и подсистема анализа спектральной функции имеют интерфейс, аналогичный интерфейсу подсистемы аппроксимативного анализа структурных функций, за исключением того, что не происходит разделения характеристики на левую и правую части, при этом подсистема аппроксимативного анализа СПМ предоставляет возможности для независимого анализа модуля СПМ, фазы СПМ, вещественной и мнимой частей СПМ.

С целью повышения наглядности при изучении базовых дисциплин, связанных с изучением структурных функций случайных процессов, разработан лабораторный практикум (Глава 5), прошедший апробацию на кафедре информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета при подготовке инженеров по специальности «Автоматизи-

рованные системы обработки информации и управления», который рекомендован для подготовки специалистов по смежным специальностям.

4.4 Подсистема экспериментальных исследований

Цифровые вычислительные машины позволяют обрабатывать данные только в тех случаях, когда четко сформулированы алгоритмы, однозначно определяющие последовательность необходимых вычислений. Задача создания подсистемы возникла в ходе работы с автоматизированной системой, при обработке большого количества данных (когда используется один и тот же алгоритм обработки, а меняются лишь исходные данные). Даная подсистема представляет собой инструмент, позволяющий формировать алгоритм эксперимента, действиями которого являются все возможные производимые системой операции.

Данный инструмент позволяет создавать макрокоманды для автоматизированной системы и нацелен на увеличение скорости и удобства работы с данными. Таким образом, создается алгоритм проведения эксперимента (пример которого приведен на рисунке 4.14), в качестве пунктов которого могут выступать следующие операции:

- определить значение параметра (например, число точек определения структурной функции);
- выполнить действие (генерировать процесс, аппроксимировать структурную функцию и т.п.);
- для следующих файлов выполнить (например, если файлы содержат данные полученные в ходе какого-либо эксперимента);
- цикл, параметр которого может быть значением, устанавливаемым в качестве значения какой-либо характеристики. При этом существует возможность установки шага приращения параметра цикла.

Для удобства создания алгоритма и редактирования пункты алгоритма, которые будут выполняться в теле цик-

Рисунок 4.14 – Пример алгоритма

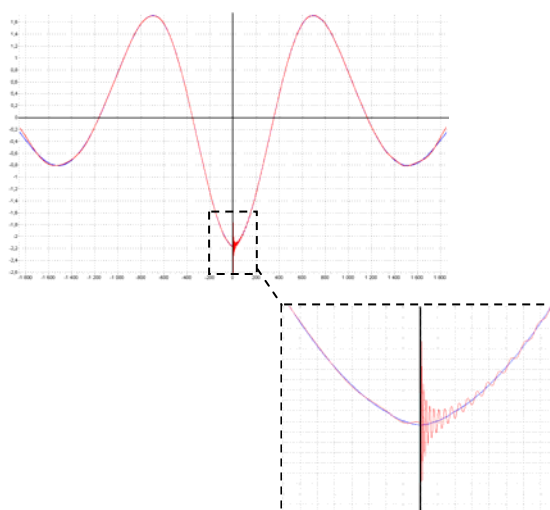


Рисунок 4.15 – Аппроксимация структурной функции

его ко-
ла,

визуально смещены вправо под пунктом, в котором устанавливаются параметры цикла (рисунок 4.14).

Каждый пункт алгоритма может быть:

- вставлен перед, после или вместо текущего ПА;
- удален;
- перенесен в любое место алгоритма.

При этом результаты обработки (числовые характеристики, внешний вид функциональных характеристик и т.д.) могут быть размещены в базе данных, позволяющей в том числе визуально оценивать эффективность эксперимента, что может быть полезным, например, в ситуации, представленной на рисунке 4.15.

Анализируя рисунок 4.15, можно предположить, что методическая погрешность аппроксимации левой части структурной функции будет меньше правой. Хотя, на самом деле, это совсем не так: погрешность аппроксимации левой части равна 0.006, а правой – 0.001. Таким образом, в случае сравнения результатов персональным компьютером в качестве более точной была бы выбрана аппроксимация правой части.

Для анализа подобных ситуаций и была создана база данных, хранящая необходимые данные, из которой можно выбрать оптимальную модель, определив ее не только по числовым параметрам, но и визуально. Для работы с базой данных существуют следующие возможности:

- создание новой, загрузка существующей и сохранение текущей БД;
- просмотр и анализ записи, удаление записи, добавление записи в БД;
- извлечение информации из текущей записи и размещение ее в соответствующую подсистему;
- преобразование информации, содержащейся в записи, в Microsoft Word и Excel;
- построение диаграмм:
 - о зависимость одного определенного параметра от одной переменной (которыми могут выступать параметры записей или номер записи, как на рисунке 4.16);
 - о зависимость одного параметра от двух переменных (в этом возникает необходимость, например, при анализе зависимости погрешности аппроксимации от нескольких параметров, как на рисунке 4.17).

Необходимо отметить, что перед выполнением алгоритма производится синтаксический анализ параметров пунктов алгоритма, а также регистрируются

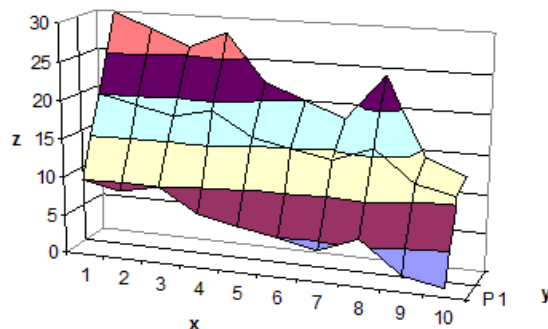


Рисунок 4.17 – Графическое отображение двумерной зависимости

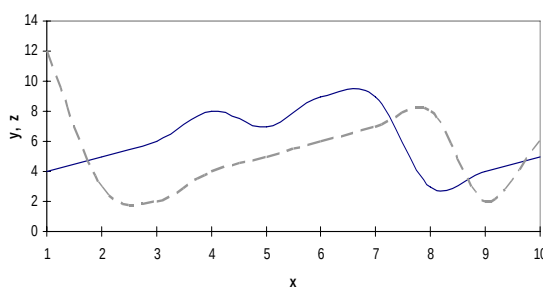


Рисунок 4.16 – Графическое отображение одномерной зависимости

ошибки выполнения пунктов алгоритма (например, при открытии файла неизвестного формата), которые в дальнейшем могут быть просмотрены в специальном реестре. Это позволяет выполнить действия алгоритма без прерываний и при необходимости отдельно произвести анализ, скорректировав возникшие ошибки. Созданный алгоритм может быть сохранен в файл, и, соответственно, возможна загрузка из файла уже созданного алгоритма.

Созданная подсистема экспериментальных исследований, состоящая из подсистемы «Макрос» и «База данных», работает в фоновом режиме, то есть во время обработки информации существует возможность работы с другими приложениями, в том числе и с автоматизированной системой аппроксимативного структурного анализа.

4.5 Применение программного комплекса для решения прикладных задач

Описанные методы и алгоритмы структурно-спектрального анализа могут быть использованы в решении достаточно широкого круга задач, связанных с обработкой экспериментальных данных.

Для исследования акустики струй с нестационарным расходом газа, разработки научных основ и методов снижения создаваемого ими шума могут быть применены методы физического и математического моделирования [1, 3, 29, 30, 35, 36]. При исследовании акустических полей в лабораторных условиях используют заглушённые (безэховые) камеры, для обеспечения акустических измерений в условиях, приближающихся к условиям свободного открытого пространства (в свободном звуковом поле). Стены, пол и потолок камеры покрываются звукопоглощающими материалами, обеспечивающими практически полное отсутствие отражённых звуковых волн. Внутренняя отделка состоит из облицовочных матов и клиньев лёгкого пористого материала, располагаемых основаниями к стенам и поглощающих преимущественно низкочастотное акустическое излучение. Отсутствие заметных отражений в заглушенных камерах сводит до минимума интерференцию и наличие стоячих волн, что позволяет приблизиться к идеальной форме звуковой волны – чисто бегущей плоской или сферической. Условие свободного поля характеризуется наличием обратной пропорциональности между звуковым давлением и расстоянием от акустического центра излучения до точки измерения давления $P=1/R$. Кроме хорошего приближения к условиям чисто бегущей звуковой волны существенна и хорошая звукоизоляция, а также виброизоляция от внешних и внутренних шумов и вибраций. Размеры камеры должны допускать расположение приёмника и источника звука на достаточно большом расстоянии друг от друга. Приёмник находился в зоне практически плоских волн (при частотах ниже 100 Гц это расстояние должно составлять более 1 метра).

Заглушенная камера имеет самостоятельную строительную коробку с самостоятельным фундаментом, расположенным внутри здания. Но такие камеры являются уникальным и дорогим инженерным сооружением, поэтому в некото-

рых случаях для исследований используются малогабаритные камеры (рисунок 4.18).

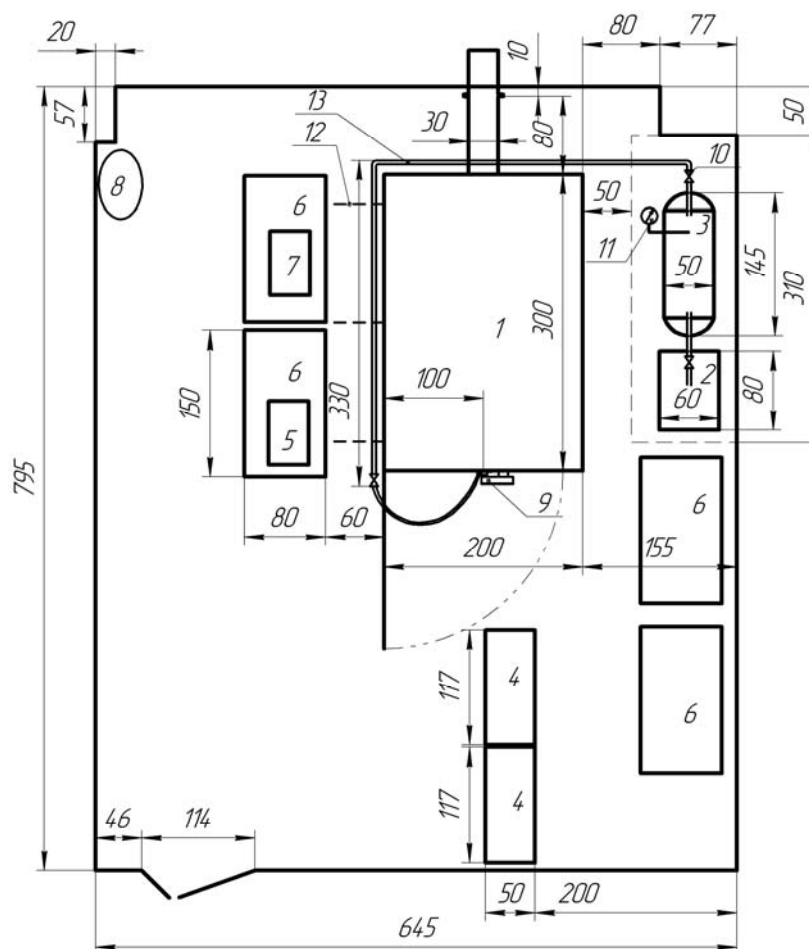


Рисунок 4.18 – Состав и размещение оборудования установки для исследования акустического излучения пульсирующих струй:

- 1 – малогабаритная заглушенная акустическая камера; 2 – компрессор;
- 3 – ресивер; 4 – шкаф; 5 – информационно-измерительная система;
- 6 – канцелярский стол; 7 – обрабатывающий комплекс; 8 – раковина;
- 9 – привод; 10 – кран; 11 – манометр; 12 – зонд; 13 – трубопровод

На рисунке 4.18 представлены состав и расположение основных элементов установки на основе малогабаритной акустической камеры, предназначенной для проведения исследований акустики нестационарных струй.

Сборный корпус камеры состоит из трех сварных секций, изготовленных из листовой стали и уголков, дверей для доступа в камеру и выхлопной системы с глушителем шума для отвода воздуха, поступающего через пульсатор (рисунок 4.19).



Рисунок 4.19 – Внешний вид малогабаритной акустической заглушенной камеры: 1 – полипропиленовый трубопровод для подвода сжатого воздуха; 2 – акустический зонд для измерения акустического излучения струи в камере; 3 – пульсатор воздушной струи; 4 – ворота для доступа в камеру; 5 – регулируемый электропривод пульсатора

В центре дверей имеется окно для установки пульсатора и подачи воздушной струи в камеру. Воздух к пульсатору подается с помощью гибкого шланга от воздушной магистрали, проведенной вдоль камеры. На наружной поверхности ворот на ребрах жесткости из уголков закрепляется электропривод пульсатора воздушной струи. Для уменьшения вибрации и звука, возникающего при работе электропривода и пульсатора, на наружной поверхности двери нанесен слой вибропоглотителя «Визамат МП» толщиной 3 мм. На боковой стенке камеры сделаны три отверстия, на которые закреплены фланцы для установки в камеру акустических зондов с измерительными микрофонами. На задней стенке камеры имеется квадратное окно, в которое устанавливается отводящий воздуховод и за ним глушитель шума, через который осуществляется выброс воздуха в атмосферу. Для поглощения звука внутри камеры установлены три звукопоглощающих слоя (рисунок 4.20).

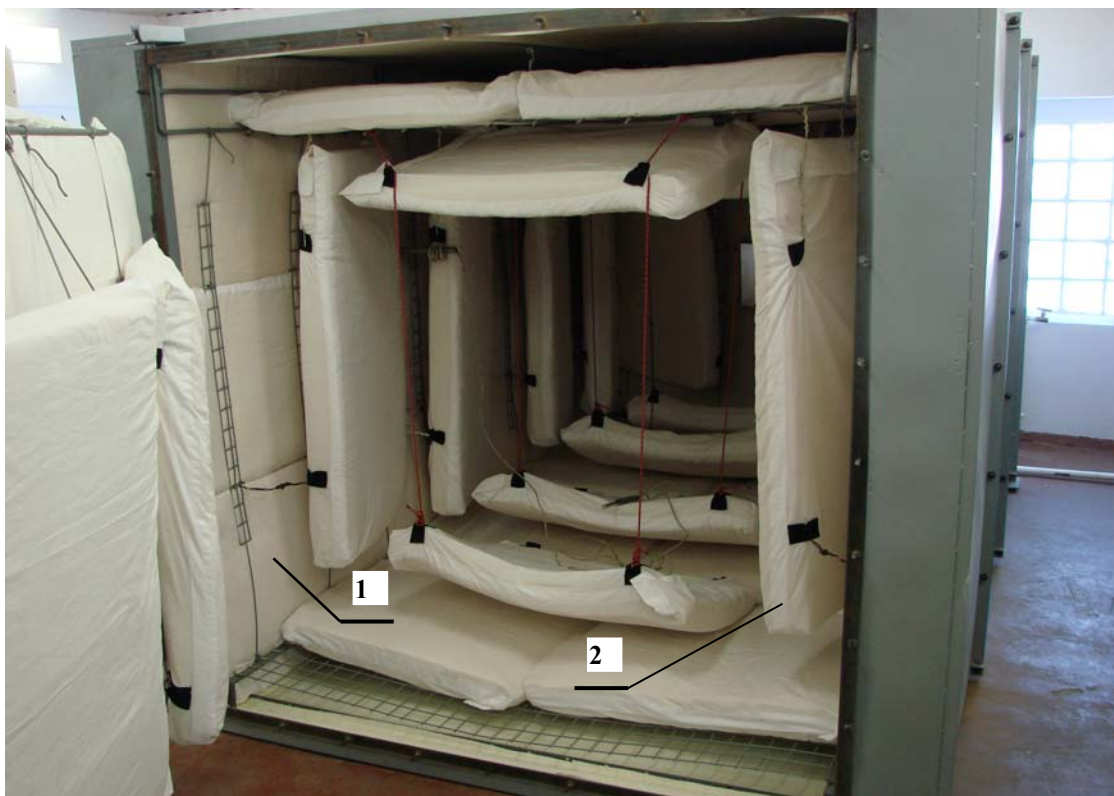


Рисунок 4.20 – Вид заглушенной камеры с открытой дверью: 1 – пристеночные звукопоглощающие маты; 2 – навесные звукопоглощающие маты

Внутренняя поверхность металлического корпуса, дверей и выхлопной системы обклеены звукопоглощающим материалом «Изолон» толщиной 4 мм. Параллельно внутренней поверхности камеры установлены звукопоглощающие маты. Маты изготовлены из сверхтонкого стекловолокна Isover 610 KL толщиной 100 мм. Чехлы для матов сшиты из тонкой бязи, хорошо пропускающей воздух и звук. С внутренней стороны на облицовочных матах установлены навесные маты, которые располагаются под углом к внутренней поверхности и создают открытые полости для поступления в них и поглощения акустического излучения. Навесные маты служат для увеличения поглощения шума преимущественно в области низких, а также средних и высоких частот и играют роль акустических клиньев, обычно используемых в больших заглушенных камерах.

В состав установки также входит воздушная система, обеспечивающая подачу воздуха к пульсатору для создания воздушной струи поступающей в заглушенную камеру. Система включает воздушный компрессор, ресивер, полипропиленовый трубопровод с двумя воздушными кранами и гибкий шланг для подвода сжатого воздуха к пульсатору. Внешний вид ресивера и компрессора показаны на рисунке 4.21.

Используется компрессор с максимальным создаваемым давлением до 1 МПа и производительностью закачиваемого атмосферного воздуха 320 дм³/с. Компрессор имеет индивидуальный воздушный ресивер емкостью 50 дм³. Дополнительный ресивер служит для накопления воздуха перед проведением эксперимента с целью обеспечения постоянства его давления в пульсаторе. Емкость ресивера 250 дм³, рабочее давление 1 МПа. Трубопровод, подводящий

воздух от ресивера к воротам камеры, сварен из полипропиленовых труб. Рабочее давление трубопровода до 2 МПа.



Рисунок 4.21 – Внешний вид компрессора и ресивера воздушной системы установки: 1 – компрессор В2800/50; 2 – воздушный ресивер

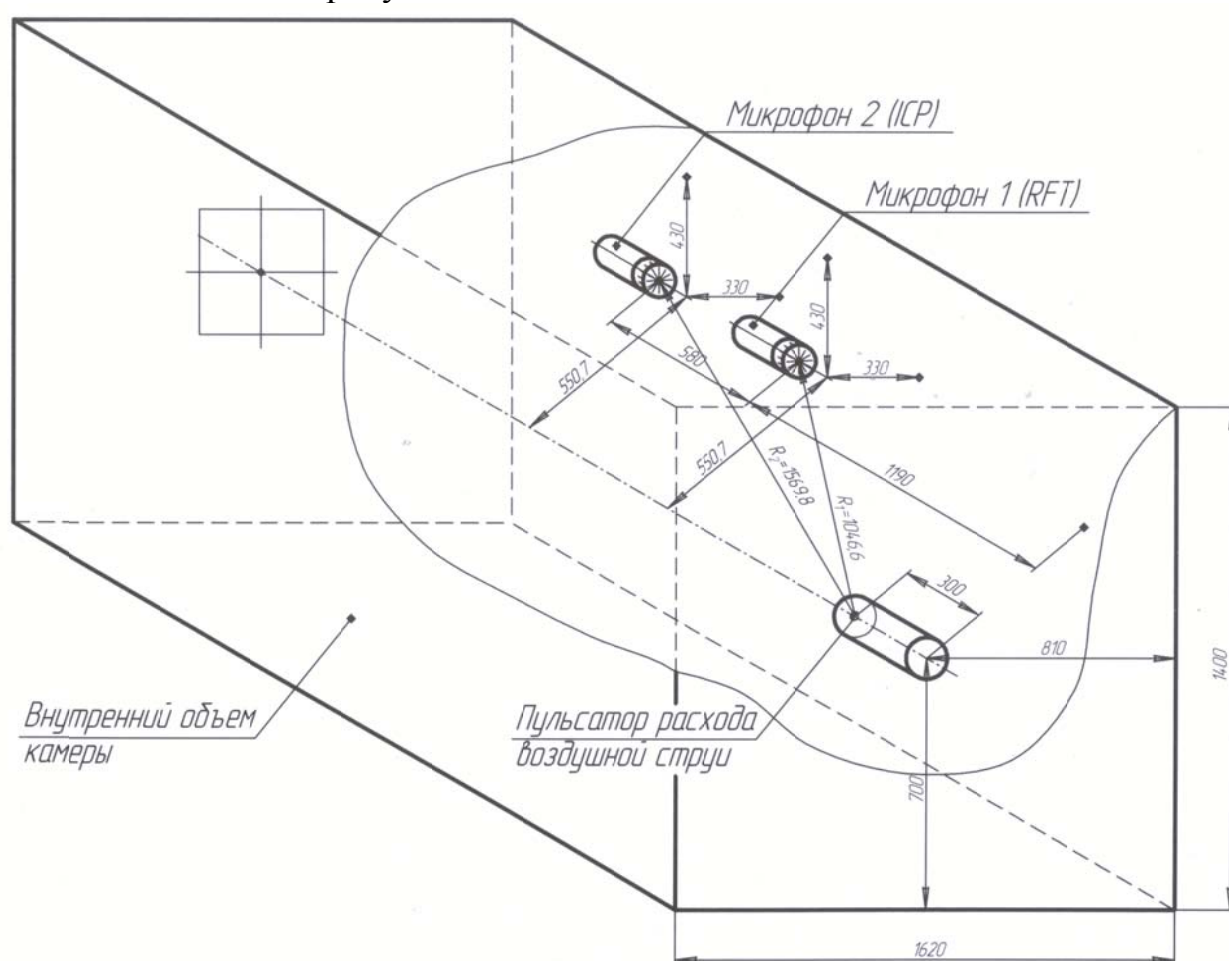
Для повышения достоверности измерений акустического поля, создаваемого воздушными струями с пульсирующим расходом, измерение акустического давления проводилось по двум измерительным каналам двумя микрофонами. В качестве 1-го микрофона использовался полудюймовый измерительный конденсаторный микрофон 1-го класса точности типа МК 221 фирмы RFT в комплекте с импульсным шумомером 00 023 RFT. В данном случае шумомер использовался для питания конденсаторного микрофона и предварительного усиления его сигнала при установленной на шумомере линейной частотной характеристики.

В качестве второго микрофона использовался полудюймовый микрофон 1-го класса точности типа MP 201 фирмы BSWA TECH с предварительным усилителем ICP типа MA211.

Оба измерительных канала обеспечивают высокую точность измерения, соответствующую требованиям 1-го класса точности с гарантированным частотным диапазоном измеряемых давлений 20...20000 Гц. Динамический диапазон 1-го измерительного канала составляет 145 дБ, второго канала – 130 дБ.

Сигналы измерительных каналов подавались на вход модуля M2428 измерительно-вычислительного комплекса MIC-400D. Выполнялась синхронная регистрация двух сигналов с использованием программного обеспечения MR-

300. Частота дискретизации в различных экспериментах устанавливалась 54 или 108 кГц. Питание усилителя ИСР по второму измерительному каналу осуществлялось от модуля М2428. Чувствительность канала со вторым измерительным микрофоном задавалась по его паспортным данным. Затем по обоим каналам была выполнена их калибровка с помощью пистонфона РСВ на уровнях акустического давления 94 и 114 дБ, что соответствует эффективному давлению 1 и 10 Па. Расхождение чувствительности второго канала установленного по паспортным данным микрофона и по результатам его калибровки с помощью пистонфона составило менее 1,5%.



Цикл каждого измерения продолжался 4...5 с. Первоначально запускался компрессор, и в ресивере воздушной системы создавалось давление, при котором планировалось проведение испытаний. После подачи воздуха на пульсатор и запуска электропривода в течение 2...3 секунд установка выходила на режим испытаний. После этого выполнялась синхронная запись акустических давле-

ний по двум измерительным каналам. Остановка записи выполнялась в автоматическом режиме после 2 секунд с момента её начала.

После записи сигналов выполнялась обработка сигналов и анализ полученных результатов с помощью программного комплекса "AAS": исследование характеристик взаимосвязи и их аппроксимация, а также проведение спектрального анализа.

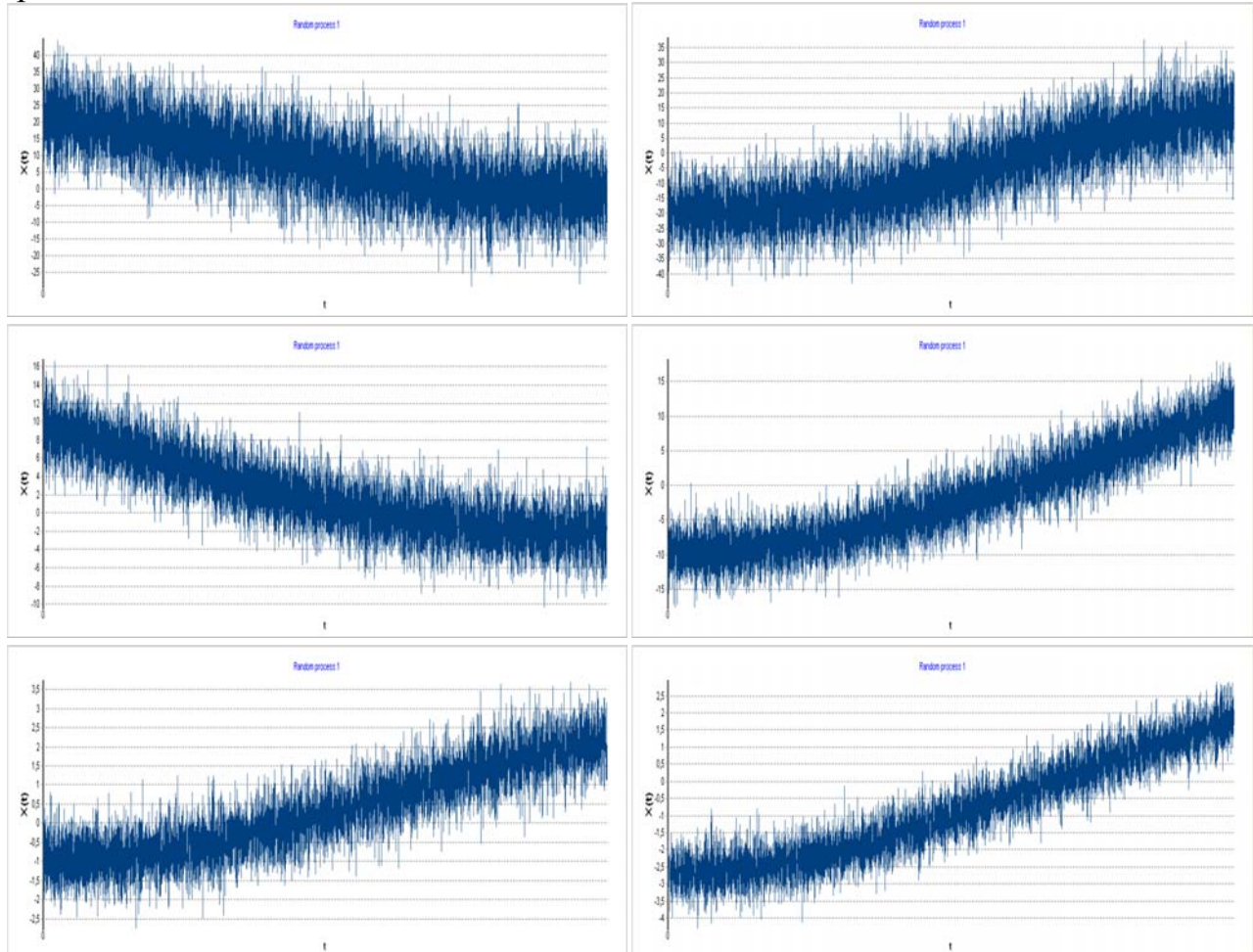


Рисунок 4.23 – Записи акустических сигналов

Исследование взаимосвязи между отсчетами осуществлялось на основе аппарата корреляционных функций, по результатам вычисления которых строилась ее ортогональная модель и далее, уже с использованием аналитических выражений, проводился анализ. При этом для получения корректных результатов исходный временной ряд подвергался предобработке с целью избавления от тренда, так как исходная случайная последовательность характеризуется нестационарностью. Вместо корреляционного анализа предлагается использование методики, основанной на аппарате структурных функций, что позволяет без дополнительных предварительных этапов подготовки временного ряда, напрямую определять взаимосвязь между его отсчетами (рисунок 4.24).

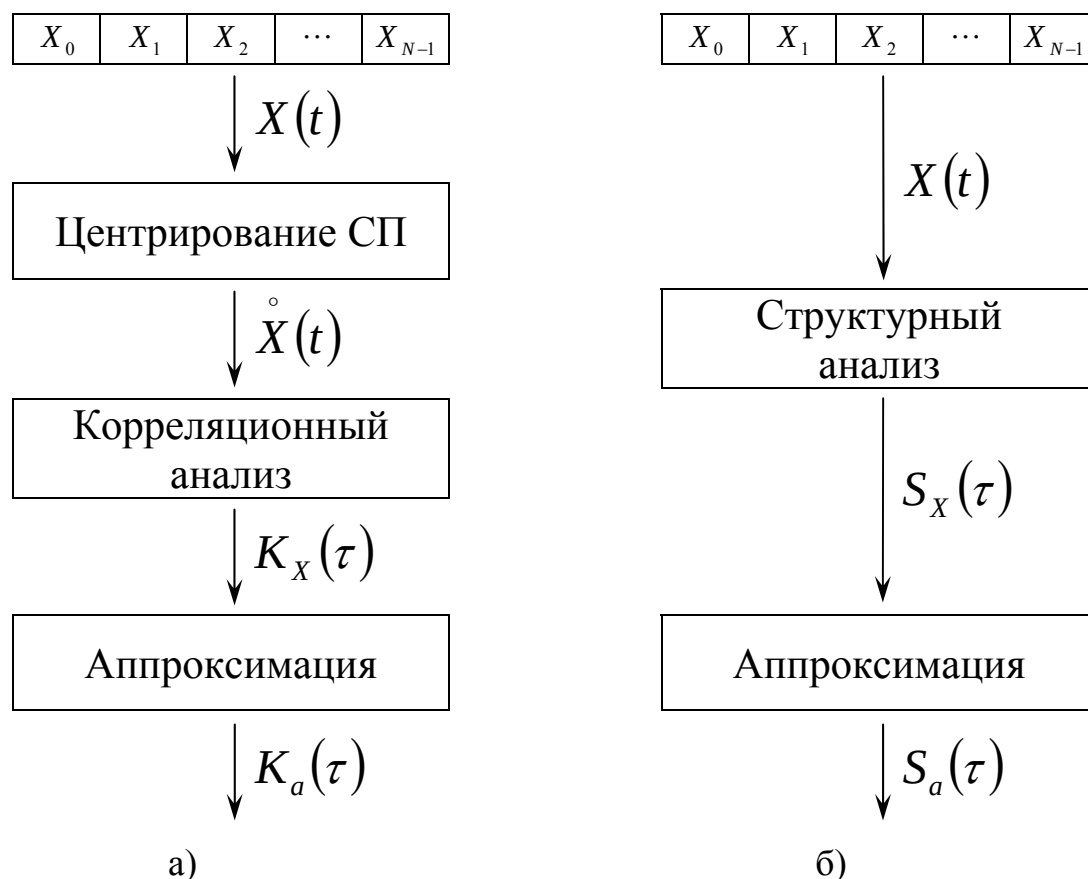


Рисунок 4.24 – Общая схема получения модели характеристики взаимосвязи: а) корреляционной функции; б) структурной функции

На рисунке 4.25 представлен сигнал, который подвергался анализу. После преобразования данных в необходимый формат производилось центрирование исходной псевдослучайной последовательности с помощью методов, описанных в [46]. После центрирования ПСП имела вид, который изображен на рисунке 4.26.

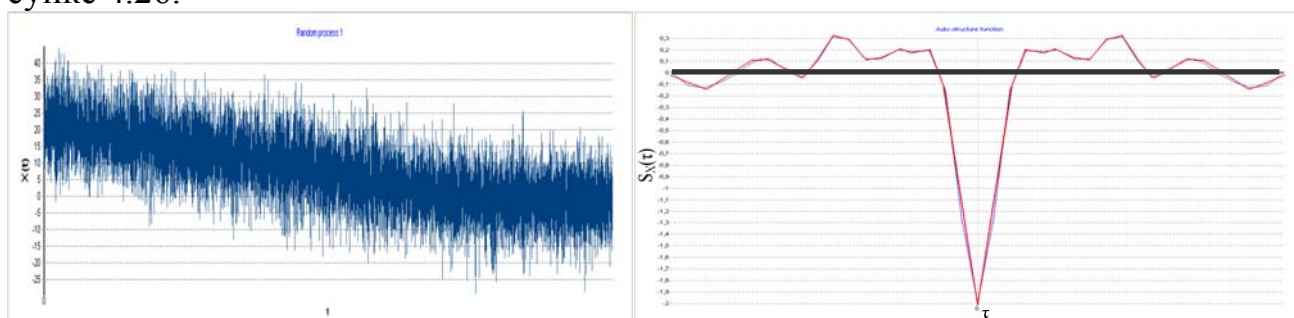


Рисунок 4.25 – Вариант сигнала, полученного с микрофона, и его ЦСФ, а также ее аппроксимация

И только после этого может быть применен корреляционный анализ, заключающийся в данном случае в вычислении корреляционной функции и построении ее ортогональной модели. На рисунке 5.8 представлена центрированная структурная функция, вычисленная по исходной реализации случайного процесса, а также ортогональная модель ЦСФ. Относительные методические погрешности аппроксимации КФ и ЦСФ, полученные в данных условиях, отли-

чаются не сильно: $\delta_K = 0,093$ и $\delta_S = 0,089$ соответственно. Но, в случае корреляционного анализа, предварительное центрирование временной последовательности [46] обусловлено соответствующей дополнительной погрешностью.

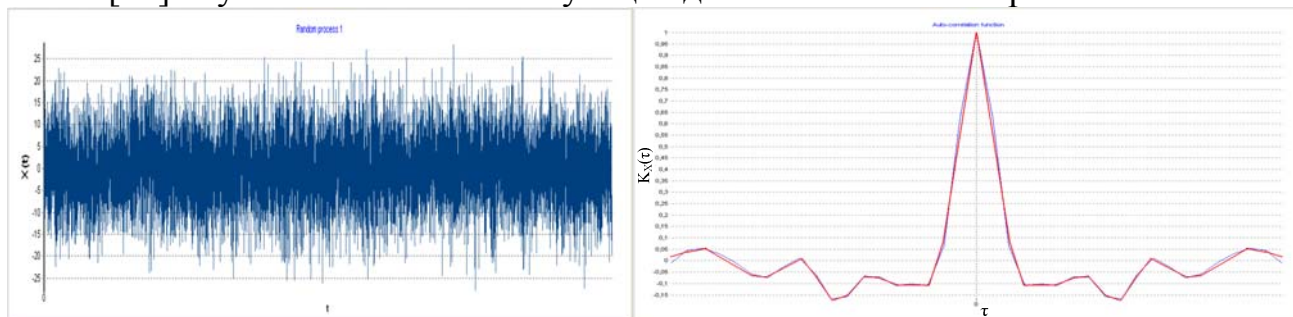


Рисунок 4.26 – Сигнал с микрофона после центрирования и его корреляционная функция, а также ее аппроксимация

По полученным ортогональным моделям КФ и ЦСФ определяется спектральная плотность мощности (рисунок 4.27). Анализ вычисленных модулей спектральных плотностей мощности подтверждает, что использование аппарата структурных функций в решении данной задачи позволяет уменьшить результирующую погрешность вычисления и, к тому же, уменьшить количество проводимых вычислительных операций, что не только упрощает применение данного метода, но и значительно сокращает время, затрачиваемое на анализ.

Если не применять операцию предварительного центрирования, в случае проведения корреляционного анализа ортогональные модели КФ будут характеризоваться очень большими значениями погрешностей аппроксимации (рисунки 1.2 – 1.3). Это обстоятельство обусловлено тем, что вместо корреляционных функций будут вычисляться ковариационные, которые крайне редко стремятся к нулю, при стремлении их аргументов к бесконечности.

Также необходимо отметить, что в условиях текущей задачи применение структурных функций дает более устойчивый результат и в случае анализа центрированных реализаций случайного процесса. На рисунке 4.28 представлены корреляционные и структурные функции, вычисленные для процессов, полученных путем центрирования одной и той же реализации нестационарного случайного процесса. Центрирования проводились по различным алгоритмам, вследствие чего получались СП, характеризующиеся отличающимися друг от друга корреляционными функциями,

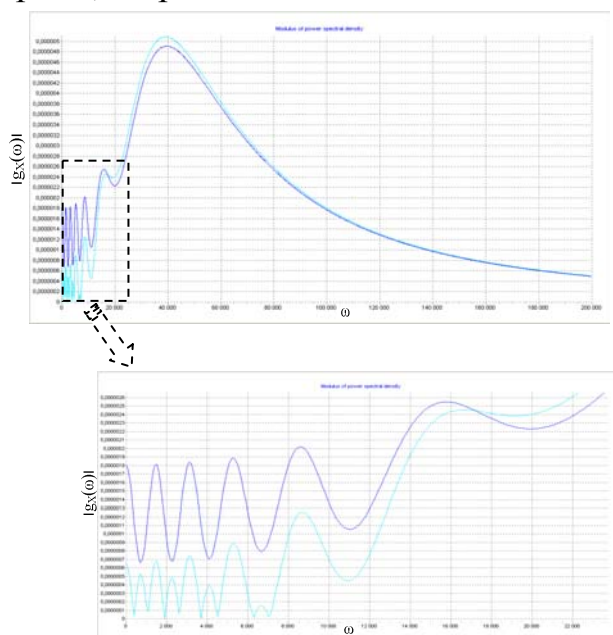


Рисунок 4.27 – Модули спектральных плотностей мощности, вычисленные по ортогональным моделям СФ и КФ

при этом структурные функции проявляют стабильность и практически не зависят от алгоритма центрирования.

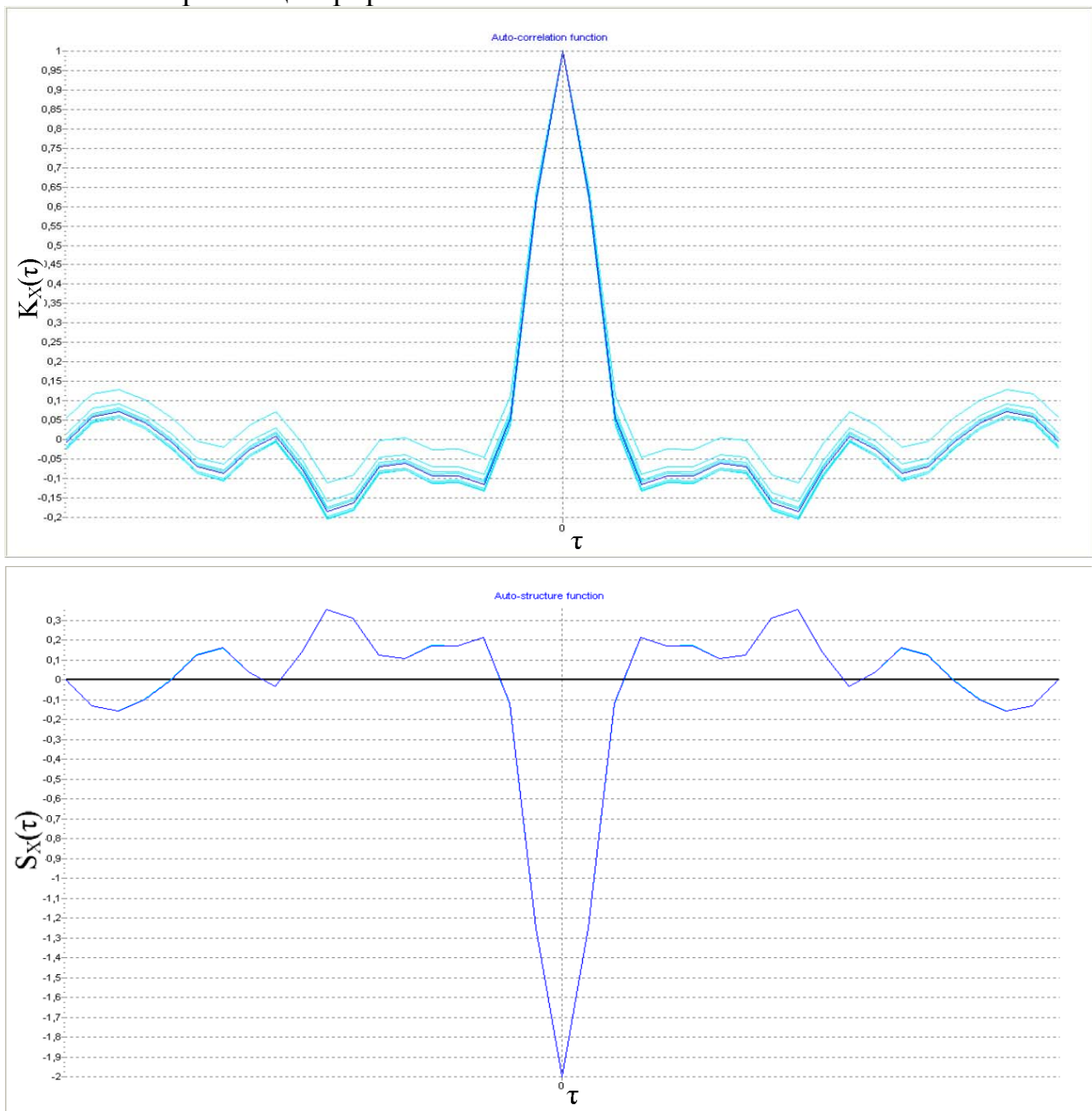


Рисунок 4.28 – Корреляционные и структурные функции центрированных реализаций некоторого НСП

5 Лабораторный практикум по структурно-спектральному анализу

5.1 Исследование свойств ортогональных полиномов

Цель работы: изучение основных свойств классических ортогональных полиномов, приобретение навыков работы с ними.

5.1.1 Теоретические основы лабораторной работы

В данной главе рассматриваются понятия и определения, необходимые для описания и исследования ортогональных полиномов и функций, применяемых для построения функциональных вероятностных характеристик случайных процессов [24].

Определение 1. Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *функцией с суммируемым квадратом*, если

$$\int_a^b f^2(x)dx < \infty. \quad (5.1)$$

Множество всех функций с суммируемым квадратом обозначается обычно символом L_2 - $f(x) \in L_2$. Отметим, что и $cf(x) \in L_2$, где $c = const$.

Определение 2. *Нормой* функции $f(x)$ называется число, определяемое выражением

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}. \quad (5.2)$$

Отметим, что

1. $\|f\| \geq 0$, причем $\|f\| = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ тождественно равно нулю;

2. $\|cf\| = |c|\|f\|$ и, в частности, $\|f\| = \|-f\|$;

3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Введение нормы позволяет рассматривать L_2 как метрическое пространство, в котором можно производить измерения, если принять число

$$\rho(f, g) = \|f - g\|$$

за расстояние между элементами f и g класса L_2 .

При этом расстояние $\rho(f, g)$ обладает следующими свойствами:

1. $\rho(f, g) \geq 0$, причем $\rho(f, g) = 0$ тогда и только тогда, когда $f = g$;

2. $\rho(f, g) = \rho(g, f)$;

3. $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$.

Если на некотором множестве A элементов любой природы задана функция $\rho(f, g)$, то множество A называют метрическим пространством. Следова-

тельно, множество L_2 – метрическое пространство. Впервые эту точку зрения на L_2 развил Д. Гильберт, поэтому L_2 часто называют пространством Гильберта.

Определение 3. Элемент f пространства L_2 называется пределом последовательности $f_1, f_2, \dots$ элементов этого же пространства, если всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое N , что при всех $n > N$ будет выполняться

$$\|f - f_n\| < \varepsilon, \text{ т.е.} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0. \quad (5.3)$$

Этот вид сходимости последовательности функций называется *сходимостью в среднем*.

Определение 4. Две функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные на отрезке $[a, b]$, называются *взаимно ортогональными*, если

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0. \quad (5.4)$$

Определение 5. Функция $f_n(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *нормированной*, если

$$\int_a^b f_n^2(x)dx = 1. \quad (5.5)$$

Отметим, что в общем случае $\int_a^b f^2(x)dx = \|f\|^2$ и $f_n(x) = \frac{f(x)}{\|f\|}$.

Определение 6. Система функций $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots$, заданных на отрезке $[a, b]$, называется *ортонормальной* системой, если каждая функция системы нормирована, а любые две функции системы ортогональны. Иначе говоря, система функций $\{\psi_k(x)\}$ *ортонормальна*, если

$$\int_a^b \psi_{n,k}(x)\psi_{n,n}(x)dx = \begin{cases} 1, \text{ если } k = n; \\ 0, \text{ если } k \neq n. \end{cases} \quad (5.6)$$

Определение 7. Система функций $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots$, заданных на отрезке $[a, b]$, называется *ортogonalной* системой, если любые две функции системы ортогональны:

$$\int_a^b \psi_k(x)\psi_n(x)dx = \begin{cases} \|\psi_k\|^2, \text{ если } k = n; \\ 0, \text{ если } k \neq n. \end{cases} \quad (5.7)$$

Отметим, что $\psi_{n,k}(x) = \frac{\psi_k(x)}{\|\psi_k\|}$.

Определение 8. Пусть $\{\psi_{n,k}(x)\}$ есть ортонормальная система и $f(x)$ некоторая функция из L_2 . Тогда числа

$$\beta_k = \int_a^b f(x) \psi_{n,k}(x) dx \quad (5.8)$$

называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ в системе функций $\{\psi_{n,k}(x)\}$.

Для ортогональной системы $\{\psi_k(x)\}$ коэффициенты Фурье функции $f(x)$ определяются в виде

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|} \int_a^b f(x) \psi_k(x) dx. \quad (5.9)$$

Определение 9. Ряд $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \psi_{n,k}(x)$

называется рядом Фурье функции $f(x)$ в системе $\{\psi_{n,k}(x)\}$.

Рассмотрим, насколько близка в пространстве Гильберта частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_{n,k}(x), \quad (5.10)$$

к самой этой функции, т.е. вычислим $\|f - f_m\|^2$. С учетом свойств ортогональности (см. определение 6), получим

$$\|f - f_m\|^2 = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_{n,k}(x) \right]^2 dx = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^m \beta_k^2. \quad (5.11)$$

Это равенство называется **тождеством Бесселя**. Так как его левая часть не отрицательна, то из него следует **неравенство Бесселя**

$$\sum_{k=0}^m \beta_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (5.12)$$

Поскольку m произвольно, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (5.13)$$

Если

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 = \|f\|^2, \quad (5.14)$$

то это равенство носит название **формулы замкнутости или равенства Парсеваля**.

С учетом (5.14) формулу (5.12) представим в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_m\| = 0. \quad (5.15)$$

Иначе говоря, формула замкнутости означает, что частные суммы $f_m(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ **сходятся в среднем** к этой функции.

Для ортогональной системы функций выражение (5.12) приведем к виду

$$\|f - f_m\|^2 = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(x) \right]^2 dx = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (5.16)$$

Определение 10. Ортонормальная система $\{\psi_{n,k}(x)\}$ называется **замкнутой**, если формула замкнутости имеет место для любой функции из L_2 .

Теорема. Если система $\{\psi_{n,k}(x)\}$ замкнута, то для любой пары функций $f(x)$ и $g(x)$ из L_2 будет

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k, \quad (5.17)$$

где $a_k = \int_a^b f(x)\psi_{n,k}(x)dx,$ (5.18)

$$b_k = \int_a^b g(x)\psi_{n,k}(x)dx. \quad (5.19)$$

Эта формула называется **обобщенной формулы замкнутости**.

Следствие. Если система $\{\psi_{n,k}(x)\}$ замкнута и $f(x) \in L_2$, то ряд Фурье $f(x)$ в системе $\{\psi_{n,k}(x)\}$ можно почленно интегрировать по любому измеримому множеству $E \subset [a, b]$, т.е.

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \int_E \psi_{n,k}(x)dx. \quad (5.20)$$

Определение 11. Система функций $\{\psi_{n,k}(x)\}$, заданных на отрезке $[a, b]$ и принадлежащих L_2 , называется **полной**, если в L_2 не существуют отличной от нуля функции, ортогональной ко всем функциям $\{\psi_{n,k}(x)\}$.

Теорема. Для того, чтобы ортонормальная система $\{\psi_{n,k}(x)\}$ была полная, необходимо и достаточно, чтобы она была замкнута.

Определение 12. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана положительная непрерывная функция $\mu(x)$. Система функций $\{\varphi_k(x)\}$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется **ортогональной** на этом отрезке с весом $\mu(x)$, если

$$\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_n(x)\mu(x)dx = \begin{cases} \|\varphi_k\|^2, & \text{если } k = n; \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases} \quad (5.21)$$

Из ортогональности системы $\{\varphi_k(x)\}$ с весом $\mu(x)$ следует ортогональность системы $\psi_k(x) = \sqrt{\mu(x)}\varphi_k(x)$. Отметим, что в этом случае $\|\varphi_k\| = \|\psi_k\|$.

Отметим, что для построения и исследования ортогональных моделей функциональных вероятностных характеристик необходимо для каждой ортогональной системы определить:

1. интервал ортогональности $[a, b]$;
2. вес;
3. аналитическое выражение ортогональной функции k -го порядка (полинома);

4. рекуррентную формулу определения ортогональной функции k -го порядка;
5. норму ортогональной функции k -го порядка;
6. значение ортогональной функции k -го порядка (полинома) в «нуле»;
7. длительность ортогональной функции k -го порядка;
8. преобразование Фурье ортогональной функции k -го порядка;
9. выражения для коэффициентов разложения для различных моделей исследуемой функциональной характеристики случайных процессов;
10. выражения для оценки методической погрешности аппроксимации функциональной характеристики;
11. аналитические выражения для оценки параметров ортогональных функций;
12. выражения для оценки методической погрешности коэффициентов разложения функциональной характеристики и её составляющих.

Следует отметить, что задачи 1-8 инварианты к виду вероятностной функциональной характеристики, а 9-12 решаются для конкретных случаев.

В предлагаемой лабораторной работе, состоящей из пяти частей, рассматривается только часть из перечисленных вопросов, характерных для ортогональных полиномов.

Первая часть посвящена представлению ортогональных полиномов различными способами. Одним из важнейших алгебраических свойств ортогональных полиномов является возможность представления через формулу Родрига [8]:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{K_n \mu(x)} \frac{d^n [\mu(x) X_n]}{dx^n}, \quad (5.22)$$

где K_n – константа; X_n – многочлен, коэффициенты которого не зависят от n .

Аналитические выражения и вид типовых ортогональных полиномов представлены в Приложении 4.

Там же приводится иная форма представления ортогональных полиномов – в виде конечного ряда, которая получается с применением формулы Лейбница [8], выполнением дифференцирования.

Во второй части требуется определить интервал ортогональности ортогональных полиномов $[a, b]$, под которым понимается их интервал существования.

Находя значения полиномов на границах сегмента ортогональности, необходимо получить значения выражений $\psi_k(a)$ и $\psi_k(b)$.

В третьей части работы производится расчет нормы ортогональных многочленов, которая определяется выражением (5.21).

С другой стороны, норма ортогональных полиномов $\|\psi_k\|^2$ рассчитывается по аналитическим выражениям, данным в Приложении 5. Там же можно найти выражения для соответствующих весовых функций.

В четвертой части необходимо произвести проверку 1-ого необходимого и достаточного условия ортогональности.

В пятой части необходимо произвести проверку 2-ого условия ортогональности – все нули ортогонального многочлена $\psi_k(x)$ действительны, различны и расположены в интервале (a, b) .

В качестве исследуемых ортогональных полиномов предлагается исследовать ортогональные полиномы Лагерра, Лежандра, Дирихле.

В результате проведенных исследований необходимо оформить отчет и сделать вывод по проделанной работе.

5.1.2 Задание на самостоятельную работу

1. Представление ортогональных полиномов k -ого порядка:

1.1. Представить ортогональные полиномы в форме Родрига (если есть) и получить аналитические выражения и графики для первых шести порядков.

1.2. Представить ортогональные полиномы в виде конечного ряда и получить аналитические выражения и графики для первых шести порядков. Сравнить результат с пунктом 1.1.

2. Определить интервал ортогональности $[a, b]$. Рассчитать ортогональные полиномы k -ого порядка на концах интервала ортогональности.

3. Определение нормы ортогональных полиномов:

3.1. Определить значения нормы ортогональных полиномов из выражения (1.22). Результат представить в виде матрицы значений с разрядностью (k, m) , привести графическую интерпретацию $(j = \overline{0, k}, i = \overline{0, m})$.

3.2. Определить значения нормы ортогональных полиномов k -ого порядка, используя выражения, приведенные в таблице П5.1 Приложения 5. Результат представить в виде вектора значений. Сравнить полученный результат с диагональными значениями матрицы (k, m) , полученной в пункте 3.1.

4. Проверить выполняемость 1-ого условия ортогональности;

5. Проверить выполняемость 2-ого условия ортогональности.

6. Оформить отчет.

5.1.3. Содержание отчета

1. Цель работы.

2. Задание.

3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.

4. Результаты выполнения работы в математическом пакете MathCad.

5. Аналитические выражения ортогональных полиномов в форме Родрига и графики для первых шести порядков.

6. Аналитические выражения ортогональных полиномов в виде конечного ряда и графики для первых шести порядков.

7. Значения интервал ортогональности $[a, b]$ и значения ортогональных полиномов k -ого порядка на концах интервала ортогональности.

8. Выражения для нормы ортогональных полиномов.

9. Значения нормы ортогональных полиномов k -ого порядка, используя выражение, приведенное в таблице П5.1 Приложения 5. Результат представить в виде вектора значений.

10. Результаты проверки выполняемости 1-ого условия ортогональности.
11. Результаты проверки выполняемости 2-ого условия ортогональности.
12. Выводы.

5.1.4 Контрольные вопросы

1. Что называют интервалом ортогональности ортогональных многочленов? От чего зависит его значение?
2. Что такое весовая функция и как она влияет на поведение ортогонального многочлена?
3. Каким образом можно получить ортогональную систему функций? Что для этого необходимо?
4. Чем ортогональная линейно независимая система функций отличается от линейно независимой системы функций? Что понимают под матрицей ортогонализации?
5. Что такое ортогональный многочлен и каковы его основные характеристики?
6. Каким важным алгебраическим свойством обладают ортогональные многочлены? Что оно дает?
7. Назовите 1-ое и 2-ое условия ортогональности. О чем говорит их выполняемость?

5.2 Исследование свойств ортогональных функций

Цель работы: исследование свойств ортогональных функций и определение их основных характеристик.

5.2.1 Теоретические основы лабораторной работы

При решении значительного количества прикладных задач наиболее часто применяются ортогональные функции, определенные на интервале $[0, \infty)$ [51]. Как правило, они получаются из соответствующих ортогональных полиномов путем введения замены:

$$x = 1 - ae^{-c\gamma\tau}, \quad (5.23)$$

где γ – параметр масштаба; c – целое число, определяемое для каждого ортогонального базиса; a – параметр, который зависит от заданного сегмента ортогональности (см. таблицу П.5.2 Приложения 5).

С учетом введенной замены (5.23) выражение для определения нормы примет следующий вид:

$$\int_0^\infty \psi_k (1 - ae^{-c\gamma\tau}) \psi_m (1 - ae^{-c\gamma\tau}) d(1 - ae^{-c\gamma\tau}) = \begin{cases} \|\psi_k\|^2, & k = m; \\ 0, & k \neq m. \end{cases} \quad (5.24)$$

Проделав ряд преобразований, получим:

$$\int_0^{\infty} \psi_k (1 - ae^{-c\gamma\tau}) \psi_m (1 - ae^{-c\gamma\tau}) \mu (1 - ae^{-c\gamma\tau}) e^{-c\gamma\tau} d\tau = \begin{cases} \frac{\|\psi_k\|^2}{ac\gamma}, & k = m; \\ 0, & k \neq m. \end{cases} \quad (5.25)$$

Выражение (5.25) показывает, что ортогональные полиномы $\psi_k(x)$ преобразуются в ортогональные функции:

$$\psi_{k,f}(\tau, \gamma) = \psi_k(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \sqrt{\mu(1 - ae^{-c\gamma\tau})} e^{-\frac{c\gamma\tau}{2}}, \quad (5.26)$$

определенные на интервале $[0, \infty)$ с весом $\mu(\tau, \gamma) = 1$ и нормой

$$\|\psi_{k,f}\|^2 = \frac{\|\psi_k\|^2}{ac\gamma}. \quad (5.27)$$

Ортогональные функции k -ого порядка в различных базисах и их основные характеристики представлены в Таблице П5.2 Приложения 5. По аналогии с импульсной переходной характеристикой можно ввести понятие длительности ортогональной функции, применяемое в различных приложениях [51]:

$$\tau_{k,u}^{(2)} = \int_0^{\infty} \psi_{k,f}(\tau, \gamma) d\tau. \quad (5.28)$$

$$\tau_{k,u}^{(4)} = \int_0^{\infty} \psi_{k,f}^2(\tau, \gamma) d\tau = \|\psi_{k,f}\|^2. \quad (5.29)$$

В дальнейшем при рассмотрении только ортогональных функций индекс f будет опущен.

В качестве примера рассмотрим ортогональные полиномы Дирихле на интервале $[0, 1]$ с весом $\mu(x) = 1$

$$D_k(x) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} (1-x)^{\frac{s}{2}} \quad (5.30)$$

и преобразуем их в ортогональные функции на интервале $[0, \infty)$.

Отметим, что значение ортогональных полиномов в «нуле»

$$D_k(0) = 1, \quad (5.31)$$

а

$$\|D_k\|^2 = \int_0^1 D_k(x) D_m(x) \mu(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & m = k; \\ 0, & m \neq k. \end{cases} \quad (5.32)$$

В соответствии с (5.23) для преобразования интервала $[0, 1]$ в диапазон $[0, \infty)$ введем замену переменных $x = 1 - e^{-2\alpha\tau}$. С учетом введенной замены выражение (5.32) примет вид:

$$2\alpha \int_0^{\infty} D_k(1 - e^{-2\alpha\tau}) D_m(1 - e^{-2\alpha\tau}) e^{-2\alpha\tau} \mu(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & m = k; \\ 0, & m \neq k. \end{cases} \quad (5.33)$$

Соотношение (5.33) показывает, что ортогональные полиномы преобразуются в функции, ортогональные на интервале $[0, \infty)$ с весом $\mu(\tau) = 1$.

$$D_k(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau} D_k(1 - e^{-2\alpha\tau}) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} e^{-(s+1)\alpha\tau}. \quad (5.34)$$

Квадрат нормы с учетом (5.32) имеет вид:

$$\int_0^\infty D_k(\tau, \alpha) D_m(\tau, \alpha) \mu(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha(k+1)}, & m = k; \\ 0, & m \neq k, \end{cases} \quad (5.35)$$

а

$$\tau_{k,u}^{(2)} = \int_0^\infty D_k(\tau, \alpha) d\tau = \frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha}. \quad (5.36)$$

5.2.2 Задание на самостоятельную работу

1. Получение ортогональных функций k -ого порядка:

1.1. Получить ортогональные функции из ортогональных полиномов k -ого порядка путем введения соответствующей замены, приведенной в Приложении 5, и использования выражения (5.25). Найти аналитические выражения и графики для первых шести порядков.

1.2. Получить ортогональные функции, используя представление, приведенное в Приложении 5. Найти аналитические выражения и графики для первых шести порядков. Полученный результат сравнить с пунктом 1.1.

2. Рассчитать значения ортогональных функций k -ого порядка в «нуле».

3. Определение нормы ортогональных функций:

3.1. Определить значение нормы ортогональных функций из выражения (5.27). Результат представить в виде матрицы значений с разрядностью (k, m) , привести графическую интерпретацию $(j = \overline{0, k}, i = \overline{0, m})$.

3.2. Определить значения нормы ортогональных функций k -ого порядка, используя выражения, приведенные в Приложении 5. Результат представить в виде вектора значений. Сравнить полученный результат с диагональными значениями матрицы (k, m) , полученной в пункте 3.1.

4. Рассчитать длительности ортогональных функций, используя выражения (5.28) и (5.29). Построить графические зависимости $\tau_{k,u}^{(2)}$ и $\tau_{k,u}^{(4)}$ ортогональных функций k -ого порядка от параметра масштаба. Спроектировать двумерную зависимость длительности от порядка и параметра масштаба для каждого из выражений.

5. Оформить отчет.

5.2.3 Содержание отчета

1. Цель работы.

2. Задание.

3. Исходный текст программы, написанный в MathCad.

4. Результаты выполнения работы в математическом пакете MathCad.

5. Аналитические выражения и графики для первых шести порядков ортогональных функций.

6. Аналитические выражения и графики для первых шести порядков ортогональных функций, используя представление, приведенное в Приложении 5.

7. Значения нормы ортогональных функций k -ого порядка, используя выражение, приведенное в Приложении 5 представить в виде аналитического выражения и вектора значений.

8. Построить графическую зависимость длительности ортогональной функции k -ого порядка от параметра масштаба. Спроектировать двумерную зависимость от k и параметра масштаба.

9. Значения ортогональных функций k -ого порядка в «нуле».

10. Выводы.

5.2.4 Контрольные вопросы

1. Почему при решении ряда прикладных задач ортогональные полиномы предпочитают ортогональным функциям?

2. При решении каких задач целесообразно использовать ортогональные полиномы, ортогональные функции?

3. Что дает получение ортогонального многочлена с единичной весовой функцией?

4. Для каких целей вводят параметр масштаба ортогональных функций? Какие значения он может принимать?

5. Что понимают под длительностью ортогональной функции, и какой смысл она имеет?

6. Чем отличаются два введенных определения длительности? Для чего введено второе определение, и в каких случаях его целесообразно использовать.

7. О чем говорит полученная двумерная зависимость?

5.3 Определение максимальной длительности и интервала дискретизации ортогональных функций

Цель работы: изучение методов и приобретение навыков в определении максимальной длительности и интервала дискретизации ортогональных функций.

5.3.1 Теоретические основы лабораторной работы

Длительность ортогональной функции k -ого порядка $\tau_{k\max}$ определяется в результате решения уравнения:

$$|\psi_k(\tau > \tau_{k\max}, \alpha)| \leq \Delta, \quad (5.37)$$

где Δ – заданная погрешность,

α – параметр масштаба ортогональных функций.

Таким образом, под длительностью ортогональной функции понимается временной интервал от начала координат до точки пересечения с линиями Δ или $-\Delta$, после которой функция не выходит из коридора $[-\Delta, \Delta]$. На рисунке 5.1 показан пример определения длительности ортогональной функции k -ого

порядка. Также с заданной погрешностью можно считать, что вне интервала $[0, \tau_{k \max}]$ функция тождественно равна 0.

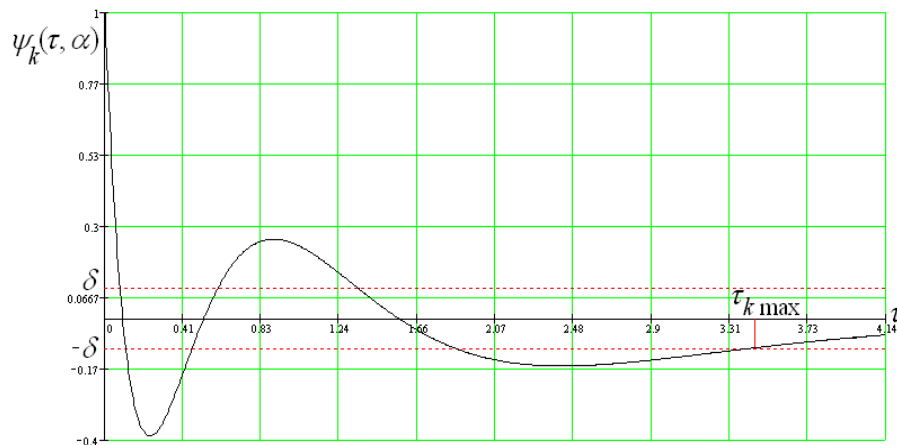


Рисунок 5.1 – Длительность ортогональной функции

Интервал дискретизации при линейной интерполяции с заданной погрешностью можно вычислить по формуле [51]:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{8\delta}{\|\psi_k''\|_{\max}}}, \quad (5.38)$$

где δ – заданная погрешность восстановления,

$\|\psi_k''\|_{\max}$ – максимальное по модулю значение второй производной соответствующей функции.

Число интервалов дискретизации:

$$n = \text{ent} \left[\frac{\tau_{k \max}}{\Delta t} + 0,5 \right], \quad (5.39)$$

где $\text{ent}[\]$ – целая часть от числа, $\tau_{k \max}$ – максимальная длительность ортогональной функции k -ого порядка, Δt – интервал дискретизации.

5.3.2 Задание на самостоятельную работу

1. Задать вид ортогональных функций.
2. Задать порядок ортогональной функции.
3. Задать значение параметра масштаба.
4. Задать погрешность приближения $\delta = 0,02, 0,05, 0,1$.
5. Построить график ортогональной функции.
6. На основании графика приблизительно определить интервал, внутри которого находится значение $\tau_{k \max}$ для данной функции и заданном значении погрешности приближения.
7. Получить на основании общей формулы ортогональных функции частные формулы функции, ее первой, второй и третьей производных.
8. Вычислить максимум второй производной.
9. Вычислить интервал дискретизации для ортогональной функции.
10. Определить максимальную длительность ортогональной функции.

11. Вычислить количество интервалов дискретизации.
12. Занести все полученные значения (максимум второй производной, длительность функции, интервал дискретизации, число интервалов дискретизации) в таблицу.
13. Повторить п. 1.4-1.12 для каждого из заданных значений погрешности приближения.
14. Повторить п. 1.3-1.13 для каждого заданного значения параметра масштаба.
15. Повторить п. 1.2-1.14 для каждого заданного порядка ортогональных функций.
16. Построить зависимость $\tau_{kmax} = f_1(k / \alpha)$.
17. Построить зависимость $\tau_{kmax} = f_2(\alpha / k)$.
18. Построить зависимость $\Delta t = f_3(k / \alpha)$.
19. Оформить отчет.

5.3.3 Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанный в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в математическом пакете MathCad.
5. Метод и алгоритм нахождения интервала дискретизации и длительности функции.
6. Графики заданных ортогональных функций.
7. Формулы заданных ортогональных функций и их трех первых производных.
8. Выводы.

5.3.4 Контрольные вопросы

1. Поясните физический смысл длительности ортогональной функции.
2. Какой информацией необходимо располагать для определения интервала дискретизации ортогональных функций?
3. Как изменяется длительность ортогональной функции с увеличением её порядка?
4. Как изменяется число интервалов дискретизации с увеличением погрешности восстановления?

5.4 Частотные характеристики ортогональных функций

Цель работы: исследование частотных характеристик ортогональных функций.

5.4.1 Теоретические основы лабораторной работы

Рассмотрим ортогональные базисы Лагерра $L_k(\tau, \alpha)$, Лежандра $L_k(\tau, \alpha)$, $Leg_k(\tau, \alpha)$, Дирихле $D_k(\tau, \alpha)$ и их свойства (см. таблицу 5.1) [63].

Таблица 5.1 – Ортогональные функции Лагерра, Лежандра, Дирихле

№	$\{\psi_k(\tau, \alpha)\}$	$\ \psi_k(\alpha)\ ^2$	$\psi_k(0, \alpha)$
1	$L_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)!} \cdot \frac{(-\alpha\tau)^s}{(s!)^2} e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}$	$\frac{1}{\alpha}$	1
2	$Leg_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s e^{-(2s+1)\alpha\tau}$	$\frac{1}{2\alpha(2k+1)}$	$(-1)^k$
3	$D_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} e^{-(s+1)\alpha\tau}$	$\frac{1}{2\alpha(k+1)}$	1

Найдем преобразование Фурье ортогональных функций (см. таблицу 5.2)

$$W_k(j\omega) = \int_0^\infty \psi_k(\tau, \alpha) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (5.40)$$

Таблица 5.2 – Преобразование Фурье ортогональных функций

№	Наименование	$W_k(j\omega)$
1	Лагерра	$\frac{1}{j\omega + \alpha/2} \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k$
2	Лежандра	$\frac{1}{(2k+1)\alpha + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\alpha - j\omega}{(2s+1)\alpha + j\omega}$
3	Дирихле	$\frac{1}{j\omega + (k+1)\alpha} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{j\omega - (s+1)\alpha}{j\omega + (s+1)\alpha}$

Из результатов, представленных в таблице 5.2, видно, что преобразование Фурье рассматриваемых ортогональных функций можно представить в общем виде [63]:

$$W_k(j\omega) = \frac{1}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{j\omega - 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2}{j\omega + 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2} [\psi_s(0, \alpha)]. \quad (5.41)$$

Выражение (5.41) приведем к виду

$$W_k(j\omega) = \frac{2\|\psi_k(\alpha)\|^2}{1 + j2\|\psi_k(\alpha)\|^2 \omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{j2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega - 1}{j2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega + 1} [\psi_s(0, \alpha)]. \quad (5.42)$$

$$(5.43)$$

Введем обозначения $tg\phi_s = 2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega$, $\phi_s = \arctg 2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega$. Тогда

$$\begin{aligned} W_k(j\omega) &= \frac{2\|\psi_k(\alpha)\|^2}{1 + jtg\phi_k} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{jtg\phi_s - 1}{jtg\phi_s + 1} [\psi_s(0, \alpha)] = \\ &= 2\|\psi_k(\alpha)\|^2 (-1)^k \cos\phi_k \exp\left(-j\left(\phi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \phi_s\right)\right) \psi_k(0, \alpha). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Отсюда

$$Re W_k(j\phi) = 2\|\psi_k(\alpha)\|^2 (-1)^k \cos\phi_k \cos\left[\phi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \phi_s\right] \psi_k(0, \alpha); \quad (5.45)$$

$$\operatorname{Im} W_k(j\phi) = -2\|\psi_k(\alpha)\|^2 (-1)^k \cos \phi_k \sin \left[\phi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \phi_s \right] \psi_k(0, \alpha); \quad (5.46)$$

$$|W_k(j\phi)| = 2\|\psi_k(\alpha)\|^2 \cos \phi_k; \quad (5.47)$$

$$\Phi_k(j\phi) = - \left(\phi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \phi_s \right) + \operatorname{ent} \left[\frac{\phi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \phi_s}{\pi} + 0,5 \right] \pi. \quad (5.48)$$

Полученные выражения для преобразования Фурье ортогональных функций позволяют решать разнообразные задачи аппроксимативного анализа случайных процессов. Так, например, из (5.44) можно найти выражение для определения интеграла от ортогональных функций (см. таблицу 5.3).

$$\tau_{k,u}^{(2)} = \int_0^\infty \psi_k(\tau, \alpha) d\tau = W_k(0, \alpha) = 2\|\psi_k(\alpha)\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k. \quad (5.49)$$

Таблица 5.3 – Выражения для определения интеграла от ортогональных функций

№	Наименование	$\tau_{k,u}^{(2)}$
1	Лагерра	$\frac{2(-1)^k}{\alpha}$
2	Лежандра	$\frac{1}{\alpha(2k+1)}$
3	Дирихле	$\frac{(-1)^k}{\alpha(k+1)}$

Введем понятие полосы пропускания линейной динамической системы [61]:

$$\Delta\omega_c = \frac{\int_0^\infty |W_m(j\omega)|^2 d\omega}{|W_m(j\omega)|_{\max}^2}, \quad (5.50)$$

где $W_m(j\omega)$ – частотная характеристика семейства ортогональных функций;
 $|W_m(j\omega)|^2$ – квадрат модуля частотной характеристики семейства ортогональных функций.

Графически полоса пропускания показана на рисунке 5.2.

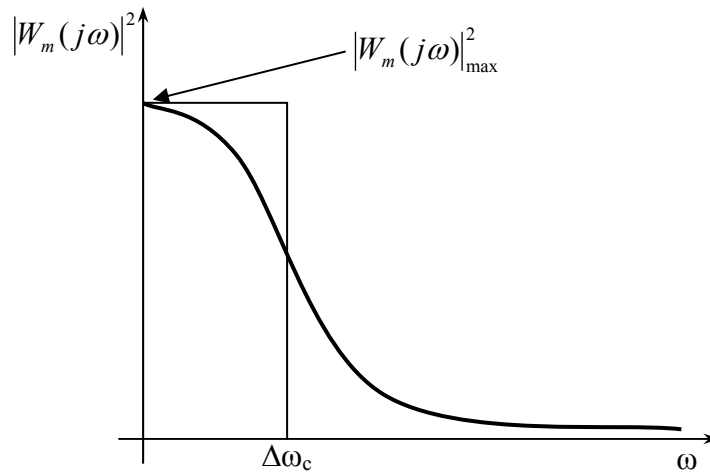


Рисунок 5.2. Полоса пропускания линейной динамической системы

Значения полосы пропускания линейной динамической системы для различных ортогональных функций приведены в таблице 5.4.

Таблица 5.4 – Полоса пропускания линейной динамической системы

Ортогональный базис	$\Delta\omega_c$
Лагерра	$\frac{\pi\alpha}{4}$
Лежандра	$\frac{\pi\alpha(2m+1)}{2}$
Дирихле	$\frac{\pi\alpha(m+1)}{2}$

Воспользовавшись понятием $\Delta\omega_c$, можно получить аналитическое выражение соотношения неопределенности [70]:

$$\Delta\omega_c \cdot \tau_u^{(2)} = \frac{\pi}{2}, \quad (5.51)$$

где $\tau_u^{(2)}$ – длительность импульсной характеристики линейной динамической системы

$$\tau_{uk}^{(2)} = \frac{\int_0^\infty H_k(\tau) d\tau}{H_k(\tau)_{\max}}. \quad (5.52)$$

Учитывая, что длительность импульсной характеристики фильтров нижних частот, к которым относятся ортогональные фильтры, с погрешностью $\delta = 0,02$ равна $\tau_{uk}^{(2)} = \frac{\Delta\tau}{0.4}$, полоса пропускания линейной динамической системы примет вид [61]:

$$\Delta\omega_c = \frac{0,2 \cdot \pi}{\Delta\tau}. \quad (5.53)$$

Отсюда можно определить значение параметра масштаба для различных ортогональных базисов, значения которых сведены в таблицу 2.5.

5.4.2 Задание на самостоятельную работу

1. Для заданных систем ортогональных функций для $m = 0 - 4$ и $\alpha = const$ построить частотные характеристики, соответствующие выражениям (5.45)-(5.48).
2. Для заданных систем ортогональных функций и $\alpha / \gamma = const$ построить $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_1(m / \alpha)$ для $m=0-4$.
3. Для заданных систем ортогональных функций и $m = const$ построить $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_2(/ \alpha / m)$.
4. Построить зависимость полосы пропускания ортогонального фильтра k -го порядка от параметра.
5. Оформить отчет.

5.4.3 Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в математическом пакете MathCad.
5. Графические зависимости $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_1(m / \alpha)$ для $m = 0 - 4$.
6. Графические зависимости $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_2(/ \alpha / m)$.
7. Графические зависимости полосы пропускания ортогонального фильтра k -ого порядка от параметра масштаба.
8. Выводы.

5.4.4 Контрольные вопросы

1. Поясните физический смысл полосы пропускания ортогонального фильтра?
2. Для какой ортогональной системы функций полоса пропускания не зависит от порядка функций?
3. Что такое соотношение неопределенности для ортогонального фильтра?
4. Как определить порядок ортогональной функции по виду вещественной частотной характеристики?

5.5 Ортогональные модели структурных функций

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации структурных функций случайных процессов ортогональными функциями.

5.5.1 Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделах 2.1-2.2.

5.5.2 Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида модели структурной функции и показателя колебательности $\mu = \frac{\omega}{\lambda}$ определить коэффициенты разложения $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$. Построить графическую зависимость $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$.

2. Построить зависимость $\delta^{(1)}(m/\chi, \mu) = \sqrt{\frac{\Delta(m/\chi, \mu)}{\tau_k^{(4)}}}$. Значение параметра χ выбрать произвольно, $\mu = 0 \div 5$. Убедиться в справедливости равенства Парсеваля (см. подраздел 5.2).

3. Построить зависимость $\delta^{(2)}(\chi/m, \mu)$, $m = 2 \div 6$, $\mu = 0 \div 5$ (результаты представить аналогично результатам, представленным на рис. 2.5-2.7; $\chi = \frac{\alpha}{\lambda}$). Определить количество локальных минимумов $\delta(\chi/m, \mu)$, их численные значения $\bar{\chi}_{opt}$ и соответствующие им значения погрешностей.

4. Построить зависимость $\delta_{min}^{(3)}(\mu/m, \chi_{opt})$ и $\delta_{min}^{(1)}(m/\mu, \chi_{opt})$.

5. Сравнить результаты оценки $\delta_1^{(3)}(\mu/m, \chi_1)$, $\delta_2^{(3)}(\mu/m, \chi_2)$, $\delta_1^{(1)}(m/\mu, \chi_1)$, $\delta_2^{(1)}(m/\mu, \chi_2)$ с соответствующими минимальными оценками погрешности. Значение параметра χ_1 и χ_2 определяется по таблице 2.5.

6. Построить модели структурной функции, соответствующие выражению 2.3, для $\lambda = 1$, $\mu = 5$, χ_1 , χ_2 , χ_{opt} , $m = 5, 10$.

7. Оформить отчет.

5.5.3 Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в математическом пакете MathCad.
5. Ортогональная модель структурной функции в заданном ортогональном базисе.

6. Аналитическое выражение для оценки коэффициентов разложения $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$.

7. Аналитические выражения для оценки χ_1 и χ_2 .
8. Графические зависимости $\delta^{(1)}(m/\chi, \mu)$ (пункт 2).
9. Графические зависимости $\delta^{(2)}(\chi/m, \mu)$ (пункт 3).
10. Графические зависимости $\delta_{min}^{(3)}(\mu/m, \chi_{opt})$ и $\delta_{min}^{(1)}(m/\mu, \chi_{opt})$ (пункт 4).
11. Графические зависимости $\delta_1^{(3)}(\mu/m, \chi_1)$, $\delta_2^{(3)}(\mu/m, \chi_2)$, $\delta_1^{(1)}(m/\mu, \chi_1)$, $\delta_2^{(1)}(m/\mu, \chi_2)$ (пункт 5).

12. Графики моделей структурной функции (пункт 6).
13. Выводы.

5.5.4 Контрольные вопросы

1. Какие параметры входят в ортогональную модель структурной функции?
2. Как параметры ортогональной модели влияют на вид оцениваемой структурной функции?
3. Как количество локальных экстремумов погрешности аппроксимации связаны с m и μ ?

5.6 Аппроксимация структурных функций ортогональными функциями при ограничении на её модель

Цель работы: изучение метода и приобретение практических навыков при аппроксимации структурных функций случайных процессов ортогональными функциями при ограничении на её модель.

5.6.1 Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделах 2.1-2.2.

5.6.2 Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида модели структурной функции и показателя колебательности μ и m определить коэффициенты разложения $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$ и $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$. Параметр α задать произвольно. Построить графическую зависимость $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$ и $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$.

2. Построить зависимость $\delta_b^{(2)}(\chi / m, \mu)$, $m = 2 \div 6$, $\mu = 0 \div 5$. Определить количество локальных минимумов $\delta_b^{(2)}(\chi / m, \mu)$, численные значения параметров $\bar{\chi}_{opt}$ и соответствующие им значения погрешностей.

3. Построить зависимость $\delta_{b,min}^{(1)}(\mu / m, \chi_{opt})$ и $\delta_{b,min}^{(2)}(m / \mu, \chi_{opt})$ и сравнить их с соответствующими $\delta_{\beta,min}^{(1)}(\mu / m, \chi_{opt})$ и $\delta_{\beta,min}^{(2)}(m / \mu, \chi_{opt})$.

4. Сравнить результаты оценки $\delta_{b,1}^{(1)}(\mu / m, \chi_1)$, $\delta_{b,2}^{(1)}(\mu / m, \chi_2)$, $\delta_{b,1}^{(2)}(m / \mu, \chi_1)$, $\delta_{b,2}^{(2)}(m / \mu, \chi_2)$ с соответствующими минимальными оценками погрешности. Значение параметра χ_1 и χ_2 определяется по таблице 2.5.

5. Построить модели структурной функции, соответствующие выражению 2.3, для $\lambda = 1$, $\mu = 5$, χ_1 , χ_2 , χ_{opt} , $m = 5, 10$.

6. Оформить отчет.

5.6.3 Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCAD.
4. Результаты выполнения работы в математическом пакете MathCAD.
5. Ортогональная модель структурной функции в заданном ортогональном базисе.
6. Аналитическое выражение для оценки коэффициентов разложения $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$, χ_1 и χ_2 .
7. Графические зависимости $\delta_b^{(2)}(\chi/t, \mu)$ (пункт 2).
8. Графические зависимости $\delta_{b,min}^{(1)}(\mu/t, \chi_{opt})$, $\delta_{b,min}^{(2)}(t/\mu, \chi_{opt})$, $\delta_{\beta,min}^{(1)}(\mu/t, \chi_{opt})$ и $\delta_{\beta,min}^{(2)}(t/\mu, \chi_{opt})$ (пункт 3).
9. Графические зависимости $\delta_{b,1}^{(1)}(\mu/t, \chi_1)$, $\delta_{b,2}^{(1)}(\mu/t, \chi_2)$, $\delta_{b,1}^{(2)}(t/\mu, \chi_1)$, $\delta_{b,2}^{(2)}(t/\mu, \chi_2)$ (пункт 5).
10. Графики моделей структурной функции (пункт 6).
11. Выводы.

5.6.4 Контрольные вопросы

1. Какие параметры входят в ортогональную модель структурной функции?
2. Из каких соображений выбирается значение параметра масштаба ортогональных функций?
3. Как количество локальных экстремумов погрешности аппроксимации связаны с t и μ ?

5.7 Аппроксимация спектральных плотностей мощности

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации спектральных плотностей мощности случайных процессов ортогональными функциями.

5.7.1 Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы приведено в подразделах 2.3-2.4.

5.7.2 Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида модели структурной функции, показателя колебательности μ , воспользовавшись средствами MathCAD, найти выражения для оценки α , коэффициентов разложения $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$ и $\delta_{min}(\alpha, t)$ (см. лабораторную работу 5.5).

2. Найти модель спектральной плотности мощности для определенных параметров нормированной структурной функции, проверить условие нормировки.

3. Найти модель спектральной плотности мощности для параметров $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$ нормированной структурной функции, проверить условие нормировки.

4. Определить корректирующие коэффициенты ζ_k и построить модель спектральной плотности мощности. Проверить условие нормировки.

5. Построить зависимость $M[\delta] = f_2(m/\gamma_k)$.

6. Оформить отчет.

5.7.3 Содержание отчёта

1. Цель работы.

2. Задание.

3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.

4. Результаты выполнения работы в математическом пакете MathCad.

5. Основные соотношения.

6. Результаты расчета, представленные в графической форме.

7. Выводы.

5.7.4 Контрольные вопросы

1. Что такое условие нормировки для спектральной плотности мощности?

2. Из каких соображений определяются корректирующие коэффициенты?

3. Какие способы аппроксимации спектральной плотности мощности в ортогональных базисах существуют? В чем их суть?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемой монографии рассмотрены:

1. алгоритмы аппроксимации структурных функций, в основе которых лежит построение ортогональных моделей центрированных структурных функций. В качестве базисов использованы ортогональные функции Лагерра, Лежандра и Дирихле.

2. алгоритмы определения спектральных плотностей мощности по параметрам ортогональной модели структурной функции и алгоритмы определения структурной функции по результатам аппроксимации спектральной плотности мощности.

3. описана автоматизированная система аппроксимативного структурно-спектрального анализа. В систему включена подсистема имитационного моделирования случайных процессов со стационарными приращениями.

Описанная автоматизированная система может использоваться не только в качестве инструмента при анализе статистических данных, но и при выполнении лабораторных работ. Полученные результаты моделирования и обработки экспериментальных данных могут быть экспортированы в MS Word и MS Excel.

Список использованных источников

1. Gasparov, M.S. High-frequency axial vibration in a combined pump unit with gear stage [Текст] / M.S. Gasparov, A.N. Kruchkov, L.V. Rodionov, E.V. Shakhmatov – Bath, UK: Hadleys Ltd, 2007. – 117-127 pp.
2. Grafkin, V.V. The Specialized Data Type Which Are Exploitable In Tasks Are Critical To Overflow Situations Existent In A Memory Part Used For Storing Variable's Value [Текст] / V.V. Grafkin // Interactive Systems and Technologies: The Problems of Human-Computer Interaction. Collection of scientific papers. – Ulyanovsk: UISTU, 2007. – pp. 239-241.
3. Igolkin, A.A. Calculation and design of exhaust noise muf-flers for power engineering equipment / A.A. Igolkin , A.N. Kruchkov, E.V. Shakhmatov // Proceedings of the 8-th International Symposium «Transport Noise and Vibration. - St Petersburg, 2006.- S.14–16.
4. А.С. №1166135 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления структурной и интервальной функции [Текст] /Прохоров С.А., Иванов С.Г., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№3693028/24-24; 3694521/24; Заявлено 24.01.84; Оpubл. 07.07.85, Бюл. №25. – С.8.
5. А.С. №1288715 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления производной взаимоструктурной функции [Текст] /Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№3750851/24-24; Заявлено 06.06.84; Оpubл. 07.02.87, Бюл. №5. – С.10.
6. А.С. №1355978 СССР, G 06f 15/336. Устройство для определения производной структурной функции [Текст] /Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№4007833/24-24; Заявлено 15.01.86; Оpubл. 30.11.87, Бюл. №44. – С.6.
7. А.С. №964657 СССР, G 06 G 7/19. Устройство для определения коэффициентов разложения структурной функции [Текст] /Батищев В.И., Лизунов В.В. /СССР/.-№3262007/18-24; Заявлено 18.03.81; Оpubл. 07.10.82, Бюл. №37. – С.6.
8. Анго А. Математика для электро и радиоинженеров. М.: Мир, 1965.- 780 с.
9. Андерсон, Т. Статистический анализ временных рядов [Текст] / Т. Андерсон, – М: Мир. 1976 – 757 с.
10. Батищев, В.И. Аппроксимативный анализ случайных процессов со стационарными приращениями / В.И. Батищев // Вестник СамГТУ. Сер. Техн. науки. Самара. 2002. Вып.2. – С.38–50.
11. Батищев, В.И. Аппроксимационные методы и системы промышленных измерений, контроля, испытаний, диагностики [Текст] / В.И. Батищев, В.С. Мелентьев – М.: Машиностроение – 1. 2007 – 393 с. ил.
12. Бердышев, В.И. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения [Текст] / В.И. Бердышев, Л.В. Петрак – Екатеринбург: УрО РАН, 1999. – 298 с.
13. Бернштейн, С.Н. Теория вероятностей [Текст] / С.Н. Бернштейн – Москва. 1927. – 364 с.

14. Бриллинджер, Д. Временные ряды. Обработка данных и теория [Текст] / Д. Бриллинджер – М.: МИР, 1980. – 536 с.
15. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей [Текст] / Е.С. Вентцель – М.: Наука, 1969. – 576 с.
16. Витязев, В.В. Анализ неравномерных временных рядов: Учебное пособие [Текст] / В.В. Витязев – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2001. – 68 с.
17. Витязев, В.В. Спектрально-корреляционный анализ равномерных временных рядов: Учебное пособие [Текст] / В.В. Витязев – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2001. – 48 с.
18. Гайдышев, И. Анализ и обработка данных: специальный справочник [Текст] / И. Гайдышев – СПб.: Питер, 2001. – 752 с.: ил.
19. Графкин, В.В. Аппроксимативный анализ структурных функций в системе MATHCAD [Текст] / В.В. Графкин // Информационные технологии в высшем профессиональном образовании: Сборник докладов II межрегиональной конференции (5-6 июня 2007 г.) / Под ред. О.А. Тарабрина, А.В. Очеповского – Тольятти – Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2007. – с. 26-28.
20. Графкин, В.В. Влияние погрешности оценки коэффициентов разложения на увеличение погрешности аппроксимации корреляционной функции ортогональными функциями с учетом основного свойства [Текст] / В.В. Графкин // Тезисы докладов XXXI Самарской областной студенческой научной конференции. – Часть 1: Общественные, естественные и технические науки. – Самара: Департамент по делам молодежи Самарской области; Совет ректоров вузов Самарской области; Самарский областной совет по научной работе студентов. Самара, 2005. – 196 с. – с. 170-171.
21. Графкин, В.В. Использование методов аппроксимации в электромиографических исследованиях [Текст] / В.В. Графкин, // Тезисы докладов XXXII Самарской областной студенческой научной конференции. – Часть 1: Общественные, естественные и технические науки. – Самара: ГУ Самарской области агентство по реализации молодежной политики; Совет ректоров вузов Самарской области; Самарский областной совет по научной работе студентов. 2006. – с. 212.
22. Графкин, В.В. Подсистема аппроксимативного анализа спектральных функций [Текст] / В.В. Графкин // Научные труды межд. молод. научн. конф. «XXXIV Гагаринские чтения». – М: МАТИ, 2008. – с. 129.
23. Графкин, В.В. Подсистема экспериментальных исследований для аппроксимативного структурного анализа в ортогональных базисах [Текст] / В.В. Графкин // Перспектива 2007: Материалы Международного конгресса студентов, аспирантов и молодых ученых. – Нальчик: Каб-Балк. ун-т, 2007. – с. 22-23.
24. Графкин, В.В. Учебно-исследовательская автоматизированная система аппроксимативного структурно-спектрального анализа случайных процессов [Текст] / В.В. Графкин // Проблемы и перспективы развития двигателестроения. Материалы докладов конкурса программы У.М.Н.И.К., секция

- «Коммерциализация результатов научно-технической деятельности» 24-26 июня 2009 г. – Самара: СГАУ, 2009. – с. 8-9.
25. Джексон, Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы [Текст] / Д. Джексон – М. 1948. – 262 с.
26. Дженкинс, Г. Спектральный анализ и его приложения. Том 1 [Текст] / Г. Дженкинс, Д. Ваттс – М.:МИР, 319 с. – 1971.
27. Дженкинс, Г. Спектральный анализ и его приложения. Том 2 [Текст] / Г. Дженкинс, Д. Ваттс – М.:МИР, 287 с. – 1972.
28. Дьяконов, В.П. Фурье- и вейвлет-преобразования в компьютерной математике [Текст] / В.П. Дьяконов // Материалы международной научно-практической конференции «Информационные технологии в образовании и фундаментальных науках (ИТО-Поволжье – 2007)». – Казань: ТГГПУ, 2007. – с. 346-354.
29. Иголкин, А.А. Влияние установки пневмоглушителя на быстродействие пневмосистемы [Текст] / А.А. Иголкин, А.Н. Крючков, Р.Б. Сейфетдинов, Е.В. Шахматов // Гидропневмоавтоматика и гидропривод – 2005: Сборник научных трудов: В 2 т. Т.2 – Ковров: КГТА, 2006. – С. 20-34.
30. Иголкин, А.А. Выбор параметров глушителей шума выхлопа производственного оборудования [Текст] / А.А. Иголкин, Е.В. Шахматов, А.Н. Крючков // Сборник трудов первого международного экологического конгресса (третьей международной технической конференции) «Экология и безопасность жизнедеятельности промышленно-транспортных комплексов» ELPIT – 2007, том №3 – Тольятти. – С. 11– 17.
31. Коварцев, А.Н. Численные методы [Текст] / А.Н. Коварцев – Самара: НВФ «Сенсоры. Модули. Системы.», 1998. – 143 с.
32. Колмогоров, А. Н. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений [Текст] / А. Н. Колмогоров – ДАН СССР, 1940, т. 26, с. 6-9.
33. Колмогоров, А. Н. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве [Текст] / А. Н. Колмогоров – ДАН СССР, 1940, т. 26, с. 115-118.
34. Котюк, А.Ф. Методы и аппаратура для анализа характеристик случайных процессов [Текст] / А.Ф. Котюк, В.В. Ольшевский, Э.И. Цветков – М.: Энергия. 1967. – 240 с.
35. Крючков, А.Н. Анализ применимости полуэмпирических моделей расчета коэффициента звукопоглощения волокнистых материалов [Текст] / А.Н. Крючков, Р.Б. Сейфетдинов, А.И. Кох // Международная НТК «Проблемы и перспективы развития двигателестроения». Часть 1, Самара, СГАУ, 2006. – с. 91 – 92.
36. Крючков, А.Н. Математическое моделирование пульсаций давления и шума ручного механизированного пневмоинструмента [Текст] / А.Н. Крючков // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. – Самара: СГАУ, № 1(9), 2006. – С. 146-153.

37. Лизунов, В.В. Разработка алгоритмов и устройств для ИИС анализа случайных процессов со стационарными приращениями [Текст] / В.В. Лизунов – Дисс. канд. техн. наук – Куйбышев: 1988, – 205с.
38. Мак-Кракен, Д., Численные методы и программирование на ФОРТРАНе [Текст] / Д. Мак-Кракен, У. Дорн – М.: Мир, 1977. – 586 с.
39. Математический энциклопедический словарь [Текст] – М.: Большая Российская энциклопедия, 1995. – 848 с.
40. Медведев, Г.А. Практикум на ЭВМ по анализу временных рядов: Учеб. пособие [Текст] / Г.А. Медведев, В.А. Морозов – Мн.: Университетское, 2001. – 192 с.
41. Методы нормирования метрологических характеристик, оценки и контроля характеристик погрешностей средств статистических измерений. РТМ 25139-74 [Текст] // Минприбор, 1974. – 76 с.
42. Миллер, Б. М. Теория случайных процессов в примерах и задачах [Текст] / Б. М. Миллер, А.Р. Панков – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.
43. Мирский, Г.Я. Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения [Текст] / Г.Я. Мирский – М.: Энергоиздат. 1982. – 320 с.
44. Носач, В.В. Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров [Текст] / В.В. Носач – М.: МИКАП, 1994. – 382 с.
45. Орвис, В. Дж. EXCEL для ученых, инженеров и студентов: Пер. с англ [Текст] / В. Дж. Орвис – К.: Юниор, 1999. – 528 с., ил.
46. Прикладной анализ случайных процессов [Текст] / Под ред. Прохорова С.А./ СНИЦ РАН, 2007. – 582 с., ил.
47. Прохоров, С.А. Автоматизированная система аппроксимативного анализа случайных процессов со стационарными приращениями [Текст] / С.А. Прохоров, В.В. Графкин // Повышение эффективности средств обработки информации на базе математического моделирования. Материалы докладов VIII Всероссийской научно-технической конференции Часть II. Тамбов, 26-28 апреля 2006 г. – с. 299-308.
48. Прохоров, С.А. Автоматизированная система аппроксимативного структурного анализа ААС [Текст] / С.А. Прохоров, В.В. Графкин // Современные проблемы информатизации в проектировании и информационных системах: Сб. трудов. Вып. 13/ Под ред. д.т.н., проф. О.Я.Кравца – Воронеж: «Научная книга», 2008. – с. 506-512.
49. Прохоров, С.А. Автоматизированный комплекс корреляционно-спектрального анализа методом аппроксимации ортогональными функциями [Текст] / С.А. Прохоров, А.В. Графкин, В.В. Графкин // Вестник Самарского государственного технического университета, серия «Технические науки», №33. – Самара, 2005. – с. 329-334.
50. Прохоров, С.А. Анализ погрешности аппроксимации структурных функций ортогональными функциями экспоненциального типа [Текст] / С.А. Прохоров, В.В. Графкин // Вестник Самарского государственного технического университета, серия «Физико-математические науки», №1(14). – Самара, 2007. – с. 188-190.

51. Прохоров, С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов – 2-е изд., перераб. и доп. [Текст] / С.А. Прохоров – СНЦ РАН, 2001. – 380 с.: ил.
52. Прохоров, С.А. Аппроксимация структурных функций случайных процессов [Текст] / С.А. Прохоров, В.В. Графкин // Математическое моделирование и краевые задачи: МЗЗ. Труды Третьей Всероссийской научной конференции. Ч. 4: Математические модели в информационных технологиях. – Самара: СамГТУ, 2006. – 116 с., ил. с. 82-86.
53. Прохоров, С.А. Корреляционно-спектральный анализ в ортогональных базисах Чебышева [Текст] / С.А. Прохоров, И.М. Куликовских // Радиотехника и связь: Материалы четвертой международной научно-технической конференции. – Саратов, 2007. – с. 12-17.
54. Прохоров, С.А. Лабораторный практикум по структурно-спектральному анализу случайных процессов в ортогональных базисах [Текст] / С.А. Прохоров, В.В. Графкин // Вестник Волжского университета им. В.Н. Татищева. Серия «Информатика». Выпуск одиннадцатый. - Тольятти: ВУиТ, 2008. – с. 203-213.
55. Прохоров, С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов [Текст] / С.А. Прохоров – Самар. гос. аэрокосм. ун-т. 2001. – 209 с.
56. Прохоров, С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум – 2-е изд., переработанное и дополненное [Текст] / С.А. Прохоров – Самара: СНЦ РАН, 2002. 278 с.
57. Прохоров, С.А. Определение спектральной плотности мощности случайного процесса по аппроксимации структурной функции [Текст] / С.А. Прохоров, В.В. Графкин // Радиотехника и связь: материалы третьей Междунар. науч.-техн. конф. – Саратов: СГТУ, 2006. – с. 13-17.
58. Прохоров, С.А. Ортогональные модели корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов. Лабораторный практикум [Текст] / С.А. Прохоров, И.М. Куликовских – СНЦ РАН, 2008. – 301 с., ил.
59. Прохоров, С.А. Оценка структурной функции по параметрам модели спектральной плотности мощности в ортогональных базисах экспоненциального типа [Текст] / С.А. Прохоров, В.В. Графкин // Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении (ПИТ-2006). Труды научно-технической конференции с международным участием. Том 1. – Самара, 2006. – с. 151-153.
60. Прохоров, С.А. Подсистема спектрального анализа случайных процессов [Текст] / С.А. Прохоров, В.В. Графкин // Компьютерные технологии в науке, практике и образовании. Труды пятой Всероссийской межвузовской научно-практической конференции. – Самара, 2006. – с. 53-55.
61. Прохоров, С.А. Программный комплекс корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах [Текст] / С.А. Прохоров, А.В. Графкин – Самара: СНЦ РАН, 2005. – 198 с.
62. Прохоров, С.А. Сравнительный анализ методов определения спектральной плотности мощности по ортогональной модели структурной функции [Текст] / С.А. Прохоров, В.В. Графкин // Известия Самарского научного

- центра Российской академии наук. Том 10 №3 (25) – Самара: Издательство Самарского научного центра РАН, 2008., с. 815-817.
63. Прохоров, С.А. Частотные свойства ортогональных функций экспоненциального типа [Текст] / С.А. Прохоров // Труды научно-технической конференции с международным участием «Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении (ПИТ-2006)». Том 2. – Самара, 2006. – с. 55-62.
 64. Прохоров, С.А. Частотные свойства ортогональных функций Якоби [Текст] / С.А. Прохоров, И.М. Куликовских // Информационные технологии в высшем профессиональном образовании: сборник докладов второй межрегиональной научно-технической конференции. Тольятти, 2007. – с. 125-128.
 65. Прохоров, С.А. Частотные характеристики ортогональных функций Сонина-Лагерра [Текст] / С.А. Прохоров, И.М. Куликовских // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2007. - №15. – с. 123-127.
 66. Прохоров, С.А. Численно-аналитический подход к вычислению интегралов при построении ортогональных моделей / С.А. Прохоров, И.М. Куликовских // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2009. – №2(19). – С. 140-146.
 67. Прохоров, С.А., Автоматизированный комплекс структурно-спектрального анализа методом аппроксимации ортогональными функциями [Текст] / С.А. Прохоров, В.В. Графкин // Проблемы автоматизации и управления в технических системах: труды Международной научно-технической конференции / под ред. д.т.н., проф. М.А.Щербакова – Пенза: Информационно-издательский центр ПензГУ, 2008. – с. 336-338.
 68. Ризкин, И.Х. О случайных процессах, слабо отклоняющихся от эргодических [Текст] / И.Х. Ризкин // Изв. вузов СССР. “Радиофизика”, т. XII, №2, 1969. – с.247-252.
 69. Розенберг, Г.С., Экологическое прогнозирование (Функциональные предикторы временных рядов) [Текст] / Г.С.Розенберг, В.К. Шитиков, П.М. Брусиловский – Тольятти, 1994. – 182 с.
 70. Романенко, А.Ф. Вопросы прикладного анализа случайных процессов [Текст] / А.Ф. Романенко, Г.А. Сергеев – М.: Сов. радио. 1968. – 256 с.
 71. Рытов, С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть 1. Случайные процессы [Текст] / С.М. Рытов – М.: Наука. 1976. – 496 с.
 72. Сергеев, Г.А. Структурный анализ нестационарных случайных процессов. Нелин и оптим. сист [Текст] / Г.А. Сергеев, А.Ф. Романенко – М.: Наука, 1971. – 440 с, с. 420-429.
 73. Суетин, П.К. Классические ортогональные многочлены. Изд 2-е, доп. [Текст] / П.К. Суетин – М.: Наука, 1979. – 416с.
 74. Татарский, В.И. Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере [Текст] / В.И. Татарский – М.: Изд. АН СССР 1953, – 233 с.
 75. Цветков Э.И. Основы теории статистических измерений. - 2-е изд., перераб. и доп. - Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отделение, 1982. - 256 с

76. Яглом, А.М. Корреляционная теория процессов со случайными стационарными n -ми приращениями [Текст] / А.М. Яглом // Математический сборник. - 1956. - Т. 37(79). - № 1. - С. 141-196.
77. Яглом, А.М. Случайные процессы со стационарными приращениями n -го порядка [Текст] / А.М. Яглом, М.С. Пинскер— Докл. АН СССР. - 1953. - Т. 90. с. 385-388.

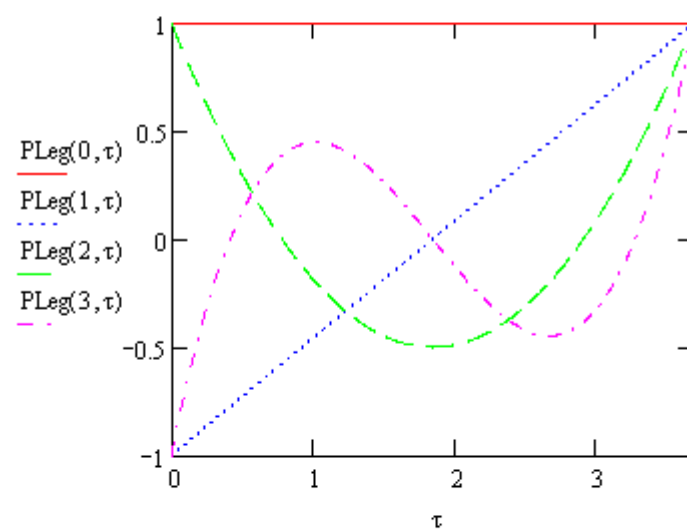
Аппроксимация ортогональными полиномами в математическом пакете Mathcad

$$\Delta\tau := 0.1$$

$$N := 37$$

$$\tau_{kmax} := N \cdot \Delta\tau$$

$$PLeg(k, \tau) := \sum_{s=0}^k \left[\frac{(k+s)!}{(k-s)! \cdot (s!)^2} \cdot \left(\frac{\tau}{\tau_{kmax}} - 1 \right)^s \right]$$



$$\lambda := 1$$

$$w0 := 5$$

$$Sx(\tau) := 2 \left(1 - e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(w0 \cdot \tau) \right)$$

$$Norm(k) := \frac{\tau_{kmax}}{2k+1}$$

$$\beta(k) := \frac{1}{Norm(k)} \cdot \int_0^{\tau_{kmax}} Sx(\tau) \cdot PLeg(k, \tau) \, d\tau$$

$$\phi := \text{atan}\left(\frac{w0}{\lambda}\right)$$

$$PLegx(k, x) := \sum_{s=0}^k \left[\frac{(k+s)!}{(k-s)! \cdot (s!)^2} \cdot x^s \right]$$

$$\text{PLegnx}(k,n,x) := \sum_{s=n}^k \left(\frac{(k+s)!}{(k-s)! \cdot s! (s-n)!} \cdot x^{s-n} \right)$$

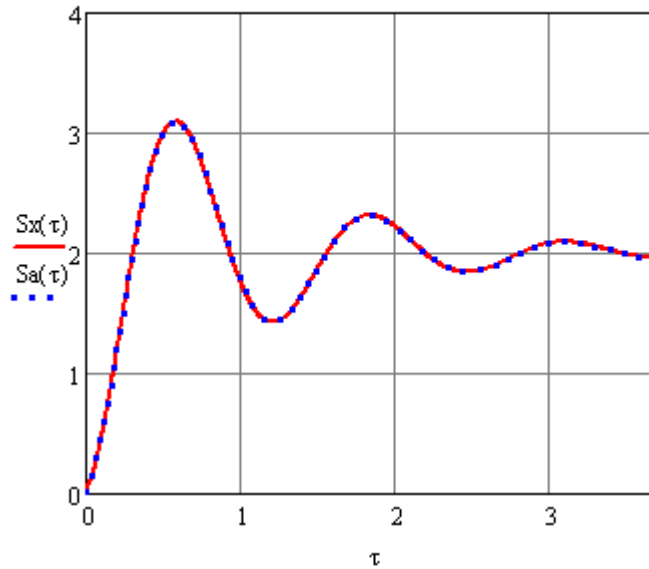
$$B(k,n) := \left[\text{PLegnx}(k,n,-1) \cdot \cos[(n+1) \cdot \phi] - e^{-\lambda \cdot \tau_{\text{kmax}}} \cdot \text{PLegnx}(k,n,0) \cdot \cos[w_0 \cdot \tau_{\text{kmax}} + (n+1) \cdot \phi] \right]$$

$$\beta_5(k) := 2 \frac{\tau_{\text{kmax}}}{\text{Norm}(k)} \cdot \sum_{s=0}^k \left[\frac{(k+s)!}{(k-s)! \cdot (s!)^2} \cdot \frac{(-1)^s}{s+1} \right] - \frac{2\tau_{\text{kmax}}}{\text{Norm}(k)} \cdot \sum_{n=0}^k \left[\left(\frac{\cos(\phi)}{\tau_{\text{kmax}} \cdot \lambda} \right)^{n+1} \cdot B(k,n) \right]$$

$$m := 15$$

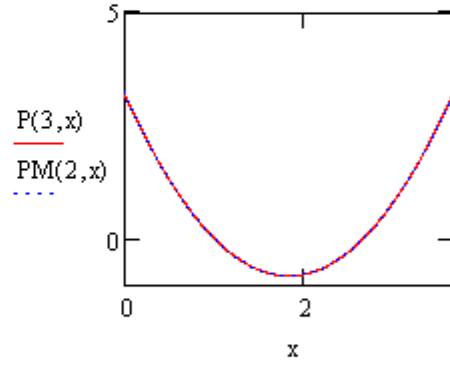
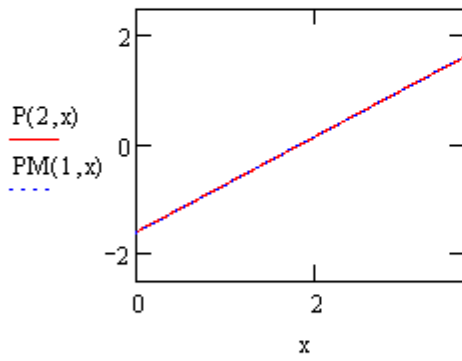
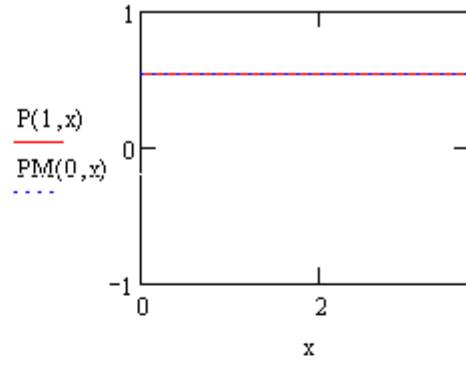
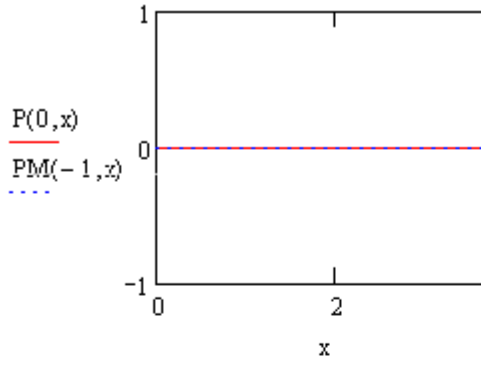
$$k := 0..m$$

$$Sa(\tau) := \sum_{k=0}^m (\beta_5(k) \cdot \text{PLeg}(k,\tau))$$



$$P(k,x) := \begin{cases} 0 & \text{if } k = 0 \\ \frac{1}{\tau_{\text{kmax}}} \cdot \sum_{s=1}^k \left[\frac{(k+s)!}{(k-s)! \cdot s! (s-1)!} \cdot \left(\frac{x}{\tau_{\text{kmax}}} - 1 \right)^{s-1} \right] & \text{if } k > 0 \end{cases}$$

$$\text{PM}(r,x) := \begin{cases} 0 & \text{if } r < 0 \\ \frac{1}{\tau_{\text{kmax}}} \cdot \sum_{s=0}^r \left[\frac{(r+s+2)!}{(r-s)! (s+1)! \cdot s!} \cdot \left(\frac{x}{\tau_{\text{kmax}}} - 1 \right)^s \right] & \text{if } r \geq 0 \end{cases}$$



$$IN(r, \omega) := \begin{cases} 0 & \text{if } r < 0 \\ \int_0^{\tau kmax} \sin(\omega \cdot x) \cdot \left[\frac{1}{\tau kmax} \cdot \sum_{s=0}^r \left[\frac{(r+s+2)!}{(r-s)!(s+1)! \cdot s!} \cdot \left(\frac{x}{\tau kmax} - 1 \right)^s \right] \right] dx & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$PMT(r, x, n) := \frac{1}{\tau kmax^{n+1}} \cdot \sum_{s=n}^r \left[\frac{(r+s+2)!}{(r-s)!(s+1)! \cdot (s-n)!} \cdot \left(\frac{x}{\tau kmax} - 1 \right)^{s-n} \right]$$

$$IA(r, \omega, x) := \begin{cases} 0 & \text{if } r < 0 \\ \frac{-\cos(\omega \cdot x)}{\omega} \cdot \sum_{v=0}^{\text{trunc}\left(\frac{r}{2}\right)} \left[(-1)^v \cdot \frac{PMT(r, x, 2v)}{\omega^{2v}} \right] & \text{if } r = 0 \\ \frac{-\cos(\omega \cdot x)}{\omega} \cdot \sum_{v=0}^{\text{trunc}\left(\frac{r}{2}\right)} \left[(-1)^v \cdot \frac{PMT(r, x, 2v)}{\omega^{2v}} \right] + \frac{\sin(\omega \cdot x)}{\omega} \cdot \sum_{v=1}^{\text{trunc}\left(\frac{r+1}{2}\right)} \left[(-1)^{v-1} \cdot \frac{PMT(r, x, 2v-1)}{\omega^{2v-1}} \right] & \text{if } r > 0 \end{cases}$$

$$IN(8, 1.1) = -0.801$$

$$IA(8, 1.1, \tau kmax) - IA(8, 1.1, 0) = -0.801$$

$\beta(k) =$

1.981
0.097
-0.246
0.501
-0.792
0.846
-0.631
-0.263
0.896
-0.365
-0.245
0.199
9.287·10 ⁻³
-0.042
6.647·10 ⁻³
4.658·10 ⁻³

$\beta5(k) =$

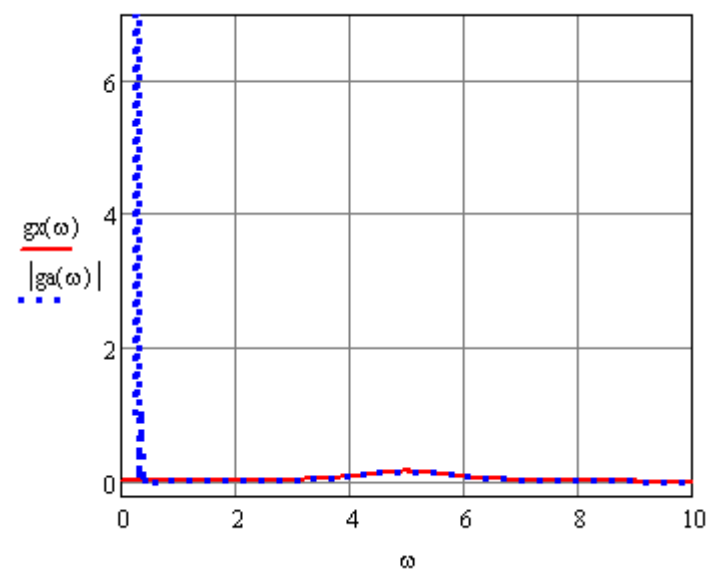
1.981
0.097
-0.246
0.501
-0.792
0.846
-0.631
-0.263
0.896
-0.365
-0.245
0.199
9.287·10 ⁻³
-0.042
6.647·10 ⁻³
4.658·10 ⁻³

$\beta_{\omega\omega} :=$

1.981
0.097
-0.246
0.501
-0.792
0.846
-0.631
-0.263
0.896
-0.365
-0.245
0.199
0.009287
-0.042
0.006647
0.004658

$$g_a(\omega) := \frac{1}{2\pi\omega} \cdot \sum_{k=0}^m \left[\beta_k \cdot (IA(k-1, \omega, tk_{max}) - IA(k-1, \omega, 0)) \right]$$

$$g_x(\omega) := \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{\lambda^2 + (\omega - w_0)^2} + \frac{1}{\lambda^2 + (\omega + w_0)^2} \right]$$



Вид ортогональных функций начальных порядков

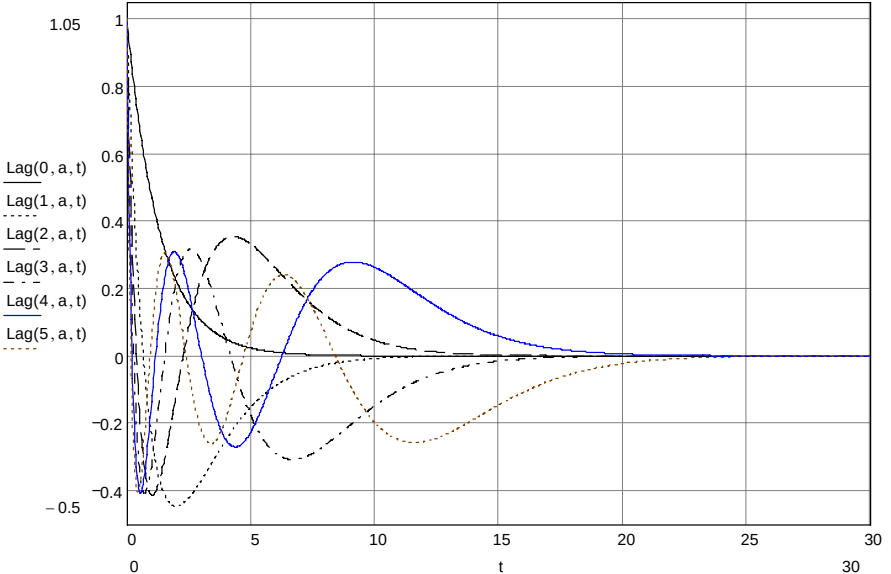
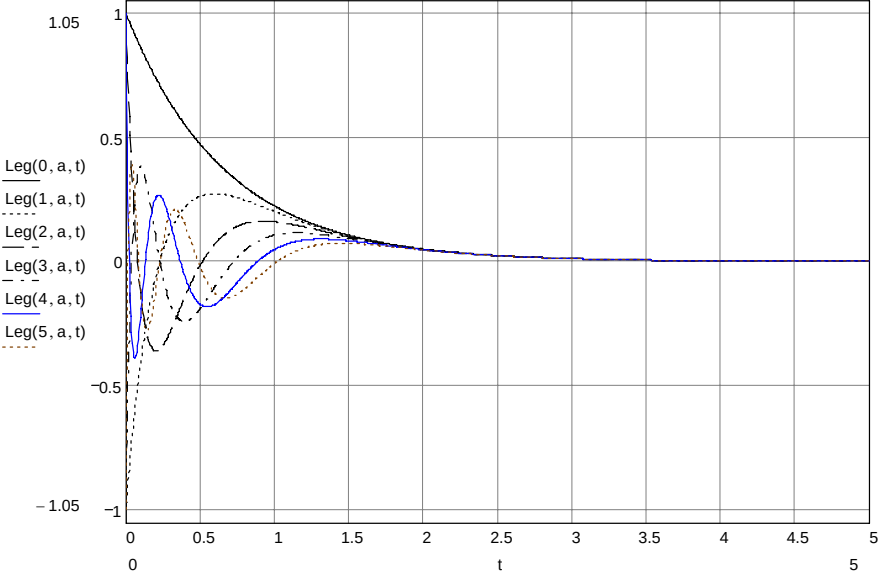
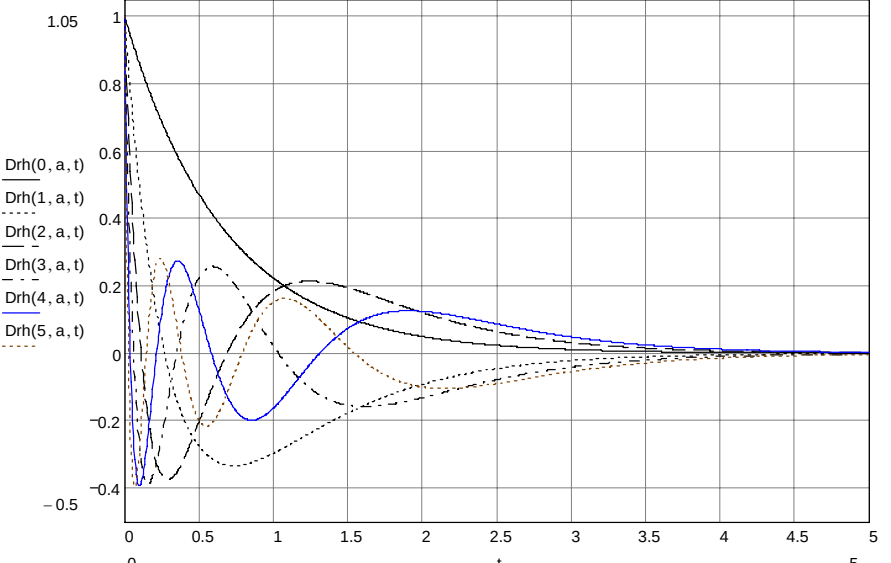
Таблица П1.1 – Вид ортогональных функций ($\alpha = 1$)

Базис	Графическое отображение
Лагерра	Graph showing the first six Laguerre polynomials $Lag(0, a, t)$ through $Lag(5, a, t)$ for $\alpha = 1$. The x-axis represents t from 0 to 30, and the y-axis represents the function value from -0.5 to 1.05. The polynomials are plotted with different line styles: solid black for $Lag(0)$, dashed black for $Lag(1)$, dotted black for $Lag(2)$, dash-dot black for $Lag(3)$, solid blue for $Lag(4)$, and dashed orange for $Lag(5)$.
Лежандра	Graph showing the first six Legendre polynomials $Leg(0, a, t)$ through $Leg(5, a, t)$ for $\alpha = 1$. The x-axis represents t from 0 to 5, and the y-axis represents the function value from -1.05 to 1.05. The polynomials are plotted with different line styles: solid black for $Leg(0)$, dashed black for $Leg(1)$, dotted black for $Leg(2)$, dash-dot black for $Leg(3)$, solid blue for $Leg(4)$, and dashed orange for $Leg(5)$.
Дирихле	Graph showing the first six Dirichlet polynomials $Drh(0, a, t)$ through $Drh(5, a, t)$ for $\alpha = 1$. The x-axis represents t from 0 to 5, and the y-axis represents the function value from -0.5 to 1.05. The polynomials are plotted with different line styles: solid black for $Drh(0)$, dashed black for $Drh(1)$, dotted black for $Drh(2)$, dash-dot black for $Drh(3)$, solid blue for $Drh(4)$, and dashed orange for $Drh(5)$.

Таблица П1.2 – Вид ортогональных функций начальных порядков ($\alpha = 0.5$)

Базис	Графическое отображение
Лагерра	$Lag(0, a, t)$ $Lag(1, a, t)$ $Lag(2, a, t)$ $Lag(3, a, t)$ $Lag(4, a, t)$ $Lag(5, a, t)$
Лежандра	$Leg(0, a, t)$ $Leg(1, a, t)$ $Leg(2, a, t)$ $Leg(3, a, t)$ $Leg(4, a, t)$ $Leg(5, a, t)$
Дирихле	$Drh(0, a, t)$ $Drh(1, a, t)$ $Drh(2, a, t)$ $Drh(3, a, t)$ $Drh(4, a, t)$ $Drh(5, a, t)$

Таблица П1.3 – Вид ортогональных функций начальных порядков ($\alpha = 1.5$)

Базис	Графическое отображение
Лагерра	 Graph showing the first six Laguerre functions $Lag(0, a, t)$ through $Lag(5, a, t)$ for $\alpha = 1.5$. The x-axis represents t from 0 to 30, and the y-axis represents the function value from -0.5 to 1.05. The functions are plotted in various colors and line styles, showing oscillatory behavior that decays towards zero as t increases.
Лежандра	 Graph showing the first six Legendre functions $Leg(0, a, t)$ through $Leg(5, a, t)$ for $\alpha = 1.5$. The x-axis represents t from 0 to 5, and the y-axis represents the function value from -1.05 to 1.05. The functions are plotted in various colors and line styles, showing oscillatory behavior that decays towards zero as t increases.
Дирихле	 Graph showing the first six Dirichlet functions $Drh(0, a, t)$ through $Drh(5, a, t)$ for $\alpha = 1.5$. The x-axis represents t from 0 to 5, and the y-axis represents the function value from -0.5 to 1.05. The functions are plotted in various colors and line styles, showing oscillatory behavior that decays towards zero as t increases.

Аппроксимация ортогональными функциями в математическом пакете Mathcad

$$\text{LegF}(k, \tau, \alpha) := \begin{cases} e^{-\alpha \cdot \tau} & \text{if } k = 0 \\ e^{-\alpha \cdot \tau} (1 - 2e^{-2\alpha \cdot \tau}) & \text{if } k = 1 \\ \frac{2k-1}{k} \cdot (1 - 2e^{-2\alpha \cdot \tau}) \cdot \text{LegF}(k-1, \tau, \alpha) - \frac{k-1}{k} \cdot \text{LegF}(k-2, \tau, \alpha) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{BI}(k, \tau, \alpha) := \frac{1}{\alpha \cdot (2k+1)} \cdot (\text{LegF}(k, \tau, \alpha) - \text{LegF}(k-2, \tau, \alpha))$$

$$\text{LegFI}(k, \tau, \alpha) := \begin{cases} \frac{-1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha \cdot \tau} & \text{if } k = 0 \\ \frac{-1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha \cdot \tau} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot e^{-2\alpha \cdot \tau}\right) & \text{if } k = 1 \\ \frac{2 \cdot (2k-1)}{2k+1} \cdot \text{LegFI}(k-1, \tau, \alpha) - \frac{2k-3}{2k+1} \cdot \text{LegFI}(k-2, \tau, \alpha) - \text{BI}(k, \tau, \alpha) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{Bd}(k, \tau, \alpha) := \frac{1}{\alpha \cdot (2k+1)} \cdot [\tau \cdot (\text{LegF}(k, \tau, \alpha) - \text{LegF}(k-2, \tau, \alpha)) - \text{LegFI}(k, \tau, \alpha) + \text{LegFI}(k-2, \tau, \alpha)]$$

$$\text{LegFd}(k, \tau, \alpha) := \begin{cases} -e^{-\alpha \cdot \tau} \cdot \left(\frac{\tau}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right) & \text{if } k = 0 \\ 2 \cdot e^{-3\alpha \cdot \tau} \cdot \left(\frac{\tau}{3\alpha} + \frac{1}{9\alpha^2}\right) - e^{-\alpha \cdot \tau} \cdot \left(\frac{\tau}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right) & \text{if } k = 1 \\ \frac{2 \cdot (2k-1)}{2k+1} \cdot \text{LegFd}(k-1, \tau, \alpha) - \frac{2k-3}{2k+1} \cdot \text{LegFd}(k-2, \tau, \alpha) - \text{Bd}(k, \tau, \alpha) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Delta \tau := 0.1$$

$$N := 37$$

$$\tau_{\text{max}} := N \cdot \Delta \tau$$

$$\lambda := 1$$

$$w0 := 5$$

$$Sx(\tau) := 2 \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(w0 \cdot \tau))$$

$$\text{Norm}(k, \alpha) := \frac{1}{2(2k+1) \cdot \alpha}$$

$$\alpha := 0.38$$

$$t(j) := \Delta\tau \cdot j$$

$$b(j) := \frac{Sx(t(j+1)) - Sx(t(j))}{t(j+1) - t(j)}$$

$$a(j) := Sx(t(j)) - b(j) \cdot t(j)$$

$$\beta(k) := \frac{1}{\text{Norm}(k, \alpha)} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} [a(j) \cdot (\text{LegFI}(k, t(j+1), \alpha) - \text{LegFI}(k, t(j), \alpha)) + b(j) \cdot (\text{LegFtl}(k, t(j+1), \alpha) - \text{LegFtl}(k, t(j), \alpha))]$$

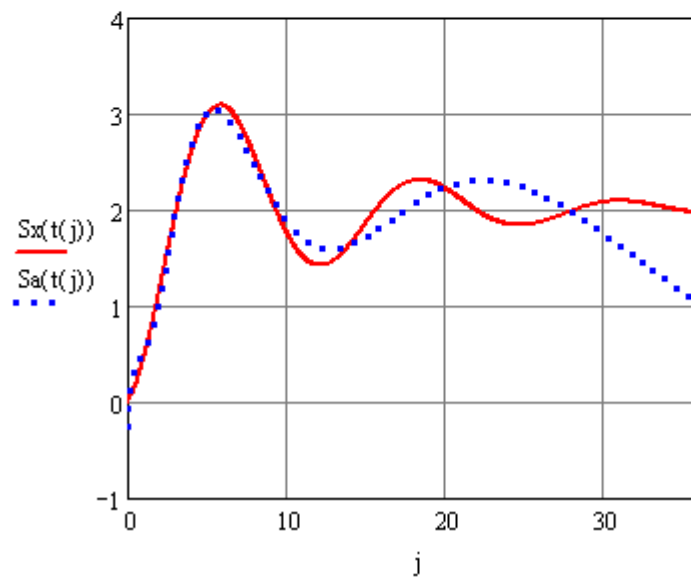
$$m := 9$$

$$k := 0..m$$

$$Sa(\tau) := \sum_{k=0}^m (\beta C_k \cdot \text{LegF}(k, \tau, \alpha))$$

2.942
1.602
-1.364
-0.115
-2.06
-2.879
-0.622
0.269
-0.157
0.126

$$\beta C := \begin{pmatrix} 2.942 \\ 1.602 \\ -1.364 \\ -0.115 \\ -2.06 \\ -2.879 \\ -0.622 \\ 0.269 \\ -0.157 \\ 0.126 \end{pmatrix}$$



$$\underline{\underline{A}}(k,s,\alpha):=(-1)^{s+1}\cdot\frac{(k+s)!}{(k-s)!\cdot(s!)^2}\cdot(2s+1)\alpha$$

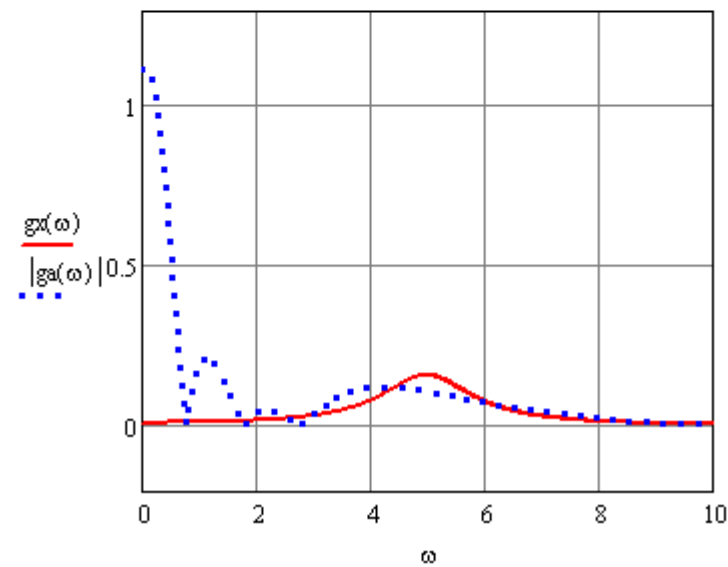
$$B(s,\alpha,\omega):=\frac{1}{(2s+1)^2\cdot\alpha^2+\omega^2}$$

$$ga(\omega):=\frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{k=0}^m\left[\beta C_k\cdot\sum_{s=0}^k\left(A(k,s,\alpha)\cdot B(s,\alpha,\omega)\right)\right]$$

$$\underline{\underline{\lambda}}:=1$$

$$\omega0:=5$$

$$gx(\omega):=\frac{\lambda}{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{\lambda^2+(\omega-\omega0)^2}+\frac{1}{\lambda^2+(\omega+\omega0)^2}\right]$$



$$SxC(\tau):=Sx(\tau)-Sx[(N-1)\cdot\Delta\tau]$$

$$\underline{\underline{\alpha}}:=0.51$$

$$\underline{\underline{Norm}}(k,\alpha):=\frac{1}{2(2k+1)\cdot\alpha}$$

$$\underline{\underline{t}}(j):=\Delta\tau\cdot j$$

$$\underline{\underline{b}}(j):=\frac{SxC(t(j+1))-SxC(t(j))}{t(j+1)-t(j)}$$

$$\underline{\underline{a}}(j):=SxC(t(j))-b(j)\cdot t(j)$$

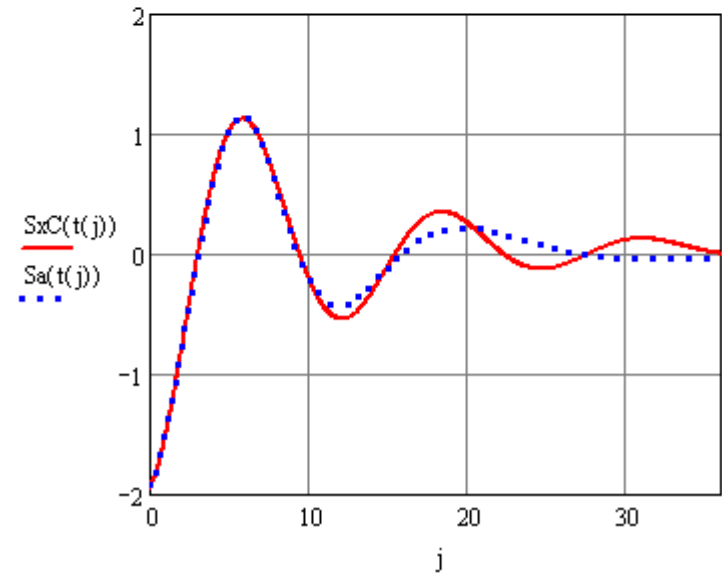
$$\underline{\underline{\beta}}(k):=\frac{1}{\underline{\underline{Norm}}(k,\alpha)}\cdot\sum_{j=0}^{N-1}\left[a(j)\cdot\left(\text{LegFI}(k,t(j+1),\alpha)-\text{LegFI}(k,t(j),\alpha)\right)+b(j)\cdot\left(\text{LegFtl}(k,t(j+1),\alpha)-\text{LegFtl}(k,t(j),\alpha)\right)\right]$$

$$m := 9$$

$$k := 0..m$$

$$\beta(k) = \begin{pmatrix} -0.052 \\ 0.684 \\ -1.362 \\ 0.994 \\ 0.832 \\ -1.127 \\ -0.833 \\ 0.46 \\ 0.839 \\ 0.343 \end{pmatrix} \quad \beta S := \begin{pmatrix} -0.052 \\ 0.684 \\ -1.362 \\ 0.994 \\ 0.832 \\ -1.127 \\ -0.833 \\ -0.833 \\ 0.46 \\ 0.839 \\ 0.343 \end{pmatrix}$$

$$Sa(\tau) := \sum_{k=0}^m (\beta S_k \cdot LegF(k, \tau, \alpha))$$



$$\beta C := \begin{pmatrix} -0.052 \\ 0.684 \\ -1.362 \\ 0.994 \\ 0.832 \\ -1.127 \\ -0.833 \\ 0.46 \\ 0.839 \\ 0.343 \end{pmatrix}$$

$$A(k,s,\alpha):=(-1)^{s+1}\cdot\frac{(k+s)!}{(k-s)!\cdot(s!)^2}\cdot(2s+1)\alpha$$

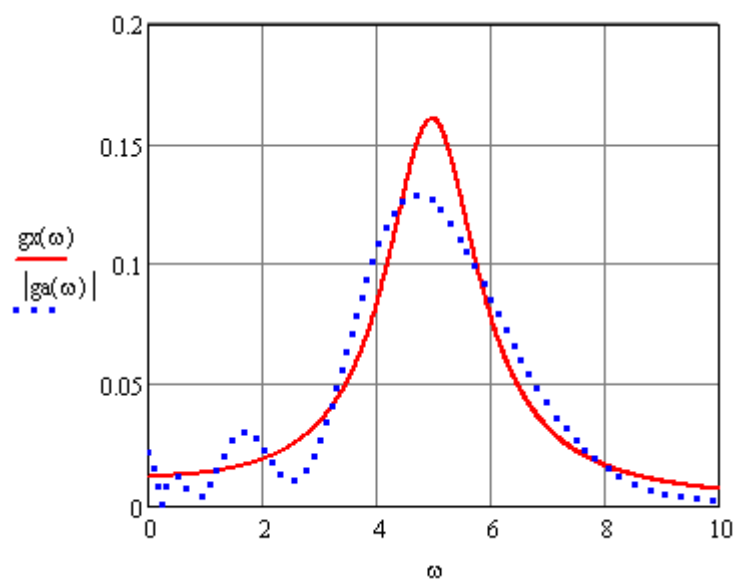
$$B(s,\alpha,\omega):=\frac{1}{(2s+1)^2\cdot\alpha^2+\omega^2}$$

$$ga(\omega):=\frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{k=0}^m\left[\beta C_k\cdot\sum_{s=0}^k(A(k,s,\alpha)\cdot B(s,\alpha,\omega))\right]$$

$$\lambda:=1$$

$$\omega0:=5$$

$$gx(\omega):=\frac{\lambda}{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{\lambda^2+(\omega-\omega0)^2}+\frac{1}{\lambda^2+(\omega+\omega0)^2}\right]$$



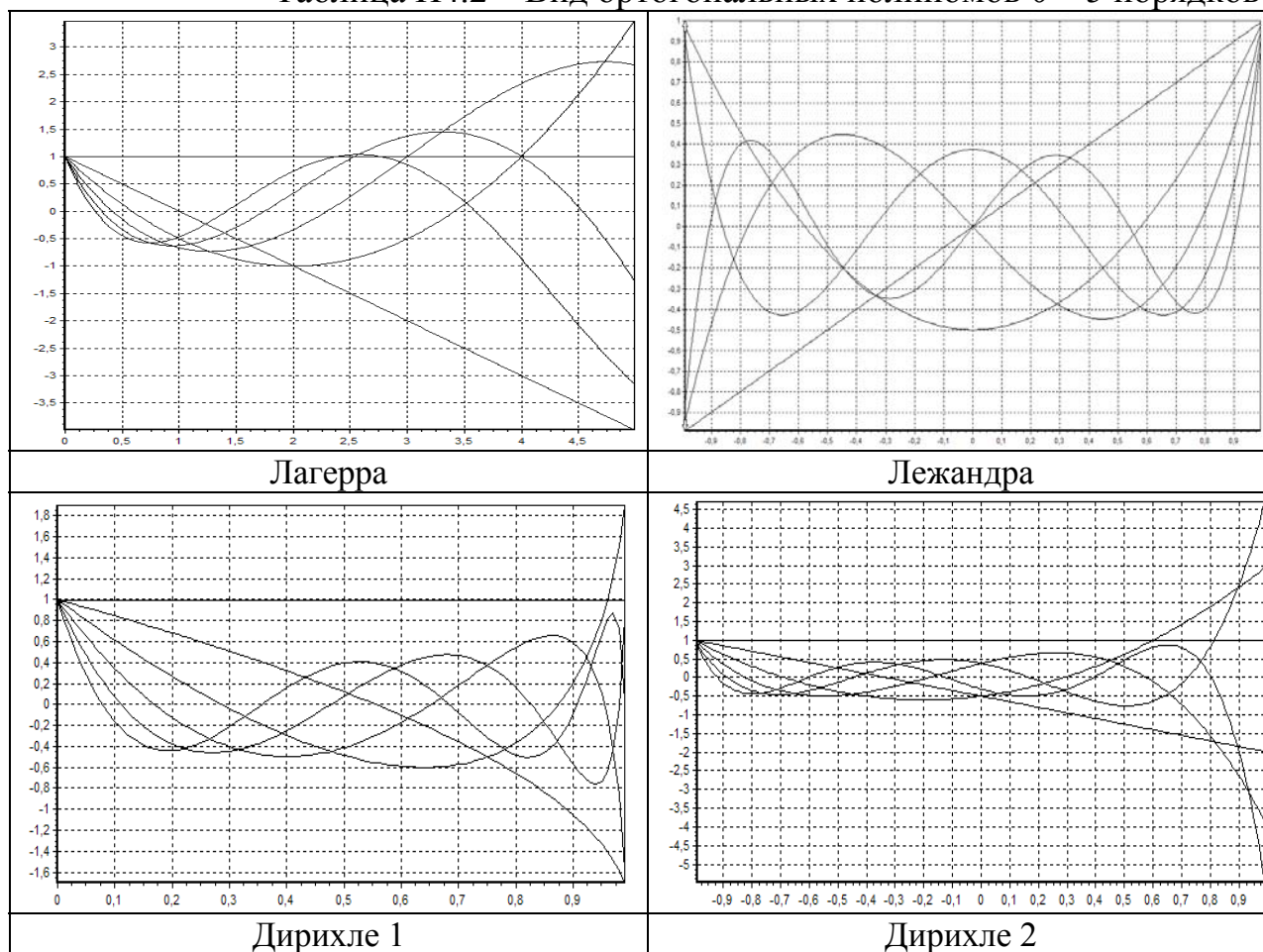
Приложение 4

Формы представления ортогональных полиномов и их вид

Таблица П4.1 – Формы представления ортогональных полиномов

Орт. полиномы	Представление в форме Родрига	Представление в виде конечного ряда
Лагерра $PLag_k(x)$	$\frac{1}{k!} e^x (x^k e^{-x})^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-x)^s}{s!}$
Лежандра $PLeg_k(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} ((1-x^2)^k)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s \left(\frac{x-1}{2}\right)^s$
Дирихле 1 $PDirh_k(x)$	отсутствует	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} (1-x)^{s/2}$
Дирихле 2 $PDir_k(x)$	отсутствует	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{s/2}$

Таблица П4.2 – Вид ортогональных полиномов 0 – 5 порядков



Приложение 5

Основные характеристики ортогональных полиномов и ортогональных функций

Таблица П5.1 – Основные характеристики ортогональных полиномов

Орт. полиномы	$\mu(x)$	$\ \psi_k\ ^2$
Лагерра $PLag_k(x)$	e^{-x}	1
Лежандра $PLeg_k(x)$	1	$\frac{2}{2k+1}$
Дирихле 1 $PDirh_k(x)$	1	$\frac{1}{k+1}$
Дирихле 2 $PDir_k(x)$	1	$\frac{2}{k+1}$

Таблица П5.2 – Форма представления и характеристики ортогональных функций

Орт. функции	Представление в виде конечного ряда $\psi_k(\tau, \gamma)$	(a, c)	$\ \psi_k\ ^2$	$\psi_k(0, \gamma/\alpha)$
$Lag_k(\tau, \alpha)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-\alpha\tau)^s}{s!} e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}$	$\left(1, -\frac{\ln(1-\alpha\tau)}{\gamma\tau}\right)$	$\frac{1}{\alpha}$	1
$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s e^{-(2s+1)\alpha\tau}$	(2,2)	$\frac{1}{2\alpha(2k+1)}$	$(-1)^k$
$Drh_k(\tau, \alpha)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} e^{-(s+1)\alpha\tau}$	(1,2)	$\frac{1}{2\alpha(k+1)}$	1
$Dir_k(\tau, \alpha)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} e^{-(s+1)\alpha\tau}$	(2,2)	$\frac{1}{2\alpha(k+1)}$	1



Прохоров Сергей Антонович – заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета.

Результаты его работы нашли отражение в 345 научных работах, в том числе, 18 монографиях, 12 брошюрах, 40 авторских свидетельствах, 7 свидетельствах о государственной регистрации программ для ЭВМ, выступлениях более чем на 90 Международных, Всесоюзных и республиканских конференциях и симпозиумах.



Графкин Владимир Викторович – кандидат технических наук, ассистент кафедры информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Результаты его работы нашли отражение в 27 научных работах, в том числе 2 монографиях, свидетельстве о государственной регистрации программ для ЭВМ, выступлениях на 16 международных, всероссийских и областных конференциях.