

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи

Синицын Леонид Игоревич

**КОМПЛЕКС МЕТОДИК ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ
МАНЕВРИРОВАНИЯ НАНОСПУТНИКА С ДВИГАТЕЛЬНОЙ
УСТАНОВКОЙ**

**2.5.16. Динамика, баллистика, управление движением летательных
аппаратов**

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:
Белоконов Игорь Витальевич,
доктор технических наук, профессор

Самара – 2023

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ МАНЕВРИРУЮЩЕГО НАНОСПУТНИКА	14
1.1 Используемые системы координат	14
1.2 Модель движения	20
1.3 Динамическая модель массо-инерционных характеристик наноспутника.....	22
1.4 Математическая модель силы реактивной тяги и её момента.....	25
1.5 Математическая модель параметров маневра наноспутника	27
1.6 Выводы по первому разделу.....	28
2 ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИЧИН ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИМПУЛЬСНОЙ КОРРЕКЦИИ ОРБИТЫ	29
2.1 Влияние производственных отклонений на точность маневрирования наноспутника.....	30
2.1.1 Стохастическая математическая модель движения наноспутника с двигательной установкой.....	30
2.1.2 Регрессионный анализ модели погрешностей импульсной коррекции орбиты наноспутника	32
2.1.3 Факторный анализ модели погрешностей импульсной коррекции орбиты наноспутника	35
2.2 Формирование вероятностной модели силы тяги двигательной установки	36
2.2.1 Геометрическая интерпретация закона распределения силы тяги.....	37

2.2.2 Плотность распределения вероятности силы тяги	40
2.2.3 Моментные характеристики распределения силы тяги	43
2.3 Выводы по второму разделу	45
3 МЕТОДИКИ ДОСТИЖЕНИЯ ТРЕБУЕМОЙ ТОЧНОСТИ МАНЕВРИРОВАНИЯ НАНОСПУТНИКА С ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ	46
3.1 Методика формирования требований к производственным отклонениям изготовления наноспутника и двигательной установки	47
3.2 Методика формирования требований к кинетическому моменту маховика для обеспечения одноосной стабилизации наноспутника	49
3.3. Методика синтеза оптимального линейного регулятора состояния для одноосной стабилизации наноспутника-гиростата с управлением по поперечным каналам	55
3.4 Выводы по третьему разделу	58
4 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ МАНЕВРИРОВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ НАНОСПУТНИКА С ЭЛЕКТРОТЕРМИЧЕСКОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ	59
4.1 Вероятностная модель силы тяги электротермической двигательной установки для наноспутника формата CubeSat 3U	61
4.1.1 Плотность распределения вероятности силы тяги и моментные характеристики распределения	61
4.1.2 Сравнение результатов применения геометрического подхода к формированию вероятностной модели силы тяги и результатов эксперимента	63
4.2 Формирование требований к проектным параметрам наноспутника с двигательной установкой на платформе SamSat	65
4.2.1 Расчёт коэффициентов уравнений регрессии	72

4.2.2 Формирование требований к производственным отклонениям наноспутника формата CubeSat 3U	73
4.3. Исследование стабилизации движения наноспутника формата CubeSat 3U во время корректирующего импульса с помощью маховика ...	78
4.3.1 Анализ стратегий управления маховиком для обеспечения гироскопической стабилизации вектора тяги маневрирующего наноспутника	82
4.3.2 Методика анализа стратегий управления маховиком	84
4.3.3 Результаты моделирования движения стабилизированного наноспутника с применением разных стратегий управления маховиком	88
4.3.4 Анализ возможности использования замкнутой системы управления по поперечным каналам для стабилизации наноспутника-гиростата	93
4.4 Выводы по четвертому разделу	98
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	100
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	102
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	106
ПРИЛОЖЕНИЕ А Расчёт коэффициента адиабаты рабочего тела	117
ПРИЛОЖЕНИЕ Б Методика экспериментального измерения профиля силы тяги электротермической двигательной установки	118

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Актуальным направлением в области освоения космоса являются наноспутники с двигательными установками. Двигательные установки позволяют решать ряд задач, таких как ликвидация ошибок выведения наноспутников на орбиту, поддержание параметров движения, построение орбитальных группировок, инспектирование других космических объектов и т.д. Одними из наиболее интересных с практической точки зрения выступают двигательные установки с соплом Лавалья, в частности, класс электротермических двигательных установок (ЭТДУ), так как они безопасны, экологичны, имеют относительно высокие удельные импульсы и могут работать с инертным рабочим телом. При этом большое значение имеет точность выполняемых манёвров, которая отражает соответствие реализованного (фактического) и требуемого значений векторов изменения скорости. Следствием неизбежных производственных недочётов при изготовлении двигательной установки и её монтаже на наноспутнике, а также неточностей в определении взаимного расположения центра масс наноспутника и сопла реактивного двигателя являются ошибки при выполнении корректирующих манёвров на орбите. Ввиду относительно небольших моментов инерции наноспутника ощутимое влияние на его динамику оказывают даже незначительные возмущающие моменты. В процессе выдачи импульса тяги, который формируется не одномоментно, а в определённом интервале времени, наноспутник приобретает угловые ускорения, которые нежелательны при выполнении целевой задачи.

Задачей маневрирования является изменение вектора скорости движения центра масс наноспутника в результате выдачи корректирующего импульса:

$$\Delta V_T = \int_0^{\tau} \frac{F_T(t, \Phi_o, \Phi_{и}, \Phi_{д})}{m(t, \Phi_{и}, \Phi_{д})} dt,$$

$$\Delta V_S = \int_0^{\tau} \frac{F_S(t, \Phi_o, \Phi_{и}, \Phi_{д})}{m(t, \Phi_{и}, \Phi_{д})} dt,$$

$$\Delta V_W = \int_0^{\tau} \frac{F_W(t, \Phi_o, \Phi_{и}, \Phi_{д})}{m(t, \Phi_{и}, \Phi_{д})} dt,$$

где $F_T(t, \Phi_o, \Phi_{и}, \Phi_{д})$ – проекция силы тяги в требуемом направлении; $F_S(t, \Phi_o, \Phi_{и}, \Phi_{д})$, $F_W(t, \Phi_o, \Phi_{и}, \Phi_{д})$ – проекции силы тяги в поперечных направлениях, приводящие к погрешности маневрирования; Φ_o – параметры движения относительно центра масс наноспутника; $\Phi_{и}$ – погрешности изготовления наноспутника и двигательной установки; $\Phi_{д}$ – параметры, определяющие режим работы и характеристики двигательной установки; $m(t, \Phi_{и})$ – масса наноспутника с учетом выработки рабочего тела; τ – длительность импульса тяги.

Погрешность маневрирования наноспутника обусловлена погрешностью реализации корректирующего импульса и определяется соотношением:

$$\delta_T = \sqrt{\Delta V_S^2 + \Delta V_W^2} / \Delta V_T \rightarrow \min,$$

где δ_T – отношение изменения скорости в направлении, отличном от требуемого, к изменению скорости в требуемом направлении.

Практический интерес представляет определение требований к производственным отклонениям изготовления наноспутника и погрешностям режимов работы двигательной установки из условия обеспечения требуемого углового движения (ориентации) наноспутника в процессе формирования корректирующего импульса тяги.

Возможным вариантом поддержания направления вектора силы тяги, формируемого двигательной установкой наноспутника, является использование маховика, приведённого в быстрое вращение и создающего значительный кинетический момент вдоль оси стабилизации наноспутника. При этом малые возмущения, формируемые двигательной установкой, не вызывают значительного отклонения оси стабилизации наноспутника от требуемого направления. Ограничение отклонения оси от требуемого направления возникает из-за прецессирующего движения. Такой наноспутник относится к классу спутников-гиростатов и представляет собой спутник с

двойным вращением. Изучение характера движения наноспутника-гиростата во время выдачи корректирующего импульса и определение необходимого кинетического момента маховика с последующим вероятностным анализом результатов коррекции для проверки принятых технических решений является важной задачей при проектировании систем управления наноспутников с одноосной стабилизацией.

Актуальность теоретических исследований в этом направлении подтверждается примерами из практики. Например, в августе 2023 года проводились лётно-конструкторские испытания газовой двигательной установки на наноспутнике «Геоскан-Эдельвейс», имеющем формат CubeSat-3U. В ходе испытаний двигатель совершил восемь импульсов по четыре секунды с интервалом в минуту, в результате чего зафиксировано изменение скорости движения наноспутника относительно центра масс, что привело к падению генерации электроэнергии с панелей солнечных батарей.

Степень разработанности темы. Исследования точности маневрирования космических аппаратов проводились и проводятся как отечественными, так и зарубежными научными коллективами в различных постановках. Так, в работах Хромова А.В., Ходненко В.П. проведена оценка погрешности ориентации в результате коррекции орбиты космического аппарата «Канопус-В», а также оценка возможности возникновения эффекта насыщения двигателей маховиков системы ориентации при работе корректирующей двигательной установки. В работе Протопопова А.П., Богачева А.В., Воробьевой Е.А. получена циклограмма работы многосопловой (8 электроракетных двигателей) двигательной установки для достижения требуемого (или минимального) кинетического момента в результате маневра коррекции. В цикле работ Connie J. Weeks, James K. Miller проводится статистический анализ эффективности коррекции траекторий на примере миссии MESSENGER на Меркурий. Ещё одним немаловажным для построения моделей маневрирующего космического аппарата результатом исследований этих авторов является методика оценки силы тяги, полученная на основе механики столкновений молекул рабочего тела, без нахождения законов распределения целевых показателей маневрирования. В работах

Sophie Laurens, Morgane Jouisse, Pierre Seimandi проводится оценка неопределенности вектора состояния спутника в результате большого количества маневров различной продолжительности (в качестве модели погрешности величины прироста скорости было выбрано нормальное распределение $N(0, \sigma_m)$, где $\sigma_m = 0,01|V|$, $|V|$ – модуль скорости движения космического аппарата, модель погрешности направления выдачи импульса $N(0, \sigma_d)$, где $\sigma_d = 5^\circ$). Во всех перечисленных работах рассматриваются «большие» космические аппараты, на которые оказывается пренебрежимо малое влияние возмущающего момента силы тяги; не проводится анализ влияния погрешностей изготовления космического аппарата и режимов работы двигателя на точность маневрирования.

Отличительной особенностью данной работы является исследование в стохастической постановке проблемы маневрирования применительно к космическим аппаратам нанокласса, а также разработка методики повышения точности маневрирования наноспутника за счёт применения дополнительной системы ориентации углового движения с использованием маховика, что приводит к необходимости рассмотрения наноспутника как гиростата.

Объектом исследования является движение наноспутника с двигательной установкой в процессе совершения манёвра коррекции траектории.

Предметом исследования являются подходы и методики повышения точности орбитального маневрирования наноспутника.

Целью работы является исследование в стохастической постановке вопросов повышения точности маневрирования наноспутника с двигательной установкой.

Для достижения цели работы решаются следующие задачи:

1. Построение стохастической математической модели движения наноспутника с двигательной установкой при совершении манёвра коррекции.
2. Разработка методики формирования вероятностной модели силы тяги реактивного двигателя наноспутника, учитывающей случайные проектные параметры наноспутника и режимы работы двигательной установки.

3. Разработка методики оценки влияния случайных производственных отклонений изготовления наноспутника с двигательной установкой на угловое движение в процессе выдачи корректирующего импульса и в конечном счёте на погрешность маневрирования.

4. Разработка методики формирования требований к погрешностям, возникающим при изготовлении наноспутника и двигательной установки для достижения требуемых ориентации в процессе выдачи корректирующего импульса и точности маневрирования.

5. Разработка методики обеспечения одноосной стабилизации наноспутника во время импульсной коррекции траектории за счёт применения дополнительной системы поддержания требуемой угловой ориентации тяги с использованием маховика и замкнутого контура управления угловым движением, включая расчет величины потребного кинетического момента маховика, выбор циклограммы его работы и синтез оптимального регулятора состояния.

Научная новизна полученных в работе результатов состоит в следующем:

1. Построена стохастическая математическая модель движения наноспутника с двигательной установкой при совершении маневра коррекции, отличающаяся от существующих комплексным учетом динамики движения центра масс и относительно центра масс, случайного характера погрешностей изготовления наноспутника и вероятностной модели режимов работы двигательной установки.

2. Предложена методика формирования вероятностной модели силы тяги реактивного двигателя наноспутника, которая использует понятие геометрической вероятности и отличается учетом случайных проектных параметров и режимов работы двигательной установки.

3. Разработана методика оценки влияния случайных производственных отклонений изготовления наноспутника с двигательной установкой на угловое движение и погрешность маневрирования, позволяющая выделить факторы (параметры), дисперсии которых оказывают наибольшее влияние на дисперсии параметров движения центра масс и

относительно центра масс наноспутника, и формирующая новый подход к пониманию главных источников погрешностей при маневрировании наноспутника.

4. Разработана методика формирования требований к погрешностям, возникающим при изготовлении наноспутника и двигательной установки, для достижения требуемой точности ориентации вектора тяги и результатов маневрирования, основанная на использовании регрессионного и факторного анализа.

5. Предложен подход к обеспечению одноосной стабилизации во время импульсной коррекции траектории, основанный на применении дополнительной системы поддержания требуемой угловой ориентации тяги с использованием маховика, придающей наноспутнику свойство гиростата, и введении замкнутого контура управления угловым движением наноспутника-гиростата.

Теоретическая значимость работы заключается в следующем:

1. Предложен комплексный подход к оценке погрешности импульсной коррекции траектории движения космического аппарата нанокласса и к обеспечению точности маневрирования за счёт придания наноспутнику свойства спутника-гиростата в процессе работы двигательной установки.

2. Предложена стохастическая математическая модель процесса формирования корректирующего импульса для наноспутника, учитывающая случайный характер проектных параметров и режимов работы двигательной установки.

3. Разработана методика оценки влияния производственных отклонений изготовления наноспутника и режимов работы двигательной установки на эффективность импульсной коррекции орбиты.

Практическая значимость

1. Разработанная методика формирования требований к производственным отклонениям наноспутника с двигательной установкой позволяет на этапе его изготовления гарантировать обеспечение требуемой точности маневрирования.

2. Разработанная методика определения величины и программы управления кинетическим моментом маховика позволяет обеспечить требуемое качество стабилизации угловой ориентации тяги двигателя, сформировать требования к системе стабилизации углового движения и осуществлять выбор проектных параметров наноспутника на этапе проектирования.

Методы исследования. Имитационное математическое моделирование орбитального и углового движения наноспутника-гиростата с двигательной установкой на основе использования специального программного обеспечения, методы статистического моделирования и анализа (регрессионный и факторный анализ), методы синтеза оптимального регулятора.

Положения, выносимые на защиту:

1. Стохастическая математическая модель движения наноспутника с двигательной установкой при совершении манёвра коррекции, отличающаяся от существующих комплексным учетом динамики движения центра масс и относительно центра масс, случайного характера погрешностей изготовления наноспутника и вероятностной модели режимов работы двигательной установки.

2. Методика формирования вероятностной модели силы тяги реактивного двигателя наноспутника, которая использует геометрическую интерпретацию понятия вероятности и отличается учетом случайных проектных параметров наноспутника и режимов работы двигательной установки.

3. Методика оценки влияния случайных производственных отклонений изготовления наноспутника с двигательной установкой на угловое движение в процессе выдачи корректирующего импульса и в конечном счёте на погрешность маневрирования, позволяющая выделить факторы, дисперсии которых оказывают наибольшее влияние на дисперсии параметров движения центра масс и относительно центра масс наноспутника.

4. Методика формирования требований к погрешностям, возникающим при изготовлении наноспутника и двигательной установки для

достижения требуемых ориентации в процессе выдачи корректирующего импульса и точности маневрирования, основанная на использовании регрессионного и факторного анализа.

5. Подход к обеспечению одноосной стабилизации наноспутника во время импульсной коррекции траектории, основанный на применении дополнительной системы поддержания требуемой угловой ориентации тяги с использованием маховика, и замкнутого контура управления угловым движением, включая расчёт величины потребного кинетического момента маховика, выбор циклограммы его работы и синтез оптимального регулятора состояния.

6. Результаты моделирования, подтверждающие эффективность применения разработанных методик на примере проекта наноспутника SamSat-M (формата CubeSat-3U) с электротермической двигательной установкой.

Достоверность результатов обеспечивается использованием корректных математических моделей, применением известных численных методов при проведении математического моделирования, частичной верификацией результатов, полученных численными методами, данными, полученными экспериментальным путём, и их согласованностью с аналитическими решениями.

Апробация работы и публикации. Основные результаты работы обсуждались на 8 конференциях и получили положительные отзывы участников: Всероссийская научная конференция «Космонавтика: наука и образование», г. Благовещенск, 2019; VI Международная конференция и молодёжная школа «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2020), г. Самара, 2020; 55-е Научные чтения памяти К.Э. Циолковского, г. Калуга, 2020; «Управление в аэрокосмических системах» имени академика Е.А. Микрина, г. Санкт-Петербург, 2020; XXVIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам, г. Санкт-Петербург, 2021; IV Российский симпозиум по наноспутникам с международным участием RusNanoSat, г. Самара, 2021; XXX Международная научно-техническая конференция

«Современные технологии в задачах управления, автоматике и обработки информации», г. Алушта; 2021, Международный семинар «Навигация и управление движением», г. Саратов, 2022.

Результаты диссертационного исследования внедрены в учебный процесс на межвузовской кафедре космических исследований Самарского университета и использованы в эскизном проекте наноспутника SamSat-M, разрабатываемого на межвузовской кафедре космических исследований.

По теме диссертации опубликовано 11 работ, в том числе 4 статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки России, 3 статьи, входящих в базу Scopus.

Личный вклад автора. Все результаты, вынесенные на защиту, получены автором самостоятельно. Автором самостоятельно проведены теоретические исследования и вычислительные эксперименты, подтверждающие основные положения и выводы. Все публикации по работе подготовлены автором самостоятельно или при определяющем его участии.

Соответствие паспорту специальности. Область исследования соответствует паспорту научной специальности 2.5.16. Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов по пункту 1 – Разработка и совершенствование математических моделей, используемых для описания движения и управления летательным аппаратом на различных режимах полета; пункту 2 – Разработка методов априорного статистического анализа возмущенного движения ЛА; пункту 12 в части «Совершенствование методов ... управления движением летательных аппаратов, совершенствование баллистико-навигационного обеспечения полета летательных аппаратов».

1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ МАНЕВРИРУЮЩЕГО НАНОСПУТНИКА

В разделе вводятся системы координат, которые используются для исследования движения центра масс и движения относительно центра масс маневрирующего наноспутника, описываются математические модели орбитального и углового движений. Приводится динамическая модель массо-инерционных свойств наноспутника, а также модель формируемой силы реактивной тяги и возмущающего момента силы тяги.

1.1 Используемые системы координат

При исследовании вопросов точности маневрирования наноспутника одновременно рассматривается движение относительно центра масс и движение центра масс, поскольку угловая ориентация наноспутника характеризует направление корректирующего импульса и влияет на движение центра масс в процессе работы двигательной установки.

Для описания углового положения наноспутника введём опорную систему координат, относительно которой измеряются угловые отклонения, угловые скорости и ускорения жёстко связанной с космическим аппаратом системы координат.

Ориентация наноспутника задаётся относительно скоростной системы координат $Ox_g Y_g Z_g$, оси которой расположены как показано на рисунке 1.1. Ось Ox_g скоростной системы координат расположена по вектору скорости, ось OY_g перпендикулярна плоскости орбиты, ось OZ_g дополняет систему до правой. Точка O совпадает с центром масс наноспутника. В случае круговой орбиты скоростная система координат эквивалентна орбитальной системе координат (ОСК). Так как в работе исследуется движение космических

аппаратов нанокласса только на круговых орбитах, то в дальнейшем будем использовать орбитальную систему координат в качестве опорной.

Направления осей связанной с наноспутником системы координат (ССК) определяются самолётными углами, суть которых заключается в следующей последовательности поворотов: 1) вокруг оси OY_g на угол тангажа ϑ ; 2) вокруг промежуточной оси OZ_t на угол рысканья ψ ; 3) вокруг оси OX на угол крена γ .

ССК выбирается таким образом, чтобы оси её совпадали с главными центральными осями инерции космического аппарата. Начало связанной системы координат $OXYZ$ располагается в центре масс наноспутника, направленная вдоль продольной оси наноспутника ось крена OX , ось рысканья OZ , и ось тангажа OY взаимно перпендикулярны и образуют ортогональный базис.

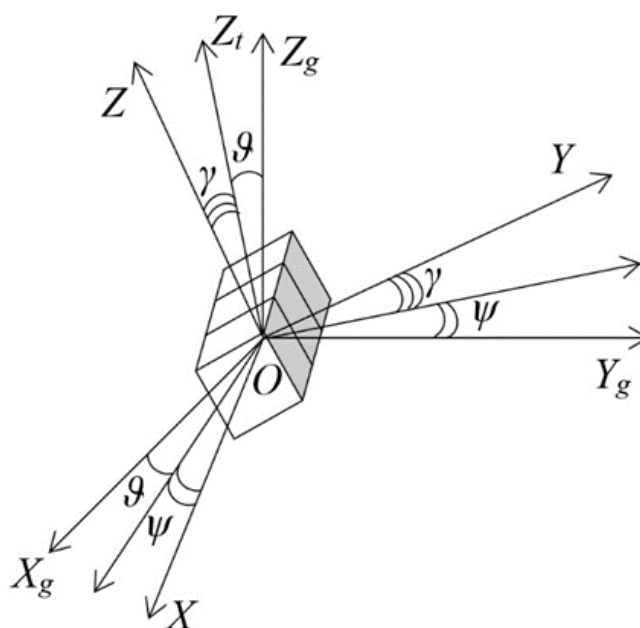


Рисунок 1.1 – Ориентация наноспутника относительно скоростной системы координат

Наноспутник рассматривается как твёрдое тело, которое совершает вращательно-поступательное движение под действием приложенных к нему

сил. Центр масс наноспутника перемещается по изменяющейся в инерциальном пространстве траектории, и одновременно с этим происходит вращательное движение относительно центра масс космического аппарата.

Матрица перехода от орбитальной системы координат к связанной системе координат определяется перемножением матриц элементарных поворотов, взятых в последовательности, противоположной последовательности этих поворотов. Матрицы элементарных поворотов вокруг каждой из осей имеют вид:

$$A_{\vartheta} = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

$$A_{\psi} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

$$A_{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Выражение для результирующей матрицы перехода от орбитальной системы координат к связанной:

$$A = A_{\gamma} A_{\psi} A_{\vartheta}. \quad (1.4)$$

Подставляя в выражение (1.4) матрицы (1.1), (1.2) и (1.3), получим матрицу поворота $A^{3 \times 3}$, элементы которой записаны ниже:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \cos \vartheta \cos \psi, \\ A_{12} &= \sin \vartheta \sin \gamma - \cos \vartheta \sin \psi \cos \gamma, \\ A_{13} &= \sin \vartheta \cos \gamma + \cos \vartheta \sin \psi \sin \gamma, \\ A_{21} &= \sin \psi \\ A_{22} &= \cos \psi \cos \gamma, \\ A_{23} &= -\cos \psi \sin \gamma, \\ A_{31} &= -\sin \vartheta \cos \psi, \\ A_{32} &= \cos \vartheta \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma, \\ A_{33} &= \cos \vartheta \cos \gamma - \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Интегрирование кинематических уравнений движения осуществляется с использованием компонентов кватерниона $\Lambda = [\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3]^T$, которые связаны с самолётными углами следующими выражениями [11]:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ \lambda_1 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \\ \lambda_2 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \\ \lambda_3 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Компоненты кватерниона используются в качестве способа записи матрицы направляющих косинусов и позволяют обойтись без использования тригонометрических функций. Матрица перехода A выражается через компоненты кватерниона следующим образом [12, 13]:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) & 2(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) \\ 2(-\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) \\ 2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) & 2(-\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{pmatrix},\tag{1.7}$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – компоненты кватерниона Λ .

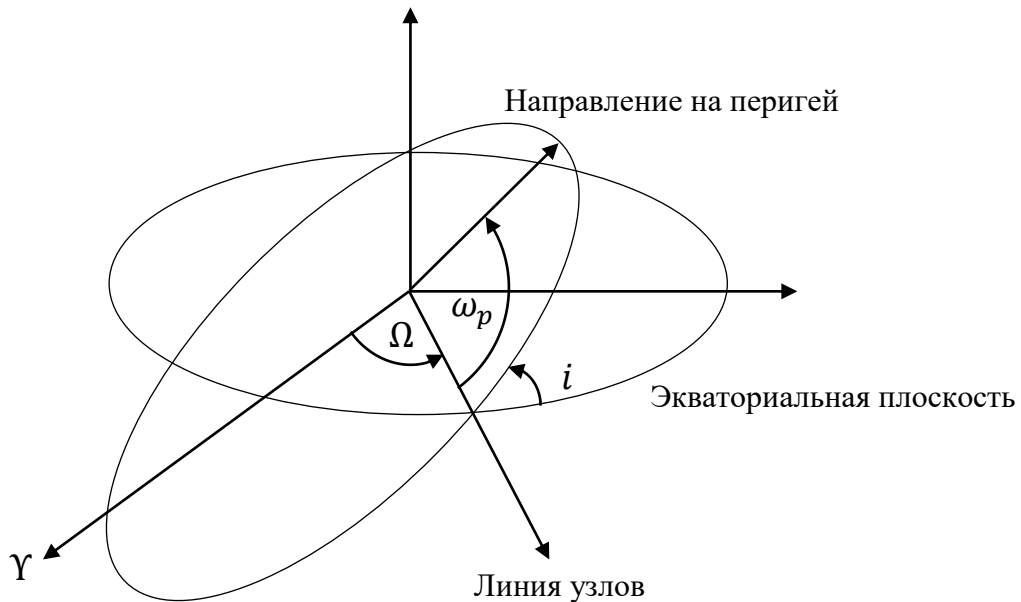
Обратный переход от компонентов кватерниона к самолётным углам осуществляется с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned}\vartheta &= \operatorname{arctg}(-A_{13}/A_{11}), \\ \psi &= \operatorname{arcsin} A_{12}, \\ \gamma &= \operatorname{arctg}(-A_{32}/A_{22}).\end{aligned}\tag{1.8}$$

Элементы матрицы перехода A являются координатами базисных векторов связанной системы координат $OXYZ$ в скоростной системе координат $Ox_gY_gZ_g$. При вычислении тангажа и рысканья возникает неопределённость, поскольку диаметрально противоположные угловые меры имеют одинаковый тангенс: $\operatorname{arctg}(y/x) = \operatorname{arctg}(-y/-x)$. Для устранения этого недостатка может использоваться функция $\operatorname{atan2}(y, x)$, которая входит в набор стандартных функций во многих языках программирования и математических пакетах.

Для описания движения центра масс космического аппарата, используются уравнения движения в вариациях. При использовании равноденственных элементов уравнения движения в вариациях не вырождаются для любых типов орбит и являются удобным инструментом для исследования движения центра масс, подверженного возмущениям, записанным в орбитальной системе координат. Для перехода к равноденственным элементам используется набор классических орбитальных элементов: большая полуось орбиты a , эксцентриситет орбиты e , наклонение орбиты i , долгота восходящего узла Ω , аргумент перицентра ω_p , истинная аномалия ν . Иллюстрация классических элементов приведена на рисунке 1.2.

а)



б)

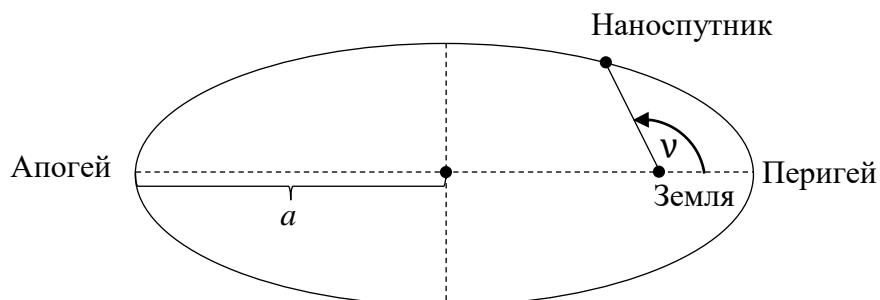


Рисунок 1.2 – Иллюстрация классических орбитальных элементов:

а) задающих положение орбиты; б) задающих форму орбиты и положение наноспутника на орбите

Переход к равноденственным элементам от классических осуществляется с помощью следующих преобразований:

$$\begin{aligned} p &= a(1 - e^2); L = \nu + \omega_p + \xi\Omega, \\ e_1 &= e \cos(\omega_p + \xi\Omega); e_2 = e \sin(\omega_p + \xi\Omega), \\ i_1 &= \left(\operatorname{tg} \frac{i}{2}\right)^\xi \xi \cos \Omega; i_2 = \left(\operatorname{tg} \frac{i}{2}\right)^\xi \xi \sin \Omega, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где L – истинная долгота в орбите, ξ – ретроградный фактор:

$$\xi = \begin{cases} +1, & 0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}, \\ -1, & \frac{\pi}{2} < i \leq \pi. \end{cases}$$

Движение центра масс наноспутника удобно рассматривать в инерциальной геоцентрической прямоугольной системе координат $O_{\text{И}}X_{\text{И}}Y_{\text{И}}Z_{\text{И}}$, начало которой совпадает с центром масс планеты. Основная плоскость $O_{\text{И}}X_{\text{И}}Y_{\text{И}}$ совпадает с плоскостью экватора, ось $O_{\text{И}}X_{\text{И}}$ направлена в точку весеннего равноденствия, ось $O_{\text{И}}Z_{\text{И}}$ – по оси вращения Земли, а ось $O_{\text{И}}Y_{\text{И}}$ дополняет систему координат до правой. Будем далее обозначать эту систему ИСК (инерциальная система координат). Геоцентрические положение и скорость наноспутника находятся по формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \cos L + \mathbf{g} \sin L \\ 1 + e_1 \cos L + e_2 \sin L \end{pmatrix}, \\ \mathbf{v} &= \frac{e_1 + \cos L}{p} \mathbf{g} - \frac{e_2 + \sin L}{p} \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где вектора \mathbf{f} и \mathbf{g} определяются с помощью выражений:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{1 + i_1^2 + i_2^2} \begin{pmatrix} 1 + i_1^2 - i_2^2 \\ 2\xi i_1 i_2 \\ -2\xi i_2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{g} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{1 + i_1^2 + i_2^2} \begin{pmatrix} 2i_1 i_2 \\ \xi(1 - i_1^2 + i_2^2) \\ 2\xi i_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Для оценки эволюции орбиты после выполнения её коррекции требуется осуществить переход от равноденственных элементов к классическим. Для этого используется следующий набор выражений:

$$\begin{aligned}
 e &= \sqrt{e_1^2 + e_2^2}; i = \frac{\pi}{2} (1 - \xi) + 2\xi \operatorname{arctg} \sqrt{i_1^2 + i_2^2}, \\
 \Omega &= \operatorname{atan2}(i_2, \xi i_1); \omega_p = \operatorname{atan2}(e_2, e_1) - \xi \Omega, \\
 v &= L - \omega_p - \xi \Omega; a = p(1 - e^2)^{-1}.
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

1.2 Модель движения

Для исследования проблемы маневрирования проводится интегрирование уравнений движения центра масс наноспутника, а также движения относительно центра масс. Для описания движения центра масс используются равноденственные элементы, а для описания углового положения используется система динамических уравнений и кинематические соотношения в кватернионной форме.

Так как длительность выдачи импульса тяги составляет несколько секунд, моделирование проводится на относительно небольших интервалах времени, поэтому влияние аэродинамического, гравитационного и иных внешних моментов пренебрежимо мало по сравнению с возмущающим моментом силы тяги и не учитывается. Модель движения относительно центра масс, с учетом возмущения, возникающего от работы двигательной установки, имеет вид системы дифференциальных уравнений, записанных в ССК, интегрируемых по времени [14-18]:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{\omega}_X = \frac{I_Y(t, \Phi_{и}) - I_Z(t, \Phi_{и})}{I_X(t, \Phi_{и})} \omega_Y \omega_Z + \frac{M_X(t, \Phi_{и}, \Phi_{д})}{I_X(t, \Phi_{и})}, \\
\dot{\omega}_Y = \frac{I_Z(t, \Phi_{и}) - I_X(t, \Phi_{и})}{I_Y(t, \Phi_{и})} \omega_X \omega_Z + \frac{M_Y(t, \Phi_{и}, \Phi_{д})}{I_Y(t, \Phi_{и})}, \\
\dot{\omega}_Z = \frac{I_X(t, \Phi_{и}) - I_Y(t, \Phi_{и})}{I_Z(t, \Phi_{и})} \omega_X \omega_Y + \frac{M_Z(t, \Phi_{и}, \Phi_{д})}{I_Z(t, \Phi_{и})}, \\
\dot{\lambda}_0 = -\frac{1}{2} [(\omega_X - \omega_{0X})\lambda_1 + (\omega_Y - \omega_{0Y})\lambda_2 + (\omega_Z - \omega_{0Z})\lambda_3], \\
\dot{\lambda}_1 = \frac{1}{2} [(\omega_X - \omega_{0X})\lambda_0 - (\omega_Y - \omega_{0Y})\lambda_3 + (\omega_Z - \omega_{0Z})\lambda_2], \\
\dot{\lambda}_2 = \frac{1}{2} [(\omega_X - \omega_{0X})\lambda_3 + (\omega_Y - \omega_{0Y})\lambda_0 - (\omega_Z - \omega_{0Z})\lambda_1], \\
\dot{\lambda}_3 = \frac{1}{2} [-(\omega_X - \omega_{0X})\lambda_2 + (\omega_Y - \omega_{0Y})\lambda_1 + (\omega_Z - \omega_{0Z})\lambda_0],
\end{array} \right. \quad (1.13)$$

где $I_X(t, \Phi_{и}), I_Y(t, \Phi_{и}), I_Z(t, \Phi_{и})$ – главные центральные моменты инерции наноспутника; $M_X(t, \Phi_{и}, \Phi_{д}), M_Y(t, \Phi_{и}, \Phi_{д}), M_Z(t, \Phi_{и}, \Phi_{д})$ – проекции вектора возмущающего момента от силы тяги; $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ – компоненты вектора мгновенной угловой скорости; $\omega_{0X}, \omega_{0Y}, \omega_{0Z}$ – компоненты вектора угловой скорости орбитального движения; $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – компоненты кватерниона ориентации.

Для определения угловой скорости орбитального движения используется матрица перехода, вычисленная с помощью (1.7):

$$\boldsymbol{\omega}_0 = A \boldsymbol{\omega}_{\text{оск}}, \quad (1.14)$$

где $\boldsymbol{\omega}_{\text{оск}} = (0, \sqrt{\mu/r^3}, 0)^T$ – угловая скорость орбитальной системы координат, движущейся по круговой орбите относительно неподвижной ИСК; μ – гравитационный параметр Земли; r – расстояние между центром ИСК и центром масс наноспутника.

Интегрирование уравнений движения центра масс происходит одновременно с интегрированием уравнений движения относительно центра масс для определения направления выдачи импульса двигательной установкой. Поскольку моделирование проводится на малых интервалах времени и не требует длительных расчетов, шаг интегрирования принимается

одинаковым для моделирования движения центра масс и движения относительно центра масс.

Уравнения движения в вариациях равноденственных элементов (1.9) можно записать в форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dt} = \frac{2p}{\varrho} \sqrt{\frac{p}{\mu}} T, \\ \frac{de_1}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin L S + \left[\left(1 + \frac{1}{\varrho}\right) \cos L + \frac{e_1}{\varrho} \right] T - \frac{e_2 \zeta}{\varrho} W \right\}, \\ \frac{de_2}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ -\cos L S + \left[\left(1 + \frac{1}{\varrho}\right) \sin L + \frac{e_2}{\varrho} \right] T + \frac{e_1 \zeta}{\varrho} W \right\}, \\ \frac{di_1}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\phi \cos L}{2\varrho} W, \\ \frac{di_2}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\phi \sin L}{2\varrho} W, \\ \frac{dL}{dt} = \sqrt{\frac{\mu \varrho^2}{p}} + \sqrt{\frac{p \zeta}{\mu \varrho}} W, \end{array} \right. \quad (1.15)$$

где $\phi = 1 + i_1^2 + i_2^2$; $\zeta = i_1 \sin L - i_2 \cos L$; $\varrho = 1 + e_1 \cos L + e_2 \sin L$; S – компонента возмущающего ускорения вдоль радиуса-вектора \mathbf{r} , определяемого из выражения (1.10); W – проекция возмущающего ускорения вдоль вектора орбитального углового момента; T – проекция возмущающего ускорения на ось, перпендикулярную этим векторам и направленную по движению наноспутника.

1.3 Динамическая модель массо-инерционных характеристик наноспутника

Для составления динамической модели массо-инерционных характеристик наноспутника проводится определение смещение центра масс наноспутника относительно центра торцевой части, на которой установлено

сопло. При этом предполагается, что при выработке топлива центр масс смещается только по продольной оси наноспутника (ось OX в ССК). Рассматривается наноспутник, оснащенный двигательной установкой, в которой давление в топливном баке поддерживается постоянным с помощью подпружиненного поршня, рабочее тело выбрасывается в окружающую среду через сопло Лавалья.

Время работы двигательной установки будем обозначать $\tau = t - t_{д0}$, где t – текущее время, с; $t_{д0}$ – время включения двигательной установки, с.

Масса топлива в текущий момент:

$$m_{\tau} = m_{\tau0} - \dot{m}_{\tau}\tau, \quad (1.16)$$

где $m_{\tau0}$ – начальная масса топлива, кг; \dot{m}_{τ} – массовый расход, кг/с.

При моделировании осуществляется проверка условия $m_{\tau} \geq 0$.

Массовый расход определяется из выражения [16, 31]:

$$\dot{m}_{\tau} = \sqrt{\rho} \left(\frac{2}{\rho + 1} \right)^{\frac{\rho+1}{2\rho-2}} p_{вх} S_{кр} \left(\frac{R_0 T_{вх}}{M_{рт}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.17)$$

где ρ – показатель изоэнтропы (адиабаты) рабочего тела; $p_{вх}$ – абсолютное давление рабочего тела на входе сопла, Па; $S_{кр}$ – площадь критического сечения сопла, м²; R_0 – универсальная газовая постоянная, 8,31 $\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$; $M_{рт}$ – молярная масса рабочего тела, кг/моль; $T_{вх}$ – температура рабочего тела на входе в сопло, К.

Текущей объём топлива в баке пропорционален массе топлива:

$$V_{\text{топ}} = \frac{m_{\tau}}{\rho_{\tau}}, \quad (1.18)$$

где ρ_{τ} – плотность топлива в баке, кг/м³.

Предполагается, что топливо хранится в баке при постоянном давлении и при выработке прижимается поршнем к торцу наноспутника. Тогда текущий объём топлива в баке можно записать следующим образом:

$$S_{\text{бак}} h(t) = \frac{m_{\tau}}{\rho_{\tau}}, \quad (1.19)$$

где $S_{\text{бак}}$ – площадь поперечного сечения бака, м^2 ; $h(t)$ – высота столба под поршнем, м.

Поскольку положение центра масс жидкости по оси вдоль поршня определяется как $h(t)/2$ в системе отсчёта с началом на торце бака, к которому прижимается поршень, то закон смещения центра масс топлива в системе отсчёта с началом на торце бака записывается в виде:

$$x(t) = \frac{m_{\text{T}}(t)h_{\text{б}}}{2m_{\text{T0}}}, \quad (1.20)$$

где $h_{\text{б}}$ – длина топливного бака, м.

Поскольку смещения по поперечным осям полагаются нулевыми, смещение центр масс топлива в баке относительно центра торцевой части, на которую установлено сопло:

$$\zeta_{\text{T}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) + C_{\text{T}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

где C_{T} – параметр, учитывающий расстояние между топливным баком и выходным сечением сопла.

С учётом полученного закона, смещение центра масс наноспутника относительно центра торцевой части, на которой установлено сопло, можно представить как:

$$\zeta_{\text{с}}(t) = \frac{m_{\text{T}}\zeta_{\text{T}}(t) + m_{\text{сух}}\zeta_{\text{сух}}}{m_{\text{T}} + m_{\text{сух}}}, \quad (1.22)$$

где $m_{\text{сух}}$ – «сухая» масса наноспутника, не включающая в себя текущую массу топлива, кг; $\zeta_{\text{сух}}$ – смещение центра масс наноспутника, не включающее в себя топливо, относительно центра торцевой части, на которую установлено сопло, м.

Обозначим текущую массу наноспутника в виде $m = m_{\text{T}} + m_{\text{сух}}$ и проведем перерасчет смещения центра масс относительно геометрического центра. Для этого из $\zeta_{\text{с}}(t)$ вычитается смещение центра торцевой части относительно геометрического центра:

$$\zeta(t) = \zeta_c(t) - \begin{pmatrix} 0,5l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

где l – длина наноспутника по продольной оси, м.

Моменты инерции наноспутника, как для прямоугольного параллелепипеда, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} I_{x_0} &= \frac{1}{6}mb^2, \\ I_{y_0} &= \frac{1}{12}m(l^2 + b^2), \\ I_{z_0} &= \frac{1}{12}m(l^2 + b^2), \end{aligned} \quad (1.24)$$

здесь b – ширина наноспутника по поперечной оси, м.

С учётом смещения центра масс относительно геометрического центра, моменты инерции пересчитываются по теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$\begin{aligned} I_X &= I_{x_0} + m(\zeta_2^2 + \zeta_3^2), \\ I_Y &= I_{y_0} + m(\zeta_1^2 + \zeta_3^2), \\ I_Z &= I_{z_0} + m(\zeta_1^2 + \zeta_2^2), \end{aligned} \quad (1.25)$$

где $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ – элементы вектора смещения центра масс относительно геометрического центра наноспутника $\zeta(t)$.

Поскольку масса наноспутника и координаты его центра масс в ССК будут изменяться в процессе выработки рабочего тела, то моменты инерции наноспутника также будут претерпевать изменения.

1.4 Математическая модель силы реактивной тяги и её момента

Номинальное значение реактивной силы тяги можно описать приближённым выражением

$$F_H = \dot{m}w, \quad (1.26)$$

где \dot{m} – массовый расход топлива, кг/с; w – скорость истечения рабочего тела, м/с.

Скорость истечения в уравнении тяги определяется с помощью формулы [31]:

$$w = \sqrt{\frac{2\rho R_0 T_{\text{ВХ}}}{(\rho - 1)M_{\text{РТ}}} \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_{\text{ВХ}}} \right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} \right]}, \quad (1.27)$$

где p_a – абсолютное давление атмосферы, Па.

Из уравнения силы тяги (1.26) можно получить номинальное значение, однако реальный профиль тяги будет иметь участок выхода на режим, участок установившегося режима и участок последствия тяги. Для того, чтобы задать профиль тяги, используются следующие приближённые выражения [19]:

$$\begin{cases} F_0 = F_H \left(1 - e^{-\frac{10\tau}{T_1}} \right), \tau < T_1, \\ F_0 = F_H, T_1 \leq \tau \leq T_1 + T_0, \\ F_0 = F_H e^{-\frac{10(\tau - T_1 - T_0)}{T_2}}, \tau \geq T_1 + T_0, \end{cases} \quad (1.28)$$

где τ – время работы двигательной установки, с; T_0, T_1, T_2 – длительность установившегося режима, длительность выхода на режим и длительность последствия тяги соответственно, с.

С учётом отклонения сопла от продольной оси в плоскости XOZ (угол α) и плоскости XOY (угол β) проекции тяги в связанной системе координат можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_0 \cos \alpha \cos \beta \\ -F_0 \cos \alpha \sin \beta \\ F_0 \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Для определения ускорений S, W, T , фигурирующих в уравнениях движения (2.15), используется транспонированная матрица перехода из орбитальной системы в связанную (1.7):

$$\begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix} = A^T \mathbf{F} (m_{\text{Т}} + m_{\text{ост}})^{-1}. \quad (1.30)$$

Для определения момента силы тяги, действующей на спутник, производится векторное перемножение вектора плеча на вектор силы тяги в связанной системе координат:

$$\mathbf{M} = [\zeta_c(\mathbf{t}, \Phi_{и}) \times \mathbf{F}(\mathbf{t}, \Phi_{д})]. \quad (1.31)$$

Плечо, определяемое как радиус-вектор точки приложения силы, вычисляется по формуле (1.22), проекции вектора силы тяги соответствуют выражениям (1.29). Поскольку ζ_c и \mathbf{F} являются функциями времени, момент силы тяги также меняется во времени.

Для анализа точности маневрирования является важным определение импульса момента силы реактивной тяги, характеризующего меру воздействия момента силы за время работы двигательной установки:

$$L_\tau = \int_0^\tau [\zeta_c(\mathbf{t}, \Phi_{и}) \times \mathbf{F}(\mathbf{t}, \Phi_{д})] dt. \quad (1.32)$$

Импульс момента является одним из параметров движения, который может служить для оценки эффективности выполнения орбитального маневра.

1.5 Математическая модель параметров маневра наноспутника

Вычисление изменения (приращения) скорости осуществляется путем определения разницы между вектором скорости центра масс $\mathbf{V}_{и\tau}$, которую приобрёл наноспутник после выдачи корректирующего импульса за интервал времени τ , и вектором скорости, которую имел наноспутник до выдачи импульса $\mathbf{V}_{и0}$ в ИСК:

$$\Delta \mathbf{V}_{и} = \mathbf{V}_{и\tau} - \mathbf{V}_{и0}.$$

Поскольку при моделировании движения центра масс используются уравнения в вариациях равноденственных элементов, необходимо осуществить переход к ИСК и в этой системе координат вычислить изменение скорости. Для преобразования изменения скорости из ИСК в проекции на оси орбитальной системы координат используется следующее выражение [20]:

$$\begin{pmatrix} \Delta V_S \\ \Delta V_T \\ \Delta V_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial u} & \frac{\partial \theta_2}{\partial u} & \frac{\partial \theta_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial i} & \frac{\partial \theta_2}{\partial i} & \frac{\partial \theta_3}{\partial i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V_{иx} \\ \Delta V_{иy} \\ \Delta V_{из} \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

где V_x, V_y, V_z – проекции ускорения в ИСК; u – аргумент широты орбиты; i – наклонение орбиты; $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i, \\
 \theta_2 &= \sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i, \\
 \theta_3 &= \sin u \sin i,
 \end{aligned}
 \tag{1.34}$$

где Ω – долгота восходящего узла; i – наклонение орбиты.

1.6 Выводы по первому разделу

В разделе приведены системы координат и математические модели движения центра масс и относительно центра масс, позволяющие проводить численное моделирование и верификацию предлагаемых в настоящей работе методов повышения точности маневрирования наноспутника.

Приведены выражения, описывающие динамические массо-инерционные свойства наноспутника: закон смещения положения центра масс и моментов инерции наноспутника. Отмечен ряд допущений, которые приняты в работе, а именно: орбита движения наноспутника считается круговой, влияние внешних моментов, за исключением момента силы реактивной тяги, считается пренебрежимо малым; интегрирование уравнений движений центра масс и относительно центра масс происходит одновременно с постоянным шагом.

Представлена математическая модель силы реактивной тяги и возмущающего момента, возникающего при работе двигательной установки. Модель силы реактивной тяги учитывает особенности профиля тяги, а также отклонение сопла Лавалья в связанной с наноспутником системе координат.

В разделе приведена методика вычисления ускорения, которое приобретает наноспутник в процессе выдачи корректирующего импульса. Проекция вектора ускорения и изменение скорости вращения наноспутника относительно центра масс за время работы двигательной установки являются параметрами движения, характеризующими точность выполнения орбитального маневра.

2 ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИЧИН ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИМПУЛЬСНОЙ КОРРЕКЦИИ ОРБИТЫ

Ошибки при маневрировании наноспутника являются следствием производственных отклонений изготовления двигательной установки и её монтажа на платформу: в процессе выдачи импульса тяги наноспутник приобретает угловые ускорения и направление вектора импульса тяги изменяется, что приводит к снижению эффективности коррекции траектории наноспутника [21].

Условно источники ошибок маневрирования можно разделить на два типа. Источники ошибок маневрирования первого типа – это погрешности изготовления наноспутника и двигательной установки, которые приводят к несоосности линии приложения силы тяги и продольной оси наноспутника, проходящей через его центр масс. Следствием этой несоосности, формирующей плечо действия силы тяги, является возникновение значительного по величине возмущающего момента. К источникам ошибок маневрирования другого типа можно отнести факторы, которые влияют на режим работы двигательной установки. Их следствием является дисперсия модуля величины силы реактивной тяги.

В данном разделе предложена стохастическая математическая модель движения наноспутника с двигательной установкой при совершении манёвра коррекции, сформирована вероятностная модель силы реактивной тяги. Производственные отклонения и номинальное значение силы тяги рассматриваются как случайные факторы, оказывающие влияние на точность выполнения орбитального маневра. Приведена методика оценки влияния производственных отклонений изготовления наноспутника и двигательной установки на угловое движение в процессе формирования корректирующего импульса и на точность маневрирования.

2.1 Влияние производственных отклонений на точность маневрирования наноспутника

2.1.1 Стохастическая математическая модель движения наноспутника с двигательной установкой

Стохастическая математическая модель включает в себя модель движения наноспутника с двигательной установкой, описанную в первом разделе, а также вероятностные модели случайных факторов, оказывающих влияние на движение наноспутника. Случайные факторы представлены в виде трёх подмножеств: параметров движения относительно центра масс (включая начальные условия углового движения) Φ_o , параметров конструкции наноспутника и двигательной установки $\Phi_{и}$ и параметров режима работы двигательной установки $\Phi_{д}$. Эти три подмножества составляют единое множество случайных факторов $\Phi_o, \Phi_{и}, \Phi_{д} \subset \tilde{\Phi}$. Случайность факторов объясняется наличием производственных отклонений, неизбежно возникающих при изготовлении наноспутника и двигательной установки, а также изменением некоторых энергетических и массо-инерционных характеристик наноспутника в процессе его эксплуатации.

Случайные факторы оказывают непосредственное влияние на параметры движения наноспутника во время выдачи корректирующего импульса, то есть на точность маневрирования. Параметры движения, характеризующие точность маневрирования, включают в себя проекции вектора изменения скорости движения центра масс, угловых скоростей и углов ориентации за время работы двигательной установки $\tilde{\mathbf{B}} = (\Delta V_S, \Delta V_T, \Delta V_W, \Delta \dot{\vartheta}, \Delta \dot{\psi}, \Delta \dot{\gamma}, \Delta \vartheta, \Delta \psi, \Delta \gamma)$. Мощности множеств $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ равны J и K соответственно. Здесь J – число случайных факторов, учитываемых в модели; K – число выходных параметров (параметров движения), определяемых в результате моделирования.

Задача оценки влияния производственных отклонений (дисперсий проектных параметров) на характер движения наноспутника решается в

вероятностной постановке. Для этого формируется массив реализаций множества случайных факторов, после чего проводится прямое моделирование орбитального и углового движения наноспутника методом Монте-Карло, и определяется множество параметров движения для каждой реализации независимых параметров.

Решение поставленной задачи проводится в рамках регрессионного и факторного анализа. Исходными данными являются два массива чисел – массив реализаций случайных факторов Φ , и массив реализаций параметров движения B . Массивы чисел Φ и B представляют собой матрицы размерностями $\Phi^{N \times J}$ и $B^{N \times K}$, которые построчно описывают состояние исследуемой системы для каждой реализации:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1[1] & \cdots & \Phi_J[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1[N] & \cdots & \Phi_J[N] \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1[1] & \cdots & B_K[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1[N] & \cdots & B_K[N] \end{pmatrix},$$

здесь N – количество реализаций (число моделирований).

Суть регрессионного анализа заключается в установлении явной взаимосвязи между элементами множества $\tilde{\Phi}$ и элементами множества \tilde{B} и ее формализации в виде аналитических выражений для возможности дальнейшего исследования. Суть факторного анализа заключается в выделении группы элементов множества $\tilde{\Phi}$, оказывающих пренебрежимо малое влияние на элементы множества \tilde{B} . Для исследования причин возникновения неточностей импульсной коррекции орбиты регрессионный и факторный анализ модели движения проводятся несколько раз, чередуясь между собой: составляется регрессионная модель, после чего проводится факторный анализ, в результате которого составляется усеченная регрессионная модель, учитывающая наиболее значимые (с точки зрения влияния дисперсий входных параметров на дисперсии выходных параметров)

факторы. Усеченная регрессионная модель позволяет сформировать требования к производственным отклонениям путем решения системы неравенств и определения допустимых значений дисперсий случайных факторов для обеспечения требуемых дисперсий параметров движения наноспутника.

2.1.2 Регрессионный анализ модели погрешностей импульсной коррекции орбиты наноспутника

Методика анализа состоит из нескольких этапов [22].

Этап 1. Определяются коэффициенты парной корреляции между независимыми параметрами и выходными параметрами движения (проекциями вектора приращения скорости движения центра масс и движения относительно центра масс) по формуле:

$$r_{\Phi_j \bar{B}_k} = \frac{\sum_{n=1}^N (\Phi_j[n] - \bar{\Phi}_j)(B_k[n] - \bar{B}_k)}{\sqrt{\sum_{n=1}^N (\Phi_j[n] - \bar{\Phi}_j)^2 \sum_{n=1}^N (B_k[n] - \bar{B}_k)^2}}, j = \bar{1}, \bar{J}, k = \bar{1}, \bar{K}. \quad (2.2)$$

здесь $\Phi_j[n]$ – случайные факторы; $B_k[n]$ – выходные параметры движения; $\bar{\Phi}_j, \bar{B}_k$ – средние значения переменных по выборке.

Этап 2. Проверяется нулевая гипотеза об отсутствии корреляции между случайными факторами и выходными параметрами движения. Для этого определяются достигаемые уровни значимости (P-value, P-значение) [23]. Если P-значение меньше заданного уровня значимости, то нулевая гипотеза о том, что корреляция между случайными факторами и параметрами движения отсутствует, отвергается. Чем меньшее P-значение наблюдается, тем сильнее свидетельствует совокупность наблюдений против нулевой гипотезы. Использование достигаемого уровня значимости рекомендуется нормативными документами Всероссийского научно-исследовательского института стандартизации с 1987 года [24]. Уровень значимости, имеющий смысл вероятности, с которой может быть отвергнута нулевая гипотеза, при условии, что она верна, является фиксированным и принимается равным 0,05.

Случайные факторы, не имеющие заметной корреляции с выходными параметрами, исключаются из дальнейшего анализа.

Этап 3. Определяются мультиколлинеарные случайные факторы, которые в результате многократных моделирований проявили статистическую взаимосвязь друг с другом. Для обнаружения пар мультиколлинеарных факторов так же используются R -значения. При R -значениях меньших, чем уровень значимости, делается вывод о наличии межфакторной корреляции. Из пар мультиколлинеарных факторов в дальнейшем анализе используются только те факторы, которые имеют наибольший модуль коэффициента корреляции с зависимой переменной, остальные случайные факторы исключаются из рассмотрения.

Этап 4. Для получения коэффициентов уравнений регрессии, позволяющих в регрессионной модели учесть ситуацию, когда все влияющие факторы равны нулю, к матрице реализаций случайных факторов Φ добавляется столбец из единиц слева, после чего методом наименьших квадратов определяются коэффициенты уравнений линейной регрессии:

$$\mathbf{Q}_k = (\hat{\Phi}^T \hat{\Phi})^{-1} \hat{\Phi}^T \mathbf{V}_k, k = \overline{1, K}, \quad (2.3)$$

здесь $\hat{\Phi}$ – измененная матрица реализаций случайных факторов Φ с добавлением единиц в качестве первого столбца; \mathbf{V}_k – вектор-столбец реализаций k -го параметра движения, полученных в результате моделирования, размерности N ; \mathbf{Q}_k – вектор-столбец коэффициентов k -го уравнения линейной регрессии размерности $J + 1$; верхний индекс T означает транспонирование матрицы.

В результате решения матричных уравнений (2.3) получается K векторов, каждый из которых содержит $J + 1$ коэффициентов уравнений регрессии.

Этап 5. Формируется матрица коэффициентов регрессии, состоящая из векторов-столбцов коэффициентов регрессии

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_K)^T, \quad (2.4)$$

после чего составляется регрессионная модель, которая представляет собой систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$Q(1:K, 2:J+1)\tilde{\Phi} + Q(1:K, 1) = \mathbf{B}^*, \quad (2.5)$$

где $Q(1:K, 2:J+1)$ – редуцированная матрица Q , в которую не входит первый столбец; $Q(1:K, 1)$ – вектор-столбец, являющийся первым столбцом исходной матрицы Q ; $\tilde{\Phi}$ – вектор-столбец случайных факторов; \mathbf{B}^* – вектор-столбец параметров движения, рассчитываемых по регрессионной модели.

Этап 6. С помощью регрессионной модели (2.5) вычисляются расчётные значения параметров движения для всех реализаций случайных факторов и сравниваются с теми значениями, которые были получены в результате математического моделирования. Оценивается адекватность регрессионной модели. Для этого вычисляются критерии Фишера по формуле:

$$F = \frac{\sum_{n=1}^N (B_k^*[n] - \overline{B_k^*})^2}{J} \frac{N - J - 1}{\sum_{n=1}^N (B_k[n] - B_k^*[n])^2}, k = \overline{1, K}, \quad (2.6)$$

где $B_k[n]$ – значения параметров движения, полученные в результате математического моделирования; $B_k^*[n]$ – значения параметров движения, полученные в рамках регрессионной модели; $\overline{B_k^*}$ – средние значения параметров движения, полученных в рамках регрессионной модели.

Если расчётное значение критерия Фишера будет больше, чем табличное для заданной вероятности ошибки оценки адекватности уравнения регрессии и степеней свободы J и $(N - J - 1)$, то регрессионная модель считается адекватной результатам статистических испытаний. Табличные значения критерия Фишера можно узнать в справочной литературе или при помощи специализированных компьютерных программ (например, Microsoft Excel позволяет определять табличные значения критерия Фишера вызовом функции «=ФРАСПОБР(0,05;B1;B2)».

2.1.3 Факторный анализ модели погрешностей импульсной коррекции орбиты наноспутника

Результатом проведения регрессионного анализа является модель вида (2.5), представляющая собой систему линейных алгебраических уравнений. В виду того, вектор случайных факторов $\tilde{\Phi}$ имеет размерность J , а вектор параметров движения \mathbf{B}^* имеет размерность K , причем $J > K$, линейные преобразования не являются взаимно однозначными. Тогда можно записать

$$K_{\mathbf{B}^*} = Q(1:K, 2:J+1)K_{\tilde{\Phi}}Q(1:K, 2:J+1)^T \quad (2.7)$$

где $K_{\mathbf{B}^*}$, $K_{\tilde{\Phi}}$ – ковариационные матрицы векторов \mathbf{B}^* и $\tilde{\Phi}$ соответственно.

Диагональные элементы ковариационных матриц представляют собой дисперсии. Поскольку случайные факторы являются независимыми между собой, то матрица $K_{\tilde{\Phi}}$ является диагональной. Используя выражение (2.7), можно выразить дисперсии контролируемых параметров:

$$D_{\mathbf{B}_k} = \sum_{j=1}^J Q_{k(j+1)}^2 D_{\tilde{\Phi}_j}, k = \overline{1, K}, \quad (2.8)$$

где $D_{\mathbf{B}_k}$ – дисперсии параметров движения; $Q_{k(j+1)}^2$ – квадраты коэффициентов регрессии; $D_{\tilde{\Phi}_j}$ – дисперсии случайных факторов.

На дисперсии параметров движения оказывают влияние все учитываемые регрессионной моделью случайные факторы, степень влияния каждого из них на неточность маневрирования может быть определена по формуле:

$$O_{jk} = Q_{k(j+1)}^2 D_{\tilde{\Phi}_j} \left(\sum_{i=1}^J Q_{k(i+1)}^2 D_{\tilde{\Phi}_i} \right)^{-1}, k = \overline{1, K}, j = \overline{1, J}, \quad (2.9)$$

где O_{jk} – доля влияния дисперсии j -го случайного фактора на дисперсию k -го выходного параметра.

2.2 Формирование вероятностной модели силы тяги двигательной установки

При проектировании реактивных двигателей с соплом Лавалья существенное влияние на формируемую силу тяги оказывают два параметра: площадь критического сечения сопла и давление рабочего тела перед критическим сечением сопла [25-28]. Эти два параметра в действительности не являются строго определяемыми и могут быть представлены как случайные величины. Разбросы площади критического сечения сопла обусловлены производственными отклонениями изготовления двигательной установки, а давление перед критическим сечением сопла может быть оценено лишь приблизительно. Для малоразмерных двигателей, используемых на наноспутниках, это имеет особое значение.

Разбросы площади критического сечения сопла Лавалья и давления рабочего тела перед критическим сечением приводят к тому, что сила тяги не является детерминированной величиной [29, 30]. Следовательно, важным параметром при планировании космической миссии, является не только номинальное значение формируемой силы тяги, но и закон её распределения. Закон распределения формируемой силы тяги можно получить с использованием понятия геометрической вероятности.

В целях максимизации величины тяги, сопло проектируют таким образом, чтобы абсолютное давление на его выходном срезе p_e было приблизительно равно давлению окружающей среды p_a для достижения оптимального режима расширения сопла [31, 32]. В процессе работы двигателя при $p_e < p_a$ имеет место перерасширение, которое приводит к серии ударных волн, попадающих в сопло и вызывающих рост потерь на трение реактивной струи с последующим снижением коэффициента расширения, то есть восстановлением равенства давлений. При $p_e > p_a$ имеет место недорасширение, при котором наблюдается сниженная скорость истечения рабочего тела. Полагая, что сопло функционирует в оптимальном режиме расширения в пустоте, то есть $p_e = p_a = 0$, выражение для номинальной силы

тяги можно записать с использованием (1.17), (1.26), (1.27) в следующем виде [31]:

$$F_H = p_{\text{вх}} S_{\text{кр}} \rho \sqrt{\frac{2}{\rho - 1}} \left(\frac{2}{\rho + 1} \right)^{\frac{\rho + 1}{2\rho - 2}}, \quad (2.10)$$

где ρ – показатель изоэнтропы (адиабаты) рабочего тела; $p_{\text{вх}}$ – абсолютное давление рабочего тела на входе сопла, Па; $S_{\text{кр}}$ – площадь критического сечения сопла, м².

Поскольку значения $p_{\text{вх}}$ и $S_{\text{кр}}$ в формуле (2.10) являются случайными величинами, номинальная сила тяги F_H также является случайной величиной. Таким образом, необходимо определить закон распределения F_H как функции двух случайных величин.

Полагая, что показатель адиабаты постоянен, можно представить для удобства формулу (2.10) в виде:

$$F_H = f(p_{\text{вх}}, S_{\text{кр}}). \quad (2.11)$$

Обозначим реализации случайных величин $p_{\text{вх}}, S_{\text{кр}}, F_H$ как p, S, F^* соответственно. Тогда, используя запись (2.11), можно представить функцию распределения номинальной силы тяги F_H следующим образом:

$$G = P[f(p, S) < F_H] \quad (2.12)$$

имеющую смысл вероятности того, что функция $f(p, S)$ примет значение, меньшее, чем F_H , для всех p и S , принадлежащих области допустимых значений $p_{\text{вх}}$ и $S_{\text{кр}}$ соответственно.

Определить плотность распределения вероятности силы тяги F_H можно путём дифференцирования функции $G = P[F^* < F_H]$ по переменной F_H .

2.2.1 Геометрическая интерпретация закона распределения силы тяги

Для нахождения закона распределения величины F_H используется геометрическое определение вероятности [33-35]. Функция (2.10) имеет вид поверхности, показанной на рисунке 2.1.

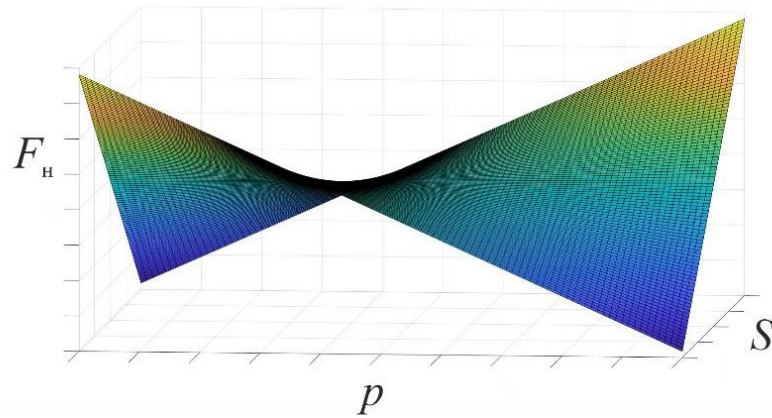


Рисунок 2.1 – Гиперболический параболоид силы тяги
в пространстве p, S

Построим плоскость Q , параллельную плоскости pOS на расстоянии F_H от неё. Эта плоскость пересекает параболоид силы тяги по гиперболе, проекция которой на плоскость pOS разделяет три области, как это показано на рисунке 2.2: в центральной области функция $f(p, S)$ принимает значения, меньшие, чем F_H , в двух других областях поверхность F^* располагается над плоскостью Q , то есть $F^* > F_H$.

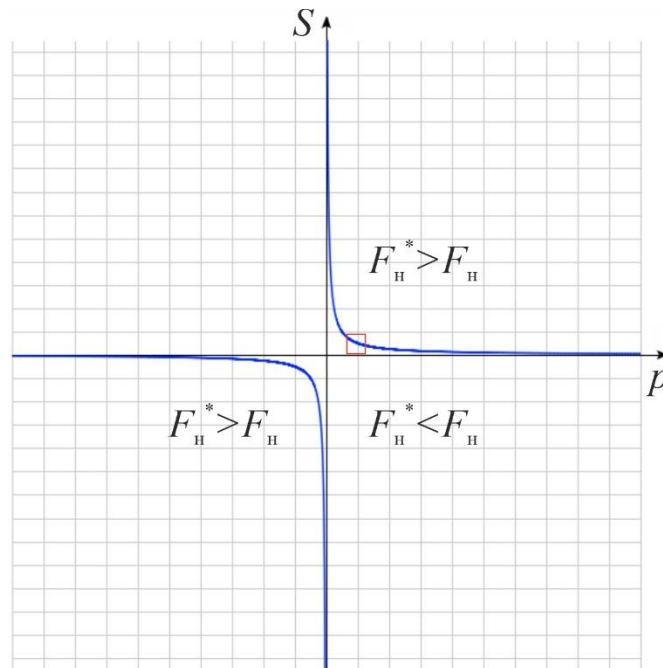


Рисунок 2.2 – Сечение гиперболического параболоида силы тяги плоскостью
 $F_H = const$

Так как истинные распределения величин $p_{вх}$ и $S_{кр}$ неизвестны, предполагается, что они распределены по равномерным законам. В этом случае точка с координатами (p, S) с вероятностью 1 окажется в области определения D , ограниченной минимальными и максимальными значениями $p_{вх}$ и $S_{кр}$. Эта область показана на рисунке 2.2 красным квадратом, ее площадь вычисляется по формуле:

$$D = (p_{max} - p_{min})(S_{max} - S_{min}), \quad (2.13)$$

где p_{min}, p_{max} – минимальное и максимальное значения давления на входе в сопло Лавала соответственно, S_{min}, S_{max} – минимальное и максимальное значения площади критического сечения сопла Лавала соответственно.

Проекция кривых, полученных сечением поверхности $F^* = f(p, S)$ плоскостью Q , лежащие в области определения на плоскости pOS изображены на рисунке 2.3 красным цветом.

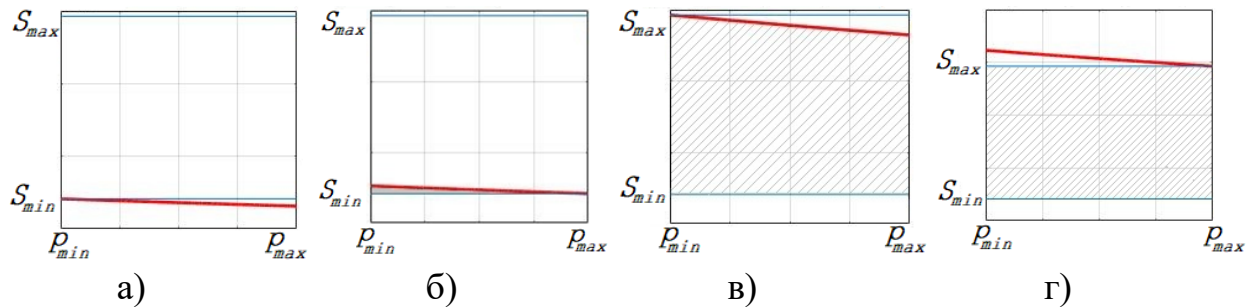


Рисунок 2.3 – Проекция кривых (красным цветом), по которым поверхность $F^* = f(p, S)$ пересекается плоскостью Q , удаленной от pOS на расстоянии: а)

$$F_H = f(p_{min}, S_{min}); \text{б) } F_H = f(p_{max}, S_{min});$$

$$\text{в) } F_H = f(p_{min}, S_{max}); \text{г) } F_H = f(p_{max}, S_{max})$$

Вероятность $P[f(p, S) < F_H]$ того, что значение функции $F^* = f(p, S)$ будет меньшим, чем F_H , равна отношению площади фигуры под графиком проекции (красная линия на рисунке 2.3) в области определения D к площади области D . Обозначим как D^* площадь пересечения области D и полуплоскости под графиком проекции.

Из рисунка 2.3 (а) видно, что при $F^* \leq f(p_{min}, S_{min})$ площадь D^* равна нулю. С увеличением F^* в промежутке $f(p_{min}, S_{min}) < F^* \leq f(p_{max}, S_{min})$ область пересечения D и полуплоскости под графиком проекции образует треугольник, площадь которого при равномерном увеличении F^* возрастает с постоянным ускорением (рисунок 2.3 (б)). При дальнейшем увеличении F^* в промежутке $f(p_{max}, S_{min}) < F^* \leq f(p_{min}, S_{max})$ интересующая область пересечения двух областей представляет собой трапецию, площадь которой при равномерном увеличении F^* возрастает с постоянной скоростью до тех пор, пока не будет достигнуто $F^* = f(p_{min}, S_{max})$ – этот вариант показан заштрихованной областью на рисунке 2.3 (в). Дальнейшее возрастание F^* вплоть до $F^* = f(p_{max}, S_{max})$ вызывает увеличение площади D^* с замедляющейся скоростью до тех пор, пока D^* не совпадёт с областью определения D (рисунок 2.3 (г)).

Плотность распределения вероятности вычисляется по формуле:

$$g = \frac{dG}{dF_H} \quad (2.14)$$

в которой

$$G = \frac{D^*}{D} \quad (2.15)$$

где D^* – площадь пересечения области определения и полуплоскости под графиком проекции, D – площадь области определения, вычисляемая по формуле (2.13).

2.2.2 Плотность распределения вероятности силы тяги

Проведём оценку характера изменения плотности распределения вероятности силы тяги. Введем следующее обозначение:

$$\gamma_a = \rho \sqrt{\frac{2}{\rho - 1}} \left(\frac{2}{\rho + 1} \right)^{\frac{\rho + 1}{2\rho - 2}}, \quad (2.16)$$

где ρ – показатель изоэнтропы (адиабаты) рабочего тела.

Вероятность того, что F_H принимает значения в диапазоне $f(p_{min}, S_{min}) \leq F_H < f(p_{max}, S_{min})$, определяется через площадь треугольника, лежащего в плоскости pOS (рисунок 2.3 (б)):

$$G = \frac{p - p_{min}}{2D} \left[\frac{F_H}{\gamma_a p_{min}} - S_{min} \right] \quad (2.17)$$

Продифференцировав функцию (2.17) по F_H , получим плотность распределения вероятности:

$$g = \frac{p - p_{min}}{2D\gamma_a p_{min}}, \quad (2.18)$$

где $p_{min} \leq p < p_{max}$. F_H в выражении (2.18) задана неявно через аргумент p .

Вероятность того, что F_H принимает значения в диапазоне $f(p_{max}, S_{min}) \leq F_H < f(p_{min}, S_{max})$, определяется через площадь трапеции (рисунок 2.3 (в)), которую можно выразить как произведение полусуммы оснований на высоту:

$$G = \frac{p_{max} - p_{min}}{2D} \left[\left(\frac{F_H}{\gamma_a p_{min}} - S_{min} \right) + \left(\frac{F_H}{\gamma_a p_{max}} - S_{min} \right) \right]. \quad (2.19)$$

Возьмём производную от функции (2.19) по F_H :

$$g = \frac{p_{max}^2 - p_{min}^2}{2D\gamma_a p_{min} p_{max}}. \quad (2.20)$$

В выражении (2.20) отсутствуют переменные p и S , то есть $g = const$ на интервале $f(p_{max}, S_{min}) \leq F_H < f(p_{min}, S_{max})$.

Вероятность того, что F_H принимает значения в диапазоне $f(p_{min}, S_{max}) \leq F_H < f(p_{max}, S_{max})$ определяется через площадь выпуклого пятиугольника как разница между площадью D и площадью треугольника, лежащего над графиком проекции сечения поверхности $F^* = f(p, S)$ плоскостью Q :

$$G = \frac{1}{D} \left[D - \frac{1}{2} \left(S_{max} - \frac{F_H}{\gamma_a p_{max}} \right) (p_{max} - p) \right]. \quad (2.21)$$

Функция плотности распределения на этом интервале значений F_H имеет вид:

$$g = \frac{p_{max} - p}{2D\gamma_a p_{max}}. \quad (2.22)$$

где $p_{min} \leq p \leq p_{max}$. F_H в выражении (2.22) задана неявно через аргумент p .

Используя выражения (2.18), (2.20) и (2.22), записанные для трёх интервалов значений F_H , запишем плотность распределения вероятности F_H в виде кусочно-заданной функции:

$$g = \begin{cases} k_1(F_H - f(p_{min}, S_{min})), & F_H \in [f(p_{min}, S_{min}); f(p_{max}, S_{min})], \\ k_2, & F_H \in [f(p_{max}, S_{min}); f(p_{min}, S_{max})], \\ k_3(f(p_{max}, S_{max}) - F_H), & F_H \in [f(p_{min}, S_{max}); f(p_{max}, S_{max})], \end{cases} \quad (2.23)$$

где k_1, k_2, k_3 – постоянные коэффициенты, значения которых определяются в результате нормировки:

$$\int_{f(p_{min}, S_{min})}^{f(p_{max}, S_{max})} g dF_H = 1. \quad (2.24)$$

Для окончательного выражения функции плотности распределения вероятности F_H необходимо подобрать такие коэффициенты k_1, k_2, k_3 , чтобы площадь фигуры под графиком функции $g(F_H)$ на всей области определения была равна единице. Из выражения (2.23) видно, что функция распределения является кусочно-заданной. Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= f(p_{max}, S_{min}) - f(p_{min}, S_{min}), \\ \Delta_2 &= f(p_{min}, S_{max}) - f(p_{max}, S_{min}), \\ \Delta_3 &= f(p_{max}, S_{max}) - f(p_{min}, S_{max}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Тогда условие нормировки, которое представляет собой сумму площадей двух прямоугольных треугольников и одного прямоугольника, записывается следующим образом:

$$\frac{1}{2}\Delta_1 k_2 + \Delta_2 k_2 + \frac{1}{2}\Delta_3 k_2 = 1. \quad (2.26)$$

Выражая k_2 из (2.26), получим:

$$k_2 = \frac{1}{0,5(\Delta_1 + \Delta_3) + \Delta_2}. \quad (2.27)$$

Так как при $F_H = f(p_{max}, S_{min})$ и $F_H = f(p_{min}, S_{max})$ плотность распределения вероятности $g = k_2$, коэффициенты k_1 и k_3 могут быть вычислены по формулам:

$$k_1 = [(0,5(\Delta_1 + \Delta_3) + \Delta_2)(f(p_{max}, S_{min}) - f(p_{min}, S_{min}))]^{-1}. \quad (2.28)$$

$$k_3 = [(0,5(\Delta_1 + \Delta_3) + \Delta_2)(f(p_{max}, S_{max}) - f(p_{min}, S_{max}))]^{-1}$$

Выражения (2.23), (2.27), (2.28) полностью описывают функцию плотности распределения вероятности силы тяги.

2.2.3 Моментные характеристики распределения силы тяги

Определим моментные характеристики распределения F_H . Начальный момент первого порядка (математическое ожидание) выражается следующим образом:

$$M[F_H] = \int_{-\infty}^{\infty} F_H g(F_H) dF_H, \quad (2.29)$$

где $g(F_H)$ – функция плотности распределения вероятности силы тяги.

Подставляя (3.25) в (3.31), получим

$$\begin{aligned} M[F_H] = & \int_{f(p_{min}, S_{min})}^{f(p_{max}, S_{min})} F_H k_1 (F_H - f(p_{min}, S_{min})) dF_H + \\ & + \int_{f(p_{max}, S_{min})}^{f(p_{min}, S_{max})} F_H k_2 dF_H + \int_{f(p_{min}, S_{max})}^{f(p_{max}, S_{max})} F_H k_3 (f(p_{max}, S_{max}) - F_H) dF_H, \end{aligned} \quad (2.30)$$

откуда

$$\begin{aligned} M[F_H] = & k_1 \left[\left(\frac{(f(p_{max}, S_{min}))^3 - (f(p_{min}, S_{min}))^3}{3} \right) - \right. \\ & \left. - f(p_{min}, S_{min}) \left(\frac{(f(p_{max}, S_{min}))^2 - (f(p_{min}, S_{min}))^2}{2} \right) \right] + \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned}
& +k_2 \left[\frac{(f(p_{min}, S_{max}))^2 - (f(p_{max}, S_{min}))^2}{2} \right] + \\
& +k_3 \left[f(p_{max}, S_{max}) \left(\frac{(f(p_{max}, S_{max}))^2 - (f(p_{min}, S_{max}))^2}{2} \right) - \right. \\
& \left. - \left(\frac{(f(p_{max}, S_{max}))^3 - (f(p_{min}, S_{max}))^3}{3} \right) \right].
\end{aligned}$$

Второй центральный момент (дисперсия) выражается следующим образом:

$$D[F_H] = \int_{-\infty}^{\infty} F_H^2 g(F_H) dF_H - (M[F_H])^2, \quad (2.32)$$

где математическое ожидание $M[F_H]$ вычисляется по формуле (2.31).

Проинтегрировав выражение (2.32), получим формулу для нахождения дисперсии номинальной силы тяги:

$$\begin{aligned}
D[F_H] = & k_1 \left[\left(\frac{(f(p_{max}, S_{min}))^4 - (f(p_{min}, S_{min}))^4}{4} \right) - \right. \\
& \left. - f(p_{min}, S_{min}) \left(\frac{(f(p_{max}, S_{min}))^3 - (f(p_{min}, S_{min}))^3}{3} \right) \right] + \\
& +k_2 \left[\frac{(f(p_{min}, S_{max}))^3 - (f(p_{max}, S_{min}))^3}{3} \right] + \\
& +k_3 \left[f(p_{max}, S_{max}) \left(\frac{(f(p_{max}, S_{max}))^3 - (f(p_{min}, S_{max}))^3}{3} \right) - \right. \\
& \left. - \left(\frac{(f(p_{max}, S_{max}))^4 - (f(p_{min}, S_{max}))^4}{4} \right) \right] - (M[F_H])^2.
\end{aligned} \quad (2.33)$$

Знание числовых характеристик (2.31) и (2.33) позволяет выразить наиболее существенные особенности распределения F_H и сравнить полученные аналитически результаты с результатами численного моделирования и экспериментальными данными.

2.3 Выводы по второму разделу

В разделе описывается алгоритм оценки влияния производственных отклонений на точность маневрирования наноспутника. Алгоритм делится на два блока: регрессионный и факторный анализ модели движения. Регрессионный и факторный анализ являются необходимыми процедурами, позволяющими математически связать распределение параметров движения с распределениями случайных факторов (конструктивных параметров наноспутника и характеристик двигательной установки), и на основе полученных связей формулировать требования к производственным отклонениям.

Помимо производственных отклонений на точность маневрирования оказывает непосредственное влияние сила реактивной тяги. Формированию вероятностной модели силы тяги микрореактивного двигателя посвящена значительная часть раздела. С использованием понятия геометрической вероятности были получены плотность распределения вероятности номинальной силы тяги, её математическое ожидание и дисперсия. Понимание закона распределения силы тяги является крайне важным при исследовании причин возникновения неточностей импульсной коррекции орбиты.

3 МЕТОДИКИ ДОСТИЖЕНИЯ ТРЕБУЕМОЙ ТОЧНОСТИ МАНЕВРИРОВАНИЯ НАНОСПУТНИКА С ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ

В предыдущем разделе подробно изложена методика анализа влияния производственных отклонений изготовления наноспутника и двигательной установки на параметры движения наноспутника во время выдачи корректирующего импульса. Логическим продолжением исследования является формирование требований к производственным отклонениям исходя из достижения требуемой точности маневрирования.

Уменьшение допусков при изготовлении наноспутника является не единственным способом достижения лучших точностей при выполнении орбитальных маневров. Часто по техническим или экономическим причинам невозможно уменьшить плечо силы реактивной тяги до значений, обеспечивающих требуемую точность маневрирования. В этом случае эффективным будет использование активной системы стабилизации.

В настоящем разделе приводятся методики формирования требований к проектным параметрам космического аппарата исходя из достижения требуемой точности маневрирования: требования формируются как к допускам производственных отклонений, так и к параметрам активной системы стабилизации, позволяющей удерживать требуемое направление вектора импульса тяги во время выполнения маневра. В частности, описан алгоритм расчета потребного кинетического момента маховика активной системы стабилизации для обеспечения постоянной ориентации вектора реактивной тяги на интервале работы двигательной установки.

Использование маховика для обеспечения одноосной стабилизации может оказаться неоправданно энергозатратным. В связи с этим может быть рассмотрен наноспутник-гиростат с замкнутой системой управления по поперечным каналам.

3.1 Методика формирования требований к производственным отклонениям изготовления наноспутника и двигательной установки

Основой методики является метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) с последующим использованием регрессионного и факторного анализа. В исходной модели множество случайных факторов $\tilde{\Phi}$ и множество параметров движения \tilde{B} имеют разную мощность, по этой причине регрессионный анализ проводится два раза: во-первых, для исходной системы, учитывающей влияние всех возможных случайных факторов, и, во-вторых, после факторного анализа и фильтрации случайных факторов для усеченной модели, в которой мощность множества входных параметров равна мощности множества выходных параметров. Блок-схема методики приведена на рисунке 3.1.

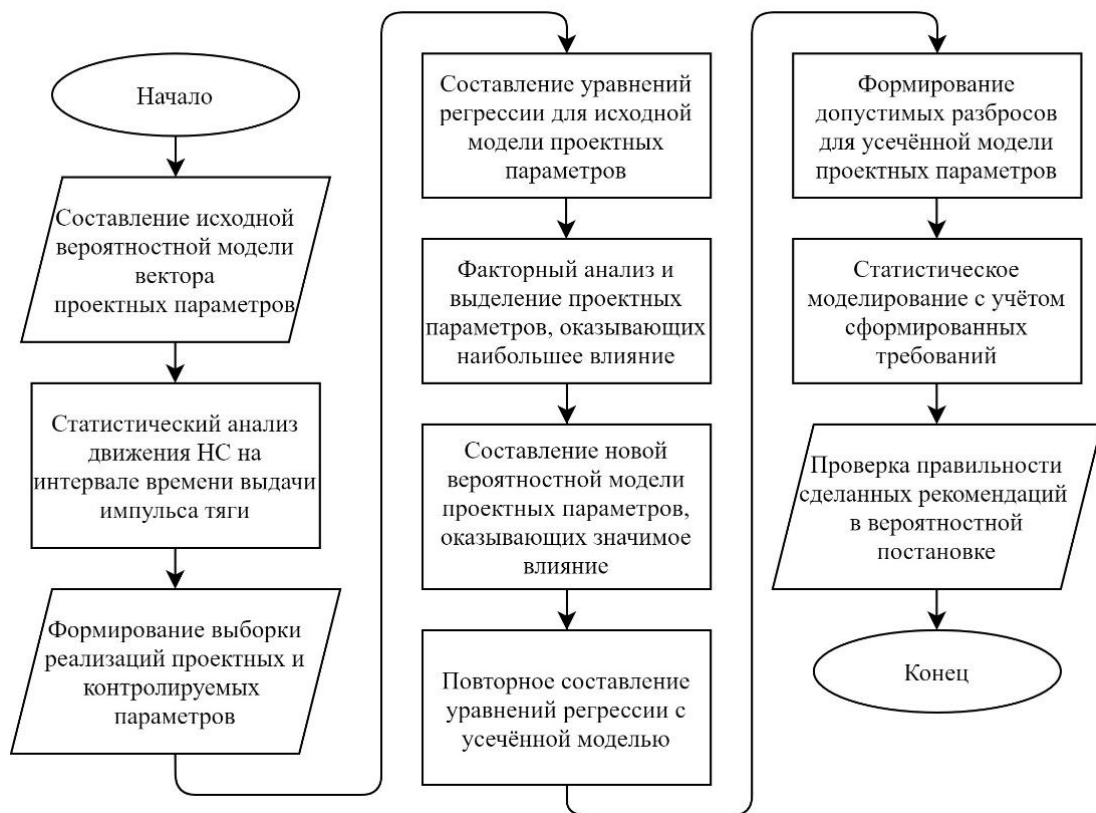


Рисунок 3.1 – Блок-схема методики формирования требований к производственным отклонениям изготовления наноспутника

На первом этапе формируется вероятностная математическая модель проектных параметров, которые являются случайными факторами при проведении численного моделирования. Задаются параметры распределений случайных факторов с учётом технологических возможностей процесса изготовления наноспутника и особенностей функционирования двигательной установки.

На втором этапе происходит формирование выборки реализаций в рамках метода Монте-Карло [36]. Для этого проводится серия статистических моделирований движения наноспутника на интервале времени работы двигательной установки. Вычисляются параметры движения, к которым относятся величины, позволяющие оценить эффективность выполнения корректирующего манёвра – вектор ускорения движения центра масс и вектор угловых скоростей, приобретаемых наноспутником за импульс тяги.

Далее по результатам накопленной выборки реализаций определяются статистические взаимосвязи между случайными факторами и параметрами движения, строятся линейные уравнения регрессии с проверкой их адекватности [37, 38]. На основании регрессионной модели проводится факторный анализ, определяются факторы, оказывающие наибольшее влияние на параметры движения.

Для формирования требований к производственным отклонениям, необходимо, чтобы размерность вектора учитываемых случайных факторов совпадала с размерностью вектора параметров движения. С этой целью из дальнейшего анализа исключаются факторы, имеющие наименьшую корреляцию с параметрами движения. Остающиеся в рассмотрении факторы участвуют в формировании усеченной регрессионной модели, которая записывается по аналогии с (3.7) в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$Q' \tilde{\Phi}' + Q_r = B^*, \quad (3.1)$$

где Q' – матрица коэффициентов уравнений регрессии размерности $K \times K$; Q_r – вектор-столбец постоянных коэффициентов; $\tilde{\Phi}'$ – вектор-столбец случайных факторов усеченной модели; B^* – вектор-столбец параметров движения, рассчитываемых по регрессионной модели.

После проверки адекватности регрессионной модели (3.1) составляется система неравенств:

$$\begin{aligned} Q' \tilde{\Phi}' + Q_r &\geq B_{min}^*, \\ Q' \tilde{\Phi}' + Q_r &\leq B_{max}^*, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где B_{min}^*, B_{max}^* – векторы размерности K , содержащие предельные требуемые значения параметров движения.

Решение системы неравенств (3.2) является условием выполнения орбитального маневра наноспутника с необходимой точностью.

3.2 Методика формирования требований к кинетическому моменту маховика для обеспечения одноосной стабилизации наноспутника

Одним из возможных вариантов поддержания направления вектора импульса тяги, формируемого двигательной установкой наноспутника, является использование маховика, приведённого в быстрое вращение и создающего значительный кинетический момент вдоль оси стабилизации наноспутника, порождающий гироскопический момент при возникновении углового движения, препятствующий отклонению вектора тяги [39, 40]. При этом малые возмущения, формируемые двигательной установкой, не вызывают значительного отклонения оси стабилизации наноспутника от ее требуемого направления [41-44]. Ограничение отклонения оси от требуемого направления возникает из-за прецессирующего движения. Такой наноспутник является гироскопически стабилизированным, относится к классу осевых спутников-гиростатов. При рассмотрении задачи стабилизации движения относительно центра масс наноспутника с помощью маховика в дальнейшем в качестве объекта исследования будем иметь в виду наноспутник-гиростат,

то есть такой наноспутник с подвижной массой, моменты инерции которого остаются постоянными.

Кинетический момент маховика (далее – гиросtatический момент) должен быть достаточным для достижения стабилизации углового движения наноспутника, обеспечивая требуемую точность ориентации с гарантированной вероятностью. Определение достаточного гиросtatического момента маховика с последующим вероятностным анализом движения для проверки принятых технических решений является важной задачей при проектировании наноспутников с одноосной стабилизацией.

Решение задачи подбора достаточного гиросtatического момента в настоящей работе базируется на численном моделировании движения наноспутника с двигательной установкой методом Монте-Карло. Описанная задача решается в вероятностной постановке. Вероятностная модель движения учитывает разбросы проектных параметров, связанные с технологическими погрешностями изготовления наноспутника и двигательной установки. В качестве случайных рассматриваются следующие факторы: смещение центра масс наноспутника относительно сопла и относительно геометрического центра, массово-габаритные характеристики системы хранения и подачи рабочего тела, геометрия сопла, угол между продольной осью наноспутника и осью симметрии сопла, температура нагрева рабочего тела и длительность импульса реактивной тяги.

Необходимым для обеспечения стабилизации движения наноспутника является такое значение гиросtatического момента, формируемого маховиком, при котором движение фазовых координат на фазовой плоскости будет устойчивым. Фазовыми координатами в рассматриваемом случае являются углы ориентации по рысканью и тангажу и скорости их изменения.

Предполагается, что гиросtatический момент H совпадает с продольной осью наноспутника, как это показано на рисунке 3.2.

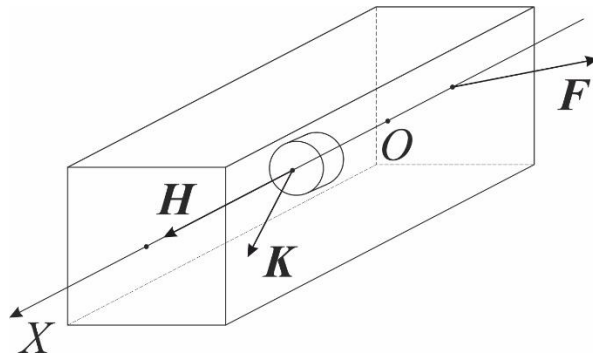


Рисунок 3.2 – Взаимное расположение векторов гиросtatического момента H и кинетического момента наноспутника K

На рисунке 3.2 показана продольная ось наноспутника-гиростата OX , направленный вдоль этой оси гиросtatический момент маховика H , и кинетический момент всей системы K , возникающий при приобретении наноспутником угловой скорости вследствие действия моментов внешних сил и, главным образом, момента силы тяги. Линия приложения силы тяги F не совпадает с продольной осью наноспутника OX , что также отражено на рисунке.

Для вычисления требуемого гиросtatического момента H можно получить аналитическое выражение, полагая, что гиросtatический момент направлен вдоль продольной оси наноспутника OX . С целью выполнения требований к точности ориентации наноспутника во время работы двигательной установки, величина гиросtatического момента выбирается таким образом, чтобы результирующий вектор R , полученный сложением векторов кинетического момента K , приобретённого наноспутником в результате возмущающего момента реактивной силы, и гиросtatического момента маховика H , образовывал с продольной осью наноспутника угол, не превышающий по величине значение, определяемое требуемой точностью ориентации наноспутника. Взаимное расположение результирующего вектора кинетического момента и продольной оси наноспутника показано на рисунке 3.3.

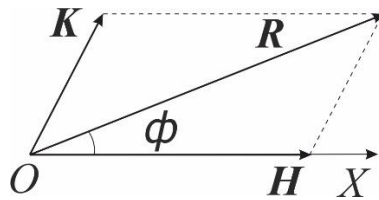


Рисунок 3.3 – Взаимное расположение результирующего вектора кинетического момента \mathbf{R} и продольной оси наноспутника OX

Скалярное произведение векторов \mathbf{R} и \mathbf{H} :

$$R_X H_X + R_Y H_Y + R_Z H_Z = RH \cos \phi, \quad (3.3)$$

здесь R_X, R_Y, R_Z – проекции результирующего вектора кинетического момента в связанной системе координат; H_X, H_Y, H_Z – проекции вектора гиросtatического момента в связанной системе координат; R – модуль результирующего вектора кинетического момента, H – модуль вектора гиросtatического момента.

Проекции вектора \mathbf{R} можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} R_X &= K_X + H_X, \\ R_Y &= K_Y + H_Y, \\ R_Z &= K_Z + H_Z, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где K_X, K_Y, K_Z – проекции кинетического момента наноспутника с невращающимся маховиком, приобретенные в результате выдачи корректирующего импульса.

Так как $H = H_X$, то

$$(K_X + H_X)H_X = H_X \cos \alpha \sqrt{(K_X + H_X)^2 + K_Y^2 + K_Z^2}. \quad (3.5)$$

Разделив обе части выражения (3.5) на G_X и введя замену $u = K_X + H_X$ получим:

$$u^2 = (u^2 + K_Y^2 + K_Z^2) \cos^2 \phi. \quad (3.6)$$

Сгруппировав в левой части слагаемые, содержащие введённую неизвестную u , имеем:

$$u^2 \sin^2 \phi = (K_Y^2 + K_Z^2) \cos^2 \phi. \quad (3.7)$$

Так как $\alpha \neq 0$, разделим обе части выражения на $\sin^2 \phi$, вернёмся от замены к искомой неизвестной H_X и перенесём все слагаемые в левую часть равенства:

$$H_X^2 + 2K_X H_X + K_X^2 - (K_Y^2 + K_Z^2) \operatorname{ctg}^2 \phi = 0. \quad (3.8)$$

Полученное алгебраическое уравнение второй степени решается относительно неизвестной H_X :

$$H_X = -K_X \pm \sqrt{K_Y^2 + K_Z^2} \operatorname{ctg} \phi. \quad (3.9)$$

Соотношение (3.9) имеет следующий физический смысл: чем большее значение проекции кинетического момента вдоль продольной оси приобретает наноспутник в результате работы реактивного двигателя, тем меньше требуется гиросtatический момент маховика для обеспечения одноосной стабилизации. При значениях гиросtatического момента, полученных с помощью (3.9) будет наблюдаться прецессия с углом раствора 2ϕ вокруг неподвижной в абсолютном пространстве оси, совпадающей с продольной осью наноспутника в ориентации на момент включения маховика.

Задавая величину ϕ , можно вычислять кинетический момент маховика, обеспечивающий допустимую прецессию наноспутника во время выдачи импульса тяги.

Вектор \mathbf{K} в расчетной формуле (3.9) определяется из результатов статистического моделирования движения наноспутника с невращающимся маховиком, для этого используются функции распределения проекций вектора \mathbf{K} . Использование функций распределения позволяет определить вектор приобретаемого кинетического момента с заданной доверительной вероятностью.

Вид функции распределения модуля кинетического момента наноспутника с невращающимся маховиком показан на рисунке 3.4, где M^* – значение модуля кинетического момента, которое может быть приобретено наноспутником с доверительной вероятностью 0,99.

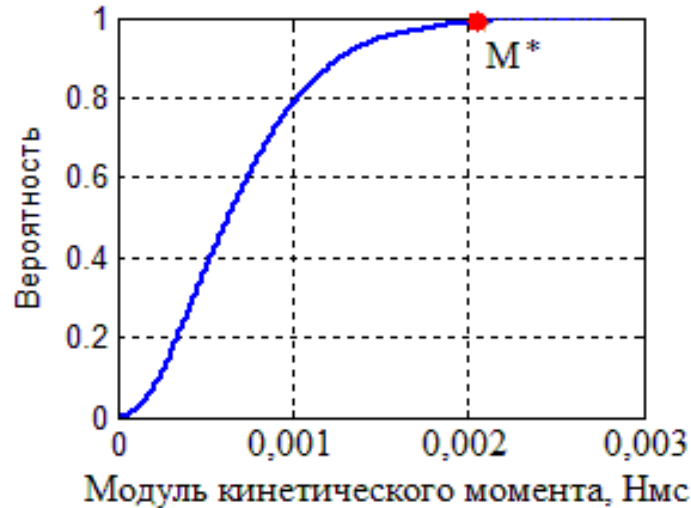


Рисунок 3.4 – График функции распределения модуля кинетического момента наноспутника с невращающимся маховиком

Функции распределения, имеющие вид, подобный приведённому на рисунке 3.4, строятся для каждой из трёх проекций вектора \mathbf{K} . Из этих функций определяются максимальные значения проекций вектора \mathbf{K} , которые могут наблюдаться с заданной вероятностью.

После вычисления потребного гиросtatического момента, проводится численное моделирование движения для проверки правильности принятого решения в смысле эффективности выдачи корректирующего импульса. Для моделирования используются динамические уравнения движения относительно центра масс спутника-гиростата, имеющие вид [45]:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_X &= \left((I_Y - I_Z)\omega_Y\omega_Z + M_X - \dot{H}_X + H_Y\omega_Z - H_Z\omega_Y \right) I_X^{-1}, \\ \dot{\omega}_Y &= \left((I_Z - I_X)\omega_X\omega_Z + M_Y - \dot{H}_Y + H_Z\omega_X - H_X\omega_Z \right) I_Y^{-1}, \\ \dot{\omega}_Z &= \left((I_X - I_Y)\omega_X\omega_Y + M_Z - \dot{H}_Z + H_X\omega_Y - H_Y\omega_X \right) I_Z^{-1},\end{aligned}\quad (3.10)$$

которые дополняются кинематическими соотношениями:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_0 &= -\frac{1}{2}[(\omega_X - \omega_{0X})\lambda_1 + (\omega_Y - \omega_{0Y})\lambda_2 + (\omega_Z - \omega_{0Z})\lambda_3], \\
\dot{\lambda}_1 &= \frac{1}{2}[(\omega_X - \omega_{0X})\lambda_0 - (\omega_Y - \omega_{0Y})\lambda_3 + (\omega_Z - \omega_{0Z})\lambda_2], \\
\dot{\lambda}_2 &= \frac{1}{2}[(\omega_X - \omega_{0X})\lambda_3 + (\omega_Y - \omega_{0Y})\lambda_0 - (\omega_Z - \omega_{0Z})\lambda_1], \\
\dot{\lambda}_3 &= \frac{1}{2}[-(\omega_X - \omega_{0X})\lambda_2 + (\omega_Y - \omega_{0Y})\lambda_1 + (\omega_Z - \omega_{0Z})\lambda_0],
\end{aligned} \tag{3.11}$$

где I_X, I_Y, I_Z – главные центральные моменты инерции наноспутника; M_X, M_Y, M_Z – возмущающий момент реактивной силы тяги; $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ – компоненты мгновенной угловой скорости; $\omega_{0X}, \omega_{0Y}, \omega_{0Z}$ – компоненты угловой скорости орбитального движения в проекциях на оси ССК; H_X, H_Y, H_Z – компоненты вектора кинетического момента маховика в проекциях на оси ССК; $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – компоненты кватерниона ориентации.

3.3. Методика синтеза оптимального линейного регулятора состояния для одноосной стабилизации наноспутника-гиростата с управлением по поперечным каналам

Изменение направления вектора силы тяги в процессе корректирующего импульса отражает эффективность выполнения маневра: отклонения продольной оси наноспутника от номинального положения приводят к приобретению скорости движения центра масс в направлениях, отличных от требуемого. Использование маховика позволяет решить эту проблему, однако, приводит к возникновению ряда других проблем. Во-первых, необходимо учитывать затраты бортовой энергии, позволяющей обеспечить требуемое значение кинетического момента наноспутника; во-вторых, для успешного выполнения большинства целевых задач на орбите, например, связанных с научными измерениями или задач фотосъемки различных объектов с борта, после совершения маневра коррекции необходимо гашение приобретенной наноспутником угловой скорости.

Для решения данной проблемы предлагается введение дополнительного управления по поперечным каналам, позволяющего стабилизировать

продольную ось спутника-гиростата в требуемом положении. Эта задача может быть решена в рамках современной теории управления [77].

Использование маховика, имеющего ось вращения, совпадающую с продольной осью наноспутника, позволяет исключить из рассмотрения канал управления, соответствующий угловому движению относительно продольной оси, и привести угловые отклонения вектора силы тяги по поперечным направлениям к малым значениям. Таким образом, движение наноспутника относительно центра масс может быть записано с помощью линеаризованной модели для четырех переменных состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{\omega_X(I_Z - I_X)}{I_Y} x_4 + \frac{1}{I_Y} u_\vartheta, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = \frac{\omega_X(I_X - I_Y)}{I_Z} x_2 + \frac{1}{I_Z} u_\psi, \end{cases} \quad (3.12)$$

где $\mathbf{x} = [\vartheta, \dot{\vartheta}, \psi, \dot{\psi}]^T$ – вектор состояния исследуемой системы; u_ϑ, u_ψ – управляющие моменты по каналам тангажа и рысканья соответственно; ω_X – угловая скорость движения наноспутника относительно продольной оси, приобретенная в результате работы маховика.

В матричном виде система (3.12) имеет вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad (3.13)$$

здесь A – матрица системы, имеющая размерность 4×4 , B – матрица управления размерности 4×2 , $\mathbf{u} = [u_\vartheta, u_\psi]^T$ – вектор управляющего момента.

Матрица системы и матрица управления имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\omega_X(I_Z - I_X)}{I_Y} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\omega_X(I_X - I_Y)}{I_Z} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{I_Y} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_Z} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Поскольку требуемое направление маневра коррекции совпадает с осью Ox_g орбитальной системы координат, система (3.13) может

интерпретироваться, как записанная в отклонениях. Необходимо определить такое управление, которое обеспечило бы перевод системы (3.13) из произвольного начального положения в начало координат, и удовлетворяло бы заданному критерию оптимальности. Проведем синтез оптимального управления с использованием метода динамического программирования по интегральному квадратичному критерию.

Рассматривается задача синтеза оптимального стационарного линейного регулятора состояния. Интегральный квадратичный критерий оптимальности имеет вид:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt, \quad (3.15)$$

где Q – положительно-определенная матрица размерности 4×4 ; R – положительно-определенная матрица размерности 4×2 .

Требуемое ограничение на управление может быть обеспечено соответствующим выбором весовой функции R . В данной работе при определении оптимального управления не рассматриваются конкретные исполнительные устройства, обеспечивающие управление по тангажу и рысканью, поэтому критерий оптимальности (3.15) упрощается:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{u}) dt. \quad (3.16)$$

Оптимальное управление является линейной функцией от фазовых координат и имеет вид [78]:

$$\mathbf{u}_o = C_R^T \mathbf{x}, \quad (3.17)$$

где C_R^T – транспонированная матрица уравнения регуляторов, имеющая размерность 2×4 .

Таким образом, отыскание оптимального стабилизирующего управления сводится к вычислению матрицы уравнения регуляторов C_R :

$$C_R = -PB, \quad (3.18)$$

где P – постоянная положительно-определенная матрица, определяемая из алгебраического уравнения Риккати [79].

$$PA + A^T P - P B B^T P + Q = 0. \quad (3.19)$$

С использованием изложенной методики синтеза оптимального линейного регулятора может быть проведен предварительный анализ возможности применения дополнительных исполнительных устройств, позволяющих минимизировать энергетические затраты на обеспечение гироскопической стабилизации.

3.4 Выводы по третьему разделу

В разделе приведена методика формирования требований к производственным отклонениям изготовления наноспутника, которая позволяет оценить необходимый уровень технологии производства для обеспечения успешного выполнения целевой миссии маневрирующего наноспутника.

В качестве альтернативного решения проблемы маневрирования предлагается использовать активную систему стабилизации. Рассмотрена задача обеспечения одноосной стабилизации наноспутника-гиростата с двигательной установкой во время выдачи корректирующего импульса. Предложена методика определения требований к величине кинетического момента маховика для поддержания ориентации с заданной точностью. Методика определения требований к величине кинетического момента маховика базируется на вероятностном анализе движения наноспутника с двигательной установкой в процессе маневрирования и позволяет определять гиросtatический момент с учётом производственных отклонений изготовления наноспутника и требований к прецессии наноспутника.

Для минимизации энергетических затрат на обеспечение стабилизации с помощью маховика может быть рассмотрен наноспутник-гиростат с замкнутой системой управления по поперечным каналам. Для численного моделирования движения такого «управляемого» наноспутника-гиростата предложено решение задачи стабилизации путем синтеза оптимального по интегральному квадратичному критерию стационарного линейного регулятора состояния.

4 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ МАНЕВРИРОВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ НАНОСПУТНИКА С ЭЛЕКТРОТЕРМИЧЕСКОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ

На межвузовской кафедре космических исследований Самарского университета в соответствии с современными тенденциями в области проектирования и создания научно-образовательных спутников был разработан блок маневрирования для наноспутника SamSat-M [46]. SamSat-M является наноспутником формата CubeSat 3U. Спутниковая платформа такого формата, разрабатываемая на межвузовской кафедре космических исследований Самарского университета, носит название SamSat. В разработанном блоке маневрирования используется электротермическая двигательная установка с жидким рабочим телом, включающая бак с вытеснительной системой подачи рабочего тела, распределитель, осуществляющий дозирование и подачу рабочего тела в рабочую область, и нагреватель, осуществляющий испарение и перегрев пара рабочего тела до выбранной температуры и направляющий его к соплу Лавалья. В качестве рабочего тела выбрана смесь дистиллированной воды и этилового спирта, что обеспечивает экологическую безопасность, которая является необходимым требованием для наземной отработки и доставки наноспутника на Международную космическую станцию (МКС) с целью последующего запуска. Экспериментально определены характеристики электротермической двигательной установки: удельный импульс 120 с, тяга 0,1 Н, величина одного импульса коррекции для наноспутника массой 4,5 кг составляет не менее 0,1 м/с, запас характеристической скорости при массе рабочего тела 180 г составляет не менее 50 м/с. Описание методики экспериментального измерения профиля силы тяги во время работы двигательной установки приведено в Приложении Б. Внешний вид блока маневрирования показан на рисунке 4.1.

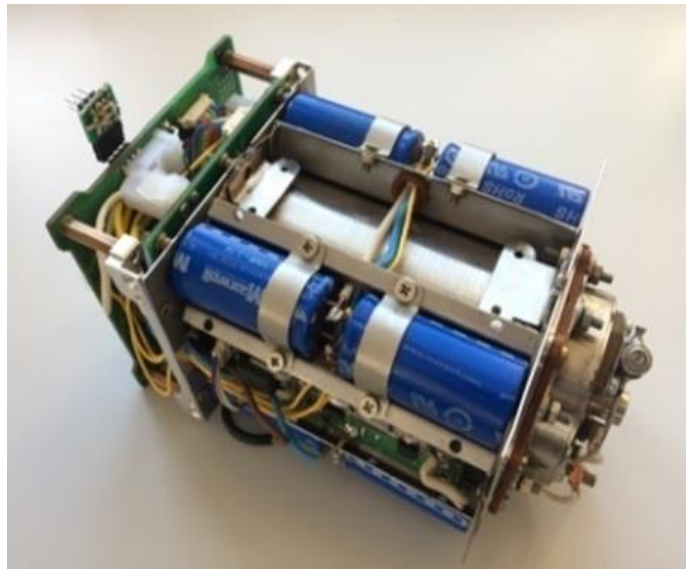


Рисунок 4.1 – Внешний вид блока маневрирования

Наноспутник SamSat-M представляет собой проект космического аппарата форм-фактора 3U ($10 \times 10 \times 30$ см), с предполагаемой массой 4,5 кг (с учетом рабочего тела двигательной установки), и соплом электротермического двигателя, установленным в центре одной из торцевых граней наноспутника.

В разделе проиллюстрировано применение предлагаемых методов решения задачи по повышению точности выполнения орбитального маневра на примере наноспутника SamSat-M, оснащенного электротермической двигательной установкой, разработанной на межвузовской кафедре космических исследований Самарского университета. В первой части раздела сформирована вероятностная модель силы тяги электротермической двигательной установки. Во второй части анализируется движение наноспутника без маховика, но изготовленного с учетом требований к производственным отклонениям для обеспечения необходимой точности маневрирования. В третьей части раздела проведен анализ движения наноспутника-гиростата, изготовленного с учетом возможностей производства наноспутников на базе Самарского университета.

4.1 Вероятностная модель силы тяги электротермической двигательной установки для наноспутника формата CubeSat 3U

Для формирования вероятностной модели силы тяги электротермической двигательной установки приняты следующие допущения, соответствующие технологическим возможностям изготовления наноспутника на базе Самарского университета:

- Сопло Лавая двигательной установки функционирует в оптимальном режиме расширения в пустоте, то есть справедливо выражение (2.10).

- Абсолютное давление рабочего тела на входе сопла $p_{вх}$ является случайной величиной, распределенной по равномерному закону с границами $p_{min} = 260$ кПа, $p_{max} = 280$ кПа.

- Площадь критического сечения сопла $S_{кр}$ является случайной величиной, распределенной по равномерному закону с границами $S_{min} = 0,071$ мм², $S_{max} = 0,196$ мм².

- В качестве рабочего тела используется смесь воды дистиллированной и спирта этилового в пропорции 3:2, молярная масса воды равна 0,018 кг/моль, а спирта этилового 0,046 кг/моль, то есть коэффициент адиабаты рабочего тела $\rho = 1,33$. Методика расчета коэффициента адиабаты рабочего тела приведена в приложении А.

4.1.1 Плотность распределения вероятности силы тяги и моментные характеристики распределения

Используя выражение (2.10) получим характерные значения силы тяги в точках изменения производной кусочно-заданной функции плотности распределения вероятности:

$$\begin{aligned}
 f(p_{min}, S_{min}) &= 0,0351 \text{ Н}, \\
 f(p_{max}, S_{min}) &= 0,0378 \text{ Н}, \\
 f(p_{min}, S_{max}) &= 0,0975 \text{ Н}, \\
 f(p_{max}, S_{max}) &= 0,1050 \text{ Н}.
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Вычислим коэффициенты функции плотности распределения вероятности, подставляя значения (4.1) в формулы (3.28) и (3.29):

$$\begin{aligned} k_1 &= 5718,50, \\ k_2 &= 15,4414, \\ k_3 &= 2059,60. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Используя характерные значения силы тяги (4.1) и коэффициенты (4.2) в функции (2.23), получим плотность распределения вероятности силы реактивной тяги. Для проверки результатов проводится многократное вычисление силы реактивной тяги по формуле (2.10), со случайно генерируемыми $p_{вх}$ и $S_{кр}$, распределенными с учетом сделанных ранее допущений. Гистограмма распределения силы тяги, полученная в результате численного моделирования с объемом выборки 1 млн, и график плотности распределения вероятности силы тяги, полученный с использованием геометрической интерпретации вероятности (красная линия) показаны на рисунке 4.2.

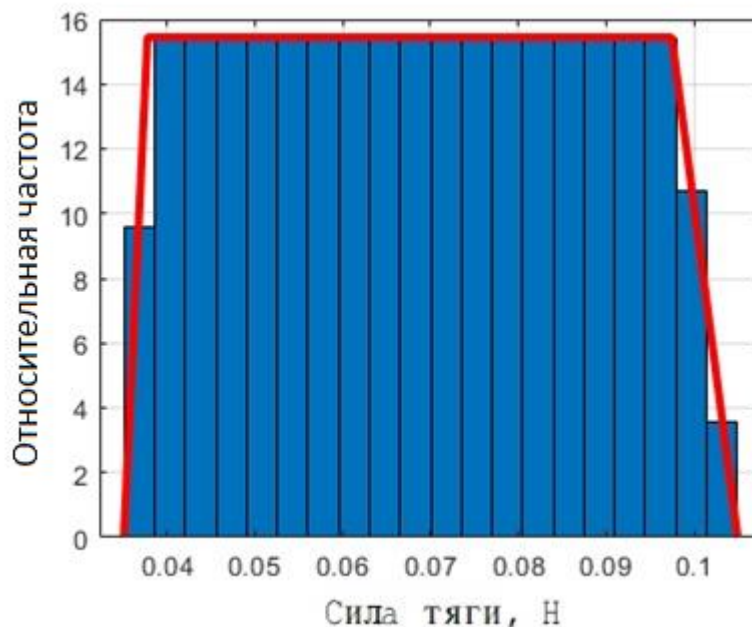


Рисунок 4.2 – Сравнение результатов численного моделирования и применения геометрического подхода к формированию вероятностной модели силы тяги

Оценки моментных характеристик распределения, полученного в результате численного моделирования, имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} M_0[F_H] &= 6,89 \times 10^{-2} \text{ Н}, \\ D_0[F_H] &= 3,53 \times 10^{-4} \text{ Н}^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Рассчитанные по формулам (2.31) и (2.33) истинные моментные характеристики распределения для полученной плотности распределения вероятности:

$$\begin{aligned} M[F_H] &= 6,89 \times 10^{-2} \text{ Н}, \\ D[F_H] &= 3,52 \times 10^{-4} \text{ Н}^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Таким образом, математическое ожидание и дисперсия полученного по предлагаемой методике закона распределения реактивной силы тяги совпадают с оценками математического ожидания и дисперсии, полученными в результате численного моделирования.

4.1.2 Сравнение результатов применения геометрического подхода к формированию вероятностной модели силы тяги и результатов эксперимента

Для измерения профиля силы тяги электротермической двигательной установки наноспутника SamSat-M использовался тензорезистивный датчик. Процедура получения экспериментального профиля силы реактивной тяги описана в Приложении Б.

Исключив из рассмотрения участки роста и спада силы тяги, можно сравнить полученные экспериментальные результаты с результатами применения геометрического подхода к формированию вероятностной модели силы тяги. На рисунке 4.3 показаны математические ожидания и среднеквадратические отклонения для выборки, полученной экспериментально, и для закона распределения силы тяги, полученного по предложенной методике.

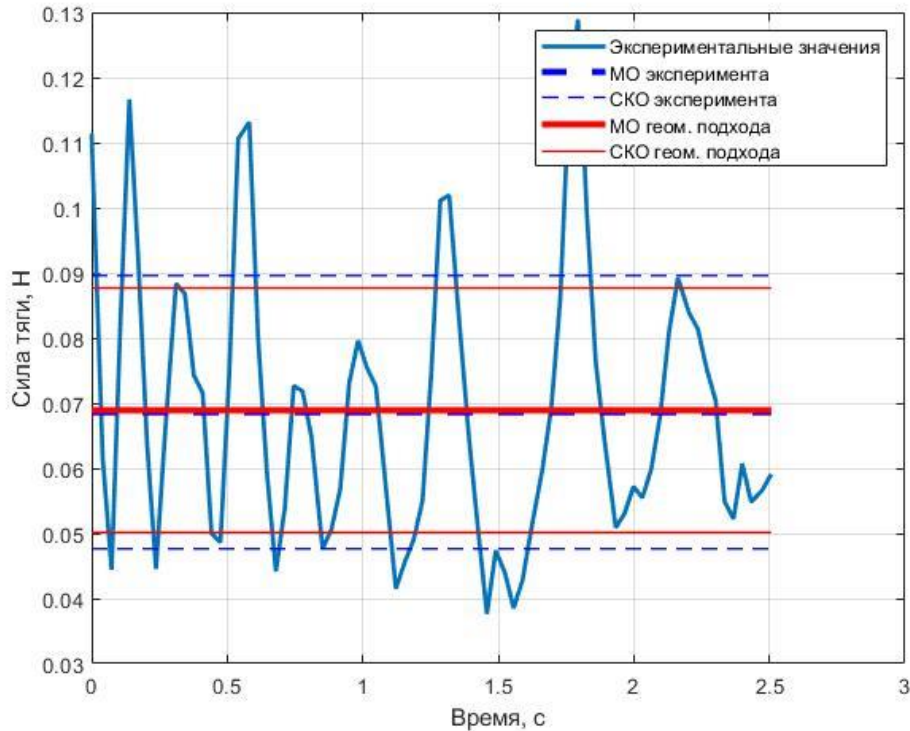


Рисунок 4.3 – Сравнение результатов предложенной методики и эксперимента

Сплошная ломаная линия на рисунке 4.3 соединяет точки, соответствующие измерениям силы тяги. Пунктирные линии соответствуют математическому ожиданию и границам разброса значений в пределах среднеквадратического отклонения ($\pm 1\sigma$), сплошные прямые линии соответствуют числовым характеристикам распределения, полученного с использованием геометрического подхода. Значения математического ожидания, его экспериментальной и численной оценок, а также среднеквадратического отклонения приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Сравнение основных моментных характеристик распределений

	Математическое ожидание	Среднеквадратическое отклонение
Предлагаемая методика	68,9 мН	18,8 мН
Численное моделирование	68,9 мН	18,8 мН
Эксперимент	68,6 мН	21,0 мН

Как следует из таблицы 4.1, отклонение значений математического ожидания от экспериментального составило 0,4%, а для среднеквадратического отклонения разница составила 10,5%. Полученный результат согласуется с экспериментом, что говорит о возможности применения предлагаемой методики формирования вероятностной модели силы реактивной тяги микрореактивного двигателя с соплом Лавалья для исследования влияния производственных отклонений на точность маневрирования и разработки методов и средств повышения точности маневрирования наноспутника на орбите.

4.2 Формирование требований к проектным параметрам наноспутника с двигательной установкой на платформе SamSat

В качестве проектных параметров выступают 23 случайных фактора, к которым могут быть сформированы требования для достижения требуемой точности маневрирования наноспутника. Они приведены в таблице 4.2 вместе с другими параметрами наноспутника, необходимыми для проведения численного моделирования. Случайные факторы полагаются распределенными по равномерным законам с границами, указанными в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Параметры наноспутника SamSat-M

Параметр	Значение
Линейные размеры НС	(0,3 м; 0,1 м; 0,1 м)
Масса топливного бака (пустого)	0,4 кг
Полная масса топлива	0,18 кг
Масса остальной части НС	2,4 кг
Смещение центра масс бака относительно сопла	(0,065 ... 0,075 м; -0,005 ... 0,005 м; -0,005 ... 0,005 м)
Смещение остальной части НС относительно сопла	(0,200 ... 0,220 м; -0,005 ... 0,005 м; -0,005 ... 0,005 м)
Длина бака	104,4 ... 105,2 мм
Внутренний радиус бака	29,95 ... 30,05 мм
Внешний радиус бака	30,95 ... 31,05 мм
Толщина поршневого диска	4,95 ... 5,05 мм
Масса поршневого диска	50 г
Длина сжатой пружины	19,95 ... 20,05 мм
Радиус пружины	4,95 ... 5,05 мм
Масса пружины	0,1 кг
Смещение сопла относительно геометрического центра	(-0,15 м; -0,005 ... 0,005 м; -0,005 ... 0,005 м)
Угловое отклонение сопла от продольной оси в плоскости XOZ (угол α)	-0,5° ... 0,5°
Угловое отклонение сопла от продольной оси в плоскости XOY (угол β)	-0,5° ... 0,5°
Радиус критического сечения сопла	0,15 ... 0,25 мм
Молярная масса газа на входе в сопло	29,2 $\frac{\text{г}}{\text{моль}}$
Температура газа на входе в сопло	850 ... 950 К
Давление на входе в сопло	300 ... 310 кПа
Показатель адиабаты	1,33
Длительность выхода тяги на установившийся режим	1,5 ... 2 с
Длительность установившегося режима	0 с
Длительность спада тяги с установившегося режима	1,5 ... 2 с

Начальные условия движения перед выдачей корректирующего импульса, к которым относятся параметры исходной орбиты и параметры движения относительно центра масс, приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3 – Начальные условия движения

Параметр	Значение
Наклонение орбиты	64,9°
Аргумент перигея	23°
Истинная аномалия	0°
Долгота восходящего узла	100°
Эксцентриситет	0
Перигей	6771 км
Угловое положение (γ, ψ, ϑ)	(0°; 0°; 0°)
Угловые скорости ($\dot{\gamma}, \dot{\psi}, \dot{\vartheta}$)	(0; 0; 0)

При проведении расчётов в качестве зависимых переменных выбраны параметры движения, характеризующие точность маневрирования, которые включают в себя проекции вектора ускорения движения центра масс, изменение скорости вращения относительно центра масс за время работы двигательной установки и проекции импульса момента. В таблице 4.4 представлен перечень параметров движения, характеризующих эффективность коррекции орбиты, и их обозначения.

Таблица 4.4 – Контролируемые параметры движения

Параметр	Обозначение
Компонента ускорения вдоль радиуса-вектора	S_{τ}
Компонента ускорения вдоль вектора орбитального углового момента	W_{τ}
Компонента ускорения на ось, перпендикулярную векторам S_{τ} и W_{τ} , направленная по движению наноспутника.	T_{τ}°
Изменение скорости вращения по тангажу	$\dot{\vartheta}_{\tau}$
Изменение скорости вращения по рысканью	$\dot{\psi}_{\tau}$
Изменение скорости вращения по крену	$\dot{\gamma}_{\tau}^{\circ}$
Импульс момента силы реактивной тяги	L_{τ}

Профиль силы тяги электротермической двигательной установки состоит из участка выхода на режим, участка установившегося режима и участка спада тяги. На рисунке 4.4 приведен профиль тяги, соответствующий двигательной установке, разработанной на межвузовской кафедре космических исследований Самарского университета [46], для одной из возможных реализаций проектных параметров.

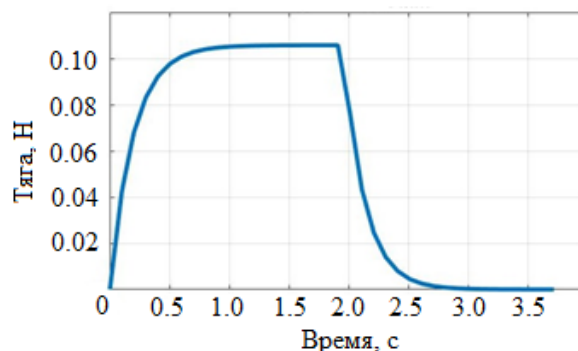


Рисунок 4.4 – Моделируемый профиль силы тяги электротермической двигательной установки наноспутника SamSat-M

Для исследования динамики движения предлагается проведение серии статистических испытаний методом прямого моделирования Монте-Карло с объемом выборки 40000, что приблизительно соответствует 0,5% точности получения вероятностных оценок.

В результате статистического моделирования получены гистограммы относительных частот распределения проекций ускорения, которые показаны на рисунке 4.5.

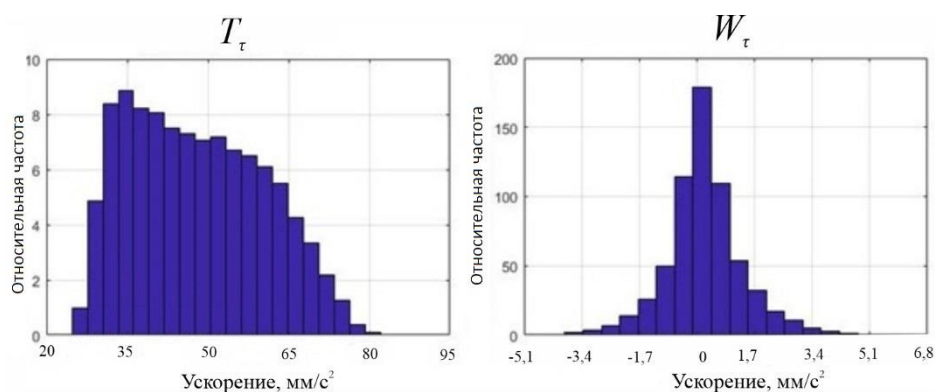


Рисунок 4.5 – Гистограммы относительных частот проекций ускорения

Рисунка 4.5 видно, что при выдаче разгонного импульса ускорение по направлению орбитальной скорости не превышает 80 мм/с^2 , математическое ожидание равно $41,6 \text{ мм/с}^2$, среднеквадратическое отклонение $12,8 \text{ мм/с}^2$. Распределение ускорения W_τ по бинормали к орбите имеет вид близкий к нормальному и имеет следующие характеристики: модуль математического ожидания $0,136 \text{ мм/с}^2$, среднеквадратическое отклонение $0,544 \text{ мм/с}^2$. Отметим, что ускорение по направлению вдоль местной вертикали оказалось крайне незначительным – на круговой орбите радиальная скорость практически не изменяется.

Гистограммы изменения скорости и погрешности в продольном (требуемом) направлении приведены на рисунке 4.6.

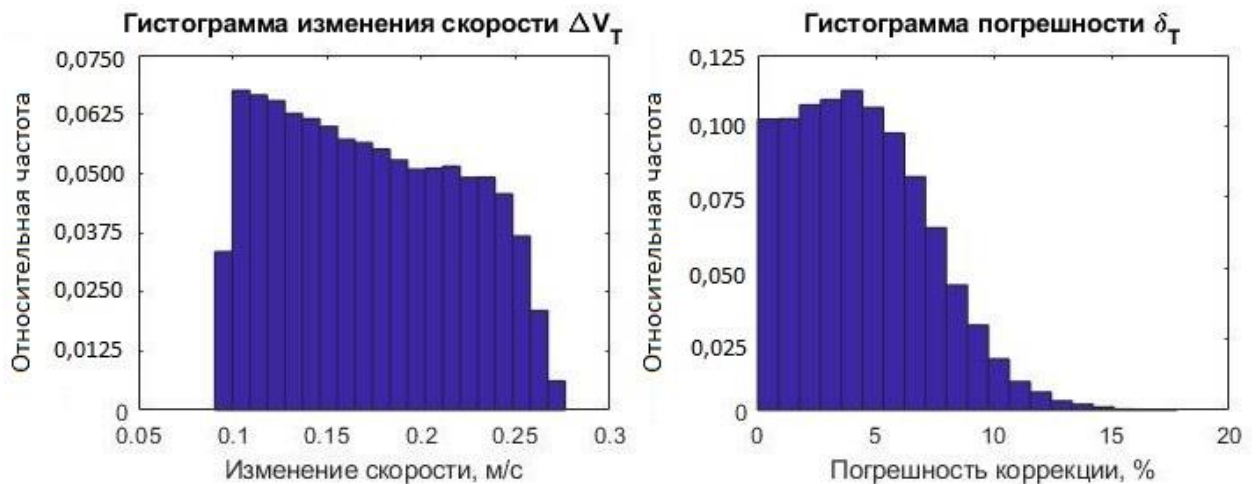


Рисунок 4.6 – Гистограммы изменения скорости и погрешности в продольном (требуемом) направлении

К моменту окончания выдачи импульса тяги наноспутник приобретает угловые скорости, значения которых различаются в зависимости от реализации комбинации проектных параметров. Гистограммы относительных частот угловых скоростей, приобретаемых наноспутником в результате корректирующего импульса, показаны на рисунке 4.7.

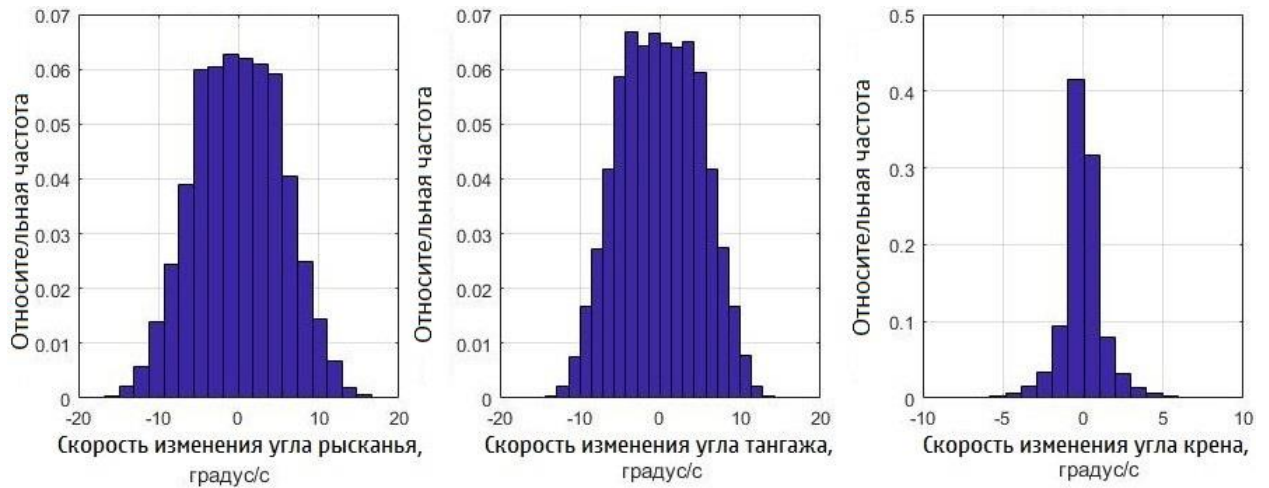
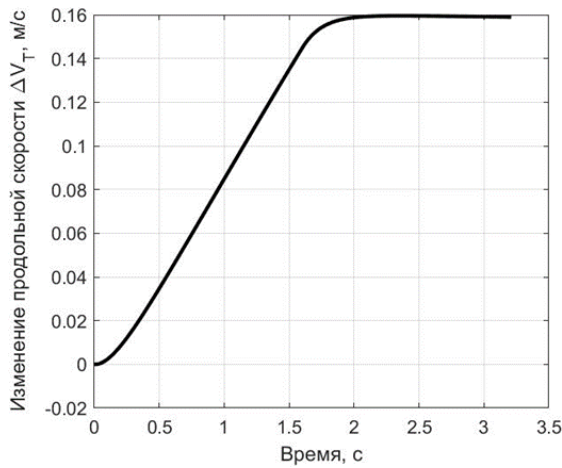


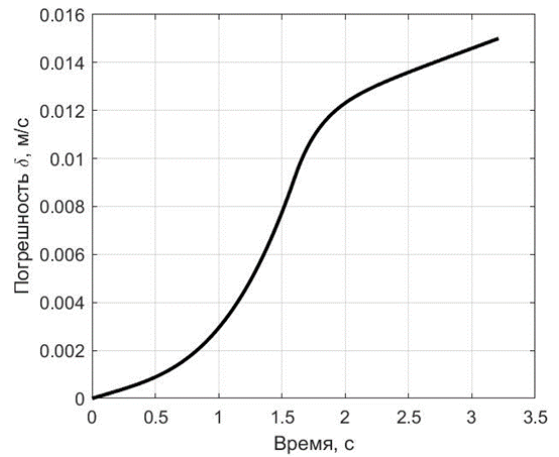
Рисунок 4.7 – Гистограммы относительных частот конечных скоростей изменения углов ориентации

При идеальном совмещении продольной оси наноспутника, проходящей через его центр масс, и линии приложения силы тяги угловые скорости не возникают. Однако, как видно из рисунка 4.7, случайное распределение проектных параметров приводит к распределениям угловых скоростей, приобретаемых наноспутникам во время работы электротермической двигательной установки. Среднеквадратические отклонения конечных угловых скоростей существенны, поэтому они оказывают сильное влияние на проекции вектора изменения скорости, а, следовательно, на эффективность коррекции орбиты.

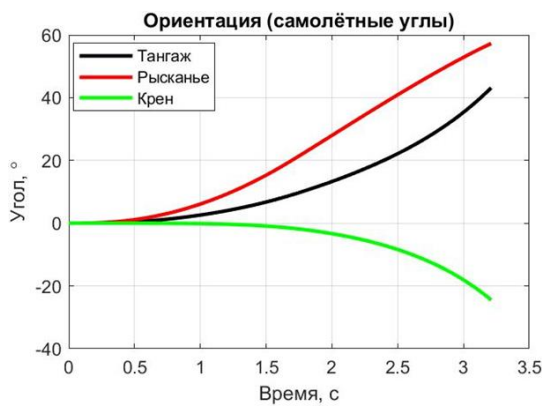
Пример движения наноспутника SamSat-M в процессе формирования корректирующего импульса для одной из возможных реализаций приведен на рисунке 4.8.



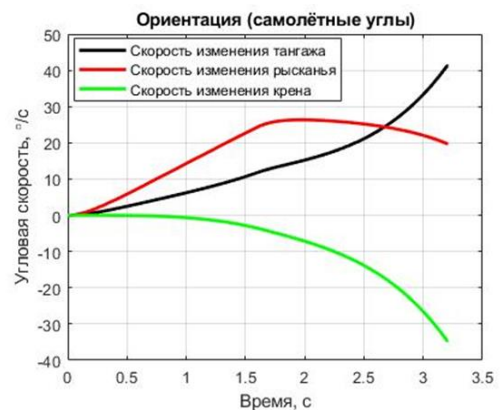
а)



б)



в)



г)

Рисунок 4.8 – Пример движения наноспутника SamSat-M в процессе формирования корректирующего импульса: а) изменение скорости в продольном (требуемом) направлении; б) нарастание погрешности в продольном направлении в процессе коррекции; в) зависимость углов ориентации от времени; г) зависимость скоростей изменения углов ориентации от времени

Для повышения эффективности коррекции необходимо ужесточить требования к допускам производственных отклонений изготовления и монтажа электротермической двигательной установки на наноспутник, то есть задать повышенные требования к разбросам выделенных в таблице 4.2 проектных параметров, или создать дополнительные исполнительные устройства, позволяющие поддерживать ориентацию вектора тяги на протяжении всего времени выдачи корректирующего импульса.

4.2.1 Расчёт коэффициентов уравнений регрессии

В пакете Matlab было разработано программное обеспечение, позволяющее получать уравнение регрессии для выборок любого объёма, по методике, описанной в третьем разделе. Для работы программы используются два массива с результатами статистических испытаний: массив реализаций случайных факторов Φ , и массив реализаций параметров движения B . Массивы чисел Φ и B представляют собой матрицы размерностями $\Phi^{N \times J}$ и $B^{N \times K}$, где J – число случайных факторов, учитываемых в модели, равное двадцати трем; K – число выходных параметров (параметров движения), равное шести, N – число реализаций, равное сорока тысячам.

Отбрасывание мультиколлинеарных факторов, определение факторов, оказывающих наибольшее влияние на зависимую переменную, и вычисление коэффициентов уравнения регрессии происходит в автоматическом режиме после запуска программы.

После проведения факторного анализа и оставления проектных параметров, оказывающих существенное влияние на контролируемые параметры движения, вектор входных параметров уменьшился до 6: радиус критического сечения сопла, температура газа на входе в сопло, длительность роста тяги, длительность затухания тяги, угловые отклонения продольной оси сопла от продольной оси наноспутника. Доля влияния отброшенных 17 проектных параметров на показатели эффективности коррекции составляет не более 0,1%.

Исключив из рассмотрения малозначимые случайные факторы, проведено повторное многократное моделирование методом Монте-Карло в рамках усеченной модели. По полученной выборке реализаций были построены новые линейные уравнения регрессии, коэффициенты которых представлены в таблице 4.5.

Таблица 4.5 – Коэффициенты линейных уравнений регрессии

Фактор	T_t	W_t	L_{ty}	L_{tz}	ψ_t	ϑ_t
Постоянный коэффициент	5,57e+5 м/с	2,10e-3 м/с	-8,35e-6 Н·м·с	4,49e-6 Н·м·с	4,80e-2 градус/с	-1,72e-1 градус/с
Угловое отклонение в плоскости XOZ	4,86e-6 м·с ⁻¹ градус ⁻¹	-2,00e-1 м·с ⁻¹ градус ⁻¹	-6,99e-2 Н·м·с/градус	6,99e-2 Н·м·с/градус	8,48e+2 с ⁻¹	2,51e-1 с ⁻¹
Угловое отклонение в плоскости XOY	-1,84e-3 м·с ⁻¹ градус ⁻¹	1,98e-4 м·с ⁻¹ градус ⁻¹	1,62e-05 Н·м·с/градус	-1,63e-5 Н·м·с/градус	-9,60e-2 с ⁻¹	-8,68e+2 с ⁻¹
Радиус критического сечения сопла	1,21e+3 с ⁻¹	4,32e+0 с ⁻¹	1,63e-2 Н·с	-2,98e-2 Н·с	-3,24e+2 градус·м ⁻¹ с ⁻¹	1,48e+2 градус·м ⁻¹ с ⁻¹
Температура РТ	1,39e-4 м·с ⁻¹ К ⁻¹	4,48e-7 м·с ⁻¹ К ⁻¹	4,47e-9 Н·м·с/К	5,95e-9 Н·м·с/К	6,70e-5 градус·К ⁻¹ с ⁻¹	7,33e-5 градус·К ⁻¹ с ⁻¹
Длительность роста тяги	8,43e-2 м/с ²	-7,44e-3 м/с ²	6,11e-7 Н·м	-2,50e-6 Н·м	-2,84e-2 градус/с ²	4,78e-3 градус/с ²
Длительность затухания тяги	3,43e-3 м/с ²	-7,51e-3 м/с ²	-9,15e-9 Н·м	-4,02e-7 Н·м	-3,55e-3 градус/с ²	3,94e-4 градус/с ²
Критерий адекватности Фишера	5,57e+5	7,09e+4	4,25e+5	4,27e+5	4,42e+5	3,86e+5

4.2.2 Формирование требований к производственным отклонениям наноспутника формата CubeSat 3U

С использованием этих уравнений был вновь проведён факторный анализ для выделения проектных параметров, оказывающих наибольшее влияние на разброс контролируемых параметров движения. По формуле (2.9) оценивались влияния дисперсий проектных параметров на дисперсии контролируемых параметров в предположении, что проектные параметры являются независимыми случайными величинами. Факторный анализ показал, что на вектор ускорения преобладающий вклад в разбросы вносит радиус критического сечения сопла (более 75% вклада) и угловое отклонение сопла от продольной оси (около 23% вклада). На движение относительно центра

масс оказывают наибольшее влияние угол отклонения сопла от продольной оси (более 85% вклада) и радиус критического сечения (около 14 % вклада).

Записывая регрессионные модели в виде неравенств, в левой части которых стоят предельные значения контролируемых параметров (приведены в таблице 4.6), формируются повышенные требования к погрешностям проектных параметров наноспутника и электротермической двигательной установки.

Таблица 4.6 – Предельные значения контролируемых параметров

Параметр	Значение
$\min T_\tau $	0,03 м/с ²
$\max W_\tau $	0,003 м/с ²
$\max L_{\tau y} $	0,1 мН×м×с
$\max L_{\tau z} $	0,1 мН×м×с
$\max \dot{\psi}_\tau $	1 градус/с
$\max \dot{\vartheta}_\tau $	1 градус/с

Предельные значения контролируемых параметров в таблице 5.6 определяются требованиями технического задания и целевым назначением наноспутника. В данной работе они выбраны исходя из предположения о необходимости обеспечения группового полёта, в котором SamSat-M является одним из участников группировки.

Найденные повышенные требования к погрешностям проектных параметров электротермической двигательной установки приведены в таблице 4.7.

Таблица 4.7 – Повышенные требования к погрешностям проектных параметров наноспутника и электротермической двигательной установки

Параметр	Значение
Радиус критического сечения сопла, мм	$0,2 \pm 0,04$
Температура газа на входе в сопло, К	900 ± 30

Параметр	Значение
Длительность роста тяги, с	$1,75 \pm 0,25$
Длительность затухания тяги, с	$1,75 \pm 0,25$
Угловое отклонение сопла от продольной оси в плоскости XOZ , градусы	$0 \pm 0,05$
Угловое отклонение сопла от продольной оси в плоскости XOY , градусы	$0 \pm 0,05$

Результаты моделирования с учётом повышенных требований к погрешностям проектных параметров приведены на рисунке 4.9.

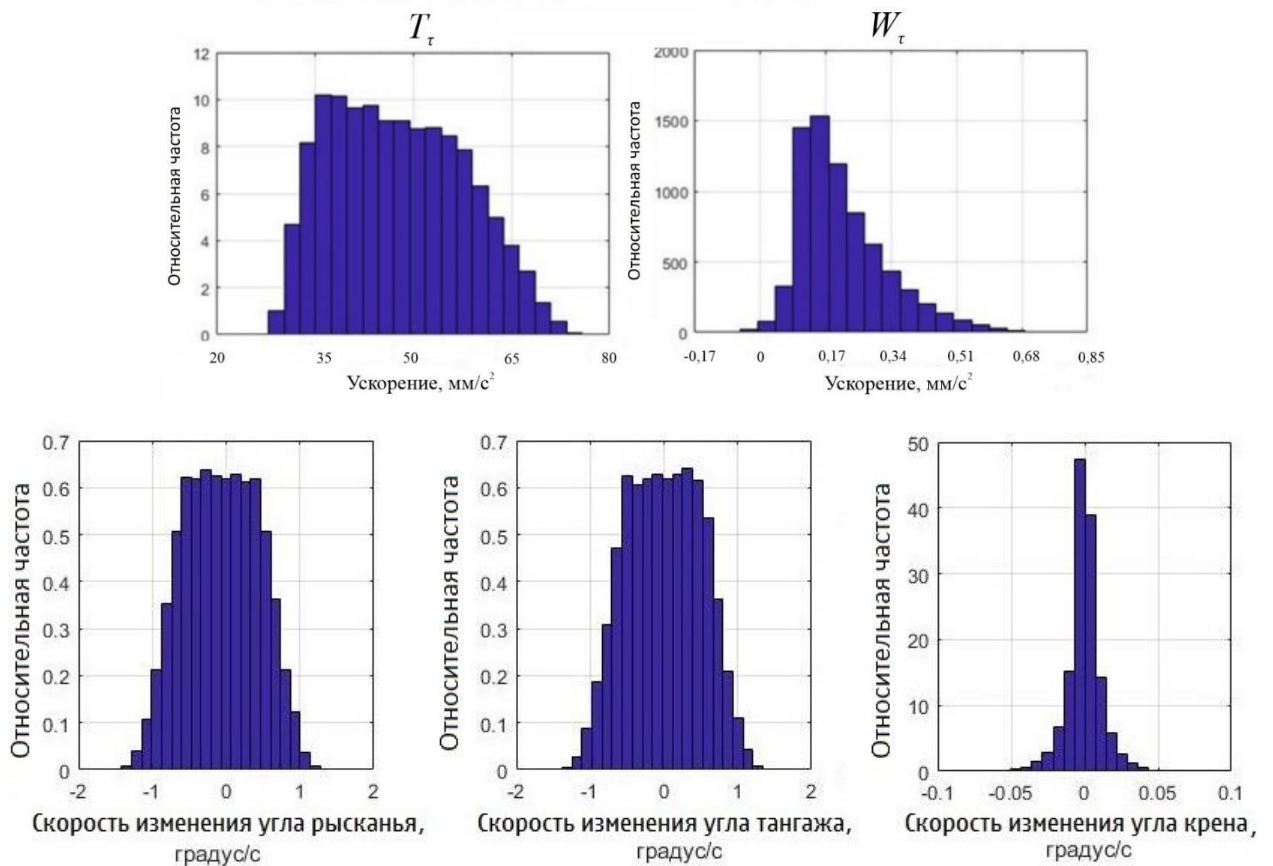


Рисунок 4.9 – Гистограммы относительных частот проекций ускорения и конечных угловых скоростей наноспутника при повышении требований к погрешностям проектных параметров

При сравнении рисунков 4.5, 4.7 с рисунком 4.9 можно наблюдать увеличение полезной составляющей вектора ускорения (проекция T_τ) при уменьшении разбросов поперечной составляющей ускорения и возникающих угловых скоростей. При выдаче корректирующего импульса математическое

ожидание T_τ равно 54,4 мм/с² (до ужесточения требований было 41,6 мм/с²). Среднеквадратическое отклонение ускорения W_τ составило 0,17 мм/с² (было 0,544 мм/с²). Разбросы конечных угловых скоростей относительно поперечных осей снизились более чем на порядок: среднеквадратические отклонения стали равны 0,6 градус/с, в то время как до повышения требований они составляли 7 градус/с.

Гистограммы изменения скорости и погрешности в продольном (требуемом) направлении приведены на рисунке 4.6.

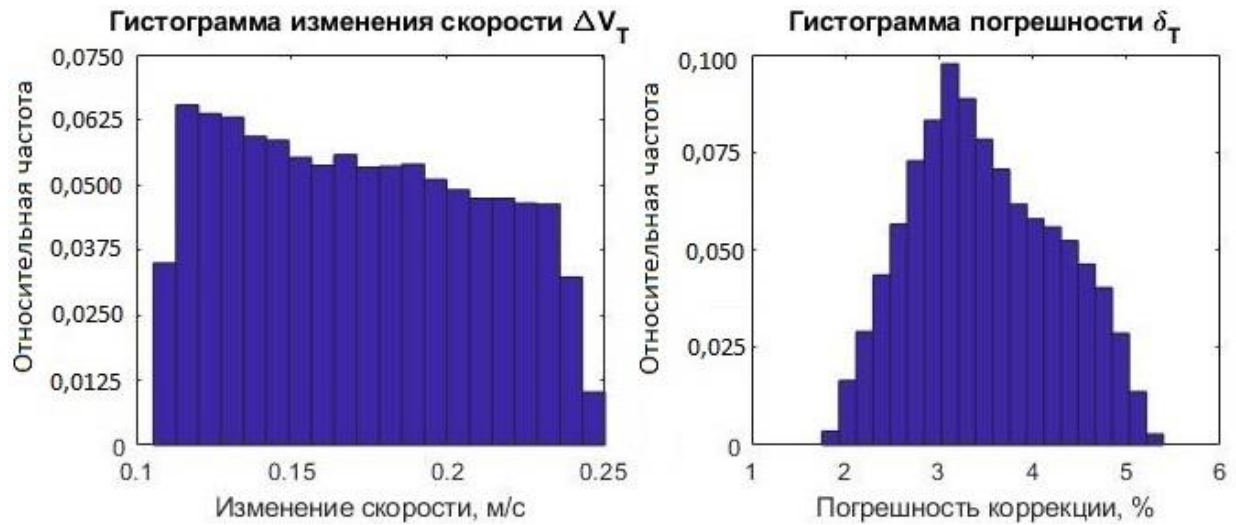
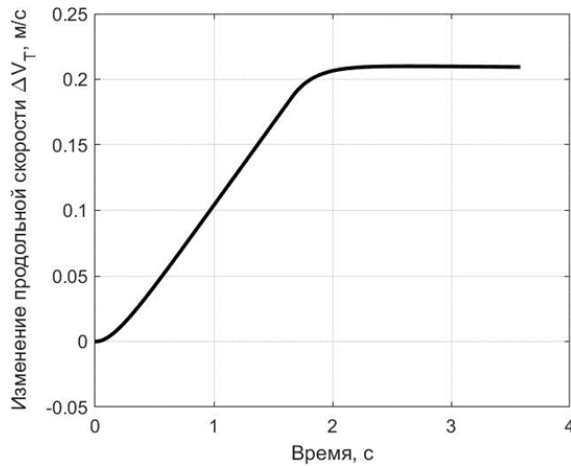


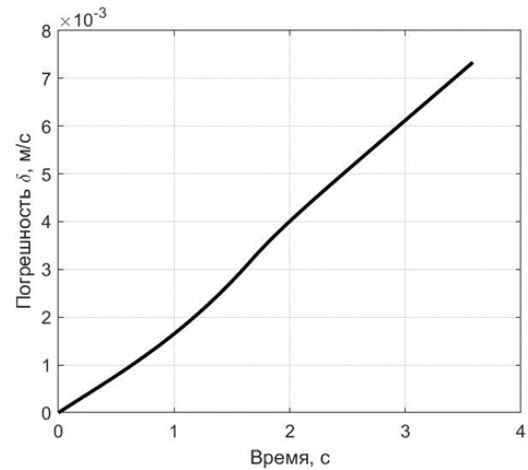
Рисунок 4.10 – Гистограммы изменения скорости и погрешности в продольном (требуемом) направлении

Сравнивая результаты, проиллюстрированные рисунками 4.6 и 4.10, можно отметить, что математическое ожидание изменения скорости в продольном направлении возросло с 16,9 мм/с до 17,2 мм/с; степень неопределенности изменения скорости (среднеквадратическое отклонение) уменьшилось с 4,8 мм/с до 3,9 мм/с. Математическое ожидание погрешности в продольном направлении уменьшилось с 4,5% до 3,5%; степень неопределенности погрешности (среднеквадратическое отклонение) уменьшилась значительно – с 2,9 % до 0,8%. При этом максимальные значения погрешности уменьшились в 3 раза с 16% до 5,4%

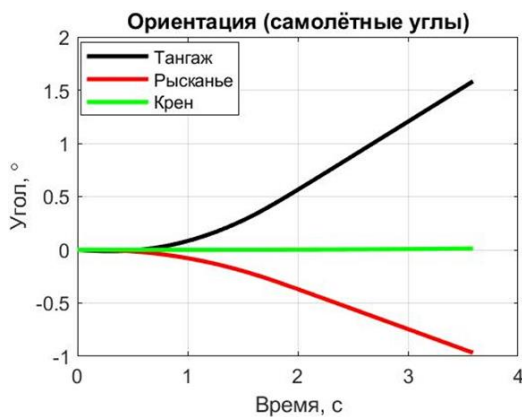
Пример движения наноспутника SamSat-M в процессе формирования корректирующего импульса для одной из возможных реализаций с учетом сформированных требований к погрешностям проектных параметров наноспутника и двигательной установки приведен на рисунке 4.11.



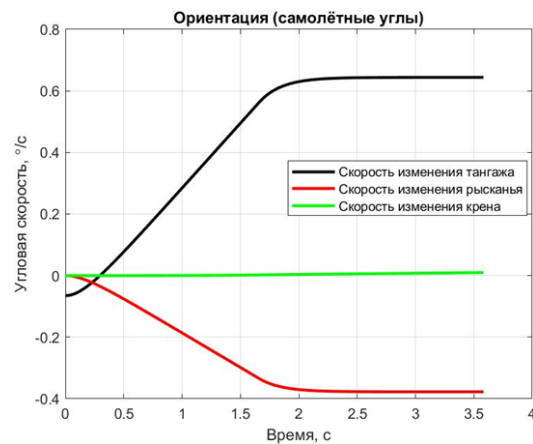
а)



б)



в)



г)

Рисунок 4.11 – Пример движения наноспутника SamSat-M в процессе формирования корректирующего импульса: а) изменение скорости в продольном (требуемом) направлении; б) нарастание погрешности в продольном направлении в процессе коррекции; в) зависимость углов ориентации от времени; г) зависимость скоростей изменения углов ориентации от времени

4.3. Исследование стабилизации движения наноспутника формата CubeSat 3U во время корректирующего импульса с помощью маховика

При исследовании стабилизации движения наноспутника SamSat-M предполагается, что наноспутник представляет собой абсолютно твёрдое тело переменной массы, так как во время работы двигательной установки расходуется рабочее тело. Параметры наноспутника и двигательной установки приведены в таблице 4.2, начальные условия движения приведены в таблице 4.3.

Для обеспечения одноосной стабилизации движения во время выдачи импульса тяги используется маховик, ось вращения которого жёстко связана с несущим каркасом наноспутника и сонаправлена с продольной осью наноспутника. После того, как маховик выйдет на рабочую частоту вращения, включается двигательная установка.

В начальный момент интегрирования уравнений движения включается маховик, который выходит на рабочую частоту за время T_{RW} . В течение этого времени маховик двигается с угловым ускорением ε что приводит к закрутке всего наноспутника в противоположном направлении.

Время раскручивания маховика можно определить, зная кинетическую энергию вращательного движения маховика:

$$T_{RW} = \frac{I_{RW}\omega_{RW}^2}{2P_{RW}}, \quad (4.5)$$

где I_{RW} – момент инерции маховика относительно оси вращения; ω_{RW} – максимальная частота вращения маховика; P_{RW} – мощность, подводимая к маховику.

После того, как маховик выйдет на рабочую частоту вращения, включается двигательная установка. Результатами моделирования являются параметры движения наноспутника на протяжении раскручивания маховика и выдачи импульса тяги – фазовые траектории углов ориентации: крена, рысканья и тангажа.

На рисунке 4.12 приведены фазовые траектории для одной из реализаций движения наноспутника SamSat-M при отсутствии гиросtatического момента.

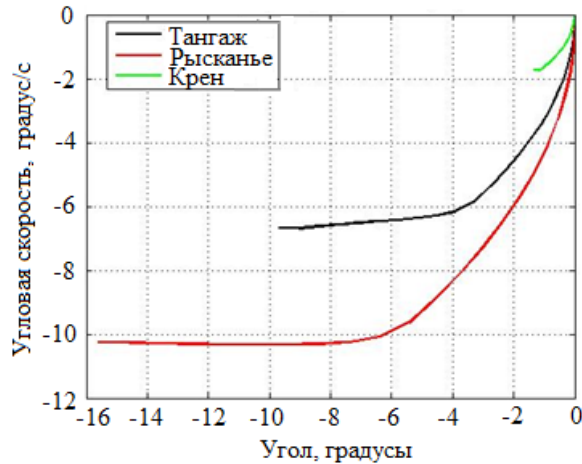


Рисунок 4.12 – Фазовые траектории углов ориентации наноспутника SamSat-M во время выдачи импульса тяги в случае отсутствия гиросtatического момента

На рисунке 4.13 приведена гистограмма значений угла рысканья наноспутника SamSat-M в момент завершения выдачи импульса тяги при отсутствии гиросtatического момента. При этом величина модуля кинетического момента наноспутника с невращающимся маховиком с вероятностью 0,99 будет не больше, чем $2,05 \text{ мН}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ (точка M^* на рисунке 3.4).

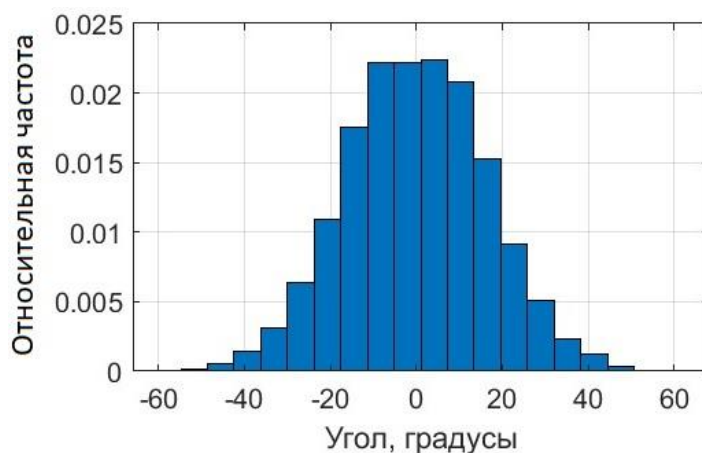


Рисунок 4.13 – Гистограмма значений угла рысканья наноспутника SamSat-M на момент окончания выдачи импульса тяги при отсутствии гиросtatического момента

Распределение значений угла ориентации по рысканью, как видно из рисунка 4.9, имеет вид, близкий к нормальному. Аналогичным образом выглядит распределение значений угла ориентации по тангажу. Из рисунка 4.9 нетрудно заметить, что в случае отсутствия гиросtatического момента при выдаче импульса тяги наноспутник может начать совершать неконтролируемое движение относительно центра масс. Это приводит к изменению пространственной ориентации вектора тяги и влечёт за собой неэффективную выдачу корректирующего импульса.

По предложенной в настоящей работе методике для наноспутника SamSat-M был определен требуемый кинетический момент маховика, необходимый для стабилизации движения с углом раствора конуса прецессии равным 1° . Этот момент составил $0,025 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$.

Одна из реализаций фазовых траекторий углов ориентации гироскопически стабилизированного наноспутника SamSat-M с маховиком, позволяющим накапливать кинетический момент $0,025 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ в процессе выдачи импульса тяги, приведена на рисунке 4.14 (движение начинается с нулевых значений фазовых переменных).

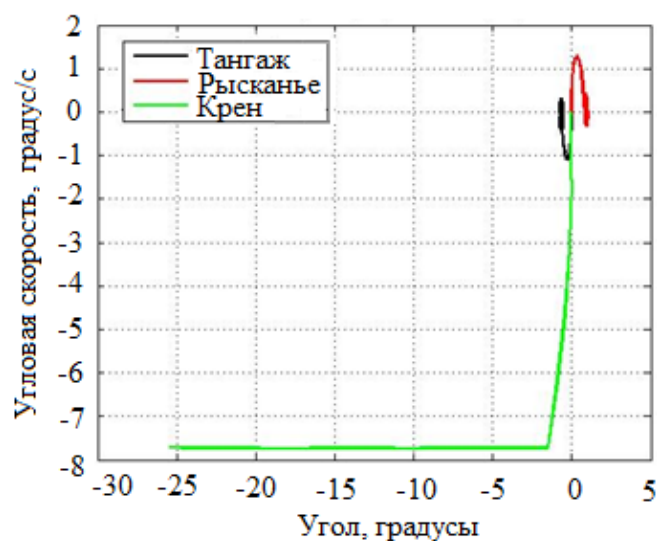


Рисунок 4.14 – Фазовые траектории углов ориентации наноспутника SamSat-M во время выдачи импульса тяги в случае отсутствия гиросtatического момента

На рисунке 4.14 наблюдается стабилизированное по тангажу и рысканью движение, которое обусловлено гиростатическим моментом маховика. При этом резкое возрастание по модулю скорости изменения угла крена происходит на этапе разгона маховика до рабочей частоты вращения (время раскрутки маховика составляет приблизительно одну секунду).

На рисунке 4.15 приведена гистограмма значений угла рысканья для наноспутника SamSat-M, оснащенного маховиком для обеспечения одноосной стабилизации во время совершения орбитального маневра.

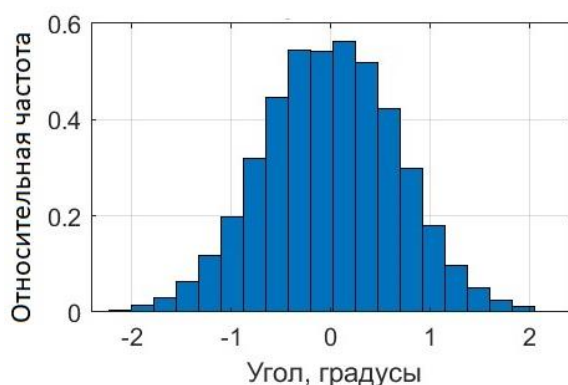


Рисунок 4.15 – Гистограмма значений угла рысканья наноспутника SamSat-M на момент окончания выдачи импульса тяги с учётом гиростатического момента

Гистограммы изменения скорости и погрешности в продольном (требуемом) направлении приведены на рисунке 4.16.

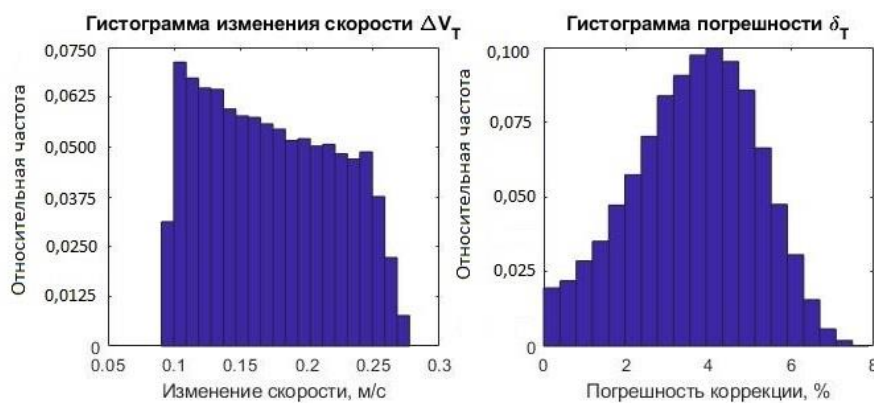


Рисунок 4.16 – Гистограммы изменения скорости и погрешности в продольном (требуемом) направлении

В результате моделирования для наноспутника SamSat-M в случае стабилизации с помощью маховика вероятностные характеристики погрешности по продольному направлению получились следующие: математическое ожидание 3,6%; среднеквадратическое отклонение 1,5%. Значения математического ожидания и среднеквадратического отклонения погрешности позволяют сделать вывод о том, что использование маховика является не столь эффективным, как уменьшение производственных отклонений изготовления наноспутника, однако позволяет обеспечить требуемые значения параметров движения, что отражено в таблице 4.8.

Таблица 4.8 – Разбросы углового движения наноспутника SamSat-M на момент окончания выдачи импульса тяги для двух случаев: с выключенным и включенным маховиком.

Параметр	Среднеквадратическое отклонение	
	Маховик выключен	Маховик включен
Угол крена	3,21°	0,06°
Скорость изменения угла крена	2,97°/с	0,00°/с
Угол рысканья	16,38°	0,67°
Скорость изменения угла рысканья	6,79°/с	0,20°/с
Угол тангажа	17,50°	0,67°
Скорость изменения угла тангажа	8,15°/с	0,20°/с

В таблице 4.8 представлено, как разбросы значений углов ориентации к окончанию выдачи импульса тяги уменьшаются по сравнению со значениями, полученными в случае с невращающимся маховиком.

4.3.1 Анализ стратегий управления маховиком для обеспечения гироскопической стабилизации вектора тяги маневрирующего наноспутника

Для определения более выигрышной с точки зрения затрат времени и потребления энергии стратегии управления маховиком проводится их сравнительный анализ. Рассматриваются две возможных стратегии

стабилизации: включение двигательной установки одновременно с началом работы электродвигателя маховика и включение двигательной установки после того, как маховик достигнет номинальной скорости вращения.

При решении данной задачи рассматривается упрощенная схема формирования возмущающего момента, создаваемого двигательной установкой. Схема возникновения возмущающего момента, принимаемая при проведении анализа стратегий управления маховиком для обеспечения гироскопической стабилизации маневрирующего наноспутника приведена на рисунке 4.17.

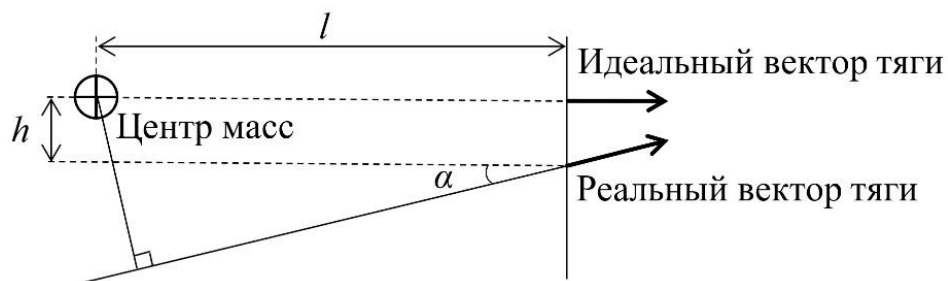


Рисунок 4.17 – Возмущающий момент, формируемый двигательной установкой

Для оценки возмущающего момента, формируемого двигательной установкой, используется следующее выражение [1]:

$$M = F(l \sin \alpha + h \cos \alpha), \quad (4.6)$$

где F – сила реактивной тяги; l , h – параметры линейного смещения сопла относительно центра масс наноспутника; α – угловое смещение вектора тяги относительно продольной оси наноспутника.

Предлагается рассмотреть случай, когда возмущающий момент действует по оси OY , вызывая угловое ускорение по каналу тангажа. Численное моделирование проводится для наноспутника формата CubeSat 3U со следующими конструктивными параметрами: $l = 0,15$ м, $h = 0,01$ м; $\alpha = 1^\circ$ и номинальной силой тяги $F_T = 0,1$ Н. Предполагается, что оси связанной системы координат $OXYZ$ являются главными центральными осями инерции наноспутника, тензор инерции имеет диагональный вид: $I_x = 0,012$ кг \times м 2 ;

$I_y = 0,054 \text{ кг}\times\text{м}^2$; $I_z = 0,055 \text{ кг}\times\text{м}^2$. Для такой конфигурации оценка возмущающего момента составляет $1,26 \text{ мН}\times\text{м}$. Принимаемая длительность импульса тяги $\tau = 3 \text{ с}$, что обеспечивает создание импульса момента силы $3,78 \text{ мН}\times\text{м}\times\text{с}$.

Для обеспечения стабилизации угловой скорости движения относительно центра масс наноспутника в условиях действия возмущающего момента, формируемого двигательной установкой, применяется маховик. Для составления модели кинетического момента маховика использовались параметры коммерческого маховика с электродвигателем RW-35, предназначенного для управления движением малогабаритных космических аппаратов и наноспутников, и соответствующего сформированным требованиям к кинетическому моменту маховика для обеспечения одноосной стабилизации наноспутника. Момент инерции маховика RW-35 относительно оси вращения $I_{RW} = 1,9 \times 10^{-4} \text{ кг}\times\text{м}^2$; максимальная скорость вращения маховика $\omega_{RW} = 5000 \text{ об/мин}$; потребляемая мощность от 4 до 9 Вт. В режиме вращения маховика с постоянной угловой скоростью электродвигатель потребляет 4 Вт, потребление в режиме разгона и торможения маховика варьируется в зависимости от стратегии управления.

4.3.2 Методика анализа стратегий управления маховиком

Максимальный кинетический момент, создаваемый маховиком, определяется из соотношения:

$$H_{RW} = I_{RW}\omega_{RW}. \quad (4.7)$$

Время раскручивания маховика определяется с помощью соотношения (4.5).

На интервале времени раскручивания и торможения маховика производная кинетического момента считается постоянной и вычисляется по формуле:

$$\dot{H} = \pm \frac{H_{RW}}{T_{RW}}. \quad (4.8)$$

Знак плюс в выражении (4.8) ставится, если маховик раскручивается, знак минус – если маховик тормозится. Когда маховик остановлен или вращается с постоянной угловой скоростью, производная кинетического момента маховика равна нулю.

Мгновенное значение кинетического момента маховика зависит от мгновенной скорости его вращения и момента инерции маховика относительно оси вращения. С учётом допущений о постоянстве ускорения и торможения маховика, мгновенная скорость вращения маховика изменяется линейно. Тогда во время разгона маховика мгновенное значение кинетического момента можно записать в виде:

$$H(t) = \frac{I_{RW}\omega_{RW}}{T_{RW}}(t - t_0) = \frac{2P_{RW}(t - t_0)}{\omega_{RW}}, \quad (4.9)$$

где t – текущий момент времени; t_0 – момент времени включения маховика.

В выражении (4.9) текущий момент времени относится к интервалу времени раскручивания маховика: $t_0 \leq t \leq t_0 + T_{RW}$.

При реализации разных стратегий управления маховиком, могут рассматриваться случаи, в которых маховик раскручивается не до максимально возможной скорости. Например, такая ситуация наблюдается, если маховик раскручивается только во время импульса тяги, который длится меньше, чем T_{RW} . В таком случае за время раскручивания $\tau < T_{RW}$ маховик приобретает угловую скорость:

$$\omega_\tau = \frac{\omega_{RW}\tau}{T_{RW}}. \quad (4.10)$$

Во время торможения маховика мгновенное значение кинетического момента определяется из соотношения:

$$H(t) = I_{RW}\omega_\tau \left(1 - \frac{t - t_{B0}}{\tau}\right), \quad (4.11)$$

где ω_τ – скорость вращения, которой достиг маховик за время раскручивания τ ; t_{B0} – момент времени начала торможения маховика.

В выражении (4.11) текущий момент времени относится к интервалу времени торможения маховика: $t_{B0} \leq t \leq t_{B0} + \tau$.

Параметрами, определяющими ту или иную стратегию управления маховиком, являются:

- 1) Время раскручивания и торможения маховика;
- 2) Моменты времени включения и выключения электродвигателя маховика и двигательной установки.

При выборе времени раскручивания и торможения маховика делается допущение, что во время торможения маховика электродвигатель потребляет такую же мощность, как и во время раскручивания, и на торможение требуется столько же времени, сколько и на раскручивание. Во время вращения маховика с постоянной скоростью электродвигатель потребляет минимально возможную мощность для поддержания постоянной скорости вращения.

Моменты времени включения и выключения электродвигателя маховика и двигательной установки выбираются в соответствии с выбранной стратегией управления маховиком. В настоящей работе рассматривается две стратегии: 1) одновременная работа электродвигателя маховика и двигательной установки; 2) последовательное включение электродвигателя маховика и двигательной установки.

При реализации стратегии одновременной работы электродвигателя маховика и двигательной установки время раскручивания маховика совпадает с длительностью импульса тяги. В этом случае моделирование проводится с учетом следующих моментов времени:

- момент времени включения электродвигателя маховика и двигательной установки $t_0 = 0$ с;
- момент времени выключения двигательной установки и начала торможения маховика $t_{B0} = t_0 + \tau$;
- момент полной остановки вращения маховика $t_B = t_0 + 2\tau$.

Затраты энергии на гироскопическую стабилизацию при реализации стратегии одновременного включения электродвигателя маховика и двигательной установки можно вычислить по приближённой формуле:

$$E_S = \begin{cases} 2\tau P_{RW}, & \text{если } \tau \leq T_{RW}, \\ \frac{1}{2} I_{RW} \omega_{RW}^2 (\tau - T_{RW}) + 2T_{RW} P_{RW}, & \text{если } \tau > T_{RW}, \end{cases} \quad (4.12)$$

где τ – длительность импульса тяги, P_{RW} – потребляемая мощность электродвигателя маховика в режиме его раскручивания или торможения; I_{RW} – момент инерции маховика относительно оси вращения; ω_{RW} – максимальная скорость вращения маховика; T_{RW} – время раскручивания маховика до максимальной скорости.

При реализации стратегии последовательного включения электродвигателя маховика и двигательной установки, моменты времени принимались следующие:

- момент времени включения электродвигателя маховика и двигательной установки $t_0 = 0$ с;
- момент времени выхода маховика на номинальную частоту вращения и включения двигательной установки $t_{T0} = t_0 + T_{RW}$, где T_{RW} определяется из соотношения (4);
- момент времени выключения двигательной установки и начала торможения маховика $t_{B0} = t_0 + T + T_{RW}$;
- момент полной остановки вращения маховика $t_B = t_0 + T + 2T_{RW}$.

Затраты энергии на гироскопическую стабилизацию при реализации последовательного включения электродвигателя маховика и двигательной установки можно вычислить по приближённой формуле:

$$E_S = \frac{1}{2} I_{RW} \omega_{RW}^2 \tau + 2T_{RW} P_{RW} \quad (4.13)$$

где τ – длительность импульса тяги.

Первое слагаемое в формуле (4.13) представляет собой затраты энергии на раскручивание и торможение маховика, второе слагаемое представляет собой затраты энергии на вращение маховика с номинальной скоростью.

Интегрирование системы динамических и кинематических уравнений движения проводится классическим методом Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом 0,01 с, обеспечивающем погрешность по правилу Рунге $4,5 \times 10^{-6}$.

Корректность полученных результатов интегрирования уравнений углового движения проверяется путем проверки неизменности интегралов движения (сохранение кинетического момента и кинетической энергии при свободном движении) [47, 48]:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= I\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}, \\ E_K &= 0,5(\mathbf{K}, \boldsymbol{\omega}). \end{aligned}$$

где $I\boldsymbol{\omega}$ – кинетический момент наноспутника; \mathbf{H} – вектор кинетического момента маховика в связанной системе координат; $(\mathbf{K}, \boldsymbol{\omega})$ – скалярное произведение.

4.3.3 Результаты моделирования движения стабилизированного наноспутника с применением разных стратегий управления маховиком

На рисунке 4.18 построены графики углов ориентации и фазовой траектории по каналу тангажа на интервале времени работы двигательной установки. В начальный момент времени спутник сориентирован таким образом, что оси связанной системы координат совпадают с осями скоростной системы координат. Моменты начала и прекращения выдачи импульса тяги показаны на рисунке 4.18, а.

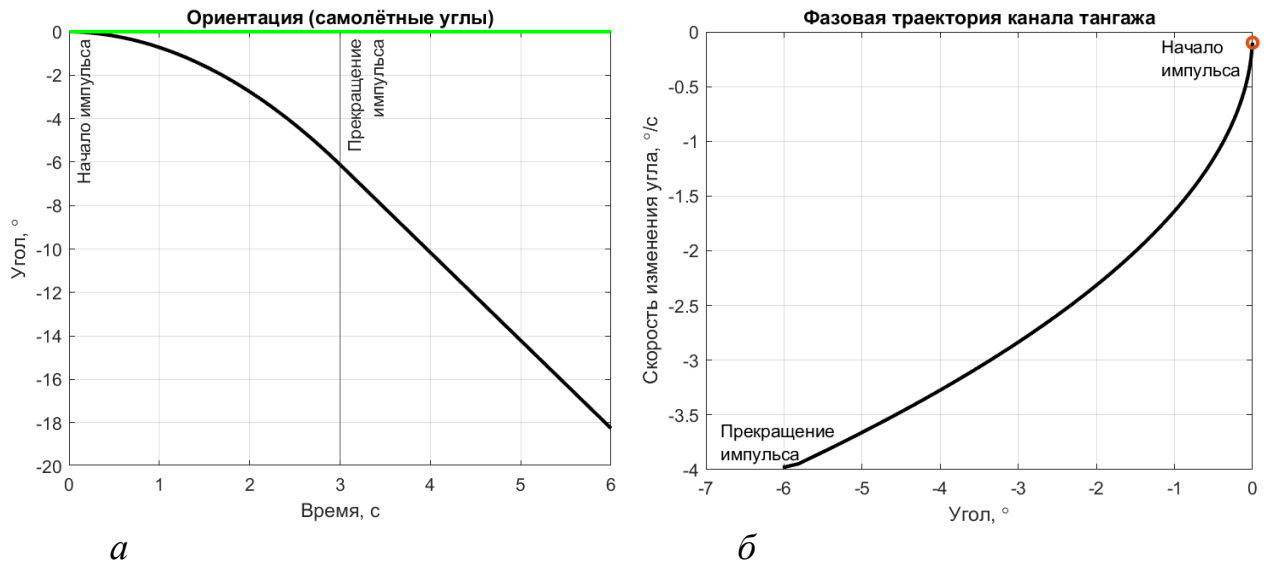


Рисунок 4.18 – Результаты моделирования движения наноспутника с выключенным электродвигателем маховика:

a – углы ориентации; *б* – фазовая траектория по каналу тангажа

Момент, формируемый двигательной установкой, приводил к закрутке спутника по каналу тангажа, скорость изменения угла тангажа при этом составляла около $4^\circ/\text{с}$. Из-за отсутствия демпфирования, спутник продолжал вращение с постоянной угловой скоростью после того, как выдача тяги прекращалась.

При подаче 9 Вт мощности на маховик во время работы двигательной установки отклонение по тангажу составило $2,4^\circ$, после чего маховик стал тормозиться. С учётом торможения маховика время совершения манёвра составило 6 с, его потребление энергии в течение манёвра, вычисленное с помощью формулы (4.12), составило 54 Дж. Результаты моделирования приведены на рисунке 4.19.

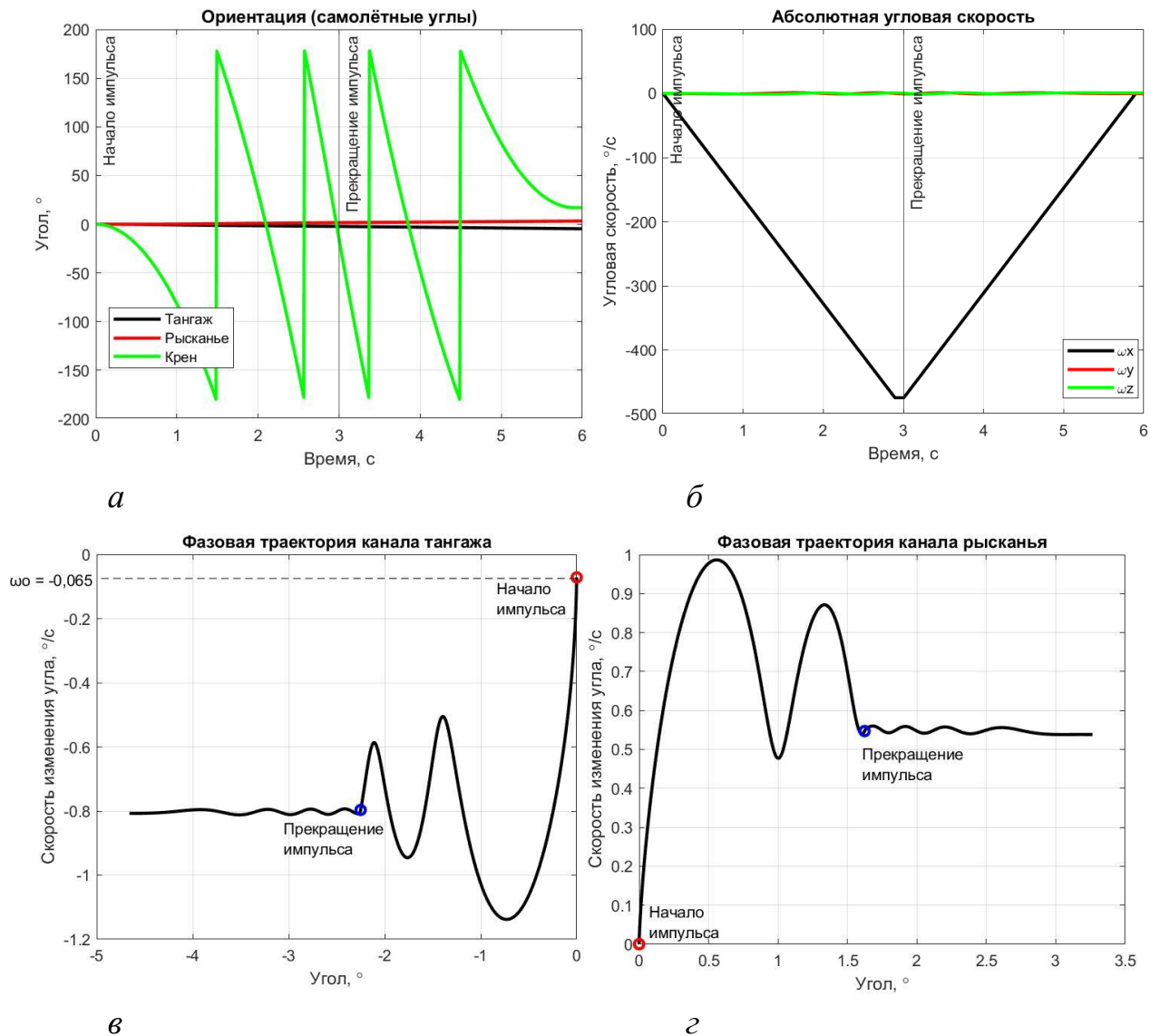


Рисунок 4.19 – Результаты моделирования движения наноспутника с включенным электродвигателем маховика при одновременном включении с двигательной установкой:

а – углы ориентации; *б* – проекции абсолютной угловой скорости;

в – тангаж; *г* – рысканье

Пространственный угол атаки наноспутника, переход к которому осуществлён с использованием значений тангажа и рысканья, к окончанию выдачи импульса тяги составил $3,3^\circ$. При этом скорость изменения пространственного угла атаки составила $1,3^\circ/\text{с}$. В том случае, если на электродвигатель маховика во время его раскручивания и торможения подавалось питание 4 Вт, потребление системы стабилизации снизилось до

24 Дж. В то же время отклонение продольной оси наноспутника от оси Ox_g к окончанию выдачи импульса тяги составило $4,7^\circ$, скорость изменения угла атаки $1,7^\circ/\text{с}$.

Точность стабилизации, а также затраты энергии отличались от вариантов стабилизации, рассмотренных выше, в случае применения стратегии последовательного выполнения следующих действий: разгон маховика до максимальной скорости вращения, работа двигательной установки, торможение маховика. Результаты моделирования при реализации этой стратегии приведены на рисунке 4.20.

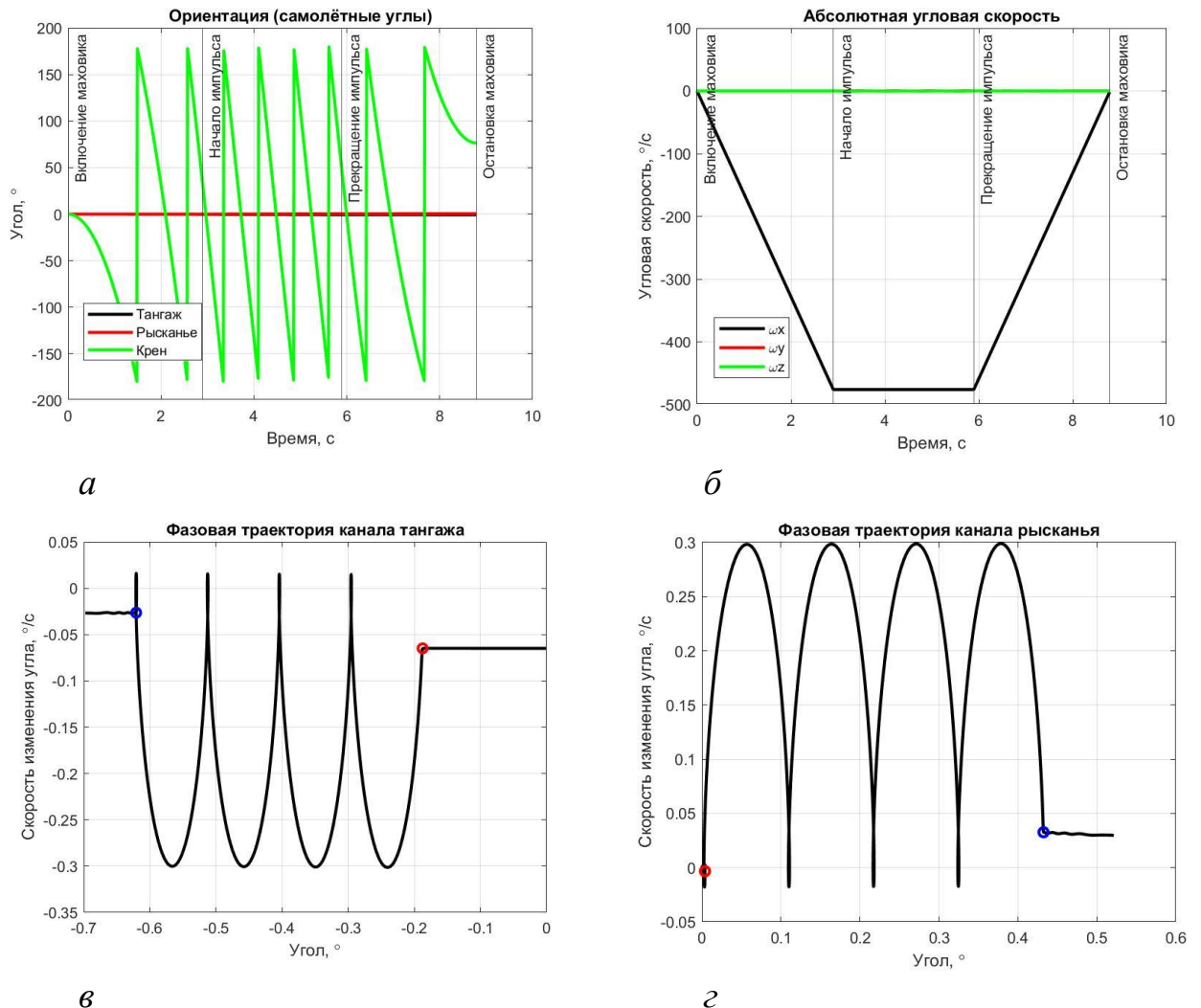


Рисунок 4.20 – Результаты моделирования движения наноспутника при последовательном раскручивании маховика и выдачи импульса тяги:

а – углы ориентации; *б* – проекции абсолютной угловой скорости;

в – тангаж; *г* – рысканье

На рисунках 4.20, *а* и 4.20, *б* показаны моменты включения и выключения электродвигателя маховика, а также начала и окончания выдачи импульса тяги. На графике абсолютной угловой скорости виден интервал времени, на котором скорость вращения маховика является постоянной – на этом интервале происходит выдача корректирующего импульса. На фазовых траекториях тангажа и рысканья на рисунках 4.20, *в* и 4.20, *г* показан интервал выдачи импульса тяги – красный кружок соответствует изображающей точке в момент начала выдачи импульса тяги, а синий в момент его прекращения. Периодический характер движения изображающих точек на интервале выдачи импульса тяги обусловлен прецессионным движением и движением связанной системы координат относительно скоростной со скоростью $\omega_o = 0,065^\circ/\text{с}$.

С учётом торможения маховика длительность выполнения манёвра составила 8,8 с, потребление энергии электродвигателем маховика в течение манёвра, вычисленное с помощью формулы (4.13), составило 64,1 Дж. Пространственный угол атаки к моменту окончания импульса тяги составил $0,97^\circ$, скорость изменения угла атаки $0,062^\circ/\text{с}$, что является сопоставимым с орбитальной угловой скоростью на круговой орбите высотой 400 км, для которой проводилось моделирование ($\omega_o = 0,065^\circ/\text{с}$).

В том случае, если при такой же стратегии стабилизации на маховик подавалось минимальное питание 4 Вт, длительность выполнения манёвра составляла 16 с, потребление энергии электродвигателем маховика, рассчитанное с помощью формулы (4.13), составляло 64,1 Дж, пространственный угол атаки к моменту окончания импульса тяги составлял $0,32^\circ$, скорость изменения угла атаки $0,14^\circ/\text{с}$.

Результаты моделирования для каждой из стратегий управления электродвигателем маховика приведены в сводной таблице 4.9.

Таблица 4.9 – Результаты моделирования для разных стратегий управления

	Одновременное включение		Последовательное включение	
Питание маховика, Вт	4	9	4	9
Длительность манёвра, с	6	6	16	8,8
Максимальная скорость вращения маховика, об/мин	2034	5000	5000	5000
Затраты энергии на стабилизацию, Дж	24	54	64,1	64,1
Пространственный угол атаки к окончанию выдачи импульса тяги, °	4,7	3,3	0,32	0,97
Скорость изменения пространственного угла атаки к окончанию импульса тяги, °/с	1,7	1,3	0,14	0,062

В таблице 4.9 приведены числовые значения параметров, позволяющие оценить точность стабилизации во время выдачи импульса тяги, а также суммарные затраты энергии и времени на стабилизацию. В случае одновременного включения двигательной установки и электродвигателя маховика при его потреблении энергии 4 Вт, максимальная скорость вращения маховика составила 2034 об/мин. Это обусловлено тем, что импульс тяги имеет меньшую продолжительность, чем время, необходимое для раскручивания маховика до номинальной скорости 5000 об/мин.

4.3.4 Анализ возможности использования замкнутой системы управления по поперечным каналам для стабилизации наноспутника-гиростата

Анализ возможности использования замкнутой системы управления по поперечным каналам для стабилизации наноспутника-гиростата проводится по результатам численного моделирования поведения системы (3.12) с учетом управления (3.17). Параметры объекта моделирования, заданные в подразделе 4.3.1, обеспечивают воздействие возмущающего момента силы тяги

0,0013 Н×м на протяжении 3 секунд по каналу тангажа. При этом маховик RW-35 обеспечивает вращение наноспутника относительно продольной оси с угловой скоростью приблизительно 1,3 оборота в секунду (см. рисунок 4.20 б).

Графики, иллюстрирующие характер движения при отсутствии управления приведены на рисунке 4.21.

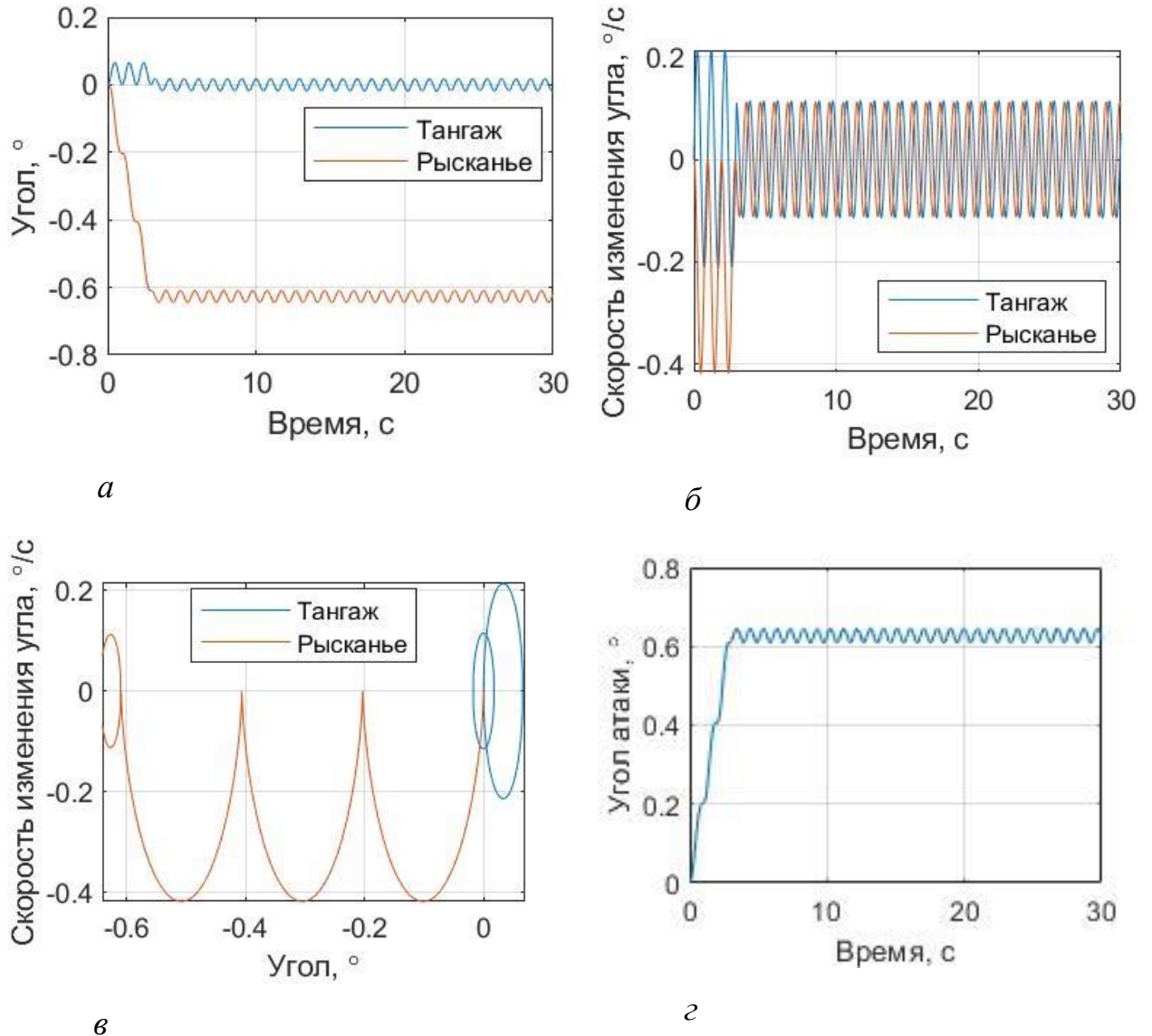


Рисунок 4.21 – Результаты моделирования движения наноспутника SamSat-M, вращающегося относительно продольной оси, при отсутствии управления по поперечным осям: *а* – углы ориентации; *б* – скорости изменения углов; *в* – фазовые траектории; *г* – пространственный угол атаки

Графики, иллюстрирующие характер движения при наличии управления с ограничением $0,001 \text{ Н}\times\text{м}$ приведены на рисунке 4.22.

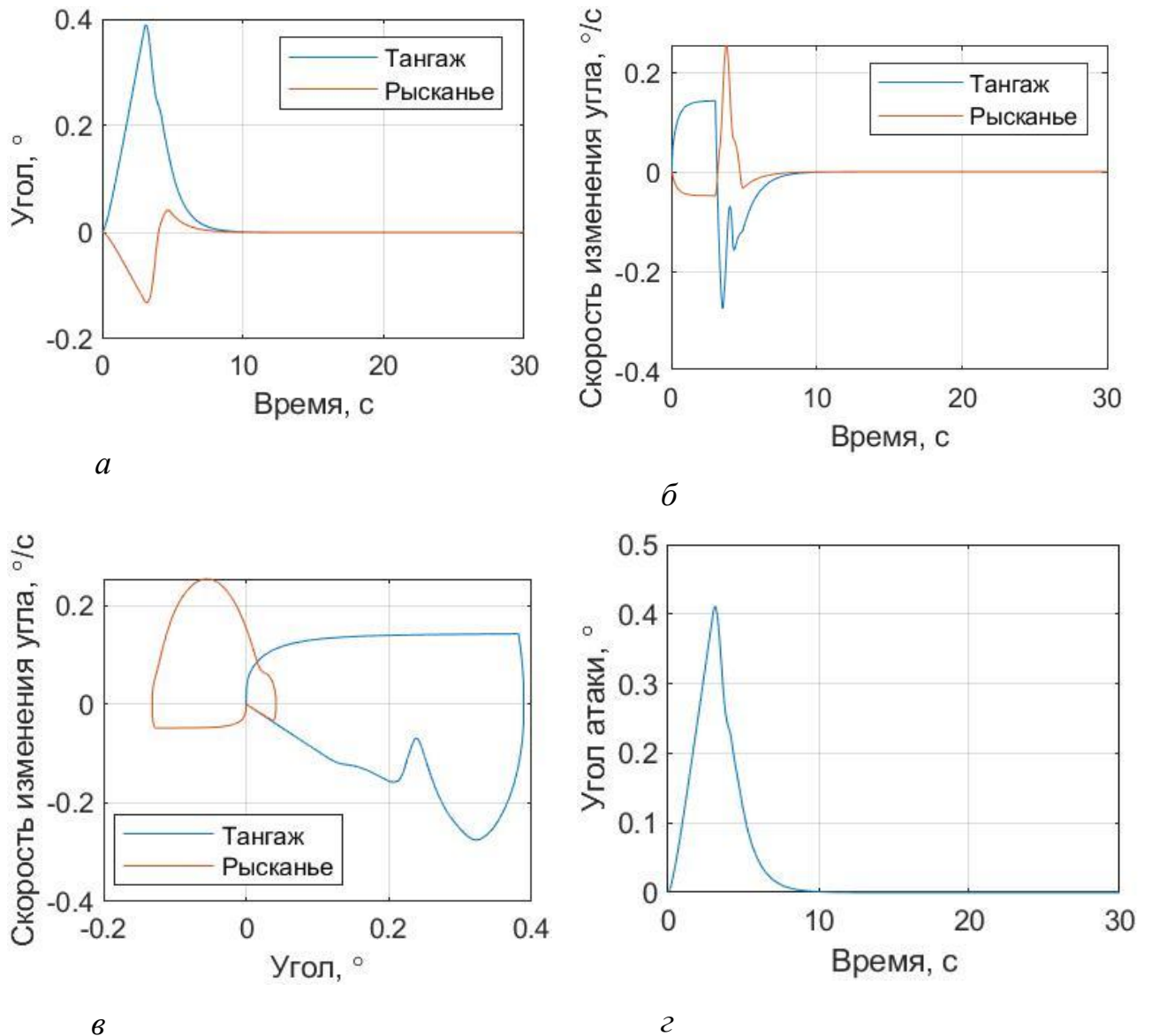


Рисунок 4.22 – Результаты моделирования движения наноспутника SamSat-M, вращающегося относительно продольной оси, с управлением по поперечным осям: *а* – углы ориентации; *б* – скорости изменения углов; *в* – фазовые траектории; *г* – пространственный угол атаки

График оптимального стабилизирующего управления показан на рисунке 4.23.

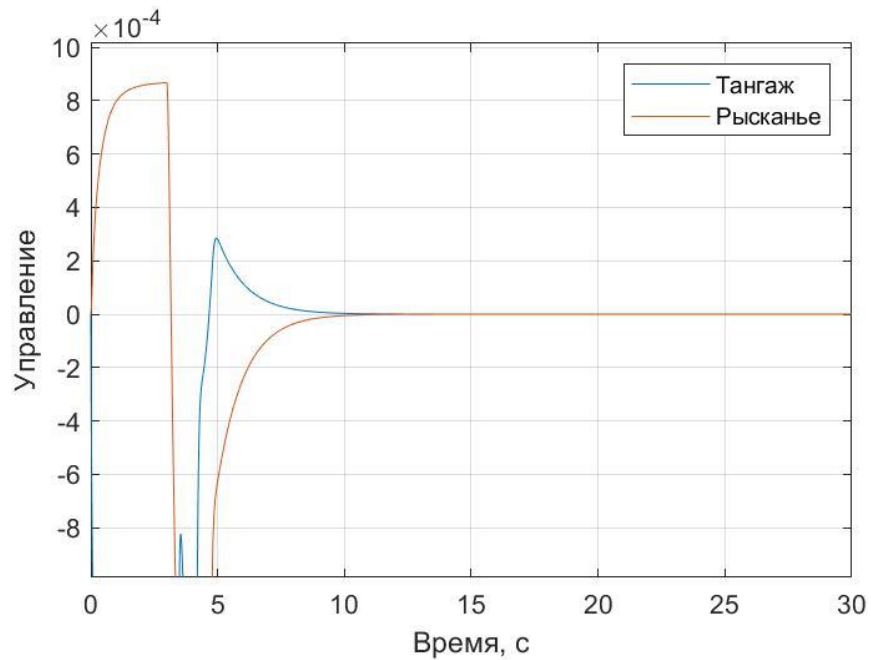


Рисунок 4.23 – Стабилизирующее управление

Сравнивая рисунки 4.21 и 4.22 можно заметить незначительное уменьшение максимального отклонения продольной оси наноспутника от требуемого направления при введении замкнутого контура управления по поперечным осям. Отмечается, что полное успокоение движения по тангажу и рысканью достигается за больший промежуток времени, чем интервал работы двигательной установки (3 секунды).

Можно проследить зависимость длительности стабилизации от скорости вращения наноспутника относительно продольной оси. В качестве критерия, по которому стабилизация считается завершенной выступает следующий: отклонения от нуля углов тангажа и рысканья не превышают $0,1$ градуса на протяжении 3 секунд. Результаты моделирования длительности стабилизации в зависимости от скорости вращения наноспутника относительно продольной оси приведены на рисунке 4.24.

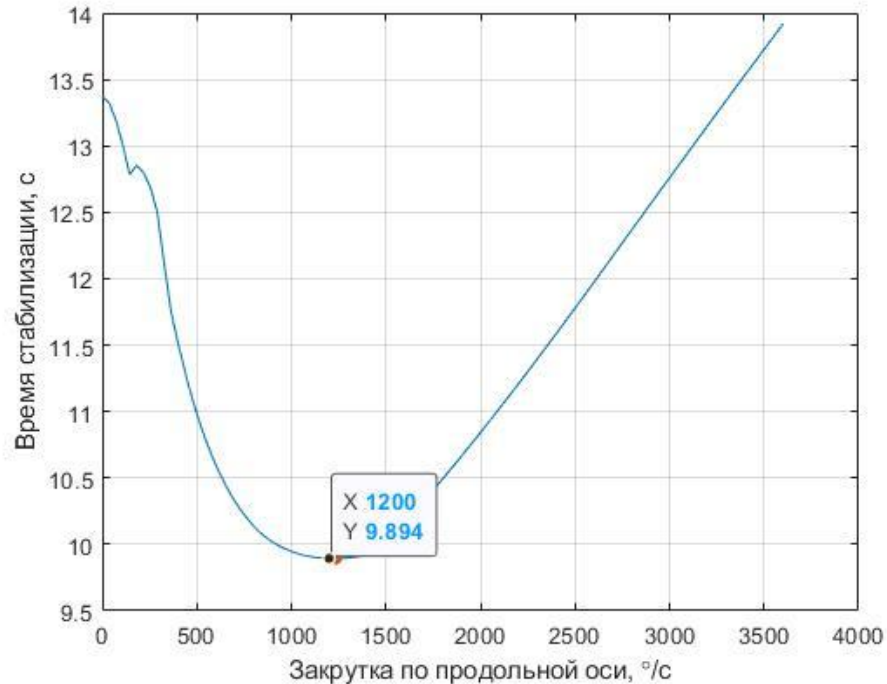


Рисунок 4.24 – Зависимость времени стабилизации от угловой скорости движения наноспутника относительно продольной оси

На графике рисунка 4.24 имеется явный минимум – точка, в которой длительность стабилизации минимальна. Наличие минимума объясняется тем, что при малых скоростях закрутки наноспутника относительно продольной оси, возмущающий момент силы тяги вызывает значительные отклонения продольной оси, с которыми предстоит бороться замкнутому контуру управления, а при значительных скоростях закрутки наноспутника относительно продольной оси повышается жесткость системы в целом вследствие увеличения гироскопического момента.

Из графика 4.24 следует, что минимальное время стабилизации при заданных начальных условиях достигается при скорости вращения наноспутника SamSat-M относительно продольной оси 1200 °/с. Однако, как было показано ранее, для достижения стабилизации с погрешностью 1° достаточно приобретения наноспутником скорости вращения относительно продольной оси приблизительно 475 °/с. Таким образом, использование дополнительного замкнутого контура управления для увеличения точности

маневрирования наноспутник SamSat-M в связке с осевым маховиком не является целесообразным.

4.4 Выводы по четвертому разделу

В разделе проиллюстрировано применение предлагаемых методик повышения точности маневрирования на примере наноспутника SamSat-M с электротермической двигательной установкой, который разрабатывается на межвузовской кафедре космических исследований Самарского университета. При построении вероятностных моделей формирования импульса тяги и движения наноспутника-гиростата учитывались 23 проектных параметра, статистические модели распределений которых полагались равновероятными.

Был получен закон распределения силы реактивной тяги, полученные результаты показали хорошую согласованность с экспериментом по измерению профиля тяги. В результате проведения регрессионного и факторного анализов сформированы требования к производственным отклонениям, соблюдение которых позволит повысить точность выполнения маневра до необходимого уровня.

Подобран достаточный гиростатический момент, обеспечивающий стабилизированное по продольной оси движение. Сформированная модель движения спутника-гиростата позволила в первом приближении оценить эффективность двух стратегий гироскопической стабилизации наноспутника с микрореактивным корректирующим двигателем во время выдачи импульса тяги. Результаты моделирования, полученные для наноспутника формата CubeSat-3U с микрореактивным корректирующим двигателем и коммерческим маховиком RW-35, позволяют сделать вывод, что с точки зрения точности гироскопической стабилизации стратегия последовательного включения маховика и корректирующего двигателя является более выигрышной, чем стратегия одновременного запуска двигательной установки и электродвигателя маховика. При реализации «последовательной» стратегии пространственный угол атаки во время выдачи импульса тяги не превышал

величину 1° , а угловая скорость соизмерима с угловой скоростью орбитального движения. В то же время использование стратегии одновременного включения при импульсе тяги длительностью 3 с требует на 15% меньше затрат энергии на стабилизацию и на 30% меньше времени (при максимальной мощности электродвигателя маховика), но обеспечивает худшую стабилизацию – скорость изменения угла атаки превышала $1,3^\circ/\text{с}$.

Приведены результаты моделирования движения наноспутника-гиростата с замкнутой системой стабилизирующего управления по поперечным каналам. Результатом проведенного анализа движения наноспутника SamSat-M является заключение о нецелесообразности использования дополнительного замкнутого контура управления для увеличения точности маневрирования наноспутника SamSat-M в связке с осевым маховиком.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено комплексное исследование проблемы точности маневрирования космических аппаратов нанокласса, оснащенных двигательными установками. Основными результатами проведенного исследования являются:

1. Построена стохастическая математическая модель движения наноспутника с двигательной установкой при совершении манёвра коррекции, отличающаяся от существующих комплексным учетом динамики движения центра масс и относительно центра масс, случайного характера погрешностей изготовления наноспутника и вероятностной модели режимов работы двигательной установки.

2. Предложена методика формирования вероятностной модели силы тяги реактивного двигателя наноспутника, которая использует геометрическую интерпретацию понятия вероятности и отличается учетом случайных проектных параметров и режимов работы двигательной установки.

3. Разработана методика оценки влияния случайных производственных отклонений изготовления наноспутника с двигательной установкой на угловое движение и погрешность маневрирования, позволяющая выделить факторы (параметры), дисперсии которых оказывают наибольшее влияние на дисперсии параметров движения центра масс и относительно центра масс наноспутника, и формирующая новый подход к пониманию главных источников погрешностей при маневрировании наноспутника.

4. Разработана методика формирования требований к погрешностям, возникающим при изготовлении наноспутника и двигательной установки, для достижения требуемой точности ориентации вектора тяги и результатов маневрирования, основанная на использовании регрессионного и факторного анализа.

5. Предложен подход к обеспечению одноосной стабилизации во время импульсной коррекции траектории, основанный на применении

дополнительной системы поддержания требуемой угловой ориентации тяги с использованием маховика, придающего наноспутнику свойство гиростата, и замкнутого контура управления угловым движением наноспутника-гиростата. Разработана методика выбора необходимой величины кинетического момента маховика и циклограммы его работы, проведен синтез оптимального регулятора состояния.

б. Применение предложенных методик продемонстрировано на примере наноспутника SamSat-M с электротермической двигательной установкой, разрабатываемой на межвузовской кафедре космических исследований Самарского университета. Разработанная методика позволила выделить основные факторы, влияющие на дисперсию вектора изменения скорости в требуемом направлении – радиус критического сечения сопла (более 75% вклада) и углового отклонения сопла от продольной оси (около 23% вклада). Моделирование движения наноспутника в процессе корректирующего импульса показало, что при обеспечении сформированных требований к производственным отклонениям, среднеквадратические отклонения угловых скоростей относительно поперечных осей наноспутника после завершения маневра коррекции, снизились более чем на порядок и стали равны 0,6 °/с, в то время как до повышения требований они составляли 7 °/с, среднеквадратическое отклонение погрешности импульса так же уменьшилось на порядок. Моделирование движения наноспутника-гиростата, оснащенного маховиком, позволило уменьшить среднеквадратические отклонения угловых скоростей относительно поперечных осей наноспутника после завершения маневра коррекции до 0,2 °/с, и снизить погрешность импульса в несколько раз. Проведено моделирование движения наноспутника-гиростата SamSat-M с замкнутой системой стабилизирующего управления по поперечным каналам, которое показало, что для увеличения точности маневрирования наноспутника SamSat-M введение управления по поперечным каналам в связке с маховиком не является целесообразным.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

КА – космический аппарат;

ЛА – летательный аппарат;

ЭТДУ – электротермическая двигательная установка;

ИСК – инерциальная система координат;

ОСК – орбитальная система координат;

ССК – связанная система координат;

CubeSat-3U – наноспутник стандарта CubeSat, состоящий из трёх юнитов;

SamSat-M – наноспутник, оснащенный ЭТДУ, разрабатываемый на межвузовской кафедре космических исследований;

RW-35 – коммерческий маховик с электродвигателем для нано- и микроспутников производства Astro- und Feinwerktechnik Adlershof GmbH;

A – матрица поворота ССК относительно ОСК;

$Ox_g Y_g Z_g$ – орбитальная система координат;

$OXYZ$ – связанная система координат;

$O_I X_I Y_I Z_I$ – инерциальная система координат;

ϑ, ψ, γ – углы тангажа, рысканья и крена соответственно;

$\Lambda = [\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3]^T$ – кватернион поворота ССК относительно ОСК;

a – большая полуось орбиты;

e – эксцентриситет орбиты;

i – наклонение орбиты;

Ω – долгота восходящего узла;

ω_p – аргумент перицентра;

ν – истинная аномалия;

L – истинная долгота в орбите,

ξ – ретроградный фактор;

\mathbf{r}, \mathbf{v} – геоцентрические положения и скорость наноспутника;

I_x, I_y, I_z – главные центральные моменты инерции наноспутника;

M_x, M_y, M_z – возмущающий момент реактивной силы тяги;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – компоненты мгновенной угловой скорости;

$\omega_{0x}, \omega_{0y}, \omega_{0z}$ – компоненты угловой скорости орбитального движения на оси ССК;

$\boldsymbol{\omega}_{\text{ОСК}} = \left(0, \sqrt{\mu/r^3}, 0\right)^T$ – угловая скорость орбитальной системы координат, движущейся по круговой орбите относительно неподвижной ИСК;

μ – гравитационный параметр Земли;

S – компонента возмущающего ускорения вдоль радиуса-вектора \mathbf{r} ;

W – проекция возмущающего ускорения вдоль вектора орбитального углового момента;

T – проекция возмущающего ускорения на ось, перпендикулярную этим векторам и направленную по движению наноспутника;

$\delta_T, \delta_S, \delta_W$ – погрешности изменения скорости в направлениях по осям ОСК;

τ – длительность импульса тяги, с;

t – текущее время, с;

$t_{\text{д0}}$ – время включения двигательной установки, с;

m_T – мгновенная масса топлива, кг;

m_{T0} – начальная масса топлива, кг;

\dot{m}_T – массовый расход, кг/с.

ρ – показатель изоэнтропы (адиабаты) рабочего тела;

$p_{\text{вх}}$ – абсолютное давление рабочего тела на входе сопла, Па;

$S_{\text{кр}}$ – площадь критического сечения сопла, м²;

R_0 – универсальная газовая постоянная, $8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \times \text{К}}$;

$M_{\text{рТ}}$ – молярная масса рабочего тела, кг/моль;

$T_{\text{вх}}$ – температура рабочего тела на входе в сопло, К.

$V_{\text{топ}}$ – мгновенный объём топлива в баке, м³;

$\rho_{\text{Т}}$ – плотность топлива в баке, кг/м³;

$S_{\text{бак}}$ – площадь поперечного сечения топливного бака, м²;

$h(t)$ – высота топливного столба под поршнем, м;

h_6 – длина топливного бака, м;

$\zeta_{\text{Т}}$ – смещение центр масс топлива в баке относительно центра торцевой части наноспутника, на которую установлено сопло;

$C_{\text{Т}}$ – расстояние между топливным баком и соплом, м

$\zeta_{\text{с}}$ – смещение центра масс наноспутника относительно центра торцевой части наноспутника, на которой установлено сопло;

$m_{\text{сух}}$ – «сухая» масса наноспутника, не включающая в себя текущую массу топлива, кг;

$\zeta_{\text{сух}}$ – смещение центра масс наноспутника, не включающего в себя топливо;

m – мгновенная масса наноспутника, кг;

l – длина наноспутника по продольной оси, м.

b – ширина наноспутника по поперечной оси, м.

ζ – смещения центра масс наноспутника относительно его геометрического центра;

T_0, T_1, T_2 – длительность установившегося режима тяги, длительность выхода на режим и длительность последствия тяги соответственно, с;

V_0 – вектор скорости, которую имел наноспутник до выдачи импульса в ИСК;

V_{τ} – вектор скорости центра масс которую приобрёл наноспутник после выдачи импульса на интервале времени τ в ИСК;

$\tilde{\Phi}$ – множество случайных факторов, оказывающих влияние на движение наноспутника;

\tilde{B} – множество параметров движения (выходных параметров);

J – число случайных факторов, учитываемых в модели (мощность множества $\tilde{\Phi}$);

K – число выходных параметров (параметров движения), определяемых в результате моделирования модели (мощность множества $\tilde{\mathbf{B}}$);

N – число реализаций (количество моделирований методом Монте-Карло);

Q – матрица коэффициентов регрессии;

$D_{\mathbf{B}_k}$ – дисперсии параметров движения;

$D_{\tilde{\Phi}_j}$ – дисперсии случайных факторов;

O_{jk} – доля влияния дисперсии j -го случайного фактора на дисперсию k -го выходного параметра;

p_{min}, p_{max} – минимальное и максимальное значения давления на входе в сопло Лавалия соответственно, Па;

S_{min}, S_{max} – минимальное и максимальное значения площади критического сечения сопла Лавалия соответственно, м².

k_1, k_2, k_3 – коэффициенты, входящие в функцию плотности распределения силы тяги;

$g(F_H)$ – функция плотности распределения вероятности силы тяги;

$\mathbf{V}_{min}^*, \mathbf{V}_{max}^*$ – векторы, содержащие предельные (минимальные и максимальные) требуемые значения параметров движения;

\mathbf{K} – кинетический момент наноспутника в ССК, Н×м×с;

\mathbf{H} – кинетический момент маховика в ССК (гиростатический момент), Н×м×с;

\mathbf{R} – кинетический момент системы «наноспутник с маховиком» в ССК, Н×м×с;

I_{RW} – момент инерции маховика относительно оси вращения, кг×м²;

ω_{RW} – максимальная частота вращения маховика, рад/с;

P_{RW} – мощность, подводимая к маховику, Вт;

T_{RW} – время раскручивания маховика до максимальной скорости, с;

E_S – затраты энергии на стабилизацию маховиком, Дж;

L_τ – импульс момента силы реактивной тяги на момент окончания коррекции, Н×м×с;

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хромов А.В. Взаимодействие корректирующей двигательной установки с системой ориентации космического аппарата // Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ. – 2012. – Т. 127. - №2. - С. 27-32.
2. Ходненко В.П., Хромов А.В. Выбор проектных параметров системы коррекции орбиты космического аппарата дистанционного зондирования Земли // Вопросы электромеханики. Труды НПП ВНИИЭМ. – 2011. – Т. 121. - №2. - С. 15-22.
3. A.V. Gorbunov, V.P. Khodnenko, A.V. Khromov, V.M. Murashko., A.I. Koryakin, V. S. Zhosan, G. S. Grikhin, V. N. Galayko, N. M. Katasonov. Vernier Propulsion System for Small Earth Remote Sensing Satellite “Canopus-V” // Paper IEPC-2011-001 presented at the 32-nd International Electric Propulsion Conference, Wiesbaden Germany, September 11-15, 2011.
4. Протопопов А.П., Богачев А.В., Воробьева Е.А. Коррекция орбиты космического аппарата на высокоэллиптической орбите двигателями малой тяги // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2013. – № 68.
5. Connie J. Weeks A Statistical Analysis of Spacecraft Maneuvers for a Deep Space Mission // AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. – 2008.
6. James K. Miller, Connie J. Weeks AAS 06-217 Outgassing acceleration of a spacecraft // 16th AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Conference At: Tampa, Florida. – 2006.
7. James K. Miller, Connie J. Weeks A Stochastic Parameter Solution for Outgassing Perturbing a Spacecraft Trajectory after Launch // AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference At: Lake Tahoe, CA. – 2005.
8. Sophie Laurens, Morgane Jousse, Pierre Seimandi State vector uncertainty and maneuver errors: analysis of the early orbit and station-keeping phases of an electrical satellite // Proc. 8th European Conference on Space Debris (virtual), Darmstadt, Germany, 20–23 April 2021. – 2021.

9. Sophie Laurens, Juan Carlos Dolado, Giuseppe Cavallaro, Morgane Jouisse, Pierre Seimandi Towards the maintenance of Gaussianity on state vector uncertainty propagation // 69th International Astronautical Congress 2018, 16th IAA Symposium on space debris. – 2018.
10. Carlos Yanez, Mini Gupta, Vincent Morand, Juan Carlos Dolado On the Gaussianity Validity Time for Orbital Uncertainty Propagation // Conference: ESA NEO and Debris Detection Conference At: Darmstadt (Germany). – 2019.
11. Иванов Д.С., Трофимов С.П., Ширококов М.Г. Численное моделирование орбитального и углового движения космических аппаратов. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016, 118 с.
12. Shuster M. The Nature of the Quaternion. – The Journal of the Astronautical Sciences, 2008, no. 56, pp. 359-373.
13. Голубев Ю.Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела. М.: Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2013, № 39, 23 с.
14. Попов, В.И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов [Текст]: 2-е изд., перераб. и доп. / В.И. Попов. – М.: Машиностроение, 1986. – 184 с.
15. Мантуров, А.И. Механика управления движением космических аппаратов [Текст]: Учеб. пособие / А.И. Мантуров. – Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т., 2003. – 62 с.
16. Егорычев, В.С. Теория, расчёт и проектирование ракетных двигателей [Электронный ресурс]: электрон. учеб. пособие / В.С. Егорычев. – Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т., 2011. – Электрон. текст. и граф. дан. (3,25 Мбайт).
17. Сарычев, В.А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование положений равновесия [Текст] / В.А. Сарычев, С.А. Гутник // Препринты ИПМ им. Келдыша. – 2014. – №39. – С. 1-38.
18. ГОСТ 25645.101-83. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для проектных баллистических расчётов искусственных спутников Земли (с

Изменением №1) [Текст] – Введ. 1985-01-01. – М.: Издательство стандартов, 1983. – 172 с.

19. Титов, Б.А. Исследование динамики космического аппарата с системой ориентации на базе двухкомпонентных жидкостных ракетных двигателей малой тяги [Текст] / Б.А. Титов, А.Л. Сирант // Вестник Самар. гос. аэрокосм. ун-та. – 2007. – №1. – С. 98-105.

20. Крылов В.И. Основы теории движения ИСЗ (часть вторая: возмущенное движение): учебное пособие –М.: МИИГАиК, 2016. – 67 с., ил.

21. Sinitsin L.I., Belokonov I.V. Probabilistic analysis of maneuvering nanosatellites with electrothermal propulsion system. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2020, vol. 984, 012039

22. Костин, В.Н. Статистические методы и модели [Текст]: Учеб. пособие / В.Н. Костин, Н.А. Тишина. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2004. – 138 с.

23. Кобзарь, А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников [Текст] / А.И. Кобзарь. – М.: Физматлит, 2006. – 816 с.

24. Орлов, А.И. Рекомендации. Прикладная статистика. Методы обработки данных. Основные требования и характеристики [Текст] / А.И. Орлов, В.Н. Фомин и др. – М.: ВНИИ Стандартизации, 1987. – 62 с.

25. Yong Liu, Juan Zhang, Jianping Wei, Xiaotian Liu. Optimum structure of a laval nozzle for an abrasive air jet based on nozzle pressure ratio. Powder Technology, 2020, vol. 364, no. 15, pp. 343-362.

26. Man H.C., Duan J., Yue T.M. Dynamic characteristics of gas jets from subsonic and supersonic nozzles for high pressure gas laser cutting. Optics and Laser Technology, 1998, no. 30, pp. 497-509.

27. Thongtip T., Aphornratana S. An experimental analysis of the impact of primary nozzle geometries on the ejector performance used in R141b ejector refrigerator. Applied Thermal Engineering, 2017, no. 110, pp. 89-101.

28. Sochacki M., Narkiewicz J. Propulsion System Modelling for Multi-Satellite Missions Performed by Nanosatellites. Transactions of the Institute of Aviation, 2018, vol. 4, no. 253, pp. 58-67.
29. Lee R.H., Bauer A.M., Killingsworth M.D., Lilly T.C., Duncan J.A., Ketsdever A.D. Free-Molecule-Microresistojet Performance Using Water Propellant for Nanosatellite Applications. Journal of Spacecraft and Rockets, 2008, vol. 45, no. 2.
30. Sinitsin L.I., Belokonov I.V. Influence of deviations in manufacturing of electrothermal propulsion system on nanosatellite maneuvering accuracy. Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering, 2021, vol. 20, no. 1, pp. 29-45.
31. Разработка систем космических аппаратов [Текст] / Под ред. П. Фортескую, Г. Суайнерда, Д. Старка; Пер. с англ. – М.: Альпина Паблишер, 2016. – 764 с.
32. Saito T., Hori T. Over-expansion in the nozzle. Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido University, 1952, vol. 9, no. 1, pp. 101-111.
33. Вентцель Е.С. Теория вероятностей [Текст]: 4-е изд., стереотип. / Е.С. Вентцель. – М.: Наука; М.: Физматлит, 1969. – 576 с.
34. Rota G. Geometric probability. The Mathematical Intelligencer, 1998, no. 20, pp. 11-16.
35. Holik F., Massri C., Plastino A. Geometric probability theory and Jaynes's methodology. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 2016, vol. 13, no. 3, 1650025.
36. Semenov K.K. Reliability of the results of using the Monte Carlo method in problems of interval analysis. Vychislitel'nye tekhnologii. 2016. V. 21, no. 2. P. 42-52. (In Russ.)
37. Dreyper N., Smit G. Prikladnoy regressionnyy analiz [Applied regression analysis]. Moscow: Statistika Publ., 1973. 392 p.
38. Kharman G. Sovremennyy faktorny analiz [Modern factor analysis]. Moscow: Statistika Publ., 1972. 489 p.

39. Sarychev V.A., Gutnik S.A. Dynamics of an axisymmetric gyrostat satellite. Study of equilibria and their stability, Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2011, no. 11.
40. Abtahi S.M., Sadati S.H., Salarieh H. Nonlinear analysis and attitude control of a gyrostat satellite with chaotic dynamics using discrete-time LQR-OGY, Asian Journal of Control, 2016, vol. 18, no. 5, pp. 1845–1855.
41. Liska D.J. A simple description of combined precession and nutation in n-member system of coaxial, differentially spinning bodies. – Journal of Spacecraft and Rockets, 1970, v. 7, no. 3, pp. 287 – 293.
42. Abtahi S.M., Sadati S.H., Salarieh H. Nonlinear analysis and attitude control of a gyrostat satellite with chaotic dynamics using discrete-time LQR-OGY. – Asian Journal of Control, 2016, v. 18, no. 5, pp.1845 – 1855.
43. Kyle T. Alfriend, Carl H. Hubert Stability of a Dual-Spin Satellite with Two Dampers. – J. Spacecraft, 1974, v. 11, no. 7, pp. 469 – 474.
44. Morais, R.H., Santos, L.F.F., Silva, A.R.R., Melicio, R. Dynamics of a Gyrostat Satellite with the Vector of Gyrostatic Moment Tangent to the Orbital Plane. – Advances in Space Research, 2022, v. 69, no. 11, pp. 3921 – 3940.
45. Васильев В.Н. Системы ориентации космических аппаратов. М.: ФГУП «НПП ВНИИЭМ», 2009. 310 с.
46. Белоконов И.В., Ивлиев А.В., Богатырев А.М., Кумарин А.А., Ломака И.А., Симаков С.П. Выбор проектного облика двигательной установки наноспутника // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2019. Т. 18, № 3. С. 29-37. DOI: 10.18287/2541-7533-2019-18-3-29-37
47. Ткачев С.С. Исследование управляемого углового движения аппаратов с ротирующими элементами: дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.02.01. – М., 2011, 109 с.
48. Алексеев А.В., Дорошин А.В., Ерёменко А.В., Крикунов М.М., Недовесов М.О. Динамика составного космического аппарата с подвижными устройствами в трёхосном кардановом подвесе. – Труды МАИ, 2018, № 98, с. 1-32.

49. Рыжков В.В., Сулинов А.В. Двигательные установки и ракетные двигатели малой тяги на различных физических принципах для систем управления малых и сверхмалых космических аппаратов // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2018. Т. 17, № 4. С. 115-128.

50. Титов Б.А., Кольцов И.В. Оценка потребного импульса тяги для системы управления малого космического аппарата с двигательной установкой на газовых компонентах топлива // Авиационная и ракетно-космическая техника. 2011. Т 6, № 30. С. 31-38.

51. Jose C. Pascoa, Odelma Teixeira, Gustavo Filipe A review of propulsion systems for CubeSats // Proceedings of the ASME 2018 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. – 2018.

52. Блинов В.Н., Косицын В.В., Лукьянчик А.И., Степень П.В., Ячменев П.С. Исследования надежности импульсной электротермической двигательной установки наноспутника // Омский научный вестник. Серия авиационно-ракетное и энергетическое машиностроение. 2021. Т. 5, № 4. С. 75-82.

53. Лукьянчик А.И., Блинов В.Н., Вавилов И.С., Косицын В.В., Рубан В.И. Анализ электрических ракетных двигателей для малых космических аппаратов // Россия молодая: передовые технологии – в промышленность. 2015. № 1. С. 335-341.

54. Павлов А.М., Попов А.С. Термоэлектрический двигатель для малых и сверхмалых космических аппаратов // Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана Наука и образование. 2012. № 11. С. 207-216.

55. Белоконов И.В., Ивлиев А.В., Ключник В.Н., Кумарин А.А., Гимранов З.И., Кяримов Р.Р. Электротермическая двигательная установка наноспутника // Космическая техника и технологии. 2022. Т. 39, № 4. 2022. С. 45-57.

56. Akshay Reddy Tummala, Atri Dutta An Overview of Cube-Satellite Propulsion Technologies and Trends // Aerospace. 2017. V. 4, № 58; doi:10.3390/aerospace4040058.

57. Siegfried W. Janson, Henry Helvajian, William W. Hansen, Lt. John Lodmell Microthrusters for nanosatellites // The Second International Conference on Integrated Micro Nanotechnology for Space Applications. – 1999.
58. Cristóbal Nieto-Peroy, M. Reza Emami CubeSat Mission: From Design to Operation // Applied Sciences. 2019, V. 9, № 3110; doi:10.3390/app9153110.
59. Kristina Lemmer Propulsion for CubeSats // Acta Astronautica. 2017. № 134, P. 231–243.
60. Dillon O'Reilly, Georg Herdrich, Darren F. Kavanagh Electric Propulsion Methods for Small Satellites: A Review // Aerospace. 2021. V. 8, № 22; doi:10.3390/aerospace8010022.
61. Rhee M.S., Zakrzwski C.M., Thomas M.A. Highlights of Nanosatellite Propulsion Development Program at NASA-Goddard Space Flight Center // 14th Annual/USU Conference on Small Satellites. – 2000.
62. Scharlemann C., Tajmar M., Vasiljevich I., Buldrini N., Krejci D., Seifert B. Investigation of nanosatellite propulsion systems // 62nd International Astronautical Congress, Cape Town, South Africa. – 2011.
63. Scharlemann C., Tajmar M., Vasiljevich I., Buldrini N., Krejci D., Seifert B. Propulsion for Nanosatellites // 32nd International Electric Propulsion Conference, Wiesbaden, Germany. – 2011.
64. Kaminska A., Bialek A., Dudeck M. Performances of an argon arc-jet thruster for satellites // Rom. Journ. Phys. 2015. V. 60, Nos. 3–4, P. 549–559.
65. Aslanov V. Behavior of Axial Dual-spin Spacecraft // Proceedings of the World Congress on Engineering. – 2011.
66. Aslanov V. Dynamics of Free Dual-spin Spacecraft // Engineering Letters. 2011. V. 19, № 4.
67. Doroshin A. Attitude dynamics of a spacecraft with variable structure at presence of harmonic perturbations // Applied Mathematical Modelling. 2014. V. 38, Nos. 7-8, P. 2073-2089.
68. Morais, R.H., Santos, L.F.F., Silva, A.R.R., Melicio, R., Dynamics of a Gyrostat Satellite with the Vector of Gyrostatic Moment Tangent to the Orbital

Plane, *Advances in Space Research* (2022), doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2022.03.004>.

69. Luis Filipe Santosa, Pedro Diasa, André Silva Equilibria of a Gyrostat Satellite when the gyrostatic moment vector is parallel to the satellite principal central plains of inertia // 4 EJIL - LAETA Young Researchers Meeting. – 2017.

70. Sarychev V.A., Gutnik S.A., Silva A., Santos L. Dynamics of gyrostat satellite subject to gravitational torque. Investigation of equilibria. Keldysh Institute preprints, 2012, No. 63, 35 p.

71. Щетинина Е.К., Возняк А.А. Моделирование полурегулярных прецессий гиростата в случае переменного гиростатического момента // Компьютерные исследования и моделирование. 2014. Т. 6, № 4. С. 559–568.

72. Narkiewicz J., Sochacki M., Zakrzewski B. Generic Model of a Satellite Attitude Control System // *International Journal of Aerospace Engineering* (2020), doi: <https://doi.org/10.1155/2020/5352019>.

73. Abtahi S.M., Sadati S.H., and Salarieh H. Nonlinear analysis and attitude control of a gyrostat satellite with chaotic dynamics using discrete-time LQR-OGY // *Asian Journal of Control*. 2016. V. 18, № 5, P. 1845–1855.

74. Ovchinnikov M., Roldugin D. Magnetic attitude control and periodic motion for the in-orbit rotation of a dual-spin satellite // *Acta Astronautica*. 2021. V. 186, P. 203-221, doi: 10.1016/j.actaastro.2021.05.035.

75. Безгласный С.П., Мысина О.А. О реализации одноосной и трехосной ориентации системы двух тел, *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2011. Т. 2, № 83, С. 80–90.

76. Сеницын Л.И. Исследование режимов стабилизации наноспутника-гиростата во время коррекции орбиты // *Труды «НПЦАП» Системы и приборы управления*. 2023. Т. 64, № 2. С. 51–57.

77. Заболотнов, Ю.М. Оптимальное управление непрерывными динамическими системами [Текст]: учеб. пособие / Ю.М. Заболотнов. – Самара: Самар. гос. аэрокос. ун-т., 2005. – 129 с.

78. Воронов, А.А. Теория автоматического управления [Текст]: учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч. II. Теория

нелинейных и специальных систем автоматического управления / А.А. Воронов, Д.П. Ким, В.М. Лохин, И.М. Макаров, П.Н. Попович, В.З. Рахманкулов; под ред. А.А. Воронова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 504 с.

79. Красовский, А.А. Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами [Текст] / А.А. Красовский. – М.: Машиностроение, 1969. – 240 с.

80. Sinitsin, L.I., Kramlikh, A.V. Synthesis of the optimal control law for the reorientation of a nanosatellite using the procedure of analytical construction of optimal regulators / Journal of physics: conference series "VI International Conference on Information Technology and Nanotechnology, ITNT 2020". Vol. 1745. – 2021.

81. Алексеев, К.Б. Управление космическими летательными аппаратами [Текст] / К.Б. Алексеев, Г.Г. Бебенин. – М.: Машиностроение, 1974. – 340 с.

82. Левский, М.В. Применение принципа Максимумы Л.С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией [Текст] / М.В. Левский // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008. – №6. – С. 144-157.

83. Крутько, П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: Линейные модели [Текст] / П.Д. Крутько. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 304 с.

84. Крутько, П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: Нелинейные модели [Текст] / П.Д. Крутько. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 330 с.

85. Велищанский, М.А. Реализация плоского поворота космического аппарата квазиоптимальным алгоритмом переориентации [Текст] / М.А. Велищанский // Наука и образование. Электронный научно-технический журнал. – 2012. – №10. – С. 397-412.

86. Велищанский, М.А. Синтез квазиоптимальной траектории движения беспилотного летательного аппарата [Текст] / М.А. Велищанский //

Наука и образование. Электронный научно-технический журнал. – 2013. – №12. – С. 417-430.

87. Зубов, Н.Е. Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов [Текст] / Н.Е. Зубов, Е.А. Микрин, В.Н. Рябченко. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. – 666 с.

88. Зубов, Н.Е. Синтез развязывающих законов стабилизации орбитальной ориентации космического аппарата [Текст] / Н.Е. Зубов, Е.А. Микрин, М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2012. – №1. – С. 92-108.

89. Зубов, Н.Е. Синтез законов управления космическим аппаратом, обеспечивающих оптимальное размещение полюсов замкнутой системой управления [Текст] / Н.Е. Зубов, Е.А. Микрин, М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2012. – №3. – С. 98-111.

90. Александров, А.Г. Оптимальные и адаптивные системы [Текст]: учеб. пособие для вузов по спец. «Автоматика и упр. в техн. системах» / А.Г. Александров. – М.: Высш. шк., 1989. – 263 с.

91. Храмов, Д.А. Миниатюрные спутники стандарта «CubeSat» [Текст] / Д.А. Храмов // Космическая наука и технология. – 2009. – Т. 15, №3. – С. 20-31.

92. Попов, В.И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов [Текст]: 2-е изд., перераб. и доп. / В.И. Попов. – М.: Машиностроение, 1986. – 184 с.

93. Сарычев, В.А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование положений равновесия [Текст] / В.А. Сарычев, С.А. Гутник // Препринты ИПМ им. Келдыша. – 2014. – №39. – С. 1-38.

94. Potter, J.E. Matrix quadratic solutions [Текст] / J.E. Potter // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1966. – Vol. 14, №3. – pp. 496-501

95. Kleinman, D.L. On an iterative technique for Riccati equation computations [Текст] / D.L. Kleinman // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1968. – Vol. 13, №1. – pp. 114-115.

96. Yiding, L. A new subspace iteration method for the algebraic Riccati equation [Текст] / L. Yiding, V. Simoncini // Numerical Linear Algebra with Applications. – 2015. – Vol. 22, №1. – pp. 26-47.

97. Kalman, R.E. A user's manual for the automatic synthesis program [Текст]: for sale by the Clearinghouse for Federal Scientific and Technical Information / R.E. Kalman, T. Englar. – Springfield, Va.: NASA CR-475, 1966. – 526 p.

98. Репин, Ю.М. Решение задачи об аналитическом конструировании регуляторов на электронных моделирующих устройствах [Текст] / Ю.М. Репин, В.Е. Третьяков // Автомат. и телемех. – 1963. – Т. 24, №6. – С. 738-743.

99. Кувшинов В.М. Особенности численного решения матричного алгебраического уравнения Риккати методом установления [Текст] / В.М. Кувшинов // Учёные записки ЦАГИ. – 1979. – Т. 10, №1. – С. 69-76.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Расчёт коэффициента адиабаты рабочего тела

Коэффициент адиабаты вычисляется по формуле:

$$\rho = \frac{c_p}{c_v}, \quad (\text{A.1})$$

где c_p – удельная теплоёмкость топлива при постоянном давлении, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\times\text{К}}$; c_v – удельная теплоёмкость топлива при постоянном объёме, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\times\text{К}}$.

Удельная теплоёмкость рабочего тела при постоянном давлении и при постоянном объёме ищется с помощью формул:

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{c_{p1}m_1 + c_{p2}m_2}{m_1 + m_2}, \\ c_v &= \frac{c_{v1}m_1 + c_{v2}m_2}{m_1 + m_2}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

где $c_{p1}, c_{v1}, c_{p2}, c_{v2}$ – удельные теплоёмкости при постоянном давлении и при постоянном объёме для воды и для спирта этилового соответственно, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\times\text{К}}$; m_1, m_2 – массовые доли воды и спирта этилового соответственно.

Для вычисления удельных теплоёмкостей при постоянном давлении и при постоянном объёме для воды и для спирта используются формулы:

$$\begin{aligned} c_{pj} &= \frac{(i_j + 2) R_0}{2 M_j}, \\ c_{vj} &= \frac{i_j R_0}{2 M_j}, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

где i_1, i_2 – количество степеней свободы для молекулы воды и для молекулы спирта этилового соответственно, равное 6; R_0 – универсальная газовая постоянная, $8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\times\text{К}}$; здесь M_1, M_2 – молярная масса воды и этилового спирта соответственно, $\text{кг}/\text{моль}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Методика экспериментального измерения профиля силы тяги
электротермической двигательной установки

Для измерения профиля силы тяги электротермической двигательной установки наноспутника «SamSat-M» использовался тензорезистивный датчик. Струя, истекающая из сопла в вакууме, перекрывалась преградой в виде измерительного диска, воспринимающего давление полного сечения струи. Сила, действующая на этот диск, передавалась на тензорезистивный датчик и приводилась к тяге двигателя. Схема оснастки для испытаний электротермической двигательной установки приведена на рисунке Б.1.

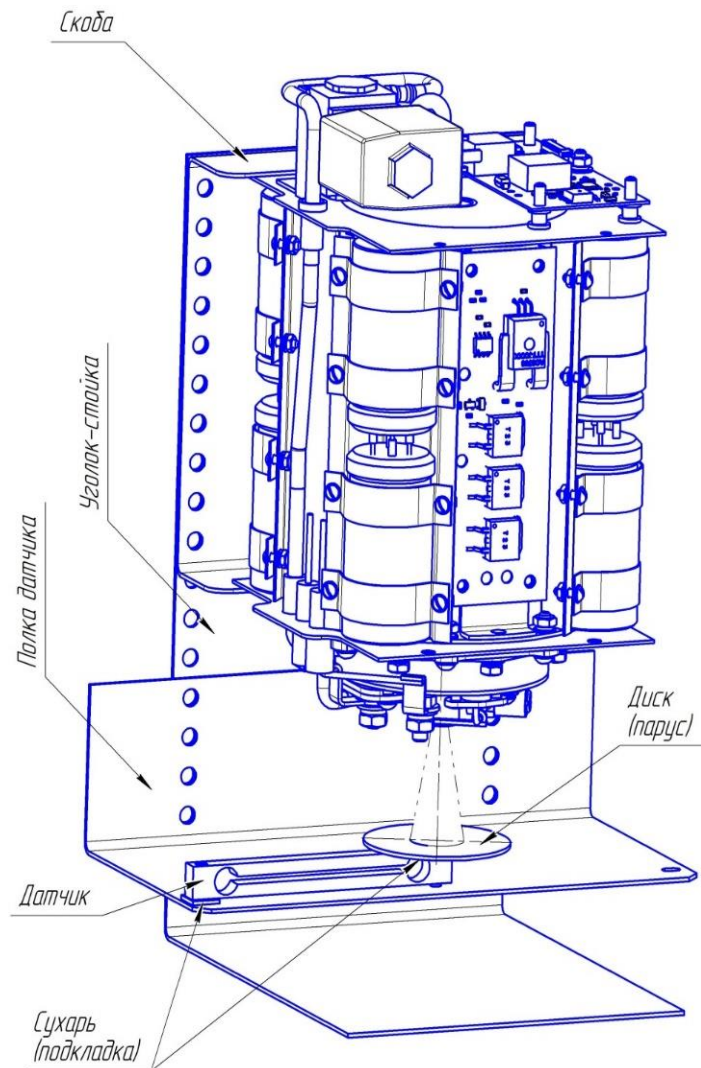


Рисунок Б.1 – Схема оснастки для испытаний электротермической
двигательной установки

Профиль силы тяги, полученный в ходе измерений, приведён на рисунке Б.2.

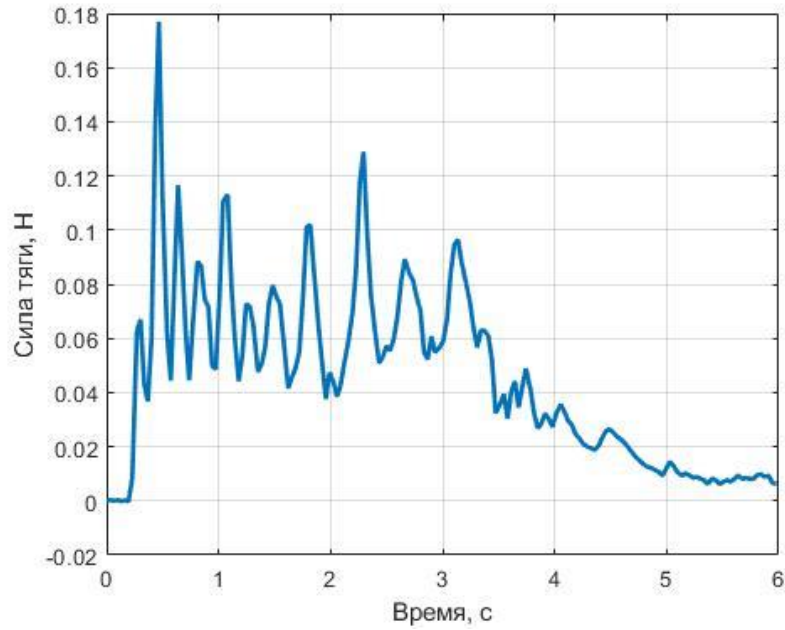


Рисунок Б.2 – Профиль силы тяги, полученный в ходе измерений