

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи

**Ду Чунжуй**

**Оптимизация перелётов космических аппаратов с электроракетной  
двигательной установкой между периодическими орбитами  
относительно точек либрации L1 и L2 в системе Земля-Луна**

**2.5.16. Динамика, баллистика, управление движением  
летательных аппаратов**

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, доцент  
Старинова Ольга Леонардовна

Самара – 2022

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕЛЁТОВ В РАМКАХ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЁХ ТЕЛ .....	12
1.1 Проблемы исследования движения с учётом гравитации нескольких тел .....	12
1.2 Межорбитальные перелёты в задаче трёх тел .....	16
1.2.1 Импульсные перелёты.....	16
1.2.2 Низкоэнергетический перелёт .....	17
1.2.3 Перелёт с электроракетной двигательной установкой .....	18
1.3 Общая постановка задачи, решаемой в диссертации.....	20
Выводы по первой главе.....	22
2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В СИСТЕМЕ ЗЕМЛЯ - ЛУНА.....	23
2.1 Уравнения движения космического аппарата в круговой ограниченной задаче трёх тел.....	24
2.1.1 Точки либрации.....	25
2.1.2 Постоянная Якоби и линии нулевой относительной скорости .....	26
2.1.3 Орбитальные параметры периодических орбит относительно точек либрации L1 и L2 .....	28
2.1.4 Инвариантные многообразия орбит в системе трёх тел .....	34
2.2 Математическая модель движения космического аппарата в системе Земля - Луна с учётом возмущающих факторов .....	37
2.2.1 Возмущения, действующие на движение космического аппарата в системе Земля - Луна.....	37

2.2.2	Расчёт и влияние возмущающих ускорений на периодические орбиты в окололунном пространстве.....	42
	Выводы по второй главе.....	44
3	ГЕНЕРАЦИЯ ИСКУССТВЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ В ОКОЛОЛУННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.....	45
3.1	Постановка задачи оптимального управления .....	46
3.1.1	Задача об оптимальном по быстродействию перелёте (минимальном времени перелёта).....	49
3.1.2	Задачи о перелётах с минимальным расходом рабочего тела и минимальном энергопотреблении .....	51
3.1.3	Используемые методы решения .....	53
3.2	Расчёт искусственных периодических орбит оптимальных по критерию минимального времени перелёта.....	58
3.2.1	Методика и процедуры расчёта.....	58
3.2.2	Результаты моделирования для искусственных периодических орбит, происходящих от орбиты Ляпунова .....	59
3.3	Расчёт искусственных периодических орбит оптимальных по критерию минимального расхода рабочего тела.....	60
3.3.1	Методика и процедуры расчёта.....	60
3.3.2	Результаты моделирования для искусственных гало-орбит .. .....	62
	Выводы по третьей главе .....	66
4	РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕЛЁТОВ МЕЖДУ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ОКОЛОЛУННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.....	68
4.1	Расчёт перелёта между орбитами Ляпунова в окрестности точки либрации L2 .....	69

4.1.1	Оптимальные по быстродействию траектории многовитковых межорбитальных перелётов .....	72
4.1.2	Оптимальные по расходу рабочего тела траектории многовитковых межорбитальных перелётов .....	74
4.1.3	Оптимальные траектории межорбитальных перелётов, полученные с использованием структуры инвариантных многообразий.....	77
4.2	Расчёт траектории перелёта с орбиты Ляпунова на гало-орбиту в окрестности точки либрации L2.....	81
4.2.1	Планирование траектории перелёта между гало-орбитами с использованием многовитковых орбитальных структур .....	81
4.2.2	Планирование ТП с использованием структур инвариантных многообразий.....	84
4.3	Расчёт траектории перелёта с орбиты Ляпунова на вертикальную орбиту в окрестности точки либрации L2 .....	86
4.4	Расчёт траекторий перелёта между периодическими орбитами относительно точек либрации L2 и L1 .....	90
4.4.1	Плоская задача: перелёт между орбитами Ляпунова.....	90
4.4.2	Пространственная задача: перелёт между гало-орбитами .	96
4.5	Расчёт траектории перелёта с L2-ОЛ на L2-ГА с учётом действующих в окололунном пространстве возмущений .....	99
	Выводы по четвёртой главе .....	101
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	103
	СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ .....	106
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	107

## ВВЕДЕНИЕ

В диссертации рассматриваются задачи об оптимизации перелётов космических аппаратов (КА) с электроракетной двигательной установкой (ЭРДУ) между периодическими орбитами относительно точек либрации L1 и L2 системы Земля - Луна.

### **Актуальность темы исследования.**

В настоящее время многими странами разрабатывается концепция лунной космической станции (ЛКС). ЛКС может быть использована в качестве платформы для исследования Луны, других планет, а также изучения проблем, возникающих при планировании долгосрочных полётов человека в дальний космос. Создание ЛКС требует наличия обслуживающих КА, которые должны наилучшим образом выполнять задачи связи, разведки и навигации. При этом периодические орбиты относительно точек либрации L1 и L2, такие как орбиты Ляпунова, гало-орбиты, осевые орбиты, вертикальные орбиты являются потенциальными рабочими орбитами, представляющими интерес для расположения обслуживающих КА.

Такие типы орбит существуют, благодаря гравитационному воздействию Земли и Луны, и медленно изменяют параметры относительно точек либрации под действием возмущений. Реализация перелётов между периодическими орбитами обеспечивает перемещение КА в различные области окололунного пространства. Электроракетные двигатели обладают преимуществами высокого удельного импульса, высокой эффективности и длительного времени работы по сравнению с химическими двигателями, что делает их подходящими для долгосрочных миссий. Однако, их широкое использование сдерживается недостаточно разработанной методикой выбора оптимального номинального управления для осуществления перелётов в условиях воздействия гравитации двух притягивающих центров. Исследования в области формирования управления между орбитами КА с ЭРДУ, функционирующими под действием гравитации двух тел, проводятся небольшим числом авторов, которые указывают на плохую сходимость и

низкую вычислительную эффективность методик оптимизации из-за сильной нелинейности математической модели движения. В связи с этим разработка методики формирования оптимального номинального управления для межорбитальных перелётов КА с ЭРДУ в системе Земля - Луна является актуальной научной проблемой.

### **Степень разработанности.**

Анализ публикаций (Аксёнов С.А., Бобер С.А., Шайхутдинов А.Р., Костенко В.И., Ильин И.С., Howell K.C., Ozimek M.T, Parker J.S., Grebow D. и др.) показывает возможность использования периодических орбит в условиях гравитационного воздействия двух тел в качестве рабочих орбит в системе Земля - Луна. Произведены успешные запуски, подтверждающие осуществимость подобных миссий: исследование комет ISEE-3 (НАСА и ЕКА), наблюдение за Солнцем SOHO (НАСА и ЕКА), работа спутника-ретранслятора Queqiao (Китайское национальное космическое агентство).

Современные стратегии перелётов КА с двигателями большой тяги в условиях воздействия гравитации двух тел основываются на импульсной теории (Иванов Д.С., Трофимов С.П., Широбоков М.Г., Звягин Ф.В., Ильин И.С., Parker J.S., Anderson R.L., Qi Y., de Ruiter A.) и не применимы для ЭРДУ. По мере развития технологии ЭРДУ были разработаны методики формирования программ номинального управления орбитальным движением, использующие принцип максимума Понтрягина, метод продолжения по параметру, метод коллокаций, выпуклое программирование и т.д. (Иванюхин А.В., Петухов В.Г., Старина О.Л., Rogov K., Calleja R.C., Zhang C., Kayama Y.). Эти исследования отмечают вычислительные сложности, возникающие в процессе определения начальных приближений для решения краевых задач. Отдельные результаты для перелётов в системе Земля – Луна получены для КА с ЭРДУ повышенной мощности, что снижает универсальность предлагаемых подходов.

**Объектом исследования** являются оптимальные номинальные программы управления для перелётов КА с ЭРДУ между периодическими орбитами относительно точек либрации L1 и L2 в системе Земля-Луна.

**Предметом исследования** являются методики формирования оптимальных номинальных программ управления и соответствующие им траектории перелётов КА с ЭРДУ между периодическими орбитами относительно точек либрации L1 и L2 в условиях воздействия гравитации двух тел.

**Цель исследования:** разработка методик определения оптимального номинального управления для перелётов КА с ЭРДУ между периодическими орбитами относительно точек либрации L1 и L2 в системе Земля - Луна с учётом действующих возмущений.

Для достижения поставленной цели требуют решения следующие **задачи:**

1. Разработка математических моделей пассивного возмущённого движения КА в окололунном пространстве и анализ особенностей движения в рамках круговой ограниченной задачи трёх тел на периодических орбитах, в том числе орбитах Ляпунова, гало-орбитах, осевых орбитах.

2. Разработка и анализ математических моделей управляемого движения КА с ЭРДУ в окололунном пространстве с учётом действующих возмущений от гравитации небесных тел Солнечной системы, нецентральности гравитационных полей Луны и Земли, особенностей движения Луны (эксцентриситет орбиты, лунные либрация и «застой»), светового давления.

3. Разработка методик формирования оптимального номинального управления КА с ЭРДУ при перелётах в системе Земля-Луна между периодическими орбитами по критериям минимальных времени перелёта и расхода рабочего тела.

4. Разработка программно-математического обеспечения и проведение расчётов оптимального номинального управления и соответствующих траекторий перелётов между периодическими орбитами системы

Земля - Луна: между орбитами Ляпунова относительно  $L_2$ , между гало-орбитами относительно  $L_2$ , от орбиты Ляпунова к вертикальной орбите относительно  $L_2$ , между орбитами Ляпунова относительно точек либрации  $L_2$  и  $L_1$ , между гало-орбитами относительно точек либрации  $L_2$  и  $L_1$ .

### **Методы решения.**

Для решения сформулированных задач используются методы небесной механики, методы теории оптимального управления, методы вычислительной и высшей математики.

**Область исследования** соответствует п. 1 «Расчёт траекторий движения ЛА и орбит космических аппаратов (КА) по заранее известным данным», п. 2 «Баллистическое проектирование летательных аппаратов различного назначения» и п. 3 «Динамическое проектирование управляемых летательных аппаратов и исследование динамики их движения» паспорта специальности 2.5.16. Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов.

### **Научная новизна полученных результатов.**

1. Разработана и проанализирована математическая модель управляемого движения КА с ЭРДУ в окололунном пространстве с учётом возмущений от гравитации небесных тел Солнечной системы, нецентральности гравитационных полей Луны и Земли, особенностей движения Луны, светового давления.

2. Разработана методика и программно-математическое обеспечение для расчёта оптимального номинального управления и соответствующих траекторий перелётов КА с ЭРДУ между периодическими орбитами относительно точек либрации системы Земля - Луна без затруднений в поиске начального приближённого решения.

### **Теоретическая значимость.**

1. Разработана математическая модель управляемого движения КА с ЭРДУ в окололунном пространстве, позволяющая проводить моделирование



с заданной точностью, оценены диапазоны величин действующих на исследуемых орбитах возмущающих ускорений.

2. Представлено использование динамических структур ограниченной задачи трёх тел для планирования траекторий перелёта КА с ЭРДУ в системе Земля - Луна, что позволяет снять затруднения в поиске начального приближения.

#### **Практическая значимость.**

1. Разработано программно-математическое обеспечение, предназначенное для формирования оптимального номинального управления КА с ЭРДУ при перелётах между периодическими орбитами в системе Земля - Луна.

2. Получены результаты формирования оптимального номинального управления и соответствующих траекторий перелётов между периодическими орбитами в системе Земля – Луна, пригодные для баллистического проектирования реальных миссий: между орбитами Ляпунова относительно L2, между гало-орбитами относительно L2, от орбиты Ляпунова к вертикальной орбите относительно L2, между орбитами Ляпунова относительно точек либрации L2 и L1, между гало-орбитами относительно точек либрации L2 и L1.

#### **Положения, выносимые на защиту.**

1. Математическая модель пассивного возмущённого движения КА в окололунном пространстве и результаты анализа особенностей движения в рамках круговой ограниченной задачи трёх тел на периодических орбитах, в том числе, орбитах Ляпунова, гало-орбитах, осевых орбитах.

2. Математическая модель управляемого движения КА с ЭРДУ в окололунном пространстве с учётом действующих возмущений от гравитации небесных тел Солнечной системы, нецентральности гравитационных полей Луны и Земли, особенностей движения Луны (эксцентриситет орбиты, лунные либрация и «застой»), светового давления.

3. Методики формирования оптимального номинального управления КА с ЭРДУ при перелётах в системе Земля - Луна между периодическими орбитами по критериям минимальных времени перелёта и расхода рабочего тела.

4. Программно-математическое обеспечение и результаты расчётов оптимального номинального управления и соответствующих траекторий перелётов между периодическими орбитами в системе Земля - Луна: между орбитами Ляпунова относительно L2, между гало-орбитами относительно L2, от орбиты Ляпунова к вертикальной орбите относительно L2, между орбитами Ляпунова относительно точек либрации L2 и L1, между гало-орбитами относительно точек либрации L2 и L1.

#### **Апробация результатов.**

Основные научные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на международной молодёжной научной конференции «XLIV Королёвские чтения» (г. Москва, 2020 г.), всероссийском семинаре «Навигация и управление движением» (г. Самара, 2020 г.), международной конференции по исследованию космического пространства (Global Space Exploration Conference - GLEX-2021) (г. Санкт-Петербург, 2021 г.).

**Достоверность полученных результатов** обеспечивается корректным использованием методов небесной механики, математики, классических вычислительных методов, апробированных методов теории оптимального управления и согласованностью полученных результатов с известными результатами по исследованию движения в рамках задачи трёх тел.

#### **Личный вклад автора.**

Все научные результаты и результаты, вынесенные на защиту, получены автором самостоятельно. Автором самостоятельно проведены теоретические исследования и вычислительные эксперименты, подтверждающие основные положения, выводы и рекомендации. Все публикации по работе подготовлены автором самостоятельно или при его определяющем участии.

### **Основные публикации.**

По теме диссертационной работы опубликовано восемь работ, в том числе три статьи опубликованы в изданиях, входящих в список, рекомендованный ВАК России, пять статей опубликованы в изданиях, входящих в международные базы цитирования SCOPUS и WOS.

### **Структура и объем диссертации.**

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы (77 наименований). Объем работы составляет 114 страниц, содержит 58 рисунков и 21 таблиц.

# 1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕЛЁТОВ В РАМКАХ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЁХ ТЕЛ

## 1.1 Проблемы исследования движения с учётом гравитации нескольких тел

В физике и классической механике задача трёх тел - это задача, в которой известны начальные положения и скорости трёх точечных масс, а их последующее положение определяется только действием взаимного притяжения [1]. Математическая модель, описывающая движение трёх тел используется при описании движения космического аппарата (КА) под действием притяжения двух гравитирующих тел. Например, движение КА в системах Земля – Луна, Земля - Солнце и т.д. Исследование задачи трёх тел имеет богатые теоретические и инженерные последствия. Изучение задачи трёх тел может продвинуть развитие небесной механики и заложить основу для исследования более сложных задач N-тел, тем самым лучше понять движение естественных небесных тел и обогатить небесную механику. В инженерии, изучение задачи трёх тел помогает уточнить динамические модели движения КА и обеспечивает теоретическую поддержку для проектирования миссий по исследованию космоса.

Выделяют общую и ограниченную задачу трёх тел. Общая задача трёх тел изучает движение трёх массивных точек, а ограниченная считает массу одной из точек пренебрежимо малой, по сравнению с двумя другими. Изучение общей задачи трёх тел началось в 1687 году, когда Ньютон впервые исследовал движение массивных тел под действием взаимовлияющих гравитационных сил в своей работе «Математические начала натуральной философии». В 1840-х годах d'Alembert и коллеги впервые использовали словосочетание «задача трёх тел» [2]. Впоследствии многие другие учёные внесли свой вклад в изучение и поиск решений задачи трёх тел, например, Bruns, Poincaré и Sundmanre [3].

В динамике космического полёта гравитационным воздействием КА на два движущихся массивных тела можно пренебречь. Поэтому в космонавтике используется ограниченная задача трёх тел. В данной работе мы рассматриваем перелёты между периодическими орбитами в системе Земля - Луна в рамках ограниченной задачи трёх тел, то есть пренебрегаем гравитационным воздействием движущегося КА на Землю и Луну.

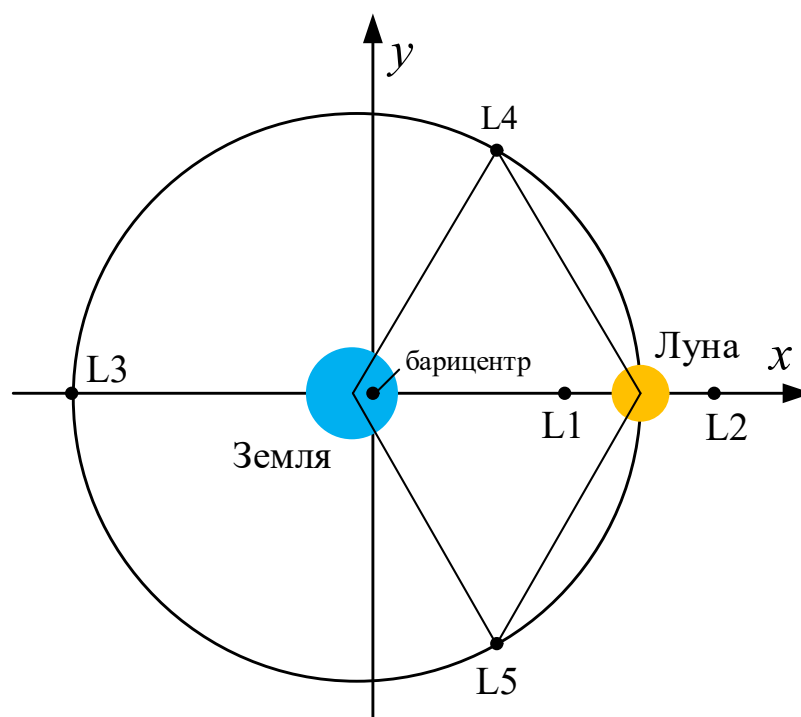


Рисунок 1.1 - Точки либрации в рамках круговой ограниченной задачи трёх тел (система Земля – Луна)

Одним из результатов исследования ограниченной задачи трёх тел является найденный набор особых решений - точек либрации (рисунок 1.1). С развитием космических технологий, в 1960-х годах исследователи начали изучать движение вблизи точки либрации и обсуждать потенциальное применение точек либрации в космической сфере. Приблизительные аналитические решения [4] и методы численного анализа [5] для периодических орбит относительно точек либрации были разработаны и использованы для проектирования орбит соответствующих миссий. Впоследствии различные типы периодических движений КА и их траектории

перелёта (ТП) относительно точек либрации стали популярной темой академических исследований, возникло множество идей по их использованию. В XXI веке, с развитием исследований в области нелинейной динамики, теория инвариантных многообразий была введена в изучение системы трёх тел и использована при проектировании ТП [6, 7].

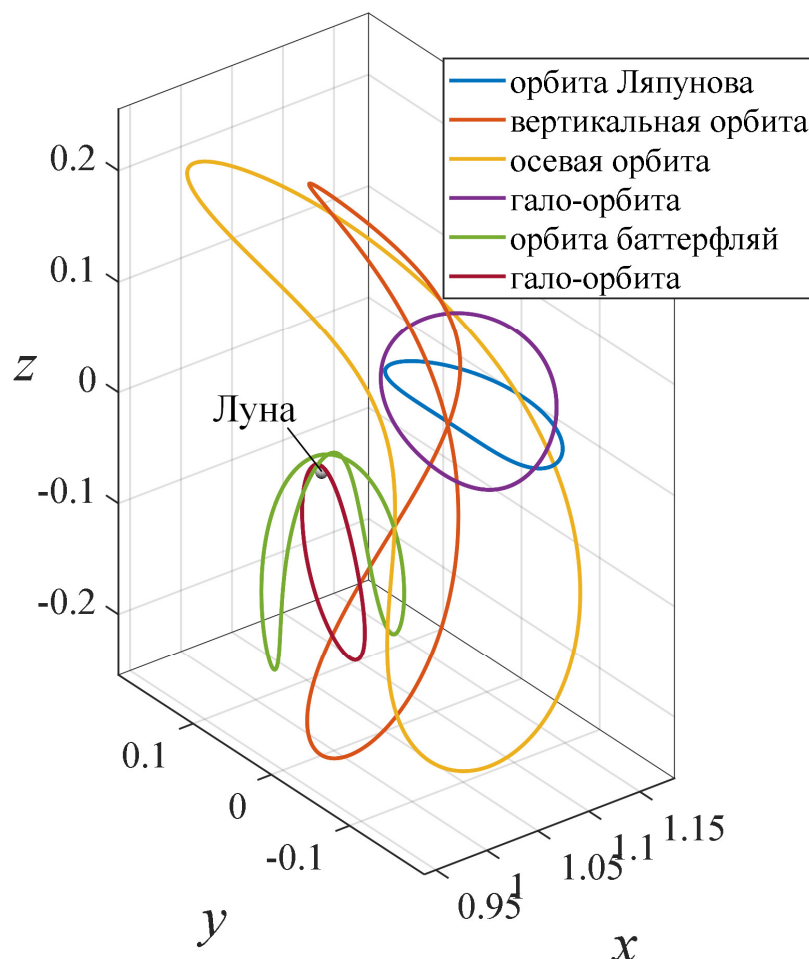


Рисунок 1.2 - Различные периодические орбиты в системе Земля - Луна

Теоретические исследования динамики поведения системы трёх тел стимулировали развитие прикладных космических технологий, особенно в области изучения Луны и освоения дальнего космоса. До 2022 г. 15 КА достигли окрестностей точек либрации систем Земля - Луна или Солнце - Земля для проведения исследований. Обзор миссий по исследованию точки либрации представлен в таблице 1.1. В настоящий момент космические агентства США, Евросоюза, России и Китая обсуждают планы создания лунной космической станции (ЛКС). Создание ЛКС требует,

чтобы её орбита и орбиты обслуживающих КА обладали наилучшими характеристиками для связи, телеметрии, навигации и ретрансляции. При этом периодические орбиты относительно точек либрации, такие как орбиты Ляпунова (ОЛ), гало-орбиты (ГА), осевые орбиты (ОС), вертикальные орбиты (ВЕ) и т.д. являются потенциальными рабочими орбитами, представляющими интерес (рисунок 1.2).

Таблица 1.1 - Обзор миссий КА функционирующих в окрестностях точек либрации [8]

КА (страна)	Год старта	Орбита функционирования	миссия
ISEE-3 (США)	1978	L1 Солнце-Земля	научное исследование
WIND (США)	1994	L1 Солнце-Земля	научное исследование
SOHO (США/ЕС)	1995	L1 Солнце-Земля	научное исследование
ACE (США)	1997	L1 Солнце-Земля	научное исследование
WMAP (США)	2001	L2 Солнце-Земля	зондирование
Genesis (США)	2001	L1 Солнце-Земля	образец возврата
ARTMIS (США)	2007	L1/L2 Земля-Луна	зондирование
HERSHEL (ЕС)	2009	L2 Солнце-Земля	научное исследование
PLANCK (ЕС)	2009	L2 Солнце-Земля	научное исследование
Chang'e 2 (КНР)	2010	L2 Солнце-Земля	навигационный
GAIA (США)	2013	L2 Солнце-Земля	научное исследование
Chang'e 5 T1 (КНР)	2014	L2 Земля-Луна	образец возврата
LISA Pathfinder (ЕС)	2015	L1 Солнце-Земля	испытательный
DSCOVR (США)	2015	L1 Солнце-Земля	метеорологический
Queqiao (КНР)	2018	L2 Земля-Луна	спутник связи

Эти орбиты существуют в круговой ограниченной задаче трёх тел и КА регулярно движутся по ним с определёнными периодами относительно точек либрации. Реализация перелётов КА между периодическими орбитами является необходимым инструментом для проектирования обеспечивающей

структуры ЛКС. Кроме того, такие орбиты позволяют снизить перегруженность орбит вблизи точек либрации и обеспечивают КА возможность перемещения в различных областях окололунного пространства.

## 1.2 Межорбитальные перелёты в задаче трёх тел

Согласно современному представлению перелёты КА в рамках задачи трёх тел могут выполняться одним из трёх способов: прямые импульсные перелёты (обычно двух импульсные); перелёты с низкими энергетическими затратами, построенные на основе теории инвариантных многообразий и теории слабой устойчивости; перелёты с двигателями малой тяги (электроракетными или солнечным парусом) [9, 10].

### 1.2.1 Импульсные перелёты

Двухимпульсный перелёт может быть рассчитан на основе решения задачи Ламберта в системе трёх тел. Орбитальный перелёт осуществляется за счёт двух импульсов двигательной установки: для схода с начальной орбиты и выравнивания скорости КА на целевой орбите (рисунок 1.3). Parker и Anderson [9] провели детальные исследования и анализ траекторий прямых перелётов в системе Земля - Луна в импульсной постановке. Они отметили, что время перелёта (ВП) обычно менее одной недели, а суммарный импульс составляет около 500 м/с. Lu [11] применил последовательное квадратичное программирование и метод продолжения по параметру для решения задачи оптимизации прямого перелёта с почти прямолинейной гало-орбиты на низкую лунную орбиту. Они обнаружили, что достижимые орбиты являются околополярными орбитами. Ширококов с соавторами [12] использовали похожую методику для расчёта двухимпульсного перелёта для возвращения КА на исходную орбиту, отклонившегося от заданной гало-орбиты из-за кратковременного отказа двигателя.



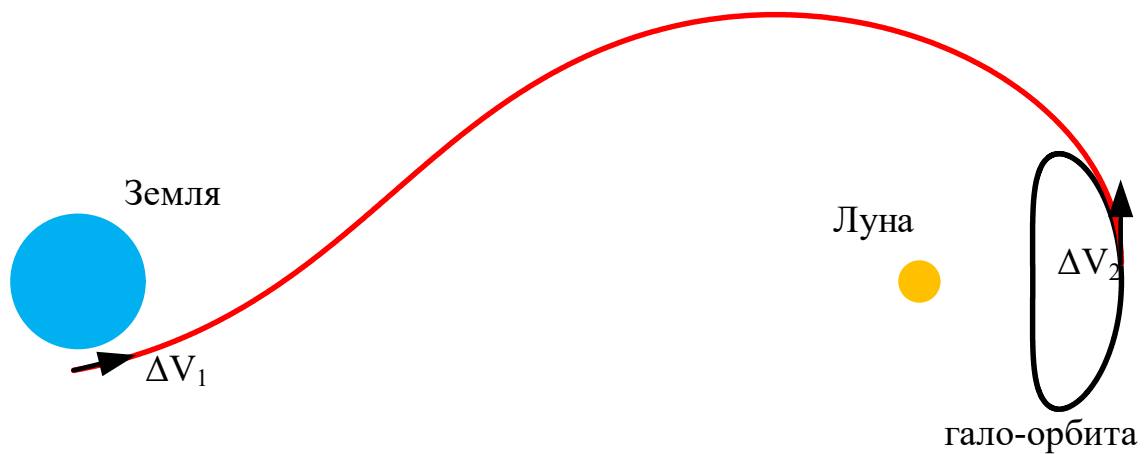


Рисунок 1.3 - Схема двухимпульсного перелёта

### 1.2.2 Низкоэнергетический перелёт

При расчёте низкоэнергетических перелётов в рамках задачи трёх тел используется факт существования траекторий, образующих инвариантные многообразия. В общем случае, инвариантное многообразие - это топологическое многообразие, некоторые параметры объектов которого не изменяются в процессе развития динамического процесса. Периодические орбиты относительно точек либрации в рамках задачи трёх тел образуют стабильные и нестабильные семейства инвариантных многообразий (рисунок 1.4). При этом вдоль инвариантных многообразий, происходящих с одной и той же орбиты, интеграл Якоби системы остаётся неизменным. Это даёт возможность применить технологию сращивания орбит, принадлежащих одному и тому же многообразию.

Такие траектории соединяют орбиту относительно первичного небесного тела и периодические орбиты относительно точек либрации. Потребляемая энергия для такого перелёта существенно меньше, чем при прямом перелёте [13]. В этом процессе КА переводится в инвариантное многообразие, связанное с периодической орбитой, а затем пассивно летит к целевой орбите без дополнительных импульсов. Howell и др. [14] провели ряд исследований, по использованию устойчивых многообразий для осуществления перелёта с Земли на гало-орбиту, использованию

неустойчивых многообразий для перелёта с гало-орбиты обратно на Землю и т.д. Кроме того, теория инвариантных многообразий может быть использована для перелёта между периодическими орбитами относительно точек либрации, например, перелёт между различными орбитами относительно одной и той же точки либрации – гомоклиническое соединение [15] и между различными орбитами различных точек либрации – гетероклиническое соединение [16].

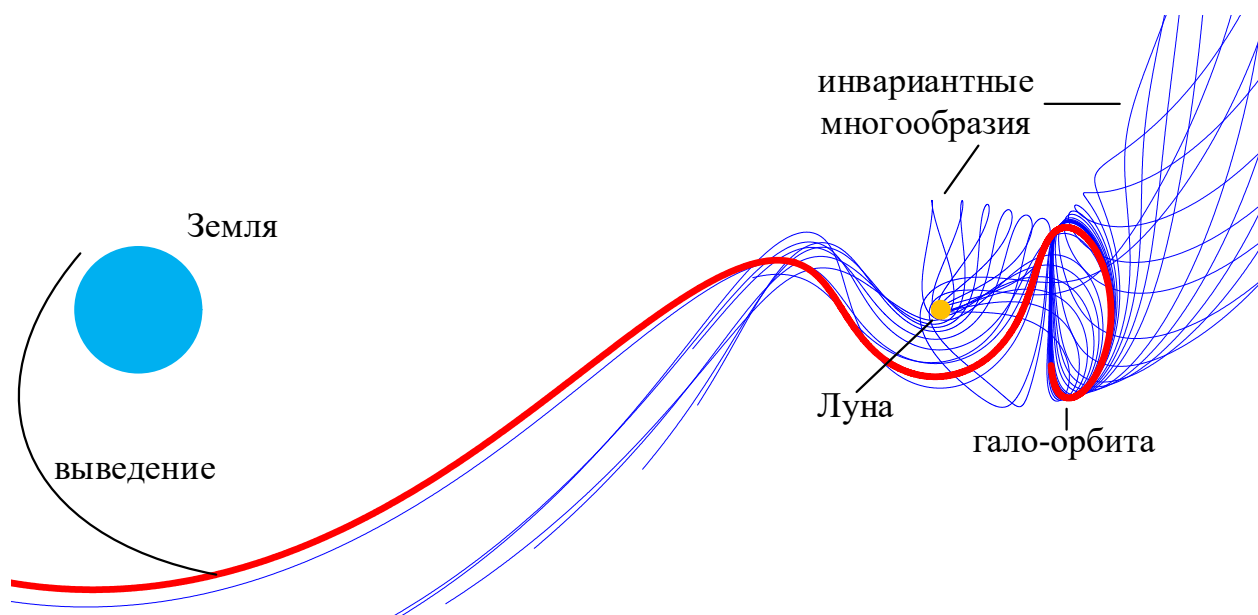


Рисунок 1.4 - Схема перелёта с использованием инвариантных многообразий

### 1.2.3 Перелёт с электроракетной двигательной установкой

ЭРДУ обладают высокой массовой эффективностью, связанной с высоким удельным импульсом, и длительным временем работы по сравнению с химическими двигателями, что делает их пригодными для долгосрочных миссий по исследованию дальнего космоса [8] (рисунок 1.5).

Оптимизация ТП с ЭРДУ может проводиться по различным критериям [17, 18]:

- 1) минимальному времени перелёта (быстродействие);
- 2) минимальным затратам энергии;
- 3) минимальному расходу рабочего тела.

Традиционно, методы решения задач поиска оптимального программного управления КА с ЭРДУ можно разделить на прямые [19] и косвенные методы [20]. Прямые методы дискретизируют функции, описывающие состояние и управление КА, и тем самым преобразуют задачу поиска оптимального управления в задачу нелинейного математического программирования с ограничениями [21]. Однако математическая модель, описывающая движение КА в рамках задачи трёх тел, высокочувствительна к начальным условиям [22], что существенно усложняет численное решение. Методики оптимизации плохо работают без хорошего начального приближения, особенно для многовитковых траекторий [23]. Даже наличие хорошего начального приближения, каждое решение требует значительного объёма вычислительной работы. Поэтому косвенные методы оптимизации привлекают большее внимание исследователей [24]. Используя вариационные методы или принцип максимума Понтрягина (ПМП), косвенные методы преобразуют исходную задачу в двухточечную краевую задачу [23]. Итерационный метод решения данной задачи обладает чрезвычайно хорошей численной точностью и быстрой сходимостью [21]. Данное исследование использует косвенные методы для поиска оптимальных программ управления.

Russell [24] впервые использовал косвенные методы и ПМП для решения задачи проектирования оптимального перелёта с ЭРДУ в круговой ограниченной задаче трёх тел. Исходя из этого, Zhang [20] применил метод стрельбы и процесс гомотопии для решения задачи об оптимальном перелёте с геоцентрической на гало-орбиту КА с ЭРДУ с точки зрения критериев минимального ВП и расхода рабочего тела (РТ) на его осуществление. Singh и др. рассмотрели задачу о перелётах в околосолнечном пространстве, используя косвенные методы оптимизации и структуру инвариантного многообразия [25]. Для изучения перелётов между орбитами точек либрации, Churin и др. применили структуру гетероклинических соединений в сочетании с косвенными методами поиска оптимального управления для расчёта

перелёта между инвариантными многообразиями с ЭРДУ, связанными с орбитами точек либрации L1 и L2 [26, 27]. М. К. Файн и О. Л. Старинова [28] использовали модифицированный метод Ньютона с переменным шагом для решения задач о перелётах с ЭРДУ между точками либрации L1 и L2 в системе Земля - Луна. В работе М. Г. Широбокова и С. П. Трофимова [29] реализованы расчёты перелётов с гало-орбит на окололунные орбиты. Помимо этого, прямые методы, такие как метод коллокации и выпуклое программирование, использовались для решения задач оптимизации перелётов с ЭРДУ между орбитами относительно точек либрации, с многовитковыми естественными орбитами в качестве начального приближения в работах [30, 31, 32].

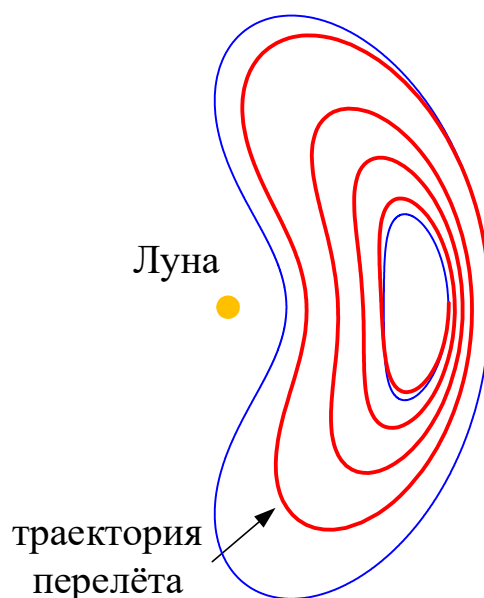


Рисунок 1.5 - Схема перелёта с ЭРДУ

### 1.3 Общая постановка задачи, решаемой в диссертации

По мере развития технологии электроракетных двигателей их применение для исследования Луны стало особенно актуальным [33]. Но формирование программы номинального оптимального управления ЭРДУ всегда оказывается сложной частью проектирования миссии такого КА. Анализ источников показывает, что в целом недостаточно развиты методы расчёта траекторий перелётов КА с ЭРДУ в задаче трёх тел, а методики

оптимизации имеют плохую сходимость и низкую вычислительную эффективность из-за сильной нелинейности системы [8]. Для дешения задач оптимального управления используются итерационные методы. Эти методы требуют определения достаточно хорошего начального приближения для законов управления, подходы к определению которого не всегда являются достаточно прозрачными.

Кроме того, большинство исследователей рассматривают двигательные установки, создающие значительную тягу (на уровне нескольких сотен мН или даже Н). На практике же уровни располагаемой тяги у современных КА с ЭРДУ существенно ниже. Например, в миссии SMART-1 использовался маломощный двигатель Холла PPS-1350 с тягой 70 мН и удельным импульсом 1600 с [34, 35], в миссии DESTINY+ - ионный двигатель с тягой 40 мН и удельным импульсом 3000 с [36], а в миссии Hayabusa2 probe - четыре двигателя с тягой 9,8 мН [37]. То есть, для реальных КА тяга двигателей составляет десятки мН. В данной работе предложены методики, использующие динамику системы трёх тел для уменьшения величины потребной для осуществления перелётов тяги.

Суммируя вышеизложенное, можно сделать вывод, что разработка методик оптимизации межорбитальных перелётов с ЭРДУ в системе Земля - Луна является актуальной и будет востребована.

Целью данной работы является разработка методик определения оптимального программного управления для осуществления перелётов КА с ЭРДУ между периодическими орбитами относительно точек либрации L1 и L2 в системе Земля-Луна за минимальное время (задача мин-ВП), с минимальными затратами энергии (задача мин-ЭН) или рабочего тела (мин-РТ). Кроме того, работа нацелена на выработку рекомендаций по выбору начального приближения при расчёте ТП. В данной работе в качестве основного метода поиска оптимального управления используется метод коллокации [38], а для выбора начальных приближений предлагается набор методик, которые позволяют использовать метод продолжения (МП) по

параметрам для постепенного перехода от некоторых простых результатов к конечной целевой ТП. Такой подход был предложен и успешно использован О. Л. Стариновой [39] для оптимизации межпланетных перелётов. Более того, ТП будут рассчитаны в рамках круговой ограниченной задачи трёх тел Земля - Луна и в реальной системе Земля - Луна с учётом действующих возмущающих факторов.

Предложенные методики просты и имеют высокую вероятность успеха, что позволяет использовать их для решения задач о перелётах с ЭРДУ между орбитами на этапе планирования будущих лунных миссий.

Целевыми периодическими орбитами, выбранными в данном исследовании, являются плоские орбиты Ляпунова, гало-орбиты, осевые и вертикальные орбиты. Рассматриваются возмущения от гравитации иных тел Солнечной системы; нецентральности гравитационных полей Луны и Земли; особенности движения Луны; давление солнечного света; эксцентриситет орбиты Луны вокруг Земли. Проектные параметры КА, используемые в вычислительных примерах в данной работе, соответствуют современным двигательным системам, и полученные результаты имеют существенное практическое значение.

### Выводы по первой главе

Таким образом, в первой главе получены следующие основные результаты:

1. Представлена концепция задачи трёх тел и её применение в космических исследованиях.
2. Обсуждены существующие подходы к оптимизации перелётов КА в задаче трёх тел. Приведена классификация методов оптимизации.
3. Описана общая постановка задачи, решаемой в данной работе.

## 2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В СИСТЕМЕ ЗЕМЛЯ - ЛУНА

Моделирование динамики движения КА в рамках ограниченной задачи трёх тел имеет фундаментальное значение для формирования номинальных программ управления КА с ЭРДУ в системе Земля - Луна.

В этой главе будут проанализированы математические модели, описывающие пассивное движение КА в рамках круговой ограниченной задачи трёх тел (системы Земля – Луна), свойства точек либрации и периодических орбит относительно точек либрации под действием гравитации двух притягивающих тел (Земли и Луны) и других возмущающих факторов.

В инерциальной системе координат движение КА в окололунном пространстве описывается следующим образом:

$$\ddot{\rho} = -\frac{\mu_1}{\rho_1^3}\rho_1 - \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\rho_2 + f, \quad (0.1)$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  - радиус-вектора Земля - КА и Луна - КА соответственно,  $f$  - сумма действующих на КА возмущающих ускорений,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  - гравитационные параметры Земли и Луны

Введём вращающуюся (синодическую) систему координат, центр которой совпадает с барицентром системы Земля - Луна, основная плоскость со средней плоскостью движения Луны относительно Земли, ось X направлена от барицентра к Луне. Уравнение пассивного движения КА в этой системе координат имеет вид [40]:

$$\ddot{\rho} = \dot{\Omega} \times \rho + \Omega \times (\Omega \times \rho) + 2\Omega \times V + A, \quad (0.2)$$

где  $\dot{\Omega}$  и  $\Omega$  являются угловыми ускорением и скоростью вращения Луны, относительно барицентра системы Земля - Луна;  $V$  - относительная скорость КА во вращающейся системе координат Земля - Луна, и  $A$  - относительное ускорение КА.

## 2.1 Уравнения движения космического аппарата в круговой ограниченной задаче трёх тел

Для круговой ограниченной задачи трёх тел без учёта возмущений,  $\dot{\Omega}$  и  $f$  тождественно равны нулю в уравнениях (2.1) и (2.2). Для уменьшения погрешности при численном интегрировании, перейдем к безразмерной форме уравнений движения во вращающейся системе координат [41, 42] (рисунок 2.1) в координатной форме:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = U_x, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = U_y, \quad \ddot{z} = U_z, \quad (0.3)$$

где  $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$  - псевдопотенциал системы;  $U_x, U_y, U_z$  - его частные производные по координатам;  $r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2 + z^2$  и  $r_2^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2$  - безразмерные расстояния от КА до Земли и Луны соответственно; Земля расположена в точке  $(\mu, 0, 0)$ ; а Луна в точке  $(1 - \mu, 0, 0)$ ;  $\mu = 0,01215$  - отношение массы Луны к сумме масс Земли и Луны.

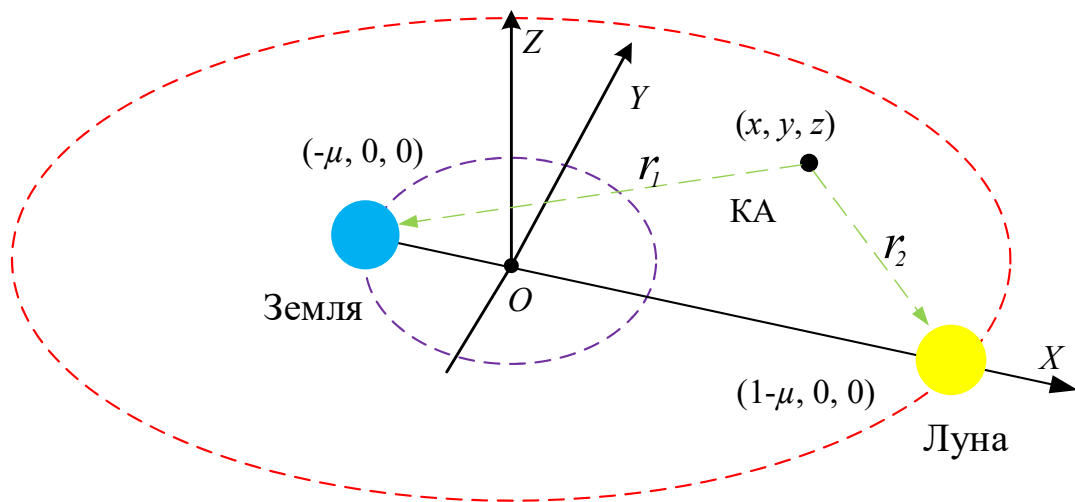


Рисунок 2.1 - Движение КА во вращающейся системе координат Земля - Луна



Преобразование размерных уравнений (2.2) в безразмерные (2.3) проводилось по следующим зависимостям для расстояния, скорости, ускорения и времени в размерной системе координат Земля - Луна [43]:

$$\begin{aligned} \text{расстояние: } \rho &= l_* r, & \text{ скорость: } V &= s_* v, \\ \text{ускорение: } A &= \frac{\tau_*^2}{l_*} a, & \text{ время: } T &= \frac{\tau_*}{2\pi} t. \end{aligned} \quad (0.4)$$

где  $l_*$  - среднее расстояние между Землей и Луной,  $s_*$  - средняя орбитальная скорость Луны,  $\tau_*$  - средний орбитальный период Луны.

### 2.1.1 Точки либрации

Хотя уравнения системы (2.3) не имеют аналитического решения в конечной форме, мы можем использовать их для определения местоположения точек равновесия. Это те места в пространстве, где КА будет иметь нулевую скорость и нулевое ускорение, т.е. в этих точках КА будет постоянно находиться в состоянии покоя относительно небесных тел (Земли и Луны) без воздействия возмущений. Теоретически, попав в точку равновесия (также называемую точкой либрации или точкой Лагранжа), КА останется в ней. Таким образом, точки либрации определяются условиями [44]:

$$\begin{aligned} \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} &= 0, \\ \ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} &= 0. \end{aligned} \quad (0.5)$$

В круговой ограниченной задаче трёх тел имеется пять точек либрации, включая три коллинеарные и две треугольные [45] (рисунок 2.2). Эйлер в 1767 г. открыл три точки коллинеарных точки - L1, L2 и L3, L1 находится между двумя основными небесными массивными телами, L2 с внешней стороны меньшего массивного тела, а L3 на стороне большего массивного тела. L1 и L2 расположены ближе к меньшему телу, примерно на границе его сферы действия, а L3 дальше от большего тела. В 1772 г. Лагранж получил решение для треугольных точек либрации L4 и L5, которые образуют

равносторонние треугольники с небесными телами. Все точки либрации лежат в плоскости вращения гравитирующих тел, то есть имеют координату  $z$  равную нулю. На рисунке 2.2 схематически показано расположение точек либрации в геоцентрической системе координат. Эти точки вращаются вокруг Земли с тем же периодом, что и Луна вокруг Земли.

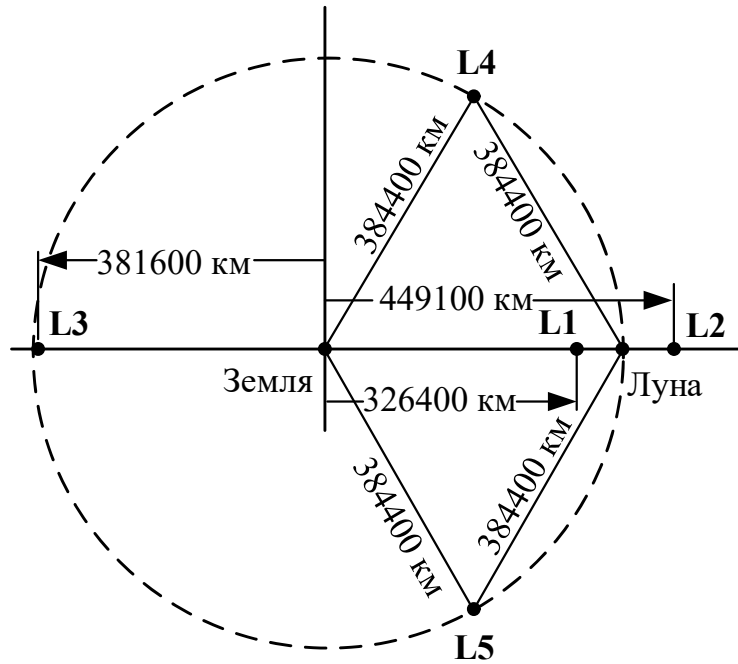


Рисунок 2.2 - Расположение пяти точек либрации в системе Земля-Луна

Линеаризуя уравнения движения в окрестности точек либрации, можно определить их устойчивость путём решения соответствующих характеристических уравнений. Известно [46], что точки  $L1$ ,  $L2$ ,  $L3$  являются неустойчивыми, в которых КА не останётся после приложения малых возмущений; а точки  $L4$  и  $L5$  - устойчивые.

### 2.1.2 Постоянная Якоби и линии нулевой относительной скорости

В 1836 г. Якоби обнаружил пока единственный интеграл круговой ограниченной задачи трёх тел во вращающейся системе координат. Выражение для интеграла Якоби (постоянной Якоби) имеет вид:

$$J = 2U - v^2, \tag{0.6}$$

где  $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$  - величина скорости.

Постоянная Якоби может применяться как аналог энергии движущегося в системе трёх тел КА, и его можно использовать как эффективный показатель возможности соединения орбит с малой разницей в энергии [30, 47].

Если построить области системы трёх тел ограниченные линиями  $v=0$  с одинаковыми постоянными Якоби, то получаются линии нулевой относительной скорости (ЛНОС). ЛНОС рассматриваются как границы, которую КА может достичь при пассивном движении за счёт своей собственной энергии [48]. Рисунок 2.3 показывает пять точек либрации и линии нулевой относительной скорости (ЛНОС) с различными значениями постоянной Якоби  $J$ . Разные цвета представляют разные значения  $J$ .

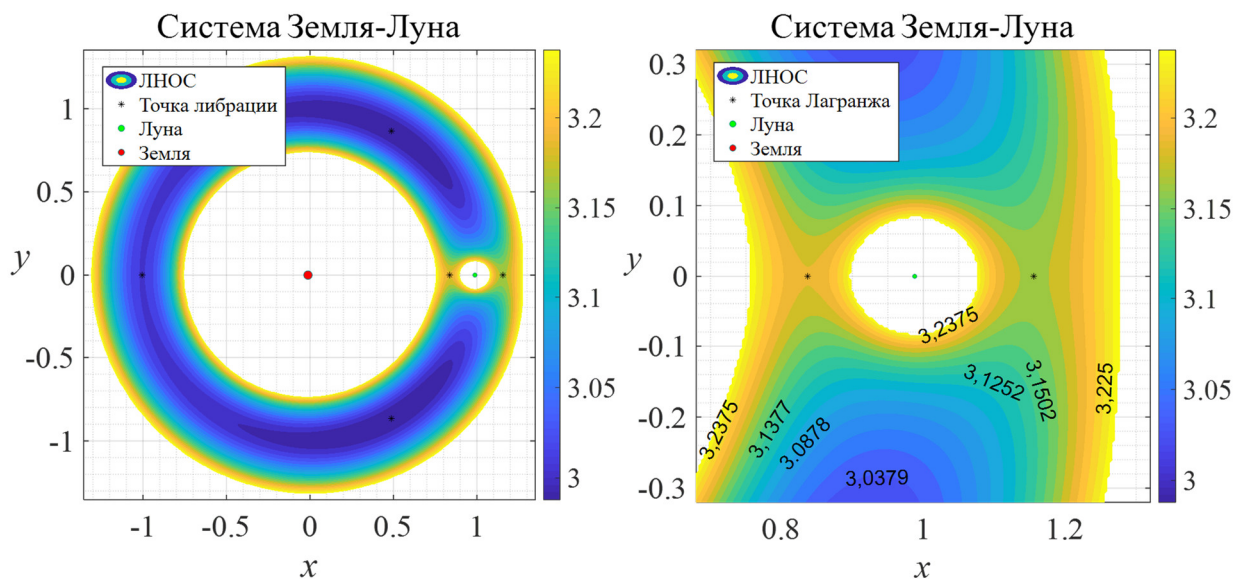


Рисунок 2.3 - Линии нулевой относительной скорости (ЛНОС) в системе Земля – Луна и в окрестности Луны

В этой работе мы изучаем движение КА в окрестности точек либрации L1 и L2 системы Земля-Луна, которые находятся вблизи Луны и имеют в своей окрестности много периодических орбит. Кроме того, пространство вблизи этих двух точек либрации является перспективным для практического использования в миссии ЛКС.

### 2.1.3 Орбитальные параметры периодических орбит относительно точек либрации L1 и L2

Определение параметров периодических орбит в окрестности точек либрации в круговой ограниченной задаче трёх тел возможно двумя способами – с использованием приближённых аналитических решений или численно. Farquhar [49], Richardson [4] и другие сделали значительный вклад в аналитические методы определения параметров гало-орбит. Однако аналитическое решение имеет сложную форму и ограниченную точность, и не может быть использовано непосредственно при орбитальном анализе и проектировании ТП между периодическими орбитами. С увеличением расстояния орбиты от точки либрации нелинейность системы усиливается, и погрешность аналитического решения значительно возрастает. В основе численного определения периодических орбит лежит метод дифференциальной коррекции, применённый Howell в работе [50].

Обозначим  $\mathbf{X}=[x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$  - вектор состояния КА во вращающейся системе координат. Тогда уравнение (2.3) примет наиболее простой вид:

$$\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}) \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 2v_y + U_x \\ -2v_x + U_y \\ U_z \end{bmatrix}. \quad (0.7)$$

Линеаризуя уравнения (2.7) относительно заданной фазовой точки можно получить следующее векторное дифференциальное уравнение движения КА [7]:

$$\Delta \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t) \Delta \mathbf{X}, \quad (0.8)$$

где  $\mathbf{A}(t)$  - матрица Якоби, соответствующая системе Земля - Луна:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{U}_{3 \times 3} & \mathbf{\Omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{xy} & U_{xz} \\ U_{yx} & U_{yy} & U_{yz} \\ U_{zx} & U_{zy} & U_{zz} \end{bmatrix}, \quad U_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x},$$

$$\mathbf{0}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя симметрию задачи трёх тел, в зависимости от выбора различных плоскостей симметрии можно получить разные семейства периодических орбит [51]. Например, вектор начального состояния принимает форму  $\mathbf{X}_0 = [x_0, 0, z_0, 0, \dot{y}_0, 0]^T$  для гало-орбит, перпендикулярную плоскости  $xOz$ . Интегрируем уравнение движения (2.3) с начальным условием  $\mathbf{X}_0$ , пока не произойдет первое возвращение КА в плоскость  $xOz$  (в момент времени  $t = T/2 = T_{1/2}$ ,  $T$  - орбитальный период гало-орбиты) и получаем вектор фазовых координат  $\varphi(\mathbf{X}_0, T_{1/2}) = [\tilde{x}, 0, \tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}]^T$ , где  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$  - координаты скорости КА в момент времени  $T_{1/2}$ . Если  $\tilde{u} = \tilde{w} = 0$ , то полученная орбита будет являться периодической. Для произвольного вектора начального состояния этого не происходит и начальное условие корректируется в предположении, что система является линейной:

$$\varphi(\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}, T_{1/2} + \Delta t) = \varphi(\mathbf{X}_0, T_{1/2}) + \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}_0, T_{1/2})}{\partial \mathbf{X}} \cdot \Delta\mathbf{X} + \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}_0, T_{1/2})}{\partial t} \cdot \Delta t, \quad (0.9)$$

где  $\Delta\mathbf{X} = [\Delta x, 0, \Delta z, 0, \Delta \dot{y}, 0]^T$ , и  $\varphi(\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}, T_{1/2} + \Delta t) = [x^*, 0, z^*, 0, \dot{y}^*, 0]^T$ , индекс '\*' добавлен к неизвестным, определяемым параметрам. Если обозначить  $\partial \varphi / \partial \mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t, t_0)$  как матрицу перехода состояний, то,

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t, t_0), \quad \mathbf{\Phi}(t_0, t_0) = \mathbf{I}, \quad (0.10)$$

и в этом случае уравнение (2.3) может быть переписано с учётом подстановки  $t_0 = 0, t = T_{1/2}$ :

$$\Phi(T_{1/2}, t_0) \begin{bmatrix} \Delta x \\ 0 \\ \Delta z \\ 0 \\ \Delta \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} + f(\varphi) \Delta t = \begin{bmatrix} x^* \\ 0 \\ z^* \\ 0 \\ \dot{y}^* \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ 0 \\ \tilde{z} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{bmatrix}. \quad (0.11)$$

Это означает, что время, когда КА возвращается в плоскость  $xOz$  в первый раз, определяется как полупериод орбиты, а  $\partial\varphi/\partial t$  заменено на  $f(\varphi)$ . Учитывая только вторую, четвертую и шестую строки в (2.11), система приобретает вид:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{21} & \Phi_{21} & \Phi_{21} & f_2 \\ \Phi_{41} & \Phi_{43} & \Phi_{45} & f_4 \\ \Phi_{61} & \Phi_{63} & \Phi_{65} & f_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta z \\ \Delta \dot{y} \\ \Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{u} \\ -\tilde{w} \end{bmatrix}. \quad (0.12)$$

Система (2.12) содержит три уравнения с четырьмя неизвестными, то есть является недоопределённой. Предположим сначала, что  $\Delta z = 0$  и продолжим итерационный процесс с  $\mathbf{X}_{0_{new}} = \mathbf{X}_{0_{old}} + \Delta \mathbf{X}$ , корректируя начальные условия  $\mathbf{X}_0$  до тех пор, пока не выполнится  $\tilde{u} = \tilde{w} = 0$ . Таким образом, будет получена орбита с определённым значением  $z_0$ . Изменяя это значение можно получить орбиты с различными значениями  $z_0$ . В результате этого процесса будет определено всё семейство гало-орбит.

С матрицей перехода состояния  $\Phi(t, t_0)$  связано одно важное понятие, позволяющее исследовать устойчивость периодической орбиты – матрица монодромии заданной орбиты. Матрица монодромии  $\mathbf{M}$  получается интегрированием уравнений (2.3) и (2.10) совместно на периоде заданной орбиты  $T_0$ ,  $\mathbf{M} = \Phi(t_0 + T_0, t_0)$ .

В диссертации основное внимание уделяется орбитам Ляпунова (ОЛ), гало-орбитам (ГА), осевым орбитам (ОС) и вертикальным орбитам (ВЕ) относительно точек L1 и L2 системы Земля - Луна и переходам между ними.

Эти орбиты обладают наилучшими характеристиками для потенциальных лунных миссий связи, телеметрии, навигации и ретрансляции.

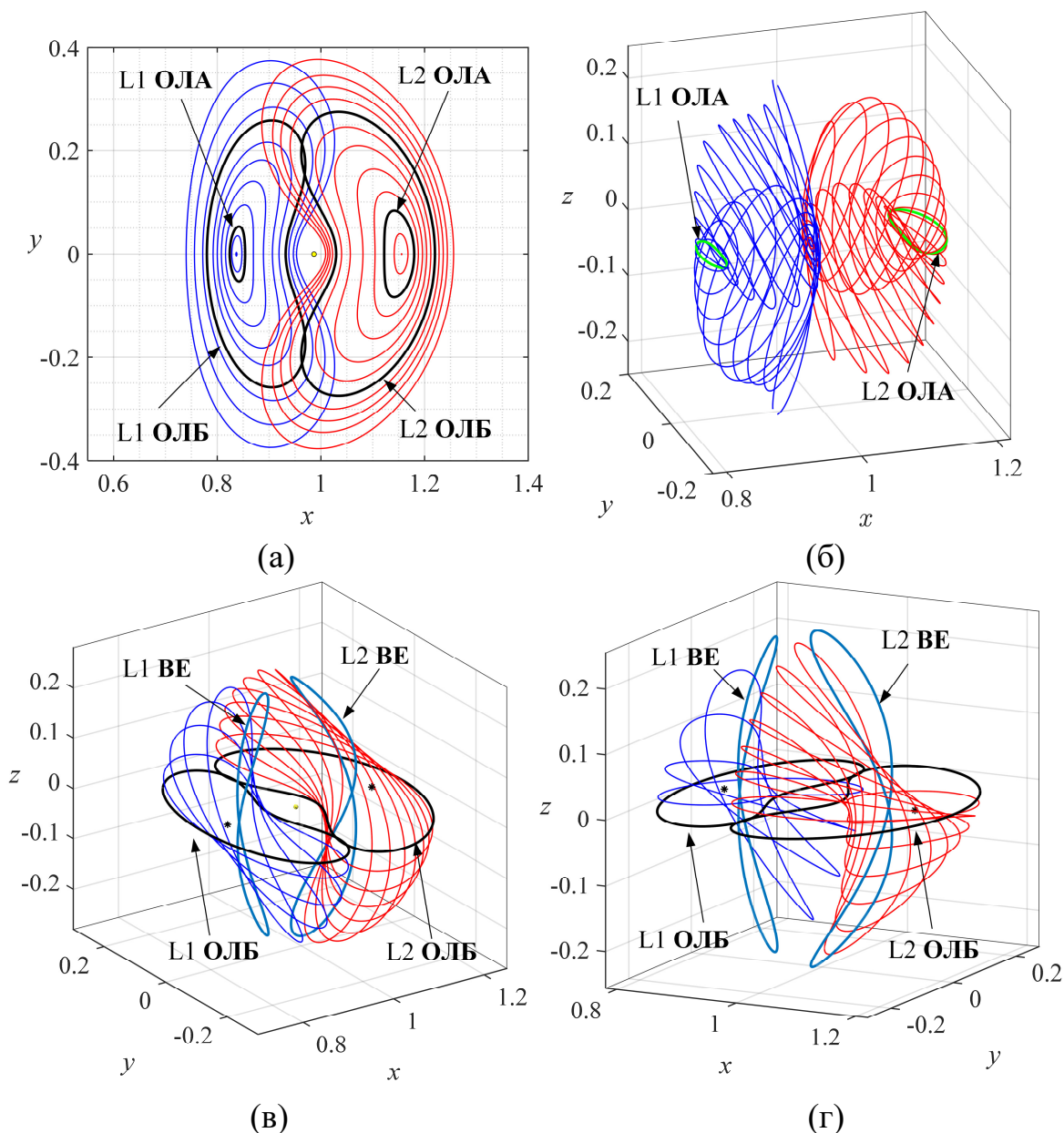


Рисунок 2.4 - Семейства периодических орбит относительно точек либрации L1 и L2 в системе трёх тел Земля - Луна:

- а) орбиты ляпунова; б) северные и южные гало-орбиты;
- в) северо-восточные осевые орбиты и соответствующая вертикальная орбита;
- г) северо-западные осевые орбиты и соответствующая вертикальная орбита

Все перечисленные семейства орбит показаны на рисунке 2.4. Орбиты Ляпунова являются плоскими семействами периодических орбиты при  $z=0$ . Орбиты Ляпунова А (далее - **ОЛА**) переходят в гало-орбиты с увеличением координаты  $z$  [52]; осевые орбиты – также получают с увеличением

координаты  $z$ , исходя из орбит Ляпунова Б (далее - **ОЛБ**). Вертикальные орбиты эволюционируют от осевых орбит, обозначается **ВЕ**. В соответствии с направлением изменения амплитуды по оси  $z$  гало-орбиты делятся на северное и южное орбитальные семейства, а осевые орбиты - на семейства северо-восточных и северо-западных орбит, если смотреть на Землю со стороны Луны. Полученные вертикальные орбиты находятся в одном и том же положении в пространстве, но КА движется по ним в противоположных направлениях.

Поскольку координаты и скорости КА на этих орбитах рассчитываются численно, то в этой работе мы используем для описания орбит следующие параметры:

- 1) для орбит Ляпунова - отклонение орбиты от Луны по координате  $x$  мин  $|x|$  и её орбитальный период;
- 2) для гало-орбит - максимальные расстояния по координате  $x$  и  $z$  от Луны  $\text{мак } |x|$  и  $|Az|$  как функции орбитального периода;
- 3) для осевых орбит - амплитуда орбиты вне плоскости  $|Az|$ , как функция орбитального периода.

Данные по параметризации орбит показаны на рисунке 2.5.

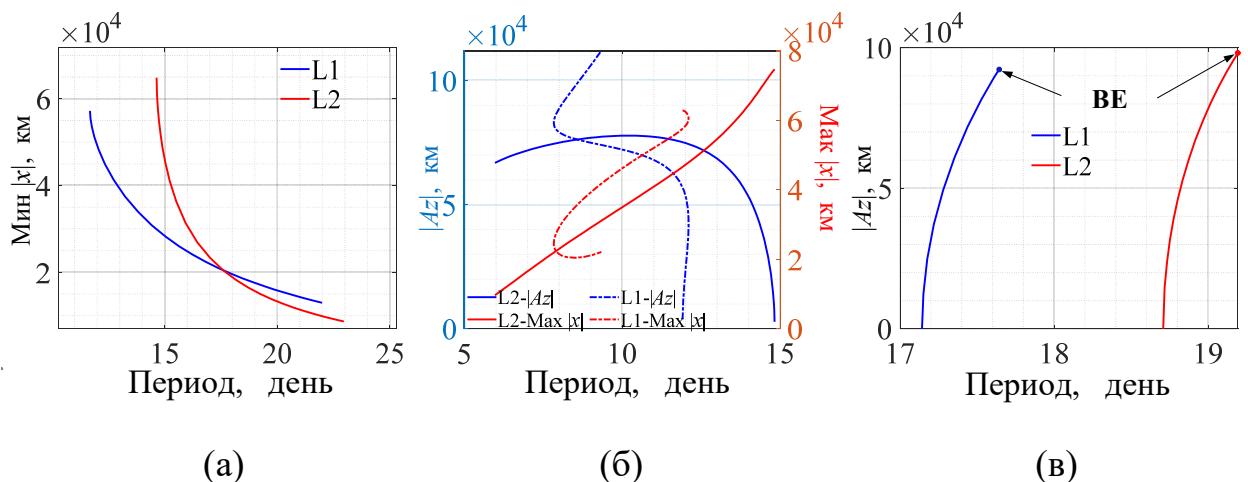


Рисунок 2.5 - Зависимости параметров периодических орбит от орбитальных периодов: а) орбиты Ляпунова; б) гало-орбиты; в) осевые орбиты



Постоянная Якоби является важнейшим орбитальным параметром, неизменным в случае пассивного движения КА в системе Земля - Луна, на рисунке 2.6 представлены зависимости изменения значений постоянной Якоби для периодических орбит вдоль линии, соединяющей Землю и Луну во вращающейся системе координат.

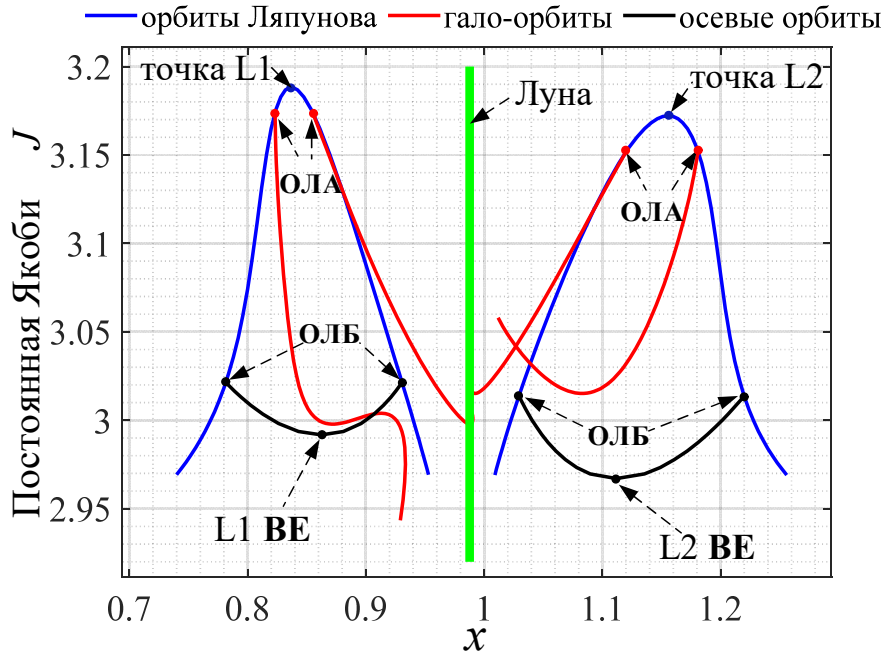


Рисунок 2.6 – Величина постоянной Якоби для периодических орбит точек либрации L1 и L2 вдоль линии, соединяющей Землю и Луну

Положение КА на периодических орбитах будем определять с помощью безразмерного параметра  $\tau = t / T_0$  равного отношению времени полёта КА от точки  $O$  (наиболее удалённая от Луны точка на орбите) до текущего положения по орбите к орбитальному периоду [53]. Определение параметра  $\tau$  для некоторых периодических орбит показано на рисунке 2.7. В общем случае координат точки  $P$ , в которой находится КА на орбите  $Q$ , являются функцией этого параметра  $P = Q(\tau)$ .

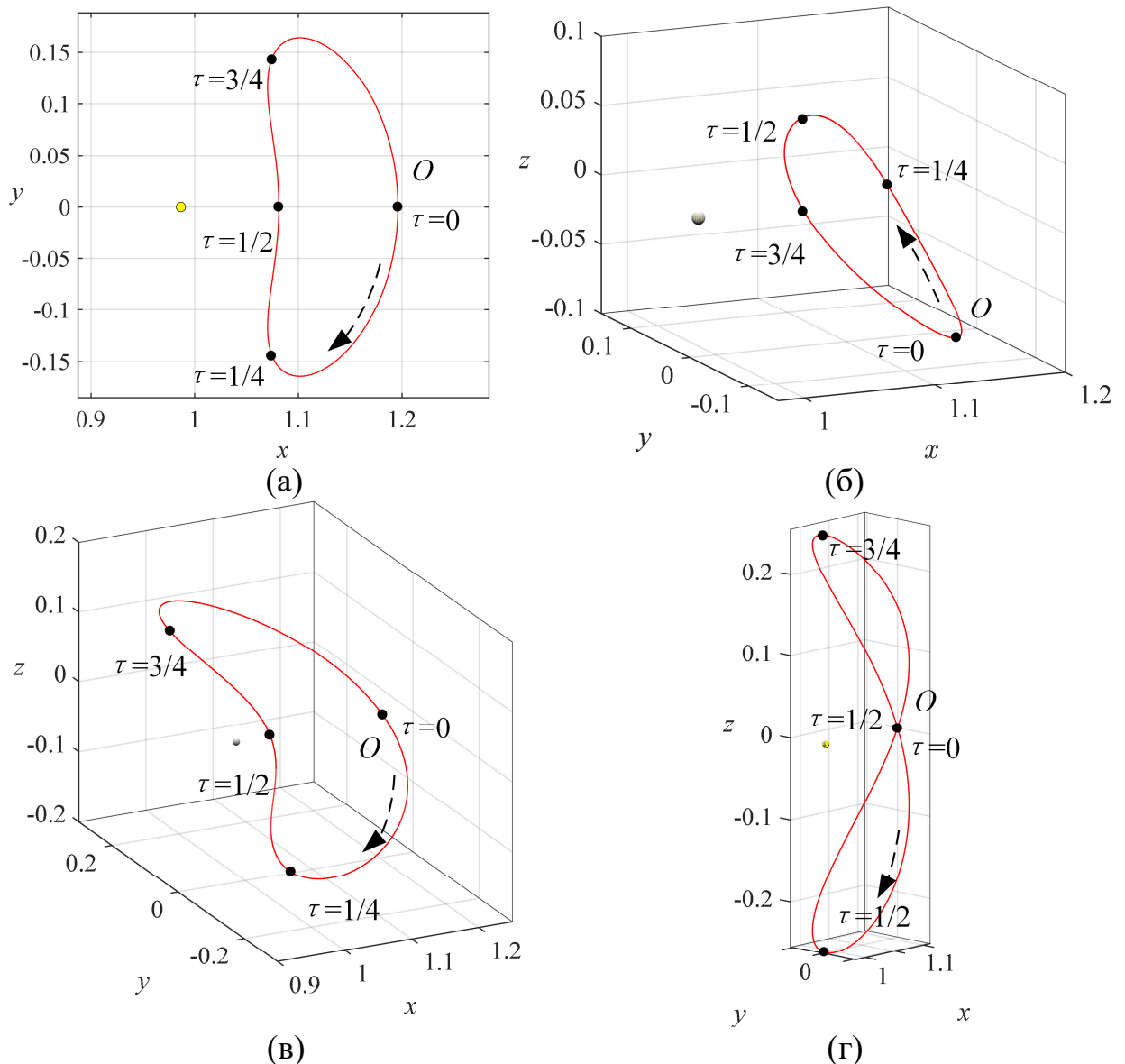


Рисунок 2.7 - Определение параметра  $\tau$  для: а) орбиты Ляпунова, б) гало-орбиты, в) осевой орбиты, г) вертикальной орбиты

#### 2.1.4 Инвариантные многообразия орбит в системе трёх тел

Кроме периодических орбит, большой интерес с точки зрения проектирования перелётов в окололунном пространстве представляют инвариантные многообразия [54] орбит. В органиченной задаче трёх тел существуют два множества асимптотических траекторий, связанных с периодическими орбитами и образующие устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия.

Неустойчивое инвариантное многообразие заданной орбиты содержит множество всех траекторий, по которым КА будет экспоненциально

отклоняться от своего номинального положения при действии незначительных возмущений в направлении неустойчивого собственного вектора матрицы монодромии орбиты [9]. Аналогично, устойчивое инвариантное многообразие орбиты содержит множество всех траекторий, по которым КА будет приближаться к орбите (в пределах нескольких километров) за конечное время вдоль локального устойчивого собственного вектора матрицы монодромии орбиты [13].

Инвариантные многообразия можно представить как трубки, которые доминируют в динамике ограниченной задаче трёх тел [15]. Структуры многообразий в круговой ограниченной задаче трёх тел обеспечивают геометрическую основу для понимания динамики системы трёх тел [55]. Для вычисления инвариантного многообразия, к которому принадлежит периодическая орбита, необходимы координаты точек на орбите и собственные вектора матрицы монодромии  $\mathbf{M}$ . Матрица монодромии  $\mathbf{M}$  существует для периодических орбит и вычисляется путем распространения матрицы перехода состояний на одну целую орбиту. Эта матрица имеет шесть собственных чисел вида:

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2 = \lambda_1^{-1}, \lambda_3 = \lambda_4 = 1, \\ \lambda_5 = \lambda_6^*, |\lambda_5| = |\lambda_6| = 1, \end{aligned} \quad (0.13)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определяют устойчивость соответствующей периодической орбиты [29]. Для неустойчивых периодических орбит  $\lambda_1 > 1$  и  $\lambda_2 < 1$ .  $\lambda_1$  и его собственный вектор  $\mathbf{u}_u$  представляют собой неустойчивый компонент; а  $\lambda_2$  и его собственный вектор  $\mathbf{u}_s$  определяют устойчивый компонент.

Введём фазовые векторы  $\mathbf{x}_u$  и  $\mathbf{x}_s$ , такие, что

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{x}_0 \pm \varepsilon \mathbf{u}_u, \quad \mathbf{x}_s = \mathbf{x}_0 \pm \varepsilon \mathbf{u}_s, \quad (0.14)$$

где  $\mathbf{x}_0$  - вектор состояния КА на исследуемой орбите,  $\varepsilon$  - начальный малый сдвиг. В этой работе начальное отклонение малого сдвига принято равным

50 км. Знак « $\pm$ » в формуле (2.14) соответствует двум половинам каждого многообразия.

Малый сдвиг  $\varepsilon$  может быть добавлен вдоль *неустойчивого направления* в точке  $x_0$ , и интегрируется по *положительному направлению времени*, для получения *неустойчивого многообразия*; или добавлен вдоль *устойчивого направления* в точке  $x_0$ , и интегрируется по *отрицательному направлению времени*, для получения *устойчивого многообразия*. Тогда, моделируя траекторию движения с начальными условиями  $x_u$  и  $x_s$ , можно получить инвариантные многообразия соответствующие данной периодической орбите в рамках ограниченной задачи трёх тел. Пусть  $W^u$  обозначает траектории, принадлежащие неустойчивым инвариантным многообразиям, а  $W^s$  - траектории, принадлежащие устойчивым инвариантным многообразиям. На рисунке 2.8 показаны структуры инвариантных многообразий для некоторых орбит.

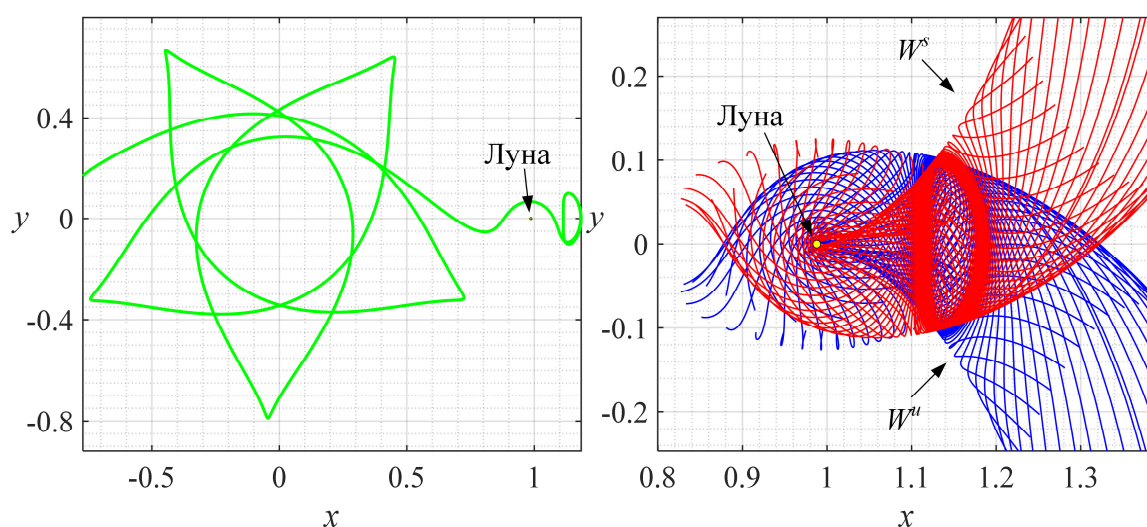


Рисунок 2.8 - Структуры инвариантных многообразий орбит в системе Земля-Луна а) инвариантные многообразия в системе Земля - Луна; б) инвариантные многообразия в окололунном пространстве

Использование траекторий, принадлежащих многообразиям при расчёте перелётов в системе Земля - Луна позволяет получать так называемые траектории низкоэнергетических перелётов. В данном исследовании структура многообразий будет применяться, для снижения

потребной тяги двигателей, необходимой для осуществления перелёта с ЭРДУ. Конкретные операции, необходимые для этого процесса описаны в последующих главах.

## 2.2 Математическая модель движения космического аппарата в системе Земля - Луна с учётом возмущающих факторов

Хотя круговая ограниченная задача трёх тел является основой для изучения задачи трёх тел, она требует двух важных допущений: 1) орбита движения малого небесного объекта является круговой; 2) не учитываются возмущающие факторы. Но в реальности такая система трёх тел не существует, например, влиянием гравитации Солнца нельзя пренебречь для движения КА в окололунном пространстве. Кроме того, эксцентриситет орбиты Луны относительно Земли колеблется между 0,0255 и 0,0775 [56], а плоскость Лунной орбиты не фиксирована в пространстве, существуют лунные либрации. Поэтому, реальное движение КА в системе Земля - Луна отличается от полученного теоретически на базе модели круговой ограниченной задачи трёх тел без учёта возмущений [57].

Существуют другие значимые возмущения, такие как нецентральность гравитационного поля Луны и Земли [58], солнечное световое давление [59], гравитационное воздействие иных тел Солнечной системы, которые также влияют на движение КА в окололунном пространстве. В этом разделе рассматриваются известные возмущающие факторы, присутствующие в системе Земля - Луна.

### 2.2.1 Возмущения, действующие на движение космического аппарата в системе Земля - Луна

Рассмотрим, как рассчитывается вектор возмущающего ускорения  $f$  в уравнении (2.1) при расчёте влияния возмущающих факторой на движение КА в системе Земля - Луна.

### **а) Возмущение от гравитации небесных тел Солнечной системы**

Возмущающее ускорение  $f$  в уравнении (2.1) при учёте гравитации третьего небесного тела имеет следующий вид [60]:

$$f = -\frac{\mu_3}{\rho_3^3} \rho_3 - \frac{\mu_3}{\rho_*^3} \rho, \quad (0.15)$$

где  $\mu_3$  - гравитационная постоянная третьего тела,  $\rho_3$  - расстояние от КА до данного тела, а  $\rho_*$  - положение третьего небесного тела во вращающейся системе Земля - Луна.

Таким образом,  $U$  в уравнении (2.3) заменяется новым безразмерным выражением  $U^*$ :

$$U^* = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu_*}{r_3} - \frac{\mu_*}{r_*^3}(x_*x + y_*y + z_*z), \quad (0.16)$$

где  $\mu_* = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2}$  - безразмерная масса третьего тела,  $r_3$  - безразмерная

величина  $\rho_3$ , а  $r_* = [x_*, y_*, z_*]^T$  соответствует безразмерным компонентам положения  $\rho_*$ .

В данной работе рассматривается возмущающее воздействие гравитации Солнца, Венеры, Марса, Юпитера и Сатурна. Для расчёта эфемерид планет используется модель DE405 [77].

### **б) Возмущение от нецентрального гравитационного поля Земли и Луны**

Нецентральность гравитационного потенциала Земли или Луны будем описывать разложением в ряд по функциям Лежандра [61]:

$$u_{z,l} = \frac{fm_{z,l}}{r} \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_{nk}(\sin \varphi) (C_{nkz,l} \cos k\lambda + S_{nkz,l} \sin k\lambda), \quad (0.17)$$

где  $r_0$  - средний экваториальный радиус Земли или Луны;  $P_{nk}$  - смежные функции Лежандра степени  $n$  и порядка  $m$ ;  $C_{nkz,l}$  и  $S_{nkz,l}$  - безразмерные коэффициенты разложения гравитационного поля Земли или Луны;

$r, \varphi, \lambda$  - сферические координаты КА в небесной системе;  
 $fm_{3,l}$  - гравитационная постоянная;  $N$  - порядок учитываемых членов разложения гравитационного поля.

Таким образом, возмущающее ускорение  $f$  в уравнении (2.1) за счёт нецентральности гравитации Земли и Луны имеет вид:

$$f = \nabla u_{3,l} . \quad (0.18)$$

При расчёте возмущений от нецентрального гравитационного поля используем  $U_{3,l}^*$  вместо  $U$  в уравнении (2.3):

$$U_{3,l}^* = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + U_{3,l} , \quad (0.19)$$

где  $U_{3,l}$  - безразмерный возмущённый потенциал, преобразуется из размерного потенциала  $u_{3,l}$ .

Следует отметить, что в процессе преобразования координат КА из вращающейся системы координат системы Земля - Луна в селеноцентрическую систему координат существуют два возмущающих фактора:

- 1. Лунная либрация (изменение наклона оси вращения Луны по отношению к плоскости орбиты Луны).** Наклонение лунной экваториальной плоскости и плоскости лунной орбиты составляет  $6,69^\circ$ , как показано на рисунке 2.9. Это расхождение можно рассматривать как две части: наклонение лунной орбиты к плоскости эклиптики и наклонение лунного экватора к плоскости эклиптики. Учёт обоих этих факторов приводит к видимому кивающему движению Луны с севера на юг за один месяц, что называется либрацией [62]. Лунная либрация влияет на возмущающее ускорение от нецентральности гравитационного поля Луны.

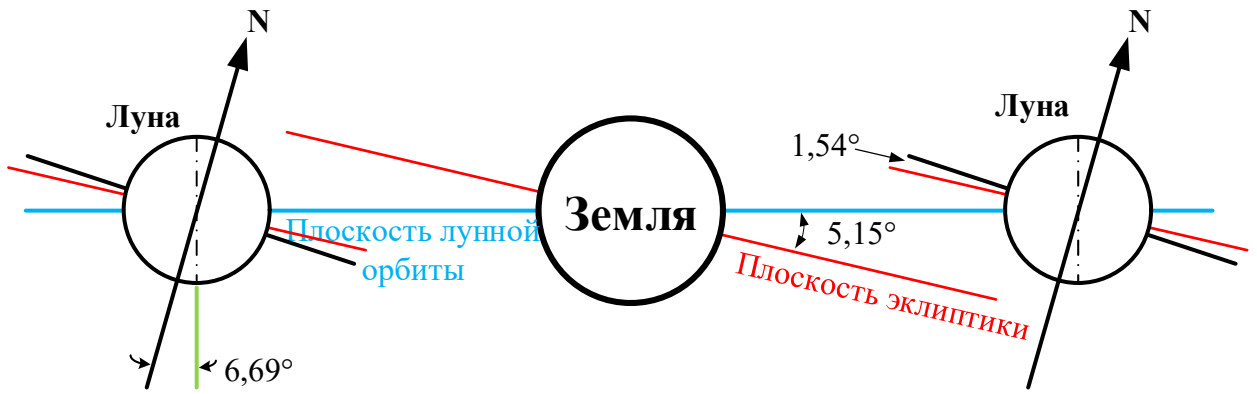


Рисунок 2.9 - Иллюстрация к происхождению лунной либрации

2. **Лунный «застой» (изменение наклона орбиты Луны).** Плоскость орбиты Луны вокруг Земли наклонена на  $5,15^\circ$  относительно плоскости эклиптики, а земной экватор наклонен на  $23,43^\circ$  относительно эклиптики. Пространственное наклонение лунной орбиты постепенно меняется в течение 18,6-летнего цикла [63]. В результате максимальное наклонение Луны изменяется примерно от  $28,58^\circ$  до  $18,28^\circ$ , как показано на рисунке 2.10. Лунный «застой» влияет на возмущающее ускорение от нецентральности гравитационного поля Земли.

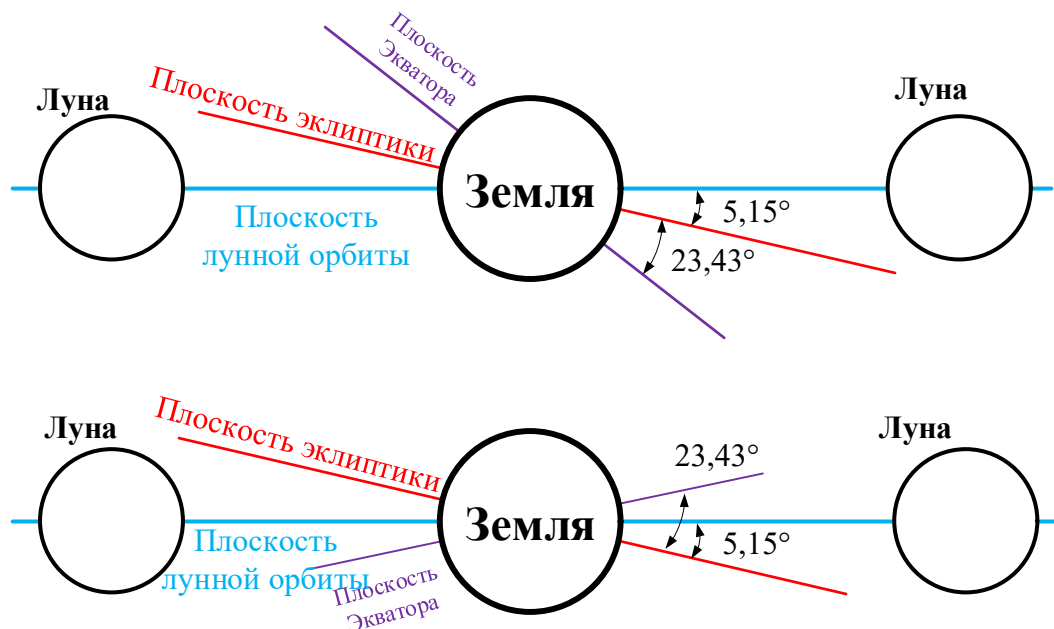


Рисунок 2.10 - Иллюстрация к лунному «застою»

в) **Возмущение от солнечного давления**



Многие исследования подтвердили, что солнечное давление очень сильно влияет на движение КА в окололунном пространстве [57]. Выражение для возмущающего ускорения  $f$  от солнечного давления в уравнении (2.1) выглядит следующим образом [60]:

$$f = -P_0 \left( \frac{a_u}{\Delta s} \right)^2 \frac{2C_r A \Delta s}{m \Delta s}, \quad (0.20)$$

где  $P_0$  - интенсивность солнечного излучения на орбите Луны,  $a_u$  - астрономическая единица,  $\Delta s$  - гелиоцентрический радиус-вектор от КА к Солнцу,  $C_r$  - коэффициент отражения материала,  $A$  - эффективная площадь поперечного сечения, связанная с геометрией КА,  $m$  - масса КА.

В соответствии с исследованиями других лунных миссий [59, 64], в данной работе используются следующие константы в уравнении (2.20):  $P_0 = 4,5605 \cdot 10^{-6} \text{ Н/м}^2$ ,  $C_r = 0,575$ ,  $a_u = 1,496 \cdot 10^8 \text{ км}$

### 2) Возмущение от эллиптичности орбиты Луны относительно Земли.

В реальности орбита движения Луны вокруг Земли не является круговой, а представляет собой сложную пространственную кривую. В первом приближении её можно описать как эллипс, средний эксцентриситет которого  $e = 0,0549$ . В связи с этим фактором в системе Земля - Луна необходимо рассматривать вместо круговой эллиптическую задачу трёх тел. При этом в уравнении (2.2), угловые ускорение и скорость вращения Луны вокруг Земли переписываются как функции истинной аномалии  $\mathcal{G}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= \frac{-2(\mu_1 + \mu_2)}{a^3(1-e^2)^3} (1 + e \cos \mathcal{G})^3 e \sin \mathcal{G}, \\ \Omega &= \frac{\sqrt{\mu_1 + \mu_2}}{a^{3/2}(1-e^2)^{3/2}} (1 + e \cos \mathcal{G})^2, \end{aligned} \quad (0.21)$$

где  $a$  - большая полуось орбиты Луны.

Для эллиптической ограниченной задачи трёх тел, система безразмерных уравнений движения аналогична формулам (2.3) [65, 66]:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \omega_x, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \omega_y, \quad \ddot{z} = \omega_z, \quad (0.22)$$

где псевдопотенциал  $\omega$  определяется как  $\omega = U^*/(1 + e \cos \vartheta)$ ,

$$U^* = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - z^2 \cos \vartheta) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}; \quad \omega_x, \omega_y \text{ и } \omega_z - \text{частные производные от}$$

$\omega$  по координатам КА [65]. Здесь переменная времени преобразуется из  $t$  в  $\vartheta$ .

Из-за не нулевого эксцентриситета орбиты в уравнениях движения возникают дополнительные члены возмущения  $\dot{\Omega} \times \rho$ ,  $\Delta\Omega \times (\Delta\Omega \times \rho)$  и  $2\Delta\Omega \times v$ .

### 2.2.2 Расчёт и влияние возмущающих ускорений на периодические орбиты в окололунном пространстве

Для окололунного пространства, перечисленные выше возмущения, не сильно отличаются для различных семейств орбит. Наиболее значительное отличие возникает из-за возмущений от нецентральности гравитационного поля Луны. Поэтому для анализа величин возмущающих ускорений выбираем почти прямолинейную гало-орбиту, так как эта орбита ближе всего к Луне.

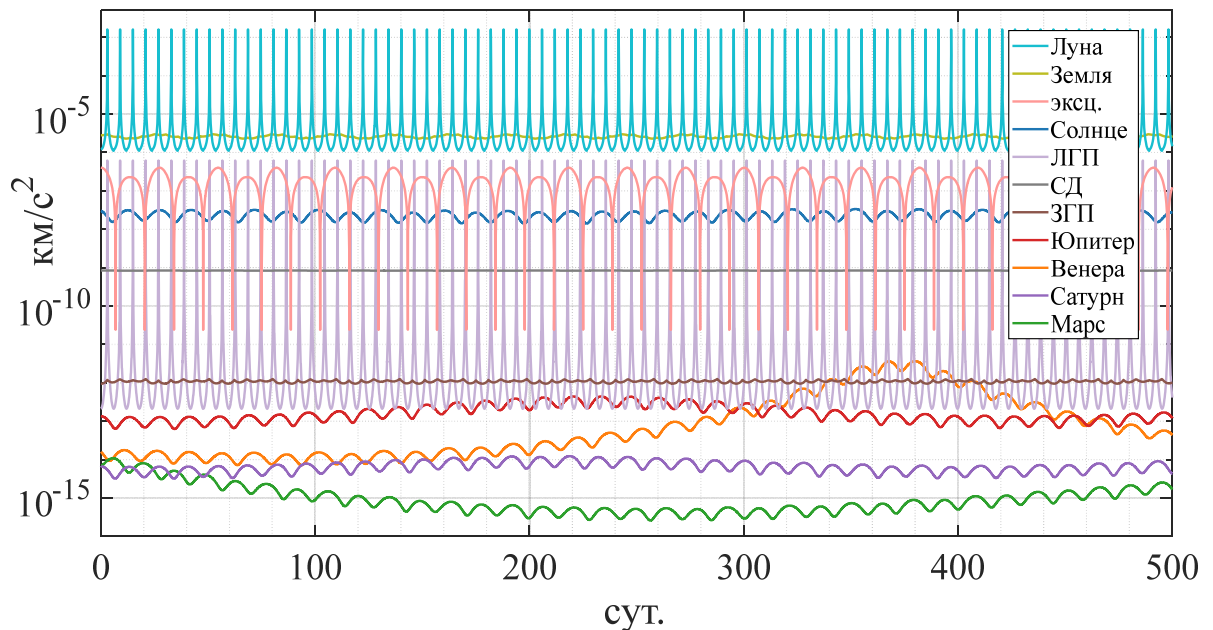


Рисунок 2.11 – Зависимости величины возмущающих ускорений от времени при движении КА по выбранной почти прямолинейной гало-орбите

На рисунке 2.11 показаны зависимости величины возмущающих ускорений от времени для почти прямолинейной гало-орбиты с  $\max|x| = 9213$  км и периодом 5,96 суток [57]. На рисунке показаны гравитационные ускорения от центральных тел (Земли и Луны), чтобы сравнить их с возмущающими ускорениями. Возмущения от гравитации Солнца и эксцентриситет орбиты Луны оказывают самое существенное влияние на периодические орбиты системы Земля - Луна.

Согласно рассчитанным значениям, на рисунке 2.12 показаны суммарные диапазоны возмущений, которые могут быть использованы для уточнённого моделирования движения при расчёте ТП в эфемеридной системе Земля - Луна.

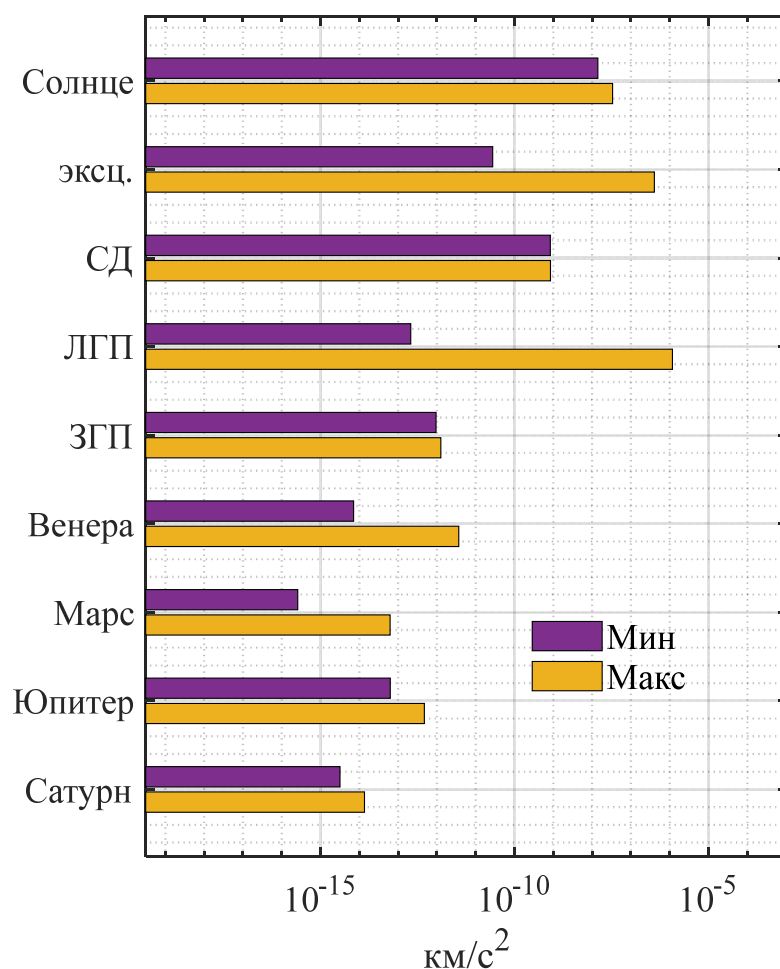


Рисунок 2.12 - Максимум и минимум величины каждого возмущающего ускорения в околорунном пространстве

## Выводы по второй главе

Таким образом, во второй главе получены следующие основные результаты:

1. Описаны уравнения движения КА в круговой ограниченной задаче трёх тел Земля - Луна, а также понятия точек либрации, периодических орбит, постоянной Якоби и инвариантных многообразий.

2. Параметризованы периодические орбиты для облегчения последующего определения орбит и расчёта перелётов между ними.

3. Описана математическая модель пассивного движения КА в системе Земля - Луна с учётом следующих возмущающих факторов:

- гравитация от других небесных тел Солнечной системы;
- нецентральность гравитационных полей Луны и Земли;
- особенности движения Луны (лунная либрация и лунный «застой»),
- давление солнечного света;
- эксцентриситет орбиты Луны.

4. Проанализирована величина перечисленных выше возмущающих ускорений для дальнейшего анализа. Выявлено, что наиболее существенное влияние на движение КА в окололунном пространстве оказывают гравитация Солнца и эксцентриситет орбиты Луны.

### 3 ГЕНЕРАЦИЯ ИСКУССТВЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ В ОКОЛОЛУННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Искусственные периодические орбиты являются частным случаем задачи изменения орбиты в системе трёх тел. Суть его заключается в том, что стартовая и финишная орбиты совпадают, но изменяется период движения по этой орбите. Искусственные орбиты перспективны для миссий по исследованию космоса в окрестностях точек либрации.

Параметрами, определяющими характеристики системы трёх тел, являются отношение масс первичного и вторичного небесных тел и расстояние между ними [29]. В реальности, для любой конкретной системы трёх тел, имеется естественное ограничение на существование периодических орбит. Например, если мы выбираем рабочую гало-орбиту в системе Земля - Луна с периодом 14 суток, т.е. хотим провести двухнедельную миссию, то форма и положение орбиты в пространстве являются строго определёнными. При этом максимальное расстояние между орбитой и Луной и амплитуда отклонения КА от плоскости движения Луны зафиксированы. Таким образом, никакие дополнительные требования к форме и/или положению рабочей орбиты не могут быть выполнены. Кроме того, период рабочей орбиты, который соответствует требуемому положению и фигуре орбиты, также является фиксированным значением. Этот факт будем называть временным и пространственным ограничением на орбиты [40]. Однако классическая периодическая орбита может не являться наилучшим вариантом для проектируемой миссии. Более того, выбранное наилучшее местоположение или конкретный орбитальный период будущей рабочей орбиты для перспективной лунной миссии могут оказаться уже использованными другим КА. Преодолению пространственного и временного ограничения за счёт использования ЭРДУ для создания искусственных периодических орбит в системе Земля - Луна посвящена данная глава диссертации.

### 3.1 Постановка задачи оптимального управления

Целью данного раздела является постановка задачи оптимального управления для осуществления межорбитальных перелётов КА с ЭРДУ в окололунном пространстве.

Безразмерные уравнения движения КА в системе Земля - Луна можно переписать в следующей векторной форме для КА ЭРДУ с учётом расхода рабочего тела и регулирования двигателя [47, 67]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, u) \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) + C_1 u T_{\max} \boldsymbol{\alpha} / m \\ -C_2 u T_{\max} / c \end{bmatrix}, \quad (0.23)$$

где  $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$  и  $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$  - вектора, определяющие положение и скорость КА;  $m$  - текущая масса КА;  $T_{\max}$  - максимальная величина тяги;  $c = I_{sp} g_0$  - скорость истечения рабочего тела ( $I_{sp}$  - удельный импульс двигателя;  $g_0 = 9,81 \text{ м/с}^2$  - стандартное ускорение свободного падения на уровне моря); Коэффициент дросселирования тяги  $u \in [0,1]$  и единичный вектор направления тяги  $\boldsymbol{\alpha}$  являются управляющими переменными;  $C_1 = \tau_*^2 / l_*$  - константа, обеспечивающая безразмерность ускорения от тяги двигателей;  $C_2 = \tau_*$  - константа, учитывающая масштаб времени в уравнении для расхода рабочего тела в уравнениях (3.1). Единицы измерения в (3.1) совпадают с соответствующими переменными в уравнениях (2.4):  $l_*$ ,  $s_*$ ,  $\tau_*$ .  
Функции  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{h}(\mathbf{v})$ , возникающие из свойств задачи трёх тел, определяются следующими выражениями:

$$\begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{r}) = - \left[ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right]^T, \\ \mathbf{h}(\mathbf{v}) = [2v_y, -2v_x, 0]^T. \end{cases} \quad (0.24)$$

Единичный вектор направления тяги  $\boldsymbol{\alpha}$  определяется:

$$\mathbf{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (0.25)$$

где  $\theta_1$  – управляющий угол между осью  $Ox$  и проекцией тяги на плоскость  $xOy$ , а  $\theta_2$  – угол между вектором тяги и плоскостью  $xOy$ .

В таблице 3.1 перечислены физические параметры, используемые в данной работе.

Таблица 3.1 - Перечень параметров

Параметры	Значение
$I_{sp}$	2000 с
$l_*$	384400 км
$s_*$	1024,5 м / с
$\tau_*$	375675,84 с

В отличие от импульсных двигателей большой тяги, ЭРДУ, действующие в условиях воздействия гравитации двух тел могут приводить к изменениям в положениях точек либрации (искусственные точки). Рассмотрим КА массой 1500 кг, движущийся под действием ЭРДУ с максимальной тягой 200 мН, что соответствует безразмерному ускорению

$$\frac{0,2 \text{ Н}}{1500 \text{ кг}} \times \frac{\tau_*^2}{l_*} \approx 0,05 \text{ единиц.}$$

На рисунках 3.1 а, б, в показаны результаты изменения составляющих ускорения по одной координате, а на рисунке 3.1 г показан результат совместного действия составляющих ускорения  $a_x$  и  $a_y$ . Начальная точка каждой стрелки соответствует положению определённой искусственной точки либрации, а направление и размер стрелки содержит информацию о дополнительном ускорении, генерирующем эту точку. Разные цвета на рисунке 3.1 г соответствуют разным величинам дополнительного ускорения в окрестностях точек либрации L1 и L2 системы Земля-Луна.

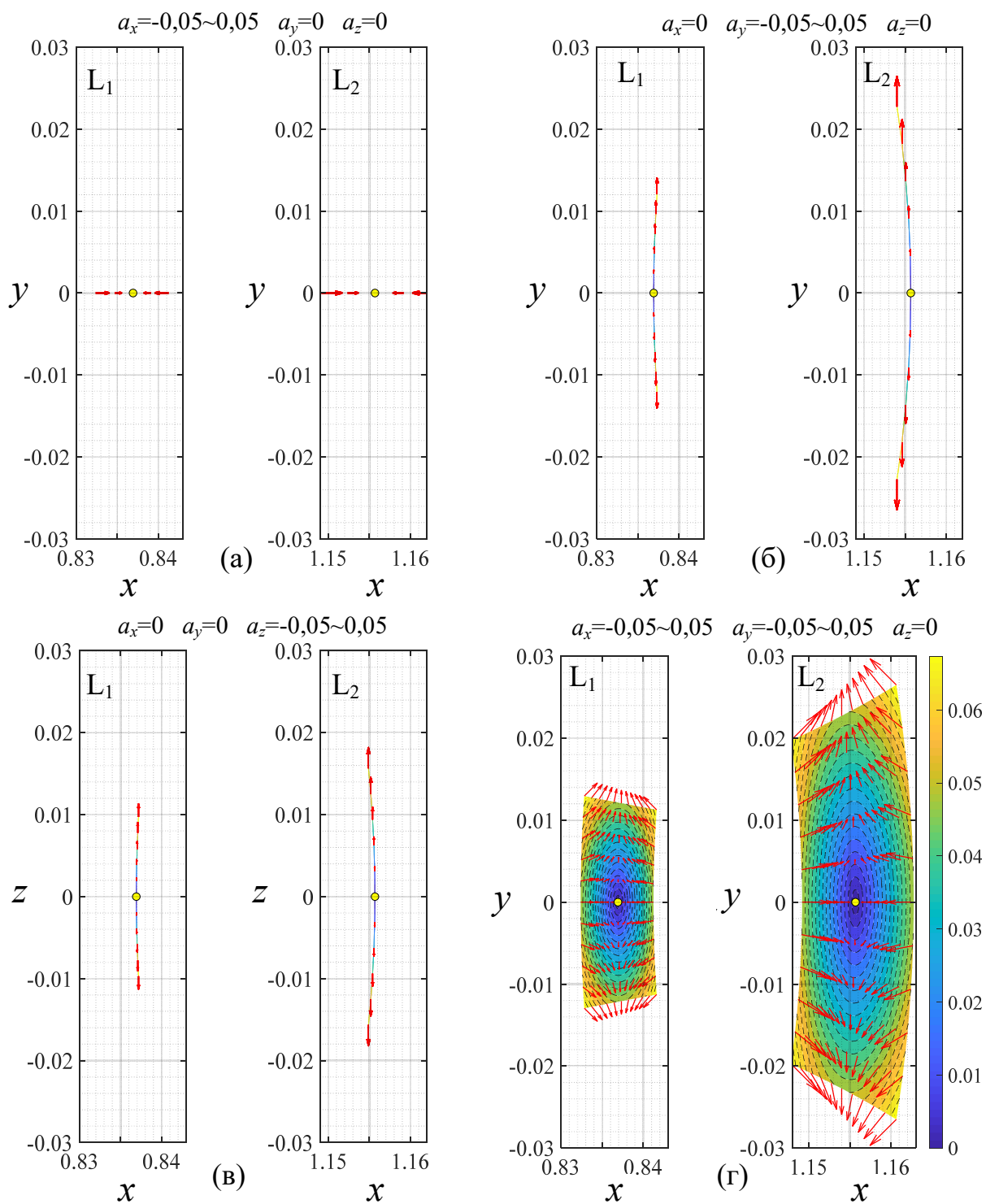


Рисунок 3.1 - Положение искусственных точек либрации  $L_1$  и  $L_2$  при изменении  $a_x, a_y$  и  $a_z$  от  $-0,05$  до  $0,05$ : а) ускорение параллельно оси  $x$   $\mathbf{a} = (a_x, 0, 0)$ ; б) ускорение параллельно оси  $y$   $\mathbf{a} = (0, a_y, 0)$ ; в) ускорение параллельно оси  $z$   $\mathbf{a} = (0, 0, a_z)$ ; г) ускорение параллельно плоскости  $xy$   $\mathbf{a} = (a_x, a_y, 0)$ .



Таким образом, воздействие ЭРДУ фиксированной величины и направления создаёт искусственные точки либрации, а также обеспечивает основу для создания искусственных периодических орбит относительно этих точек [40].

### 3.1.1 Задача об оптимальном по быстродействию перелёте (минимальном времени перелёта)

Будем искать оптимальное управление, доставляющее минимум времени перелёта (мин-ВП) между периодическими орбитами, согласно критерию:

$$J_t = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt . \quad (0.26)$$

После введения сопряжённого вектора ( $\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_r, \boldsymbol{\lambda}_v, \lambda_m]^T$ ) гамильтониан системы выражается как:

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{v} + \boldsymbol{\lambda}_v^T [\mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) + \frac{T_{\max} u C_1}{m} \boldsymbol{\alpha}] - \lambda_m \frac{T_{\max} u C_2}{c} + 1, \quad (0.27)$$

где  $\boldsymbol{\lambda}_r = [\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z]^T$  и  $\boldsymbol{\lambda}_v = [\lambda_{v_x}, \lambda_{v_y}, \lambda_{v_z}]^T$ .

Согласно теории оптимального управления, сопряжённые вектора подчиняются следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r = - \left( \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_v, \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = - \boldsymbol{\lambda}_r - \left( \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_v, \\ \dot{\lambda}_m = \frac{C_1 u T_{\max}}{m^2 \lambda_v} \boldsymbol{\alpha}, \\ \lambda_m(t_f) = 0. \end{cases} \quad (0.28)$$

Применяя принцип максимума Понтрягина (ПМП), определяются оптимальные управляющие переменные  $\boldsymbol{\alpha}^*$  и  $u^*$ :

$$\alpha^* = -\frac{\lambda_v}{\|\lambda_v\|}, \quad (0.29)$$

$$u^* = -\text{sign}(S),$$

где  $S = -C_1 \|\lambda_v\| \frac{c}{m} - C_2 \lambda_m$  - функция переключения двигателя.

Для задачи на оптимальное быстродействие функция переключения  $S < 0$ , поэтому управляющая переменная всегда  $u^* \equiv 1$ , то есть двигательная установка работает без выключений. Таким образом, получается 14-мерная система уравнений управляемого движения КА:

$$\dot{\Phi} = \mathcal{F}(\Phi) \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{m} \\ \dot{\lambda}_r \\ \dot{\lambda}_v \\ \dot{\lambda}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) - (\lambda_v / \lambda_v) C_1 u T_{\max} / m \\ -C_2 u T_{\max} / c \\ -\partial \mathbf{g}(\mathbf{r}) / \partial \mathbf{r} \cdot \lambda_v \\ -\lambda_r - \partial \mathbf{h}(\mathbf{v}) / \partial \mathbf{v} \cdot \lambda_v \\ -C_1 \lambda_v u T_{\max} / m^2 \end{bmatrix}, \quad (0.30)$$

где  $u \equiv 1$ ;  $\Phi$  - вектор состояния, включающий вектор фазовых координат, массу КА и сопряжённого вектора:  $\Phi = [\mathbf{x}, m, \boldsymbol{\lambda}]^T$ ,  $\mathbf{x} = [\mathbf{r}, \mathbf{v}]$ .

Для двух заданных точек начала и конца движения М ( $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$ ) и N ( $\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f$ ), которые расположены на орбитах вылета (ОВ) и прибытия (ОП) граничные условия и условия трансверсальности имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{начальные:} \quad & \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, m(t_0) = m_0, \\ \text{конечные:} \quad & \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f, \lambda_m(t_f) = 0. \end{aligned} \quad (0.31)$$

Таким образом, задача об оптимальном по быстродействию перелёте преобразуется в следующую двухточечную краевую задачу:

$$\text{найти } \lambda_0 \text{ и } t_f \Rightarrow s. t. \begin{cases} \dot{\Phi} = \mathcal{F}(\Phi), \\ \Phi_0 = [\mathbf{x}_0, m_0, \lambda_0], \Phi_f = [\mathbf{x}_f, m_f, \lambda_f], \\ M(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in \text{OB}, N(\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f) \in \text{OP}, \\ \lambda_m(t_f) = 0, H(t_f) = 0. \end{cases} \quad (0.32)$$

### 3.1.2 Задачи о перелётах с минимальным расходом рабочего тела и минимальном энергопотреблении

В этом разделе рассматриваются постановки двух задач формирования оптимального управления: доставляющего минимум расходу рабочего тела (РТ), согласно критерию:

$$J_f = \frac{T_{\max}}{c} \int_{t_0}^{t_f} u \, dt, \quad (0.33)$$

и доставляющего минимум энергопотреблению (ЭН), согласно критерию:

$$J_f = \frac{T_{\max}}{c} \int_{t_0}^{t_f} u^2 \, dt. \quad (0.34)$$

В критерии (3.11) функция включения-выключения двигателя является дискретной  $u \in \{0;1\}$ , в (3.12) – это непрерывный параметр, меняющийся от нуля до единицы.

Такое разделение задач введено для того, чтобы избежать необходимости искать минимумы разрывных функций из-за дискретности параметра управления  $u$  при расчёте оптимального по расходу рабрченого тела перелёте. Это позволяет использовать метод гомотопии [18] для сглаживания дискретного профиля управления. С учётом введения гомотопического параметра  $\varepsilon$ , задачи об оптимальном энергопотреблении и об оптимальном расходе РТ связаны между собой соотношением [68]:

$$J_{ef} = \frac{T_{\max}}{I_{sp} g_0} \int_0^{t_f} [u - \varepsilon u(1-u)] \, dt, \quad \varepsilon \in [0,1]. \quad (0.35)$$

Гомотопический метод, по сути, является одной из модификаций метода продолжения по параметру [69]. Для поиска оптимального с точки зрения расхода РТ управления мы следовали следующей методике: сначала получали решение задачи мин-ЭН при  $\varepsilon=1$  (3.11), затем, с использованием алгоритма продолжения, параметр  $\varepsilon$  постепенно уменьшается от 1 до 0, и получается требуемая траектория перелёта для критерия (3.10).

Введём вектор сопряжённых переменных  $\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_r, \boldsymbol{\lambda}_v, \lambda_m]^T$ , тогда Гамильтониан системы (3.1) для критерия (3.12) задаётся следующим образом:

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{v} + \boldsymbol{\lambda}_v^T [\mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) + \frac{T_{\max} u C_1}{m} \boldsymbol{\alpha}] - \lambda_m \frac{T_{\max} u C_2}{c} + \frac{T_{\max} C_2}{c} [u - \varepsilon u(1-u)], \quad (0.36)$$

где  $\boldsymbol{\lambda}_r = [\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z]^T$  и  $\boldsymbol{\lambda}_v = [\lambda_{v_x}, \lambda_{v_y}, \lambda_{v_z}]^T$ .

Согласно теории оптимального управления, получаем следующую систему для сопряжённых переменных:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r = - \left( \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_v, \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = - \boldsymbol{\lambda}_r - \left( \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_v, \\ \dot{\lambda}_m = \frac{C_1 u T_{\max}}{m^2 \lambda_v} \boldsymbol{\alpha}. \end{cases} \quad (0.37)$$

Применяя ПМП, получим следующие выражения для оптимальных функций управления  $\boldsymbol{\alpha}^*$  и  $u^*$  [18]:

$$\boldsymbol{\alpha}^* = - \frac{\boldsymbol{\lambda}_v}{\|\boldsymbol{\lambda}_v\|},$$

$$u^* = \begin{cases} 0 & S > \varepsilon, \\ (\varepsilon - S) / 2\varepsilon & -\varepsilon \leq S \leq \varepsilon, \\ 1 & S < -\varepsilon, \end{cases} \quad (0.38)$$

где  $S = 1 - \frac{C_1 \|\lambda_v\|_c}{C_2 m} - \lambda_m$  - функция переключения двигателей.

Будем считать, что решение задачи оптимального управления для некоторой ТП с мин-ВП получено и известно минимальное ВП  $t_{f_{\min}}$ . Тогда постановка задачи перелётов с мин-РТ и длительностью  $t_f \geq t_{f_{\min}}$  имеет следующий вид:

$$\text{найти } \lambda_0 \Rightarrow s. t. \begin{cases} \dot{\Phi} = \mathcal{F}(\Phi), \\ \Phi_0 = [\mathbf{x}_0, m_0, \lambda_0], \Phi_f = [\mathbf{x}_f, m_f, \lambda_f], \\ M(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in \text{ОВ}, N(\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f) \in \text{ОП}, \\ \lambda_m(t_f) = 0, t_f > t_{f_{\min}}. \end{cases} \quad (0.39)$$

### 3.1.3 Используемые методы решения

Большинство методик, предложенных в современных исследованиях для расчёта оптимальных перелётов в задаче трёх тел, плохо сходятся, вычислительно неэффективны и не используют все особенности гравитации системы трёх тел для снижения требований к характеристикам реального изделия двигателя, таких как величина потребной тяги, время работы двигателей и расход РТ. В данной работе используются следующие вычислительные методы, методики решения и алгоритмы расчёта для решения задачи об оптимальных перелётах КА между периодическими орбитами системы Земля - Луна без затруднений в поиске начального приближения решения.

#### **а) Метод коллокации**

Метод коллокации [70] - это метод, используемый для интегрирования и обновления начальных приближений для генерируемой орбиты. Он обеспечивает альтернативный метод формирования орбит, который доказывает большую надёжность даже для случаев крайне неудачных

начальных приближений, в которых схема дифференциальной коррекции дает сбой [31]. В отличие от метода Ньютона, который должен обеспечивать только начальные приближения сопряжённых множителей, метод коллокации определяет значения вектора состояния и сопряжённого вектора в каждой точке дискретизации.

Предположим, что обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad (0.40)$$

решается на интервале  $[t_0, t_0 + c_k h]$ .

Выберём  $c_k$  из интервала  $0 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_n \leq 1$ . Полиномиальный метод коллокации аппроксимирует решение  $y$  уравнения (3.17) полиномом  $p$  степени  $n$ , удовлетворяющим начальному условию  $p(t_0) = y_0$ , и дифференциальным уравнениям  $p'(t_k) = f(t_k, p(t_k))$  во всех точках коллокации  $t_k = t_0 + c_k h$  для  $k = 1, \dots, n$ . То есть имеется  $n+1$  условие, которые позволяют определить  $n+1$  параметр, необходимые для задания полинома степени  $n$ . Методы коллокации являются неявными методами Рунге-Кутты. Коэффициенты  $c_k$  в таблице Батчера метода Рунге-Кутты являются точками коллокации.

MATLAB предоставляет функцию *bvp4c*, которая использует схему коллокации на основе формулы коллокации Lobatto IIIA. Многочлен коллокации дает C1-непрерывное решение, которое имеет высокий порядок точности равномерно в диапазоне интегрирования. Выбор сетки для разбиения интервала интегрирования и контроль ошибок основаны на результатах работы [71]. Данный метод позволяет определить численное решение как решение системы алгебраических уравнений [71, 72], полученных из граничных условий и условий, обеспечивающих требуемую конфигурацию орбиты. Затем решающая программа оценивает ошибку численного решения на каждом подинтервале. Если решение не

удовлетворяет критериям допуска, решающая программа корректирует сетку и повторяет процесс.

Таким образом, метод коллокации позволяет использовать специальные орбиты в задаче трёх тел, такие как периодические орбиты или соответствующие им инвариантные многообразия в качестве начального приближения для расчётов, при этом начальная величина потребной тяги устанавливается равной нулю.

### **б) Метод продолжения по параметру**

В качестве начального приближения решения используется орбита, удовлетворяющая определённому условию, а затем применяется метод продолжения по параметру для постепенного перехода к окончательному решению. Метод продолжения по параметру является одним из эффективнейших средств решения серии сложных краевых задач. Обычно используется один непрерывный параметр и существует известное решение задачи при одном из его значений. Затем при изменении параметра этот метод позволяет перейти от проблемы с известным решением к новому решению. Например, чтобы автоматически решить задачу об оптимальном перелёте в гравитационном поле без знания начальных приближений для значений сопряжённых переменных, автор [69] использует метод продолжения по гравитационному параметру. В работе [73] применяется метод продолжения по параметру (Ньютоновская гомотопия), чтобы постепенно обеспечить требуемые краевые условия.

В данной работе используются следующие модификации методов продолжения (МП) по параметру:

- 1) по начальным и конечным точкам (МП-точка):

**Операция:** Постепенно изменяем положения крайних точек в граничных условиях:

$$\begin{aligned}
P_1 = Q(\tau_1) : & \begin{cases} \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0(\tau_1), \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0(\tau_1), \\ \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f(\tau_1), \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f(\tau_1), \end{cases} \\
\Rightarrow P_2 = Q(\tau_2) : & \begin{cases} \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0(\tau_2), \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0(\tau_2), \\ \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f(\tau_2), \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f(\tau_2). \end{cases}
\end{aligned}
\tag{0.41}$$

Разница между  $\tau_1$  и  $\tau_2$  очень незначительная. При изменении точек старта и прибытия получается серия оптимальных ТП с ЭРДУ от точки к точке. Это позволяет проводить анализ траекторий, планирование движения КА и поиск глобального оптимального решения.

2) по величине потребной тяги двигателя (**МП-тяга**)

**Операция:** Формула метода продолжения по максимальному значению тяги записывается как [53]:

$$T = (1 - \kappa)T_B + \kappa T_M . \tag{0.42}$$

Уравнение (3.20) показывает, что когда параметр  $\kappa$  изменяется от 1 до 0, значение тяги может увеличиваться от меньшей тяги  $T_M$  до большей тяги  $T_B$  и наоборот.

**МП-тяга**, применяется для проведения моделирования с учётом различных значений тяги  $T$ . Для больших величин потребной тяги задача об оптимальных перелётах КА легко сходится. Однако для соответствия реальным возможностям двигателя **МП-тяга** рассчитывает минимальную тягу, необходимую для удовлетворения ТП с заданными ограничениями.

3) по длительности перелёта (**МП-время**)

**Операция:** В задаче перелёта КА с мин-РТ, время перелёта задано  $t_f$ . Формула метода продолжения по длительности перелёта имеет следующий вид:



$$t_f = (1 + \zeta)t_{f_{\min}} . \quad (0.43)$$

При этом  $\zeta$  постепенно увеличивается от 0 до значения, соответствующего заданному ВП  $t_f \geq t_{f_{\min}}$ . Здесь  $t_{f_{\min}}$  минимальная продолжительность перелёта, определённая в ходе решения задачи на оптимальное быстроедействие для этих же граничных условий.

4) по действующим возмущениям (МП-возмущение)

**Операция:** Выражение для возмущающего ускорения  $f$  в уравнении (2.1) переписывается как:

$$f = \delta f_{\text{прак}} . \quad (0.44)$$

С увеличением  $\delta$  от нуля до единицы, некоторое возмущающее ускорение  $f$  постепенно достигает своего практического значения  $f_{\text{прак}}$ .

В некоторых сценариях возмущающее ускорение настолько велико, что решение задачи может оказаться невозможным, если в качестве начального приближённого решения просто взять ТП, рассчитанную в модели без учёта возмущения. Метод продолжения позволяет постепенно увеличивать возмущающее ускорение от нуля до практического значения, что обеспечивает существование решения. Например, для расчёта перелёта КА с учётом возмущения от гравитации Солнца, гравитационная постоянная Солнца  $\mu_c$  постепенно увеличивается от 0 до своего реального значения, таким образом, получается ТП под действием возмущения гравитации Солнца.

5) метод гомотопии (МГ)

**Операция:** Задачи об оптимальном по энергетическим затратам (мин-ЭН) и об оптимальном по расходу рабочего тела (мин-РТ) перелётах связаны между собой соотношением:

$$J_{ef} = \frac{T_{\max}}{I_{sp} g_0} \int_0^{t_f} [u - \varepsilon u(1-u)] dt, \quad \varepsilon \in [0,1]. \quad (0.45)$$

Решение задачи оптимального управления, соответствующей критерию (3.10), сложнее, поскольку закон управления дискретен, но критерий (3.11) легко решается из-за непрерывного закона управления. В уравнении (3.23) параметр  $\varepsilon$  постепенно уменьшается от 1 до 0 и критерий оптимизации постепенно переходит от  $J_e$  к  $J_f$ , тем самым определяя дискретный закон управления.

### 3.2 Расчёт искусственных периодических орбит оптимальных по критерию минимального времени перелёта

Если точки старта и прибытия ТП лежат на одной и той же периодической орбите, то данную траекторию можно рассматривать как искусственную периодическую орбиту.

Согласно задаче оптимального управления (3.9), считаем ОВ и ОП одинаковые (опорная номинальная орбита 1, далее **О1**), и размещаем точку прибытия N в точке M. Таким образом, можно получить траектории оптимального перелёта КА из точки M в точку M.

#### 3.2.1 Методика и процедуры расчёта

Решение данной задачи выполняется при использовании следующей методики, а процедура расчёта представлена на рисунке 3.2.

- 1) Данные опорной номинальной периодической орбиты **О1** используются в качестве начального приближения для метода коллокации, а величина тяги и сопряжённые векторы устанавливаются равными нулю.
- 2) Используя **МП**-тяга постепенно увеличиваем  $T_{\max}$  до заданного значения, тем самым получается семейство искусственных орбит с различными ВП

(периодами искусственных орбит), начинающихся из заданной точки  $M$  на **O1**.

- 3) На основании решения шага 2, положение начальной точки  $M$  изменяется, для получения семейства всех искусственных орбит, разветвлённых из **O1**.

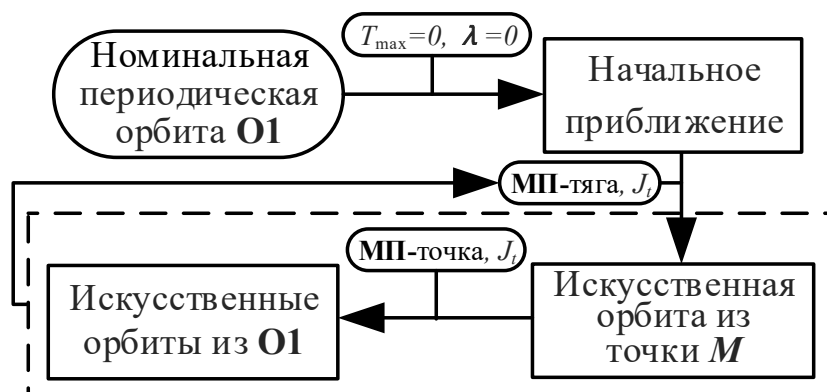


Рисунок 3.2 - Методика расчёта искусственных периодических орбит в системе Земля - Луна с использованием критерия мин-ВП

### 3.2.2 Результаты моделирования для искусственных периодических орбит, происходящих от орбиты Ляпунова

В этом разделе, для иллюстрации приведённой выше процедуры расчёта, выбрана орбита Ляпунова, параметры которой и параметры КА приведены в таблице 3.2. Точка  $M$  выбирается, как показано на рисунок 3.3 а.

Таблица 3.2 - Орбитальные параметры выбранной **O1** и параметры КА

Параметры	Значение
мин $ x $	48453,92 км
период	14,89 сут.
$T_{\max}$	до 0,5 Н
Стартовая масса	1500 кг

На рисунке 3.3 а показаны искусственные периодические орбиты Ляпунова, полученные при использовании ЭРДУ исходящие из точки  $M$  на орбите **O1**. По мере увеличения тяги орбитальный период уменьшается (рисунок 3.3 б).

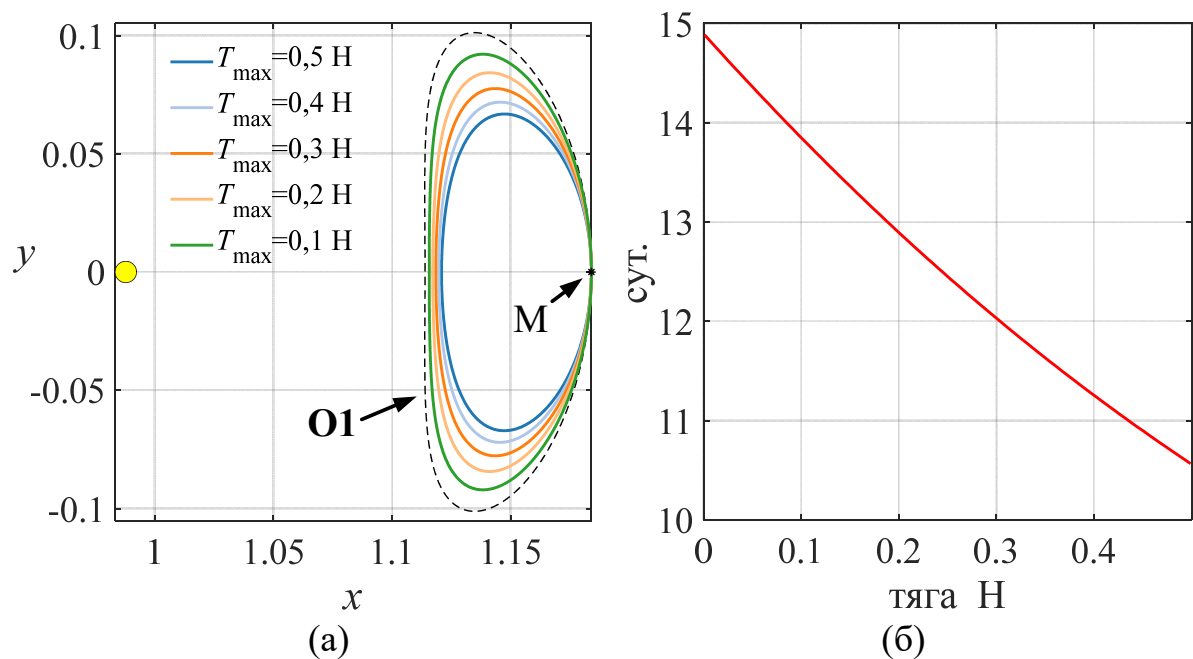


Рисунок 3.3 - а) Искусственные периодические орбиты, исходящие из точки М на орбите Ляпунова **O1**; б) Зависимость орбитальных периодов от величины используемой тяги

При увеличении тяги КА возвращается в точку вылета быстрее, что соответствует более короткому ВП (орбитальному периоду). Фактически, для такого сценария применения, как искусственная орбита, ВП (орбитальный период) может быть выбран из требований к конкретной миссии. Поэтому более целесообразно использовать закон оптимального управления с мин-РТ.

### 3.3 Расчёт искусственных периодических орбит оптимальных по критерию минимального расхода рабочего тела

#### 3.3.1 Методика и процедуры расчёта

Решение задачи расчёта искусственных орбит по критерию мин-РТ выполняется с использованием следующей методики:

- 1) В качестве начального приближения, требуемого методом коллокации, используется траектория КА, движущегося от точки М по классической периодической орбите с периодом  $t_f$  равным исходному орбитальному периоду  $T_0$ , а максимальная величина тяги  $T_{\max}$  считается равной нулю. При этом параметр регулирования  $u \equiv 0$ .

- 2) В случае  $\varepsilon=1$  используется вариация метода продолжения по параметру МП-тяги для постепенного увеличения  $T_{\max}$  до  $T_1$  без изменения  $t_f$ . Поскольку начальным приближением решения является классическая орбита, коэффициент регулирования двигателя  $u$  всё ещё остаётся постоянно равным нулю, но из-за наличия тяги мы получаем орбиту, отличную от первого шага. Эта орбита 2 обеспечивает начальное приближение для изменения орбитального периода  $t_f$  на следующем шаге.
- 3) На основе орбиты 2 при  $\varepsilon=1$ , проводится процесс МП-время, чтобы постепенно увеличивать (или уменьшать) орбитальный период  $t_f$  для искусственной орбиты. При изменении  $t_f$  двигатель должен включаться, поэтому коэффициент регулирования  $u$  постепенно начинает увеличиваться. Для одной и той же максимальной величины тяги  $T_{\max}$ , орбитальный период может увеличиваться или уменьшаться до предельных значений, которые обозначаются как  $t_f^+$  и  $t_f^-$ , что соответствует коэффициенту регулирования  $u \equiv 1$ .
- 4) После получения серии орбит, оптимальных по критерию мин-ЭН, для заданной  $T_{\max}$  и диапазона орбитальных периодов от  $t_f^+$  до  $t_f^-$ , на этом шаге гомотопический параметр  $\varepsilon$  уменьшается от 1 до 0 для получения семейства искусственных орбит происходящих от исходной орбиты, оптимальных с точки зрения мин-РТ.
- 5) Затем возвращаемся ко второму шагу, увеличиваем максимальную величину тяги  $T_{\max}$  до другого уровня  $T_2$  и пересчитываем новое семейство искусственных орбит в соответствии с шагами 2, 3 и 4.

В целом, шаг 2 увеличивает амплитуду тяги с нулевой стоимостью; шаг 3 позволяет получить искусственную орбиту с заданным периодом; 4

шаг - это гомотопический процесс, то есть переход от задачи мин-ЭН к задаче мин-РТ. Методика расчёта представлена на рисунке 3.4.

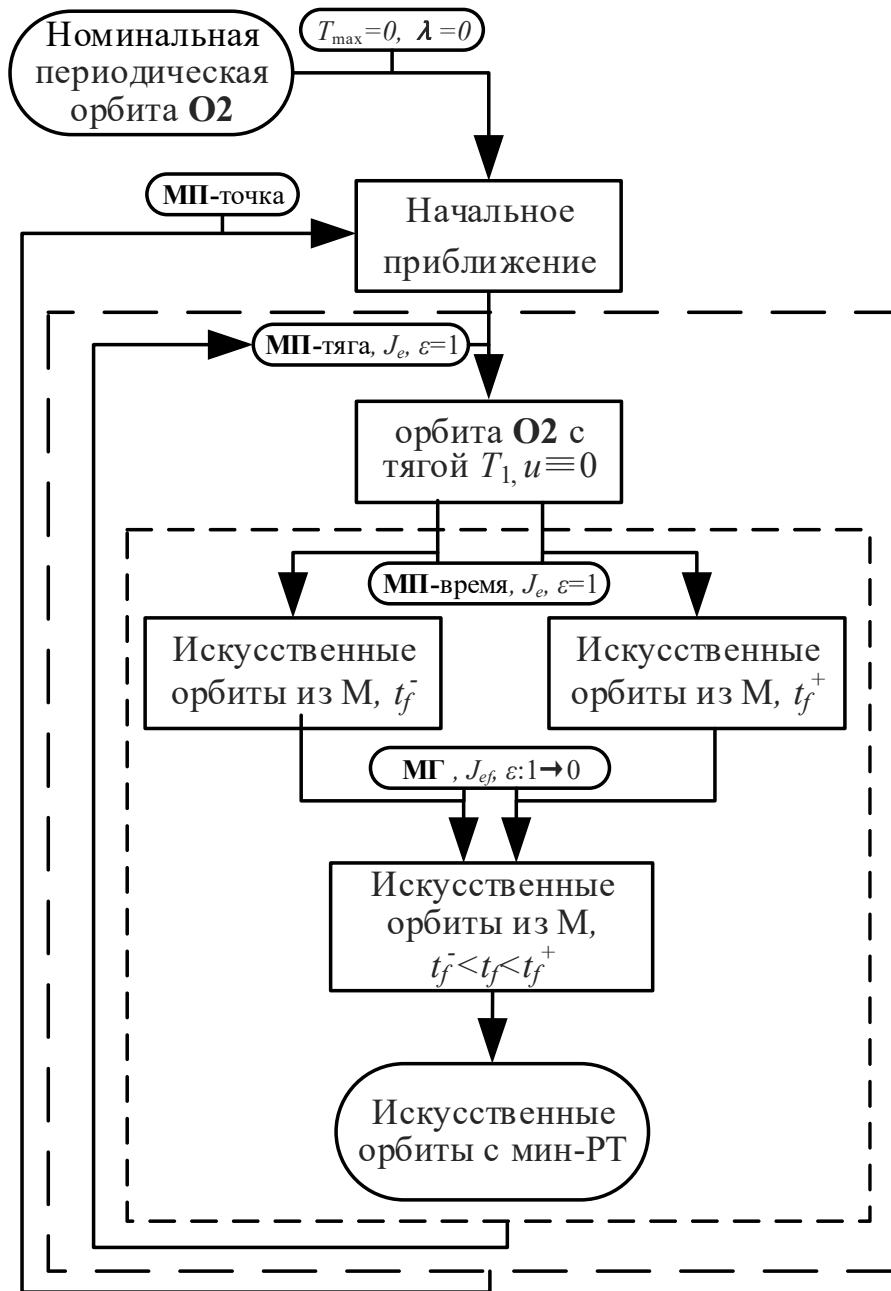


Рисунок 3.4 - Методика расчёта искусственных периодических орбит в системе Земля - Луна с использованием критерия мин-РТ

### 3.3.2 Результаты моделирования для искусственных гало-орбит

Для иллюстрации описанной выше процедуры расчёта выбрана гало-орбита O2, параметры которой приведены в таблице 3.3. Точка M выбирается в положении  $\text{Max}|x|$ . Масса КА также считается 1500 кг.

Таблица 3.3 - Орбитальные параметры **O2**

Параметры	Значение
Период $T_0$	9,96 сут.
$\text{Max} x $	34368 км
$ Az $	77751 км

На рисунке 3.5 представлена информация о нескольких искусственных орбитах, которые сгенерированы из гало-орбиты, описанной в таблице 3.3 при максимальной тяге  $T_{\text{max}}=0,1$  Н, включая фигуры орбит, динамику изменения периода, коэффициента регулирования  $u$  и единичного вектора направления тяги  $\alpha$ , а также мгновенные положения точки L2. Тонкой красной линией обозначен диапазон положения **O2** в околорунном пространстве.

Орбитальный период может изменяться от 9,49 до 10,51 суток, при этом форма орбиты существенно не изменяется. Процесс гомотопии показан на рисунке 3.5б. По мере того, как параметр гомотопии  $\varepsilon$  уменьшается от единицы до нуля, задача управления постепенно переходит от мин-ЭН к мин-РТ, создаётся ступенчатый профиль включения-выключения двигателя. При исходном орбитальном периоде  $t_f = T_0$  включение двигателя не требуется, при увеличении или уменьшении орбитального периода требуется включать ЭРДУ для поддержания орбиты. Пределом, которого достигает орбитальный период искусственных орбит, является момент, при котором двигатель работает с полной нагрузкой в течение всего полёта КА, то есть  $u \equiv 1$ , как показано на рисунках 3.5а и 3.5д. В остальных случаях  $u$  изменяется от 0 до 1.

С изменением величины тяги, можно получить всё семейство искусственных гало-орбит, происходящих от этой гало-орбиты, которые изображены на рисунке 3.6. Для одного и того же периода, меньшая тяга требует меньшего РТ, но большая тяга обеспечивает более широкий диапазон изменения орбитального периода. Стратегия генерации

искусственных орбит может значительно изменять период, сохраняя при этом исходную фигуру гало-орбиты неизменной, что обеспечивает большую свободу в планировании миссий по сравнению со сценарием орбитального управления по критерию мин-ВП.

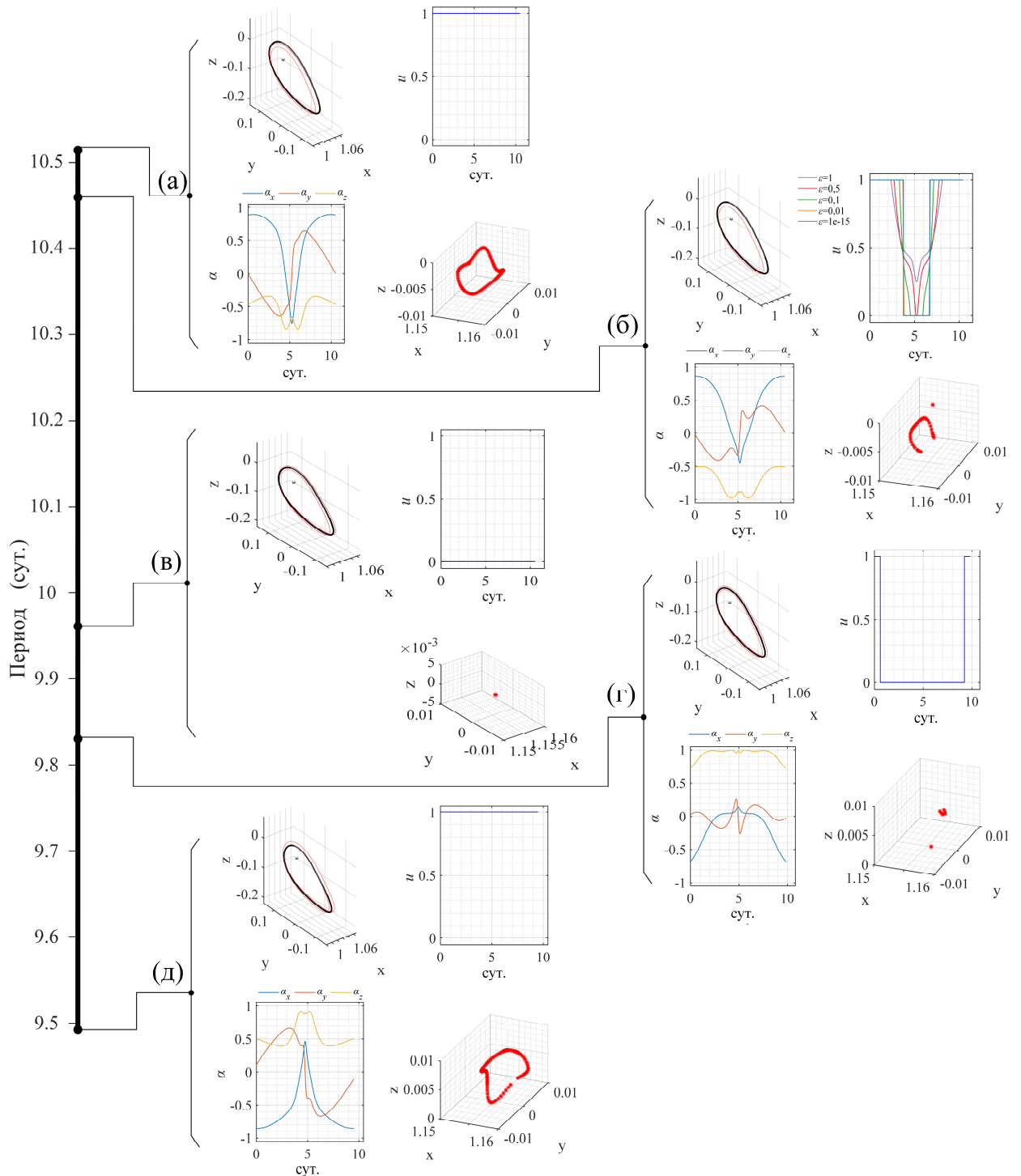


Рисунок 3.5 - Формирование искусственных гало-орбит при  $T_{\max} = 0,1$  Н:

- а) период 10,51 суток, потребление РТ 4,64 кг;
- б) период 10,46 суток, потребление РТ 3,32 кг;
- в) период 9,96 суток, потребление РТ 0 кг;



- г) период 9,83 суток, потребление РТ 0,60 кг;
- д) период 9,49 суток, потребление РТ 4,18 кг

Для КА массой 1500 кг и тяге двигателей от 0,02 Н до 0,2 Н, расход РТ за один орбитальный период составляет менее 0,6% от общей массы, поэтому такая стратегия генерации орбит осуществима.

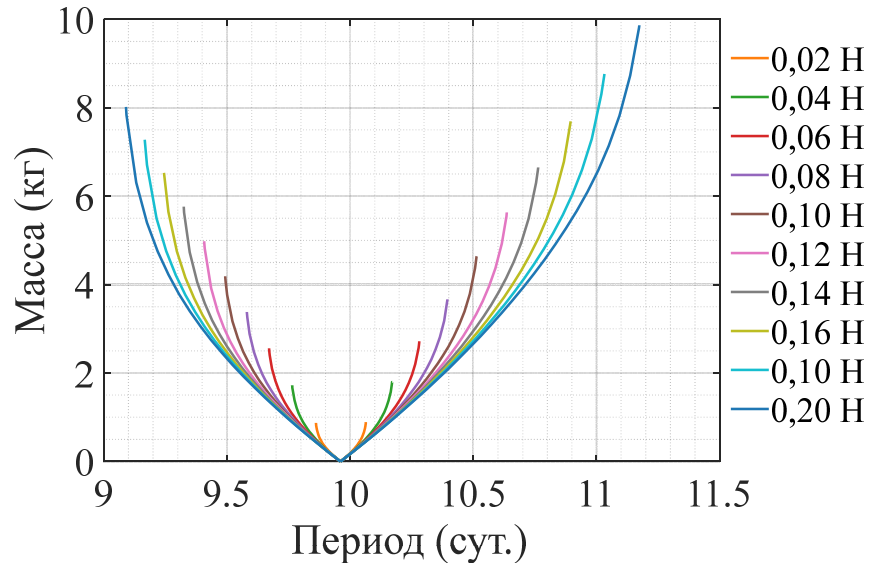


Рисунок 3.6 - Зависимость между РТ и периодами семейства искусственных гало-орбит

Теперь обсудим изменение периода, когда исходная точка М находится в произвольном положении на орбите. На рисунке 3.7 показано изменение искусственных орбитальных периодов по параметру  $\tau$ , который определяет положение начальной точки на орбите, при различных уровнях тяги  $T_{\max}$ . Прямая пунктирная линия соответствует исходной орбите с периодом  $T_0$ , выше находятся орбиты с искусственно увеличенным периодом, а ниже - с уменьшенным. Видно, что чем больше тяга, тем больше диапазон изменения периода и больше влияние параметра  $\tau$ , определяющего точку старта, на орбитальный период. Для  $T_{\max} = 0,2$  Н изменение диапазона периода составляет 0,2 дня, а при  $T_{\max} = 0,02$  Н меньше чем 0,02 дня.

Аналогичные расчёты могут быть проведены и для других видов периодических орбит (ОС и ВЕ). Создание искусственных орбит предназначено для обеспечения альтернативных рабочих орбит в миссиях

обеспечения ЛКС. При этом удаётся получить орбиты с практически неизменной фигурой, но с изменённым орбитальным периодом, что обеспечивает большие возможности для будущих лунных миссий, а также позволяют осуществить фазирование орбиты. Следует отметить, что искусственные орбиты не подходят для выполнения долгосрочных миссии из-за существования расхода рабочего тела. Потребные расходы рабочего тела показаны на рисунке 3.6.

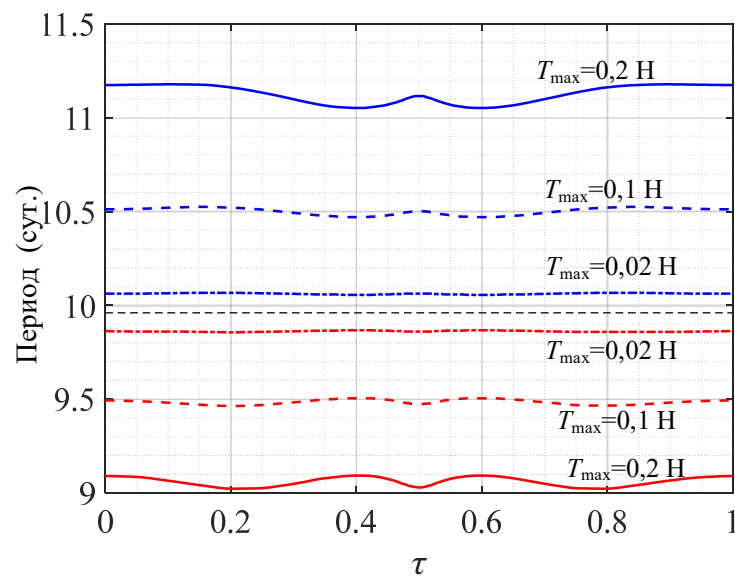


Рисунок 3.7 - Влияние положения начальной точки на верхнюю и нижнюю границы периода искусственных гало-орбит

### Выводы по третьей главе

Таким образом, в третьей главе получены следующие основные результаты:

1. Приведены используемые в диссертации постановки задач о формировании оптимального номинального управления при перелётах КА с ЭРДУ в окололунном пространстве: задача об оптимальном по быстродействию перелёте (мин-ВП), задача о перелёте с минимальным энергопотреблением (мин-ЭН) и задача об оптимальном по расходу рабочего тела перелёте (мин-РТ).

2. Описаны методики построения начальных приближений для итерационных процессов решения краевых задач с использованием естественной орбитальной структуры.

3. Приведены методики и процедуры расчётов искусственных орбит по критерию мин-ВП. Изменение орбитального периода происходит за счёт увеличения уровня тяги и не является эффективным.

4. Приведены методики и процедуры расчётов искусственных орбит по критерию мин-РТ. В этом случае стратегия генерации орбит может значительно изменять период, сохраняя при этом исходную фигуру орбиты неизменной при незначительном расходе рабочего тела.

## 4 РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕЛЁТОВ МЕЖДУ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ОКОЛОЛУННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В дополнение к искусственным орбитам, ещё одной возможностью применения описанной в главе 3 методики формирования оптимального программного управления КА с ЭРДУ для миссии в системе Земля - Луна является осуществление орбитальных перелётов, которые по существу отличаются тем, что точки вылета и прибытия находятся на двух разных орбитах. Данная глава посвящена описанию результатов решения задач об оптимальных перелётах КА с ЭРДУ между периодическими орбитами относительно точек либрации L1 и L2 системы Земля - Луна.

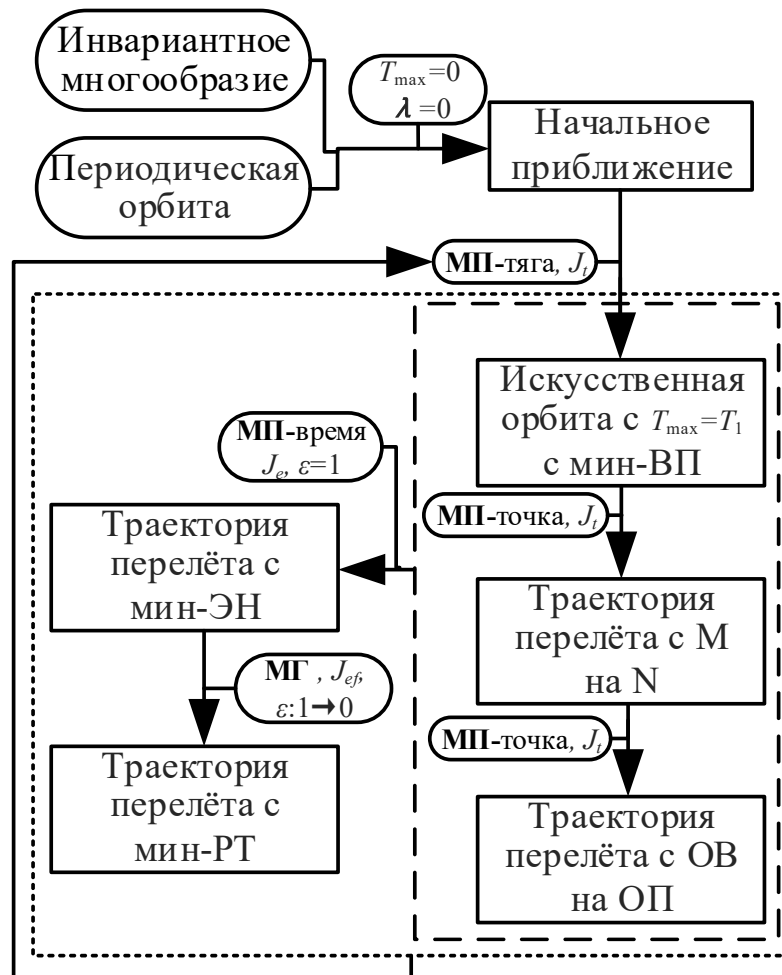


Рисунок 4.1 - Обобщенная методика решения задачи о формировании оптимального управления для перелёта КА с ЭРДУ в системе Земля - Луна

На рисунке 4.1 представлена схема обобщенной вычислительной методики, которая может быть использована для расчёта перелётов между различными орбитами. Далее в данной главе описываются конкретные операции, используемые для каждого типа межорбитального перелёта в системе трёх тел, а также приведены результаты моделирования. Для каждой рассчитанной ТП вычислено минимально необходимое значение тяги ДУ, которая может быть использована для осуществления перелёта. Стартовая масса КА считается фиксированной и равной 1500 кг, удельный импульс двигателя 2000 с.

В данной главе сначала решается задача о плоском межорбитальном перелёте, а затем осуществляется переход к пространственной задаче. Причина предварительного изучения плоской задачи заключается в том, что двумерная проекция трёхмерной траектории похожа на плоскую траекторию [15] и плоская траектория может быть использована в качестве начального приближения для решения пространственной задачи.

#### 4.1 Расчёт перелёта между орбитами Ляпунова в окрестности точки либрации L2

В таблице 4.1 представлены параметры стартовой и целевой орбит, перелёт между которыми обсуждается в данном разделе.

Таблица 4.1 - Параметры стартовой и целевой орбит

Орбиты	период	мин $ x $	$J$
<b>ОЛ1</b>	14,89 сут.	48453,92 км	3,1453
<b>ОЛ2</b>	15,51 сут.	35856,07 км	3,1023

В соответствии с описанной в главе 3 методикой и представленном на рисунке 4.1 вычислительным алгоритмом, моделируется пассивное движение КА по орбите вылета ОВ (**ОЛ1**) на один период, начиная из точки М, соответствующей  $\tau=0$ . Затем тяга постепенно увеличивается до  $T_{\max}$  (в данном случае  $T_{\max}=0,18$  Н) с помощью алгоритма продолжения по

параметру **МП-тяги**. После завершения этого процесса точка прибытия N постепенно направляется к целевой орбите прибытия ОП (**ОЛ2**),  $N = \text{ОЛ2}$  ( $\tau = 0$ ) с использованием модификации алгоритма продолжения по параметру **МП-точка**. Это позволяет получить оптимальный по быстродействию перелёт КА с ЭРДУ от точки к точке, обозначаемый в данной работе **ТП1** и изображенный на рисунке 4.2. На этом же рисунке показана зависимость оптимального угла направления тяги  $\theta$  на **ТП1** (в плоском случае  $\theta_1 = \theta$  и  $\theta_2 = 0$ ).  $\theta$  определяется следующим образом:

$$\tan \theta = \frac{-\lambda_{v_y}}{-\lambda_{v_x}} \quad (0.46)$$

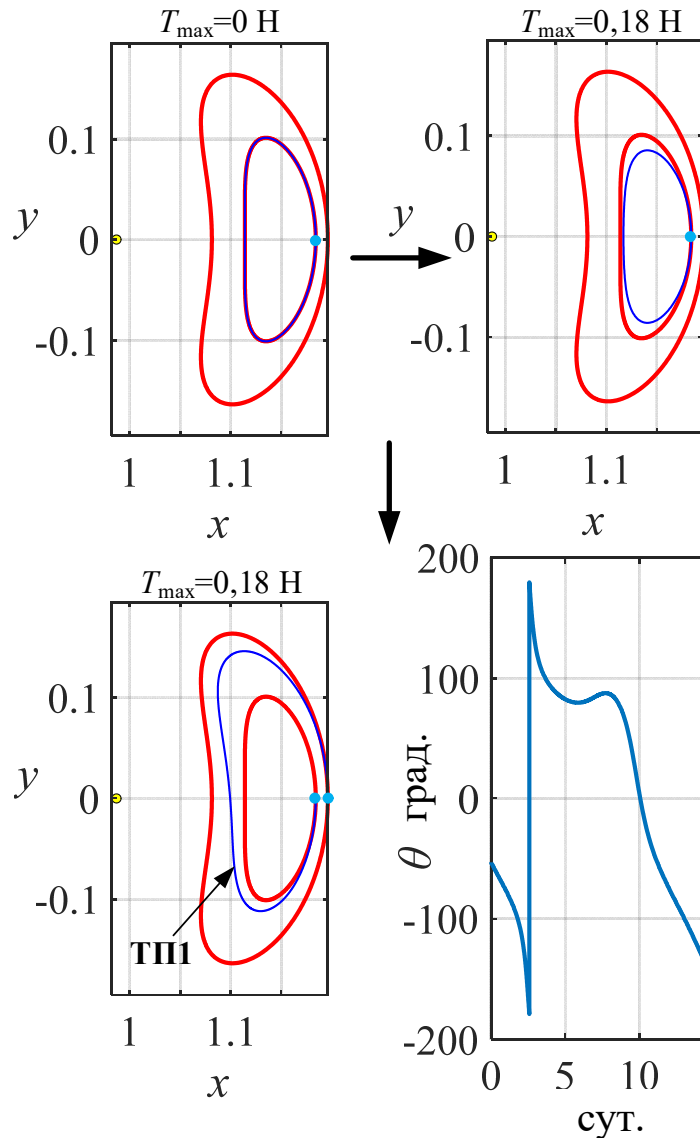


Рисунок 4.2 - Оптимальный по быстродействию перелёт КА с ЭРДУ между точками M и N L2-ОЛ (**ТП1**)

**ТШ** - оптимальная по быстродействию траектория перелёта между конкретными точками, лежащими на орбите. Мы не можем воспользоваться условиями трансверсальности для определения оптимальных точек старта и финиша, так как не имеем аналитического уравнения орбиты. Поэтому, для определения оптимального по быстродействию межорбитального перелёта, воспользуемся путём корректировки значений  $\tau_1$  и  $\tau_2$  (алгоритм МП-точка) таким образом, чтобы найти стартовую и финишную точки, лежащие на требуемых орбитах и соответствующие минимальному времени перелёта. Рисунок 4.3 показывает линии уровня времени перелёта, соответствующего каждому значению  $\tau_1$  и  $\tau_2$  при  $T_{\max}=0,18$  Н. Теоретически этот рисунок может быть продолжен в сторону увеличения времени перелёта до бесконечности (в направлении левого верхнего угла при увеличении  $\tau_2$ ). Глобальное решение об оптимальном по быстродействию перелёте с орбиты на орбиту отмечено точкой \* на красной кривой, и соответствующее ВП составляет 11,975 суток. На этом же рисунке показана полученная оптимальная программа минимального управления и соответствующая ей оптимальная траектория.

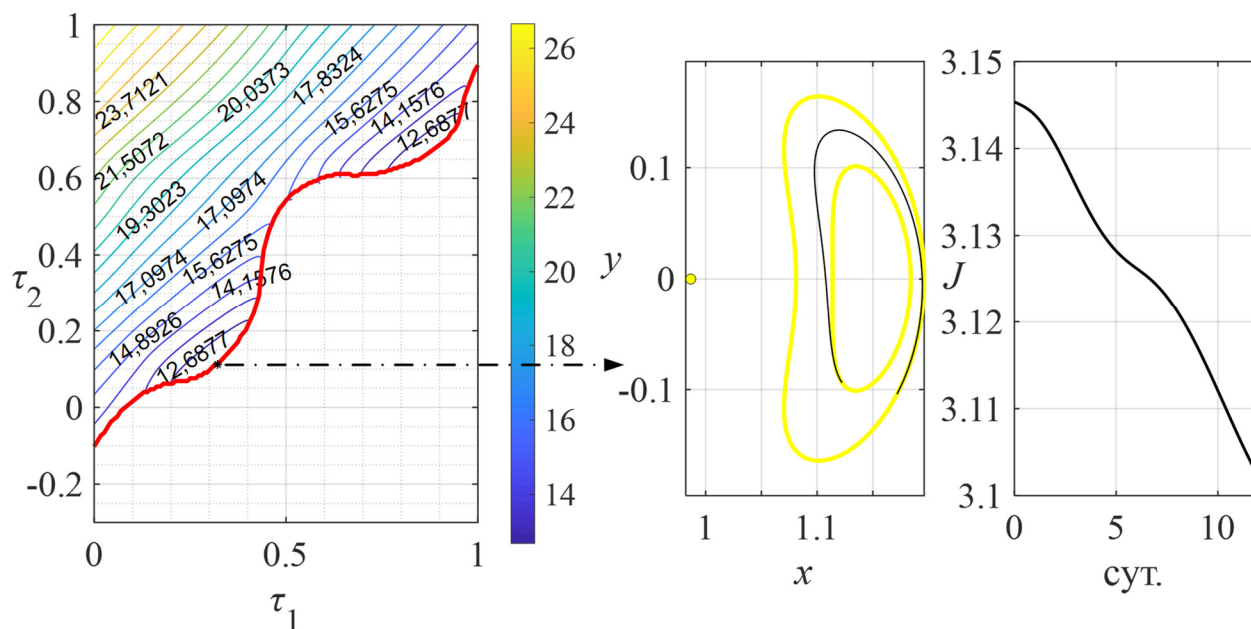


Рисунок 4.3 – Линии уровня времени перелёта в случае перелёта КА от **ОЛ1** на **ОЛ2**

Кроме того, проведённое исследование показывает, что вдоль всех траекторий, кроме соответствующей глобальному минимуму, постоянная Якоби изменяется немонотонно, а при движении вдоль оптимальной ТП с орбиты на орбиту - монотонно. В дальнейшем показано, что это условие выполняется и для других перелётов и, по-видимому, является необходимым условием глобальной оптимальности. Однако строгого доказательства этого факта не удалось получить.

Использование алгоритма продолжения по параметру **МП**-точка, для поиска оптимального решения при перелёте с орбиты на орбиту является задачей детального проектно-баллистического анализа для конкретной миссии, так как точка старта может определяться не из условий оптимальности перелёта, а из конкретных технических требований к миссии. В дальнейшем, за начальную и конечную точки расчёта ТП принимаются точки в самой удалённой от Луны части орбиты, так как гравитационная сила в этой точке минимальна и облегчает выведение КА на орбиту.

Описанная выше методика расчёта оптимального перелёта с орбиты на орбиту не может быть применена для любых величин тяги двигателей. Например, **ТП1** получена для тяги двигателей 0,18 Н и такая траектория не существует для двигателей с меньшей тягой. Поэтому, для формирования оптимального управления для перелёта с меньшими значениями располагаемой тяги, требуется рациональное использование особенностей структуры гравитационного поля в задаче трёх тел.

#### 4.1.1 Оптимальные по быстродействию траектории многовитковых межорбитальных перелётов

Применим описанную методику для снижения потребной тяги для осуществления перелёта за счёт использования двухвитковой траектории. Сначала осуществим моделирование пассивной траектории движения на два периода, т.е. два витка (как показано в левой верхней части рисунка 4.4). Затем, так же, как в предыдущем случае, сначала увеличиваем потребную



тягу  $T_{\max}$  от 0 до 0,18 Н и рассчитываем перелёт между заданными орбитами с помощью алгоритма МП-точка. На последнем этапе уменьшаем  $T_{\max}$  настолько это возможно после получения **ТП2**. Для двухвитковой траектории минимальное значение  $T_{\max}$  достигает 0,08 Н, а ВП составляет 29,9329 суток. Это показывает, что использование многовитковой орбитальной структуры позволяет осуществить перелёт КА с меньшей тягой за большее время.

На рисунке 4.5 показан результат применения данной методики для получения пятивитковой траектории для орбит, параметры которых показаны в таблице 4.2. В данном случае перелёт может быть осуществлен с  $T_{\max} = 0,09$  Н, а ВП составляет 76,88 суток.

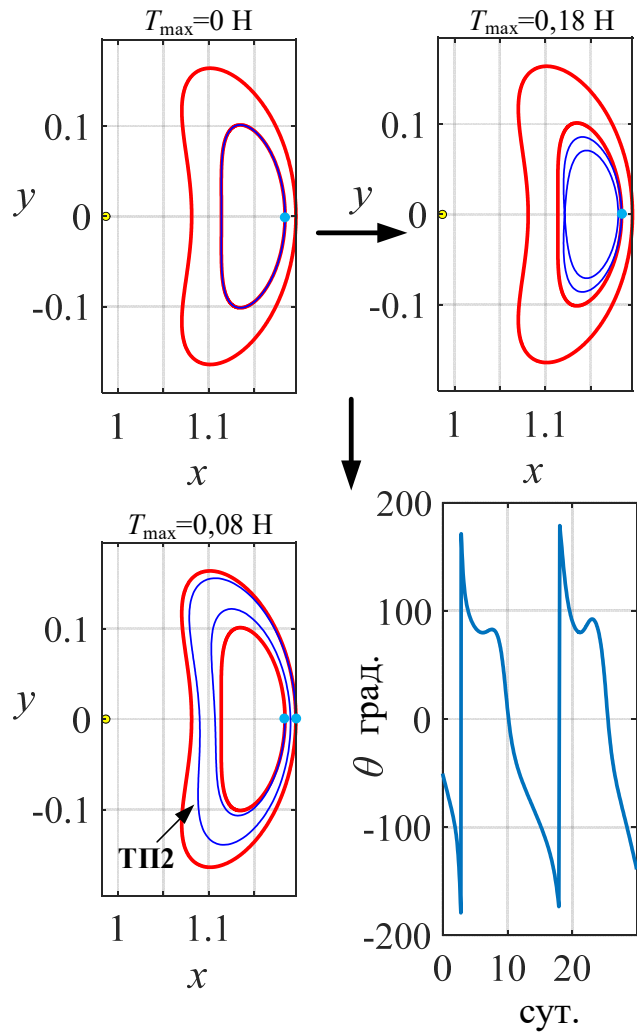


Рисунок 4.4 - Оптимальная ТП по мин-ВП с двумя витками от **ОЛ1** на **ОЛ2**

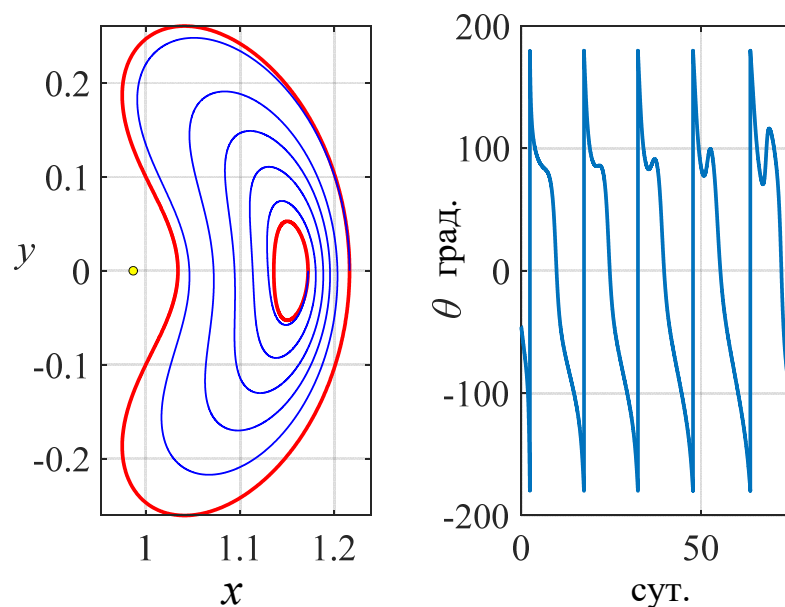


Рисунок 4.5 – Оптимальная траектория пятивиткового перелёта для большего диапазона изменения **L2-ОЛ**

Таблица 4.2 - Параметры орбит, представленных на рисунке 4.5

Орбиты	период	мин $ x $	$J$
ОВ	14,70 сут.	56835,98 км	3,1649
ОП	18,16 сут.	17781,84 км	3,0227

#### 4.1.2 Оптимальные по расходу рабочего тела траектории многовитковых межорбитальных перелётов

В этом разделе мы обсуждаем оптимальные по расходу рабочего тела перелёты между периодическими орбитами в системе Земля - Луна, полученные на основе **ТП2** (оптимальный по быстрдействию перелёт). Очевидно, что ВП в задачах мин-ЭН и мин-РТ будет больше, чем при решении задачи оптимизации по критерию минимального времени перелёта. Для **ТП2** мы получили минимальное время перелёта  $t_{f_{\min}} = 29,9329$  суток. Соответствующие ТП с увеличенной до 30,3416 суток длительностью оптимальные по критериям минимума энергозатрат (мин-ЭН) и рабочего тела (мин-РТ) рассчитаны с помощью алгоритма продолжения по параметру **МП**-время и показаны на рисунке 4.6.

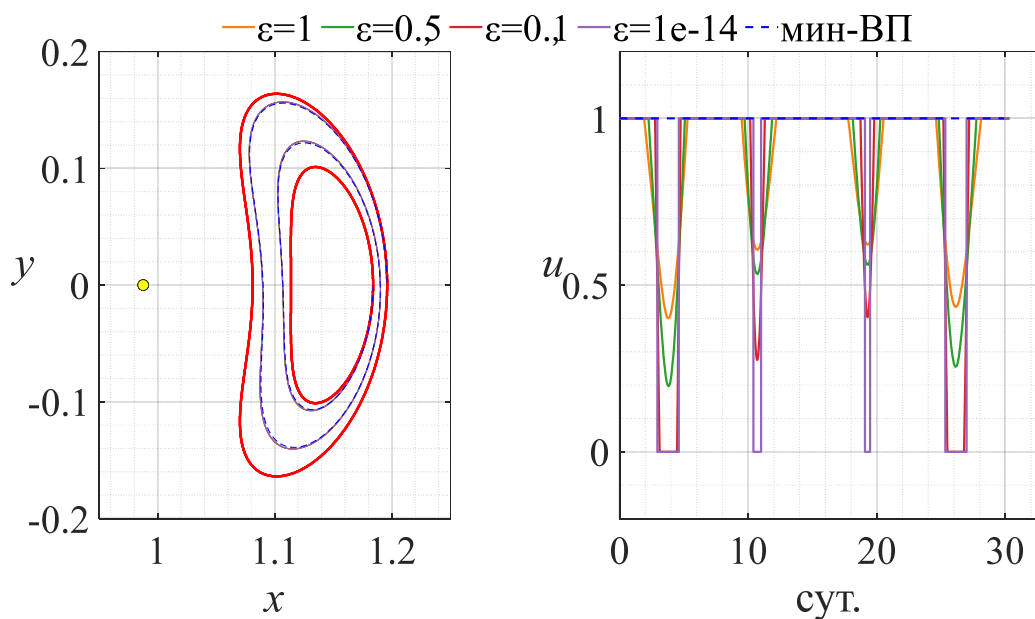


Рисунок 4.6 - Оптимальные ТП с критериями мин-ВП, мин-ЭН и мин-РТ, происходящие из **ТП2**

В процессе использования алгоритма продолжения по параметру **МГ**, по мере уменьшения параметра гомотопии  $\varepsilon$  задача постепенно переходит от мин-ЭН ( $\varepsilon = 1$ ) к мин-РТ ( $\varepsilon = 0$ ). Однако форма траекторий, соответствующих разным параметрам  $\varepsilon$ , мало отличаются друг от друга.

Проведённые расчёты показывают, что при постепенном увеличении времени перелёта от  $t_{f_{\min}}$  до  $t_f$  относительная конечная масса КА (конечная масса КА после перелёта, делённая на стартовую массу) сначала увеличивается, а затем уменьшается, то есть существует наилучшее время перелёта для использования двухвитковой схемы. Однако, без увеличения числа витков ТП,  $t_f$  не может увеличиваться бесконечно. Для сценария двухвиткового перелёта, начинающегося с **ТП2**, максимальная относительная конечная масса равна 0,9938 (отмечена красной точкой на рисунке 4.7) и соответствует  $t_f = 30,4199$  суток.

Сравнивая поведение постоянной Якоби вдоль траекторий перелётов, построенных на рисунке 4.6, также находим, что при законе управления с критерием мин-РТ постоянная Якоби  $J$  имеет ступенчатую монотонную тенденцию изменения с уменьшением параметра гомотопии  $\varepsilon$ , как показано

на рисунке 4.8. Это позволяет подтвердить, что для рассматриваемых в этом разделе перелётов постоянная Якоби вдоль оптимальной ТП также изменяется монотонно. Когда двигатель выключен ( $u = 0$ ), постоянная Якоби, естественно, не изменяется.

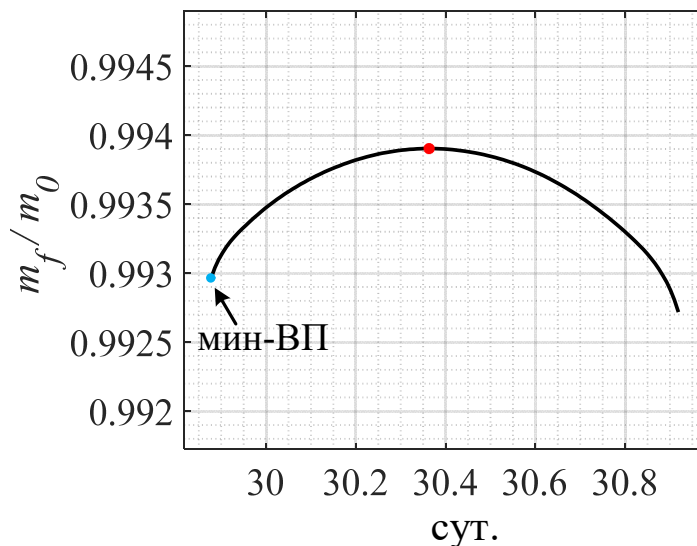


Рисунок 4.7 – Изменение относительной конечной массы КА в зависимости от ВП для двухвитковой траектории

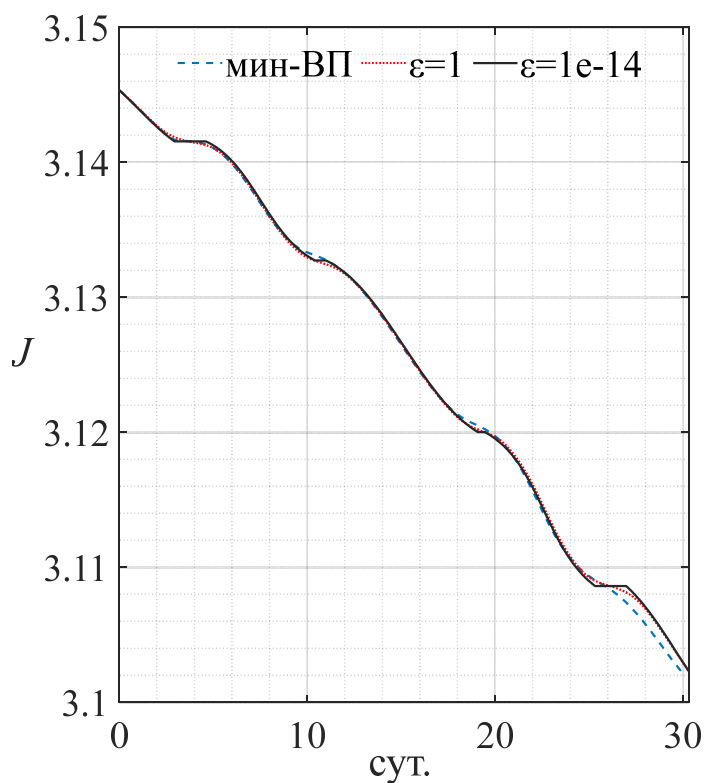


Рисунок 4.8 - Изменение постоянной Якоби вдоль ТП в процессе продолжения по параметру МГ

### 4.1.3 Оптимальные траектории межорбитальных перелётов, полученные с использованием структуры инвариантных многообразий

Помимо использования многовитковых траекторий, проектно-баллистические характеристики перелётов могут быть улучшены за счёт использования инвариантных многообразий, связанных со стартовой и финишной орбитами.

Продолжим исследование оптимальных перелётов между **ОЛ1** и **ОЛ2** в качестве примера. В отличие от многовитковых ТП, этот раздел сосредоточен на перелётах, использующих гомоклинические соединения [74]. Рассмотрим два типа инвариантных многообразий, ассоциированных с орбитой **ОЛ1** - устойчивое многообразие  $W^s$  и неустойчивое многообразие  $W^u$  (рисунок 4.9). Эти многообразия пересекаются на поверхности  $\Sigma$  на которой и лежит точка возможного перехода с между траекториями принадлежащими устойчивому и неустойчивому многообразию. Поскольку постоянная Якоби вдоль этих траекторий не изменяется, такой переход возможен без использования двигательной установки [75]. На рисунке 4.9 изображены устойчивые многообразия  $W^s$  и неустойчивые многообразия  $W^u$ , связанные с орбитой **ОЛ1**, и выбранная поверхность сечения  $\Sigma$  (в этом случае  $y=0$ ).

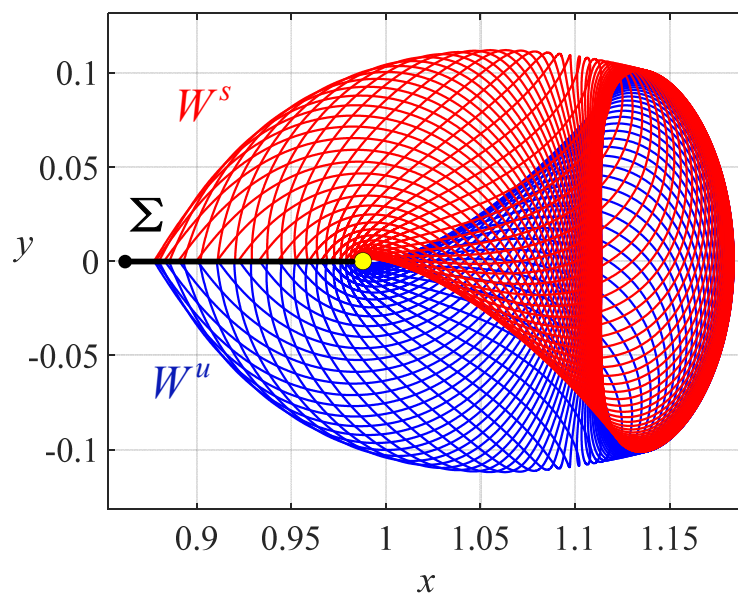


Рисунок 4.9 - Устойчивые и неустойчивые многообразия, связанные с орбитой **ОЛ1**

Четырёхмерные компоненты многообразий записываются для построения карты Пуанкаре, показанной на рисунке 4.10. На этом рисунке по осям  $x$  и  $y$  отложены значения  $v_x$  и  $v_y$  многообразий на поверхности  $\Sigma$ . Поскольку все многообразия ассоциированы с одной и той же орбитой, они имеют одинаковое значение постоянной Якоби, поэтому многообразия в точках пересечения на карте Пуанкаре имеют одинаковые координаты состояния, что соответствует гомоклиническому соединению. В нашем случае пересечение в точке А используется для гомоклинического соединения, поскольку высота орбиты, соответствующей точке В меньше лунного радиуса.

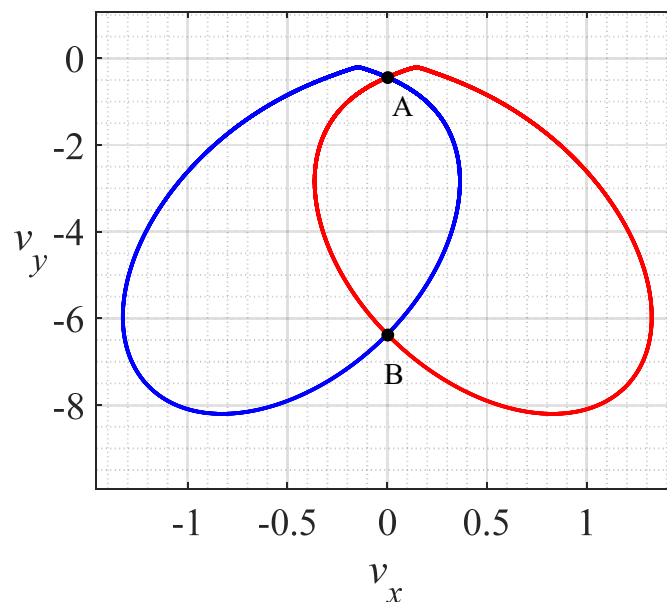


Рисунок 4.10 - Карта Пуанкаре для устойчивого и неустойчивого многообразия на поверхности  $\Sigma$  ( $y = 0$ )

Используя метод дифференциальной коррекции для построения устойчивых и неустойчивых многообразий, соответствующих точке А, точки вылета и прибытия на траектории, полученной с помощью гомоклинического соединения, постепенно перемещаются в точку М. Процесс получения модифицированного гомоклинического соединения, показан на рисунке 4.11. Необходимо отметить, что точка М на модифицированной гомоклинически соединённой траектории совпадает по положению с точкой М на рисунке 3.3,

но с небольшой разницей в скорости. Полученное гомоклиническое соединение используется в качестве начального приближения для расчёта перелёта КА с ЭРДУ из точки М в точку N.

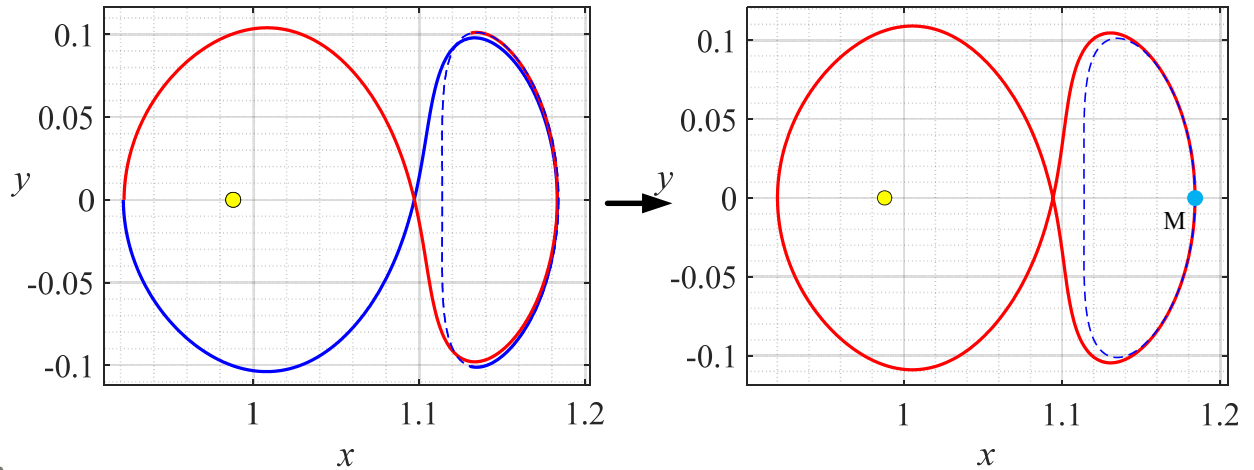


Рисунок 4.11 - Модифицированное гомоклиническое соединение используемое в качестве начального приближения

Для получения оптимального по быстродействию перелёта  $T_{\max}$  сначала увеличивается с 0 до 0,2 Н, а затем уменьшается до 0,08 Н, после того, как конечная точка перелёта переместится в точку N. Полученная ТП обозначена **ТПЗ** и показана на рисунке 4.12. По сравнению с **ТП2**, **ТПЗ** уменьшает ВП с 29,9329 до 26,1351 суток при тех же точках вылета и прилёта с той же тягой за счёт лучшего использования структуры гравитационного поля в окрестности точки либрации L2.

При решении соответствующей задачи об оптимальном по расходу рабочего тела перелёте, ВП постепенно увеличивается от  $t_{f_{\min}}$  для получения максимальной относительной конечной массы КА. Оптимальная по расходу рабочего тела ТП показана на рисунке 4.13. Минимальный расход РТ при перелёте с ЭРДУ из точки М в точку N с использованием гомоклинической структуры составляет 7,6904 кг по сравнению с соответствующим расходом, полученным для многовиткового перелёта в 9,1741 кг. Полное сравнение траекторий приведено в таблице 4.3.

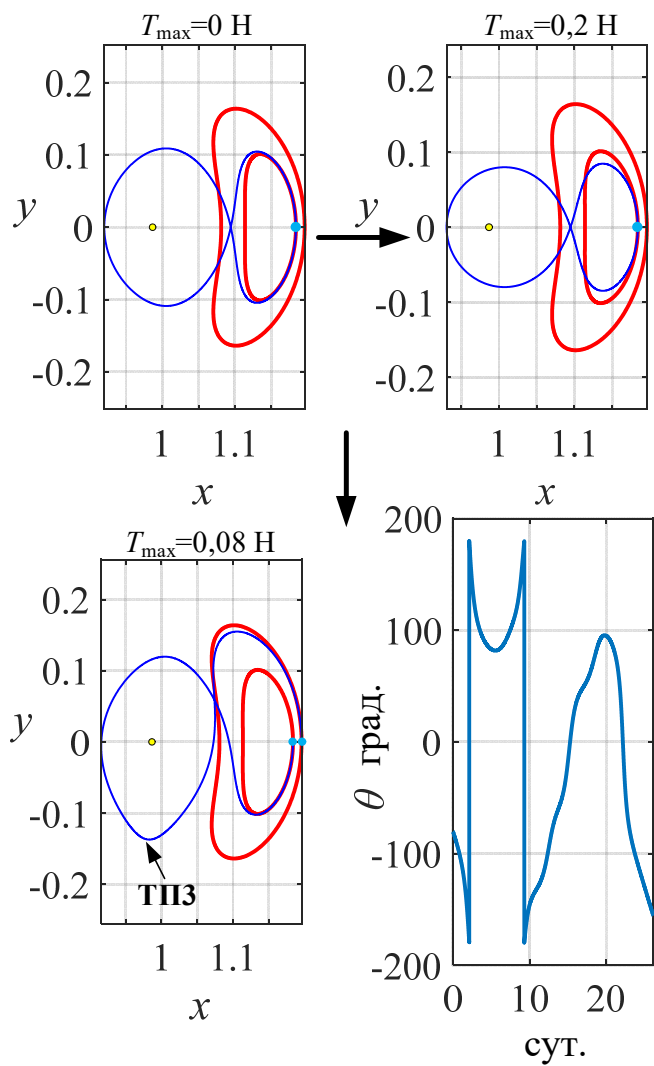


Рисунок 4.12 - ТПЗ с ОЛ1 на ОЛ2 с гомоклинической структурой

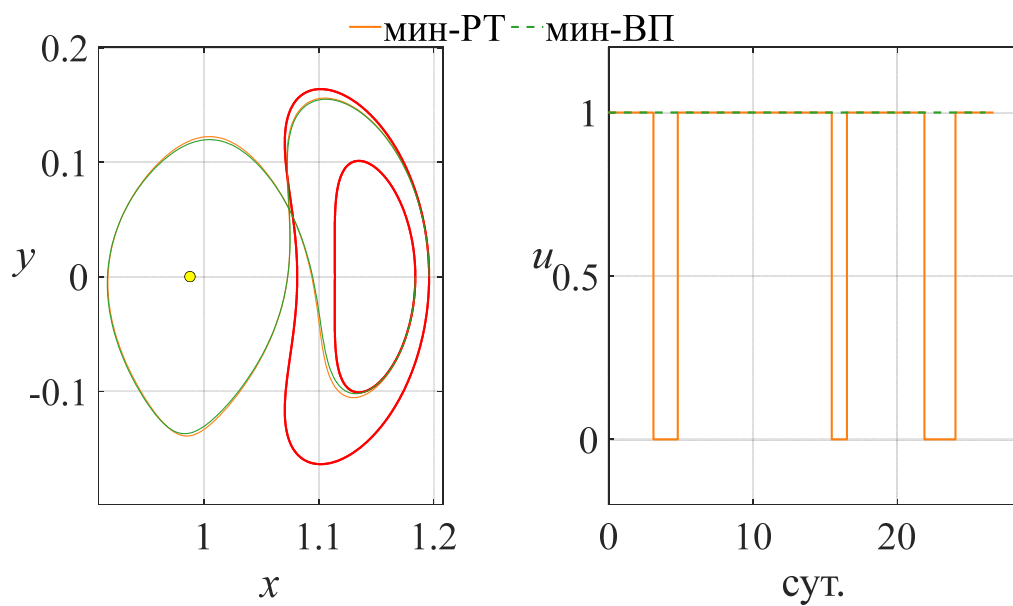


Рисунок 4.13 - Оптимальный перелёт по мин-РТ с гомоклинической структурой



Таблица 4.3 - Сравнение перелётов, полученных на базе многовиткового движения и гомоклинического соединения

Тип перелёта	мин-ВП	мин-РТ
многовитковые	29,9329 сут.	9,1741 кг
гомоклинические	26,1351 сут.	7,6904 кг

Таким образом, использование гомоклинической структуры приводит к более короткому ВП и меньшему расходу РТ, чем при использовании многовитковой структуры.

Поскольку методики, алгоритмы и процедуры расчёта перехода от оптимальных по мин-ВП к оптимальным по мин-РТ аналогичны для всех типов периодических орбит системы Земля - Луна, в дальнейшем сосредоточимся на исследовании задачи о формировании оптимального по быстродействию управления и соответствующей траектории движения.

#### 4.2 Расчёт траектории перелёта с орбиты Ляпунова на гало-орбиту в окрестности точки либрации L2

Полученные в разделе 4.1 результаты можно использовать в качестве начального приближения для решения задач об оптимизации пространственных перелётов на гало-орбиты. При этом используемые орбитальные конфигурации также можно разделить на многовитковые и гомоклинические.

##### 4.2.1 Планирование траектории перелёта между гало-орбитами с использованием многовитковых орбитальных структур

В данном разделе рассматривается решение задачи об оптимальном перелёте между орбитой Ляпунова (ГА0-ОЛ) и почти прямолинейной гало-орбитой (ПГА) [76]. Параметры орбит представлены в таблице 4.4.

Таблица 4.4 - Параметры орбит ГА0-ОЛ и ПГА

Орбиты	период	мак x	Az	J
ГА0-ОЛ	14,82 сут.	74204,68 км	0	3,1521
ПГА	7,34 сут.	18320,02 км	73058,35 км	3,0347

Используя семейство гало-орбит, происходящих от орбиты старта, точка прибытия ТП постепенно перемещается к целевой орбите (МП-точка), процесс перемещения продемонстрирован на рисунке 4.14, в результате чего получена целевая ТП, названная ТП4.

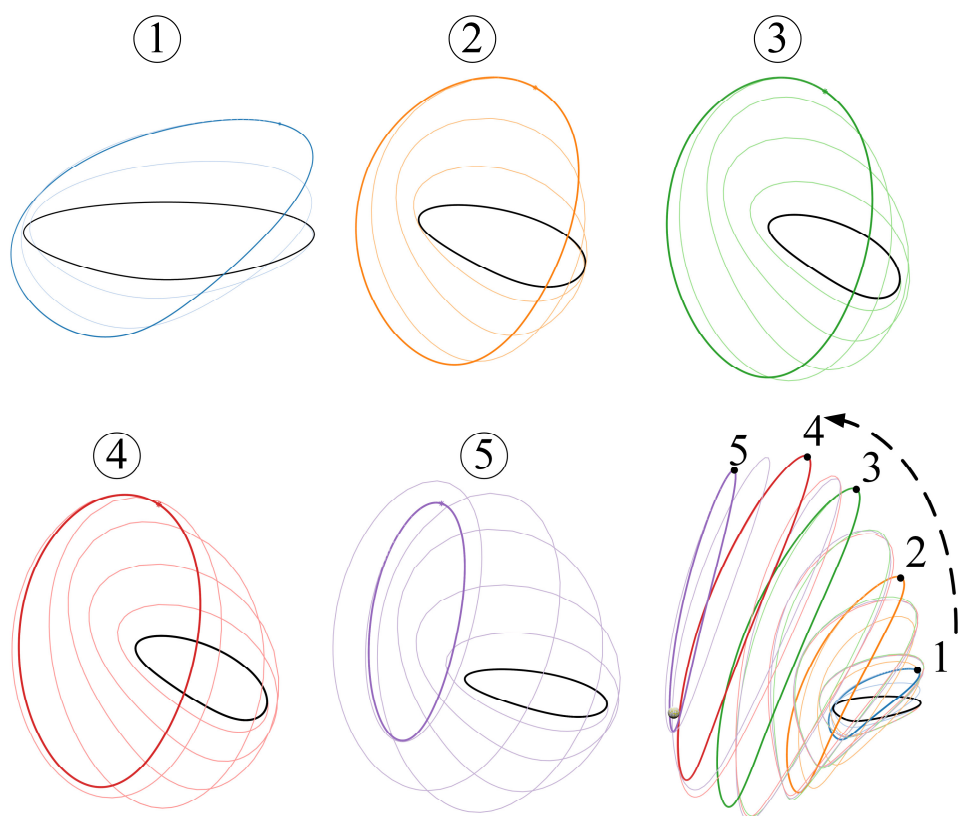


Рисунок 4.14 - Демонстрация процесса перемещения точки прибытия с ОЛ на ГА

При расчёте перелёта, если выяснится, что тяга двигателя недостаточна, можно использовать алгоритм перемещения по параметру МП-тяги или увеличивать количества витков ТП. Окончательная ТП изображена на рисунке 4.15. Потребная для перелёта тяга составляет 100 мН, ВП - 75,58 суток, расход РТ - 33,36 кг. При этом управляющие углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  записаны следующим образом:

$$\tan \theta_1 = \frac{-\lambda_{v_y}}{-\lambda_{v_x}}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{-\lambda_{v_z}}{-\lambda_{v_x}} \cdot \cos(\theta_1)$$
(0.47)

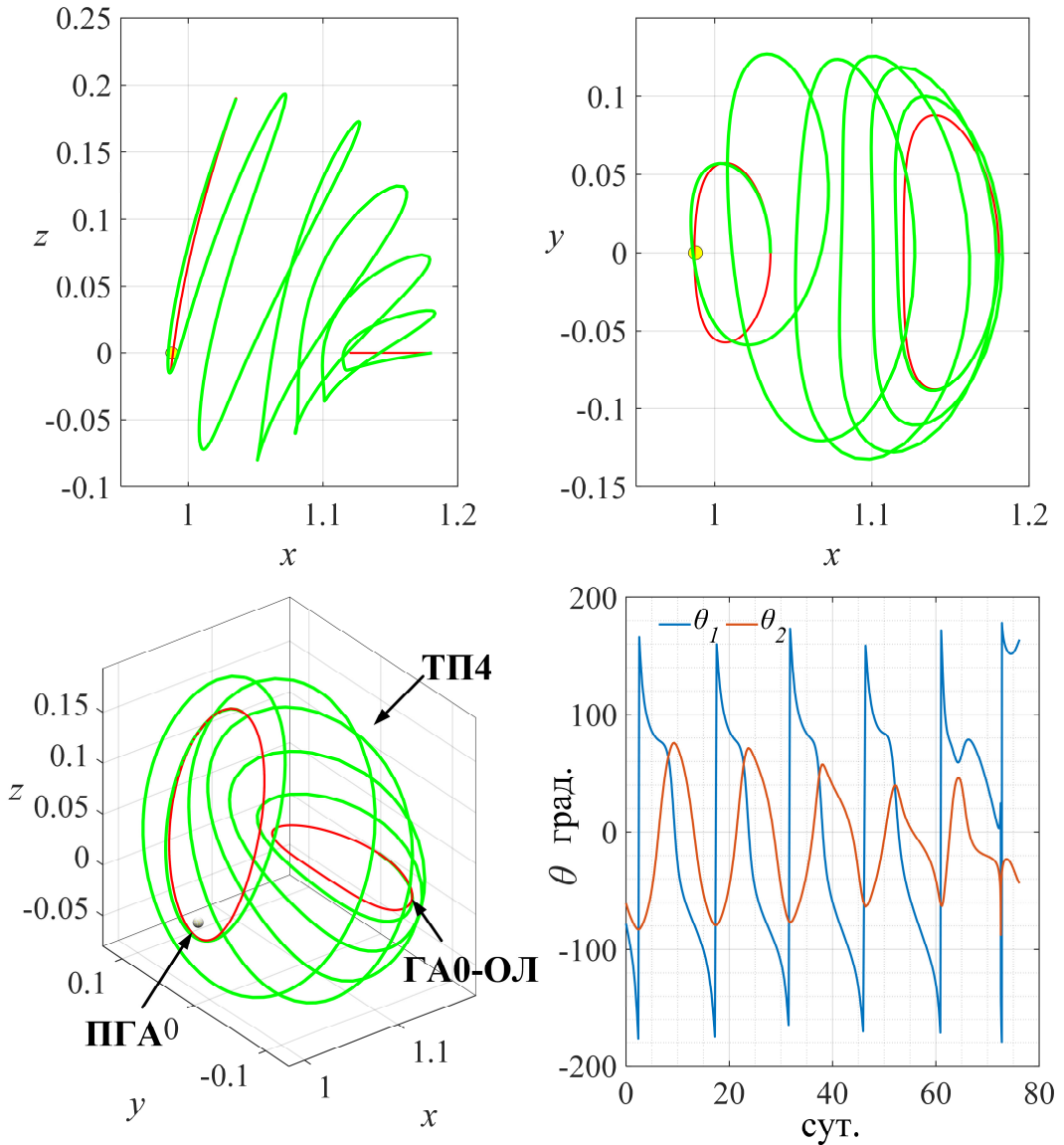


Рисунок 4.15 - **ТП4** с **ГА0-ОЛ** на **ПГА** по критерию мин-ВП

Благодаря симметрии орбит, для перехода на другое семейство гало-орбит с другим направлением движения необходимо только взять противоположное значение вертикальных компонент управляющего ускорения, чтобы получить сопряжённую ТП (показано на рисунке 4.16). По сравнению с **ТП4**, угол управления тяги по горизонтальному направлению неизменен, а в вертикальном направлении имеет противоположенное значение.

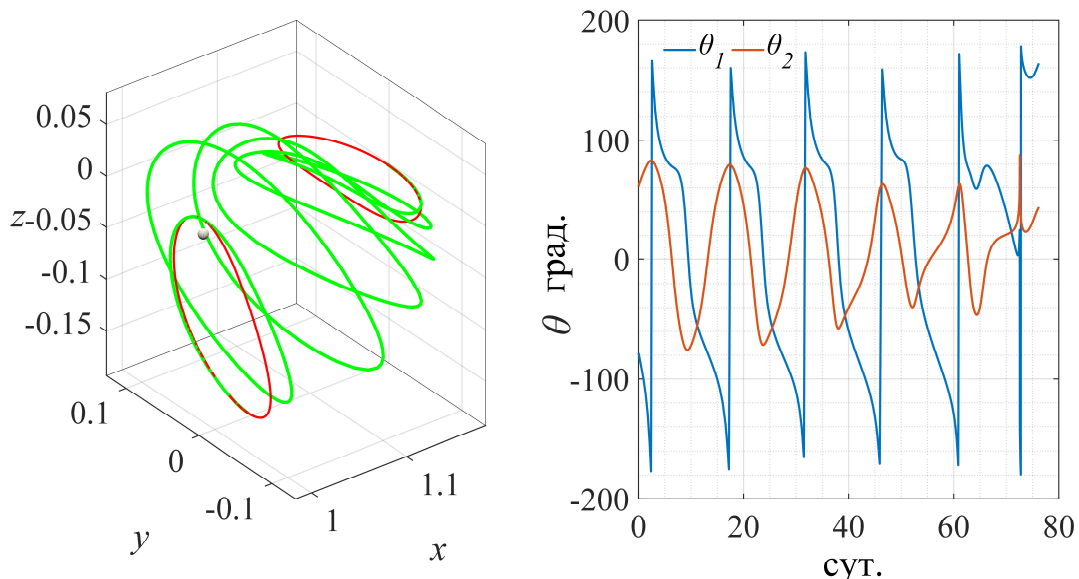


Рисунок 4.16 - Сопряженная **ТП4**, полученная с использованием симметрии динамики

#### 4.2.2 Планирование ТП с использованием структур инвариантных многообразий

Для этого перелёта также можно использовать структуру многообразия для построения траекторий. Методика и процедура расчёта такие же, как в разделе 4.1.3, с **ТПЗ** в качестве начального решения.

Для демонстрации работы методики выбираем четыре различные гало-орбиты, параметры которых представлены в таблице 4.5 и 4.6. Соответствующие траектории перелётов показаны на рисунках 4.17 и 4.18.

Таблица 4.5 - Параметры орбит **ГА1** и **ГА2** на рисунке 4.17

Орбиты	период	мак $ x $	$ Az $	$J$
<b>ГА1</b>	14,81 сут.	74068,84 км	7329,11 км	3,1505
<b>ГА2</b>	14,77 сут.	73659,39 км	14324,71 км	3,1461

Таблица 4.6 - Параметры орбит **ГА3** и **ГА4** на рисунке 4.18

Орбиты	период	мак $ x $	$Az$	$J$
<b>ГА3</b>	14,71 сут.	72924,57 км	-21357,52 км	3,1390
<b>ГА4</b>	14,71 сут.	72924,57 км	21357,52 км	3,1390

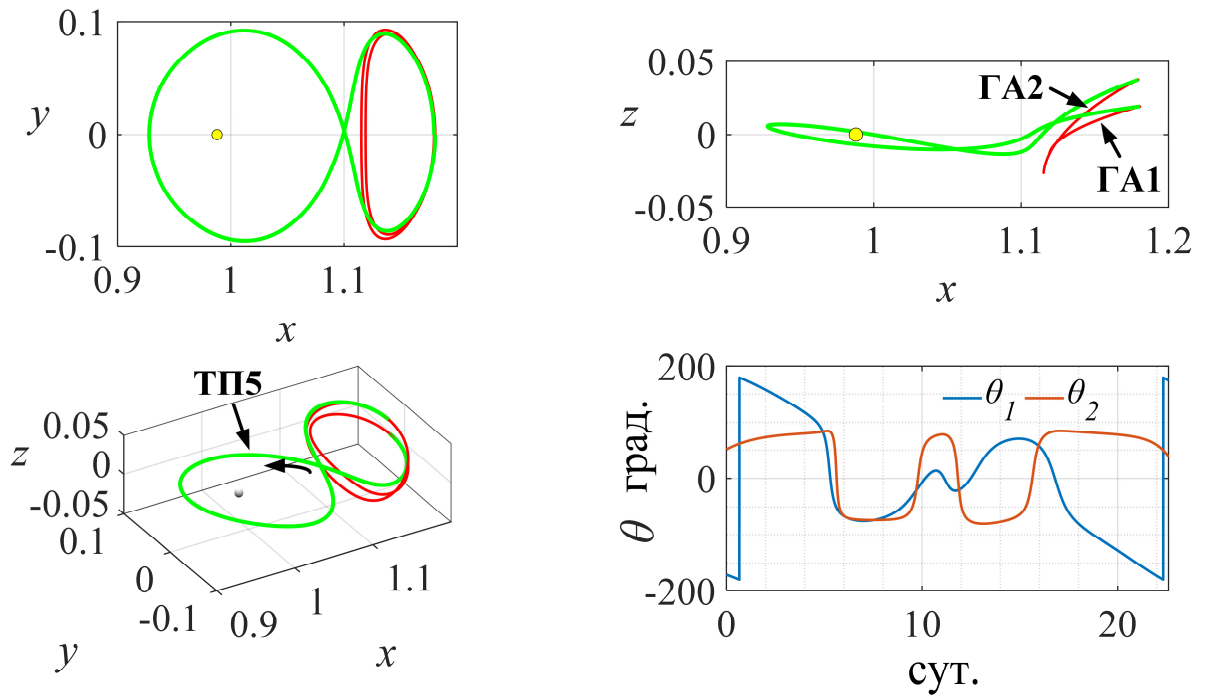


Рисунок 4.17 - **ТП5** между гало-орбитами одинаковых семейств

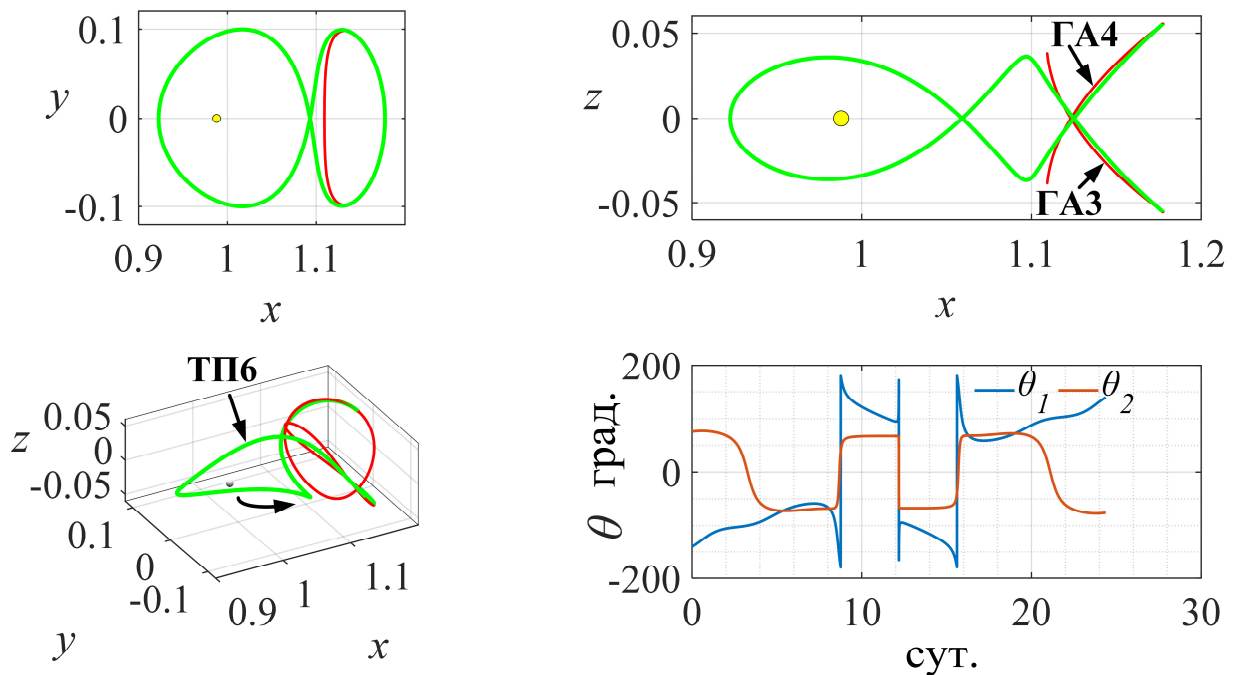


Рисунок 4.18 - **ТП6** между гало-орбитами различных семейств

В таблице 4.7 представлены результаты расчётов перелётов.

Таблица 4.7 - Параметры перелётов **ТП5** и **ТП6**

ТП	ОВ	ОП	ВП	расход РТ	тяга
<b>ТП5</b>	<b>ГА1</b>	<b>ГА2</b>	22,58 сут.	9,97 кг	100 мН
<b>ТП6</b>	<b>ГА3</b>	<b>ГА4</b>	24,36 сут.	10,75 кг	100 мН

Траектория **ТП6** соответствует перелёту между гало-орбитами различных семейств и представляет большой исследовательский и практический интерес.

Альтернатива использования многовитковых структур или структур многообразий для построения ТП должна быть проанализирована в каждом конкретном случае, и методика формирования оптимальных траекторий, предложенная в данной работе, позволяет справиться с этой задачей.

#### 4.3 Расчёт траектории перелёта с орбиты Ляпунова на вертикальную орбиту в окрестности точки либрации L2

В данном разделе рассматривается перелёт с **L2-ОЛА** на вертикальную орбиту **L2-ВЕ**. Из-за большой разницы в амплитуде движения КА в плоскости OZ между ОЛ и ВЕ, при построении ТП используется многовитковая орбитальная структура. Из-за того что пространственные положения орбит **L2-ОЛА** на **L2-ВЕ** слишком далеки друг от друга, для расчёта перелёта используется промежуточная структура осевых орбит, а также **L2-ОЛБ**, которая позволяет перейти к семейству осевых орбиты. Параметры этих орбит представлены в таблице 4.8, а сами орбиты – на рисунке 2.4.

Таблица 4.8 - Параметры орбит **L2-ОЛА**, **L2-ОЛБ** и **L2-ВЕ**

Орбиты	период	МИН x	Az	J
<b>L2-ОЛА</b>	14,82 сут.	50950,54 км	-	3,1521
<b>L2-ОЛБ</b>	18,71 сут.	16010,10 км	-	3,0138
<b>L2-ВЕ</b>	19,19 сут.	-	98122,77 км	2,9671

Для расчёта оптимального по быстродействию перелёта использовалась следующая методика.

- 1) Сначала устанавливаем обе орбиты ОВ и ОП как **ОЛА**. Пассивное движение КА по орбите **ОЛА** моделируется на несколько периодов  $n$  (витков), и называется ТП 0-й итерации (**ТП0**). При этом  $T_{\max} = T_0 = 0$  с

использованием данных **ТП0** в качестве начального приближения, все сопряжённые векторы равны 0. Полученная траектория называется **ТП7** и показана на рисунке 4.19.

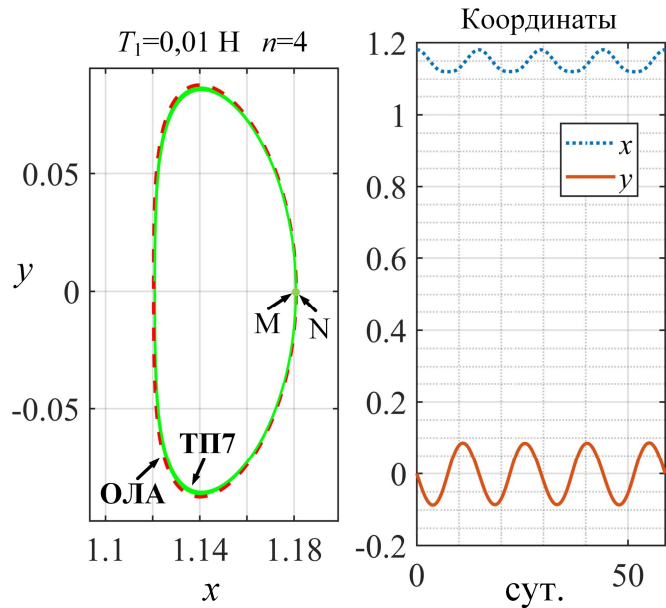


Рисунок 4.19 - Фигура **ТП7** и её координаты

2) Затем постепенно меняем точку прибытия **Н** так, чтобы точка **Н** переходила в положение, показанное на рисунке 4.20 и получаем **ТП8**. В этом процессе также используется методика продолжения по параметру **МП-тяга**, чтобы увеличивать  $T_{\max}$  до определенного уровня  $T_2$ . В этом примере  $T_2 = 0,11 \text{ Н}$ .

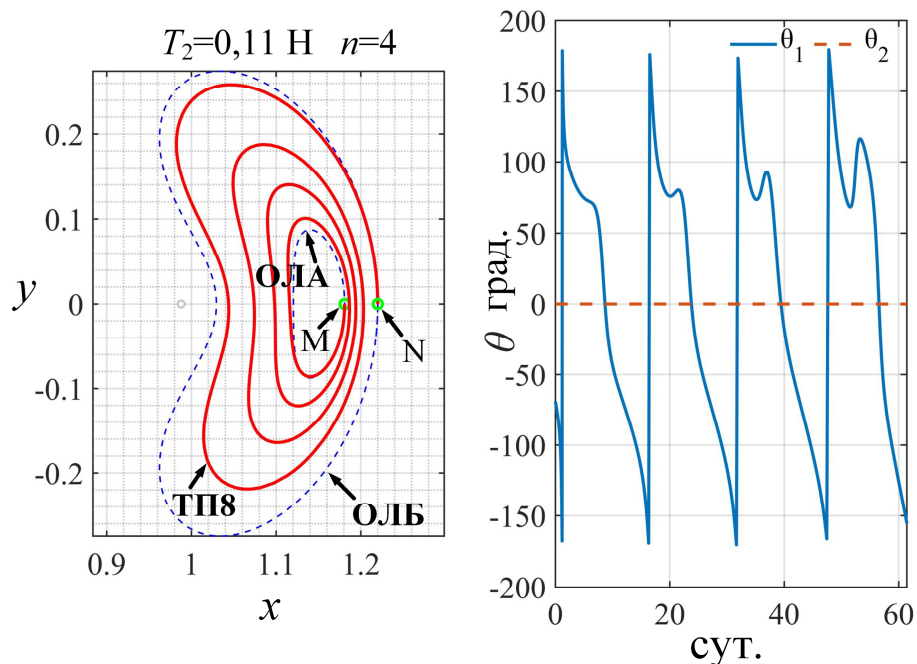


Рисунок 4.20 - Построение **ТП8**

3) В соответствии с направлением отклонений семейства осевых орбит от **L2-ОЛА** точка прибытия **N** постепенно перемещается вдоль структуры осевых орбит в конечное положение, что показано на рисунке 4.21. Здесь применяется северо-восточное семейство орбит, при этом осуществляется перелёт с **L2-ОЛА** на **L2-ВЕ**, обозначенную как **ТП9**. Уровень тяги  $T_{\max}$  при этом также нужно увеличивать до  $T_3$  ( $T_3=0,135$  Н).

**ТП9** является одной из траекторией перелёта с **L2-ОЛА** на **L2-ВЕ**. На её основе можно, используя алгоритмы **МП-точка** и **МП-тяга**, получить серии **ТП** между орбитами **L2-ОЛА** и **L2-ВЕ**. Баллистические параметры траекторий **ТП8** и **ТП9** представлены в таблице 4.9.

Таблица 4.9 - Параметры траекторий перелётов **ТП8** и **ТП9**

ТП	ВП	РТ	тяга
<b>ТП8</b>	61,39 сут.	29,81 кг	110 мН
<b>ТП9</b>	64,79 сут.	38,60 кг	135 мН

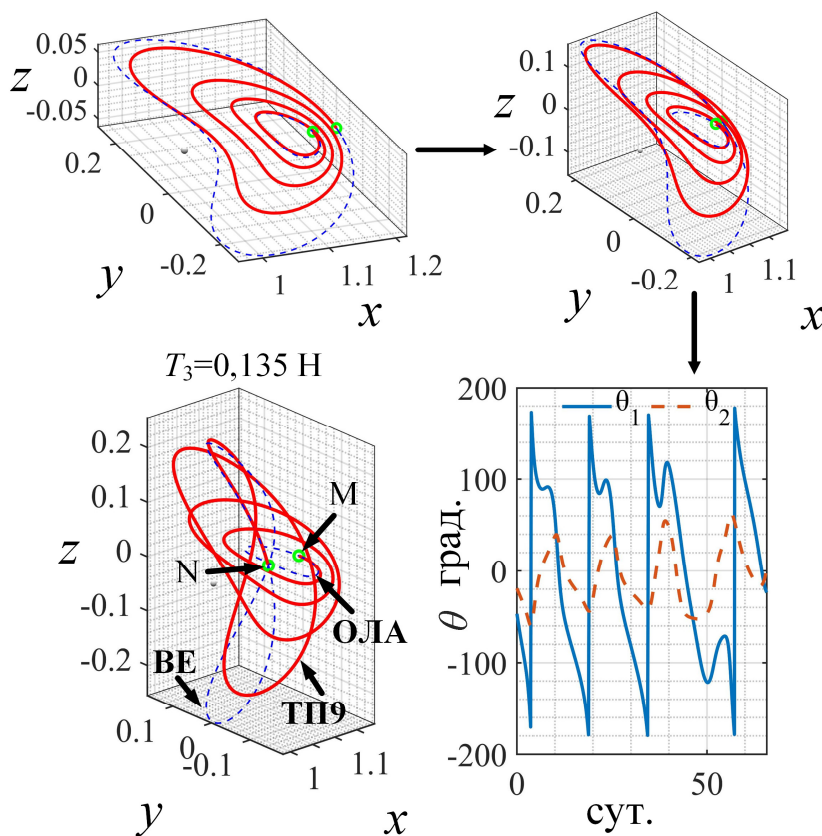


Рисунок 4.21 - Процесс получения **ТП9** от **ТП8**



Используя траекторию перелёта **ТП9** в качестве начальной, можно увеличивать значения  $\tau$  точек старта и прибытия с помощью алгоритма **МП**-точка вдоль **L2-ОЛА** и **L2-ВЕ** соответственно. Большее значение  $\tau$  означает, что траектория в большей степени использует структуру осевой орбиты, тем самым получая ТП с меньшей допустимой тягой  $T_{\max}$ . Данные действия позволят привести тягу двигателя в соответствие с требованиями проектируемой миссии. Для практических задач главное внимание на этапе предварительного проектирования орбиты должно быть уделено определению достижимых амплитуд тяги  $T_{\max}$  и ВП. Перелёт с меньшей тягой требует большего ВП, что вносит большие трудности в решение задачи оптимального управления.

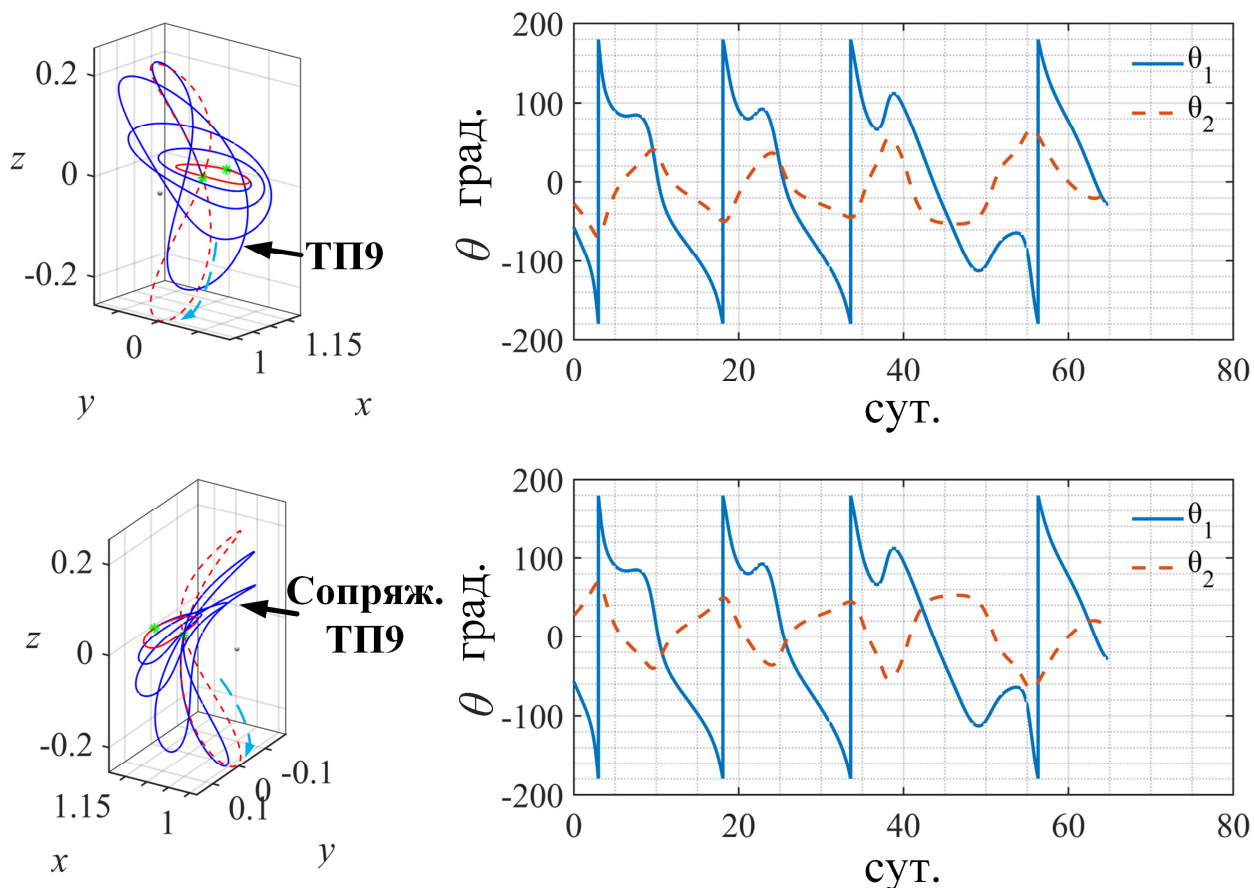


Рисунок 4.22 - Сопряжённая **ТП9** полученная непосредственно за счёт использования симметрии орбит

Далее обсудим центральную симметрию ОС и ВЕ. Северо-восточная осевая орбита и северо-западная осевая орбита имеют противоположные

компоненты координаты  $z$  и скорости  $v_z$ . Поэтому угол, определяющий направление оптимального ускорения от тяги в горизонтальном направлении для симметричных ТП остаётся неизменным, а в вертикальном направлении изменяется противоположным образом. Таким образом, получается сопряжённая ТП9 (рисунок 4.22).

Из-за симметрии осевых орбит эти две разные ТП9 достигают одного и того же положения на **L2-ВЕ**, но значения  $\tau$  отличаются на 0,5.

#### 4.4 Расчёт траекторий перелёта между периодическими орбитами относительно точек либрации L2 и L1

Предыдущие исследования были посвящены формированию оптимального управления для перелётов между орбитами относительно одной и той же точки либрации. В этом разделе рассмотрим перелёты между периодическими орбитами относительно точек L2 и L1.

Для построения сценария перелёта между гало-орбитами точек либрации L2 и L1, используем в качестве начального приближения плоскую задачу с орбитами Ляпунова (**ГА0-L2** и **ГА0-L1**) в качестве орбиты старта и прилёта. Параметры орбит старта и прилёта представлены в таблице 4.10.

Таблица 4.10 - Параметры орбит **ГА0-L2** и **ГА0-L1**

Орбиты	период	мин $ x $	$J$
<b>ГА0-L2</b>	14,82 сут.	50950,54 км	3,1521
<b>ГА0-L1</b>	11,91 сут.	51143,59 км	3,1743

##### 4.4.1 Плоская задача: перелёт между орбитами Ляпунова

При расчёте плоского перелёта между орбитами Ляпунова будем использовать в качестве начального приближения задачу о двухимпульсном перелёте. Как видно из рисунка 4.23, полученные траектории движения не полностью используют динамическую структуру задачи трёх тел, и

требуемые тяги и ВП велики, что не являются приемлемым. Полученные параметры ТП представлены в таблице 4.11.

Таблица 4.11 - Параметры перелётов ТП10 и ТП11

ТП	ВП	РТ	тяга
ТП10	18,68 сут.	82,49 кг	1000 мН
ТП11	39,63 сут.	87,52 кг	500 мН

В работах [15, 26, 27] формирование программ управления для подобных перелётов между периодическими орбитами относительно точек L1 и L2 осуществлялось с использованием методики сращивания инвариантных многообразий. В этих работах конкретная операция для построения перелёта с использованием структуры многообразий заключается в поиске периодических орбит относительно точек L1 и L2 с одинаковой постоянной Якоби и нахождении точек пересечения соответствующих многообразий. Перелёт при этом не требует затрат энергии. Однако этот тип перелёта для выполнения конкретных требований имеет существенные ограничения, поскольку постоянные Якоби  $\Gamma_{A0-L2}$  и  $\Gamma_{A0-L1}$  не совпадают. В этом случае, сначала надо найти орбиту Ляпунова точки L1 (ОЛЗ) как ОП для расчёта ТП с той же постоянной Якоби, что и  $\Gamma_{A0-L2}$  (ОВ), а затем переходить ОП на  $\Gamma_{A0-L1}$  с помощью алгоритма МП-точка.

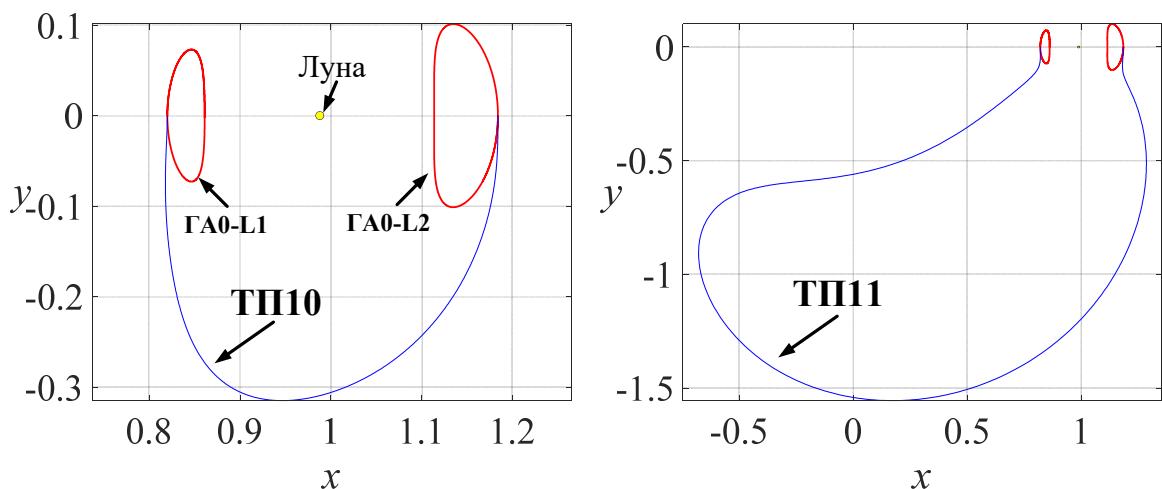


Рисунок 4.23 - Предварительные двухимпульсные ТП между орбитами Ляпунова L2 и L1 ТП10 и ТП11

Первый шаг включает в себя сращивание многообразий, связанных с двумя орбитами. Для **ГА0-L2** вычисляем его неустойчивое многообразие, а для **ОЛЗ** - его устойчивое многообразие. Считаем, что многообразия закончатся в плоскости  $x = 0,98785$  (где находится Луна). На рисунке 4.24 показаны структуры соответствующих многообразий для двух орбит.

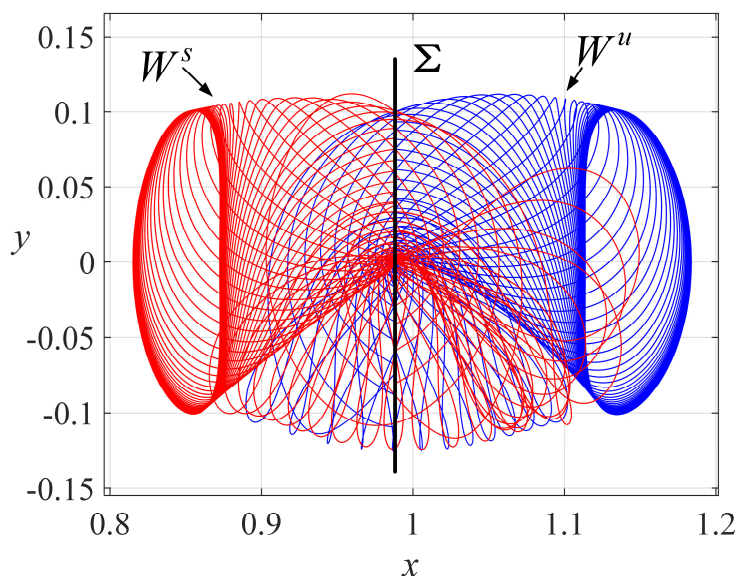


Рисунок 4.24 - Устойчивое и неустойчивое многообразия с одинаковой постоянной Якоби  $J=3,1521$

Затем выбираем подходящие точки пересечения, из которых можно построить траектории перелёта с орбиты относительно точки L2 на орбиту относительно точки L1 без затрат энергии. Некоторые подобные орбиты показаны на рисунке 4.25, и называются гетероклиническими соединениями.

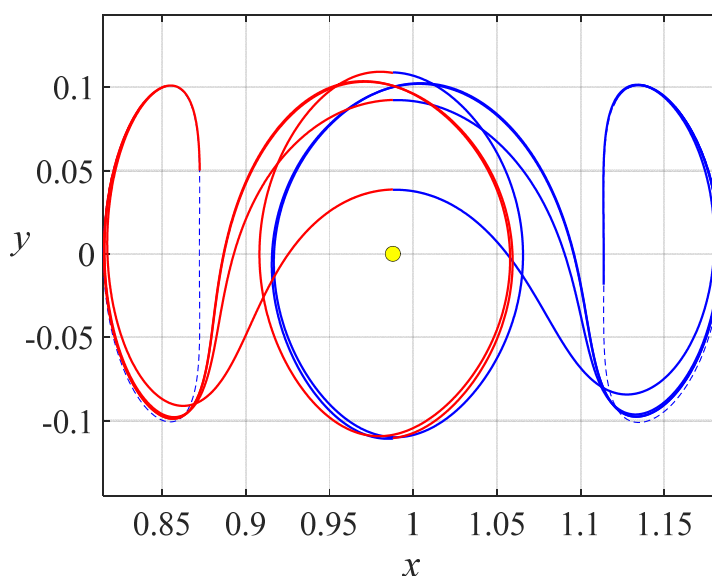


Рисунок 4.25 - Гетероклинические соединения с одинаковой величиной постоянной Якоби  $J=3,1521$

Таким образом, получаем ТП без энергетических затрат между орбитами вокруг различных точек либрации с одной и той же постоянной Якоби. Эти траектории можно использовать в качестве начального приближения для дальнейших вычислений ТП КА с ЭРДУ между орбитами с различными значениями постоянной Якоби.

Для того чтобы применить гетероклиническое соединение к сценарию перелёта КА с ЭРДУ в системе трёх тел, используется задача об оптимальном по энергозатратам перелёте, так как в этом случае  $u$  может изменяться от 0 до 1, что облегчает решение задач. Размещаем конечные точки каждой пары многообразий как можно ближе к точке на соответствующей орбите Ляпунова, что делается с помощью алгоритма МП-точка. Для поддержания сходимости решения задачи лучше использовать небольшую тягу двигателя. При этом ВП является суммой длительностей времени движения по двум многообразиям.

Методика расчёта ТП с ЭРДУ для одного из гетероклинических соединений на рисунке 4.25 показана на рисунке 4.26. Полученная в соответствии с приведённым выше процессом вычислений траектория (ТП12) представлена на рисунке 4.27.

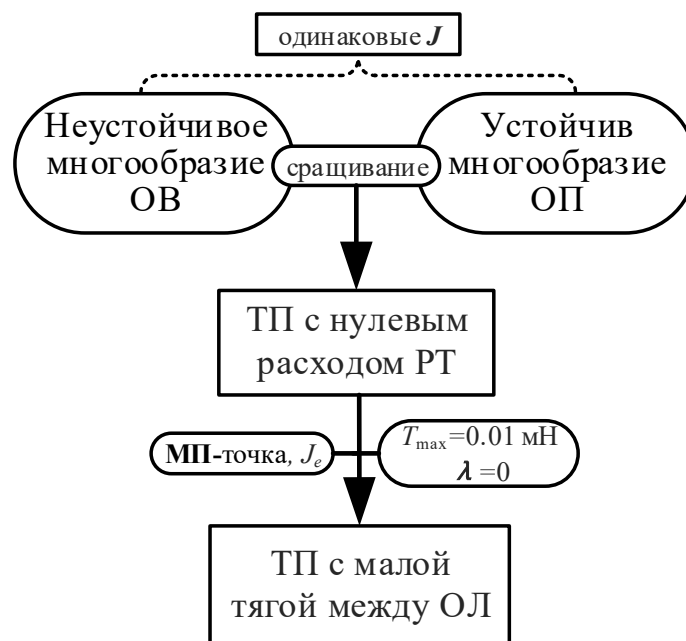


Рисунок 4.26 - Методика вычисления ТП с использованием гетероклинического соединения

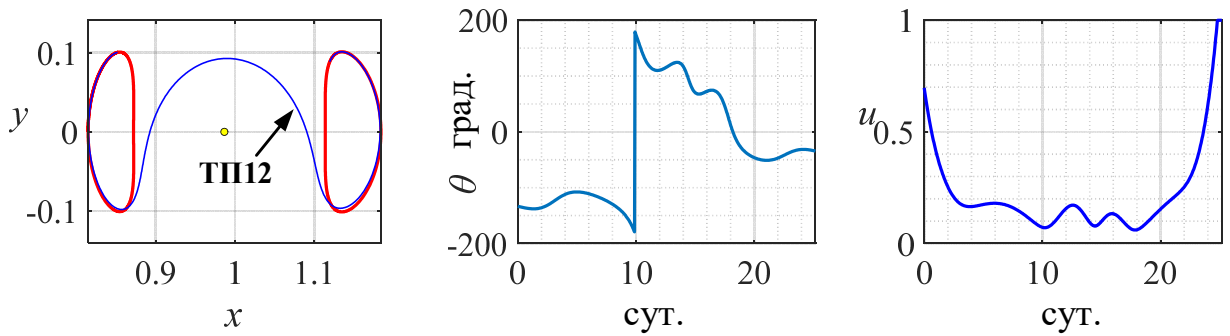


Рисунок 4.27 - **ТП12** между орбитами Ляпунова с использованием гетероклинического соединения

После получения **ТП12** точка прибытия перемещаются в самую дальнюю точку от Луны на соответствующих орбитах Ляпунова с помощью алгоритма **МП-точка**, при этом **ВП** уменьшается так, чтобы управляющий параметр  $u \equiv 1$  с помощью алгоритма **МП-время**. Таким образом, данное решение преобразуется в перелёт с ЭРДУ по критерию мин-**ВП**, который показан на рисунке 4.28. Параметры перелёта представлены в таблице 4.12.

Видно, что **ТП12**, полученная на базе сращивания траекторий из инвариантных многообразий без расхода РТ, требует меньшей величины тяги двигателя. Напротив, при перемещении крайних точек ТП в точки, соответствующие **ТП14**, необходимая величина тяги увеличивается до 34 мН, при этом **ВП** сокращается на 7 суток. Однако именно **ТП14** подходит для последующего расчёта пространственных задач.

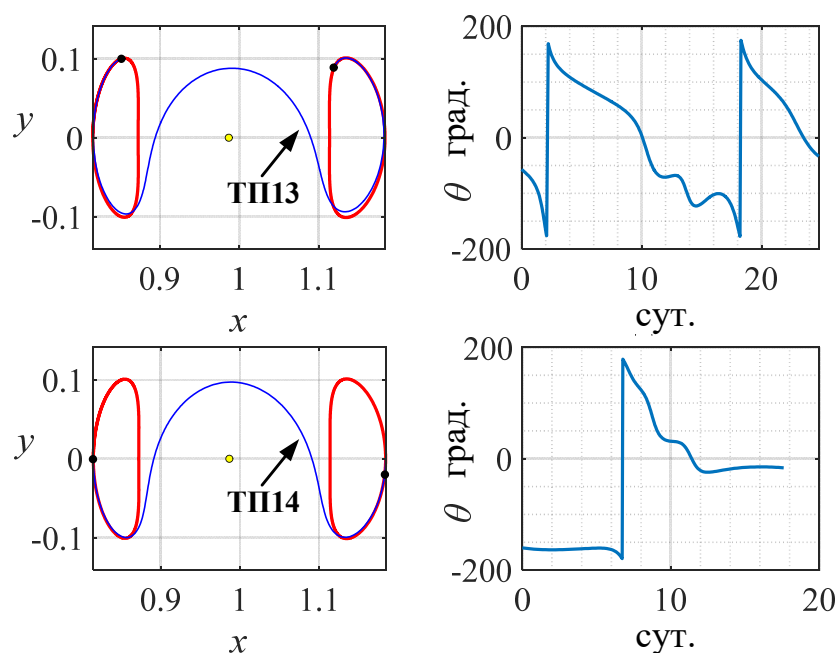


Рисунок 4.28 - Орбитальные конфигурации **ТП13** и **ТП14**

Таблица 4.12 - Параметры перелётов ТП12, ТП13 и ТП14

ТП	ВП	РТ	тяга
ТП12	25,17 сут.	0,24 кг	10 мН
ТП13	24,76 сут.	1,09 кг	10 мН
ТП14	17,59 сут.	2,64 кг	34 мН

Заметим, что орбита прибытия в данном случае не является целевой орбитой **ГА0-L1**. Для получения целевой орбиты точку прибытия необходимо постепенно перемещать на целевую орбиту **ГА0-L1**, в процессе чего потребуется увеличить тягу  $T_{\max}$ . Аналогично, другие гетероклинические соединения на рисунке 4.25 позволяют, с использованием той же методики, получить другие типы оптимальных ТП с **ГА0-L2** на **ГА0-L1**. Полученные результаты представлены в таблице 4.13 и показаны на рисунке 4.29.

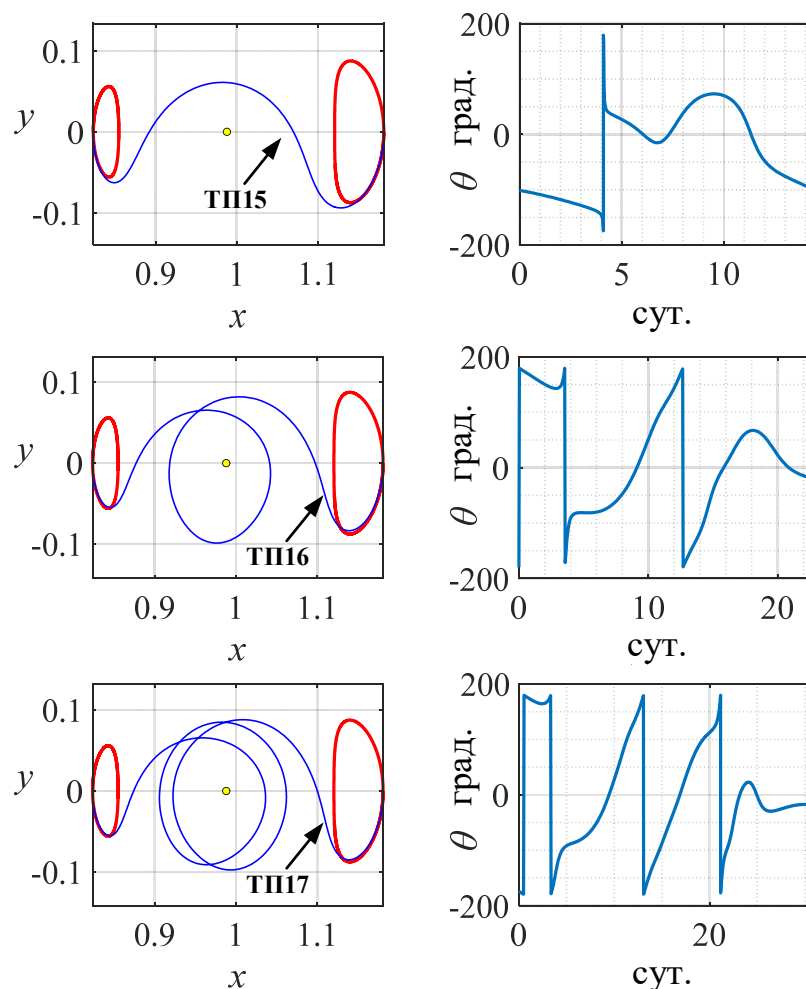


Рисунок 4.29 - ТП между орбитами Ляпунова **ГА0-L2** и **ГА0-L1** с использованием гетероклинического соединения с различным числом витков

При сравнении **ТП5** и **ТП6**, ТП построенные с использованием структуры многообразия (гетероклинического соединения), выигрывают по требуемой тяге двигателя и ВП. Кроме того, как показано на рисунке 4.29 существует несколько решений, отличающихся по угловой дальности и времени перелёта. Чем больше витков КА совершает вокруг Луны, тем больше энергии системы трёх тел используется для перелёта, что приводит к уменьшению величины потребной тяги  $T_{\max}$ , необходимой для ТП, и соответствующему увеличению ВП.

Таблица 4.13 - Параметры перелётов **ТП15**, **ТП16** и **ТП17**

ТП	ВП	РТ	тяга
<b>ТП15</b>	14,44 сут.	10,84 кг	170 мН
<b>ТП16</b>	22,81 сут.	5,04 кг	50 мН
<b>ТП17</b>	30,96 сут.	4,79 кг	35 мН

Орбиты **ГА0-L2** и **ГА0-L1** используются в дальнейшем в качестве начального приближения при расчёте перелёта КА с ЭРДУ между гало-орбитами L2 и L1.

#### 4.4.2 Пространственная задача: перелёт между гало-орбитами

В данном разделе рассматривается перелёт КА с ЭРДУ между гало-орбитами вокруг точек L2 и L1.

Используя **ТП15**, **ТП16** и **ТП17**, полученные в разделе 4.4.1, в качестве начальных приближений легко рассчитать перелёты между гало-орбитами L2 и L1 используя алгоритм **МП-точка** для постепенного изменения координат точек вылета и прибытия вдоль данных семейств гало-орбит. Этот процесс аналогичен расчёту перелёта с орбиты Ляпунова на гало-орбиту относительно одной и той же точки либрации. Полученные ТП показаны на рисунках 4.30, 4.31, 4.32, и названы **ТП18**, **ТП19** и **ТП20**. Параметры граничных орбит и траекторий перелётов представлены в таблице 4.14 и 4.15.



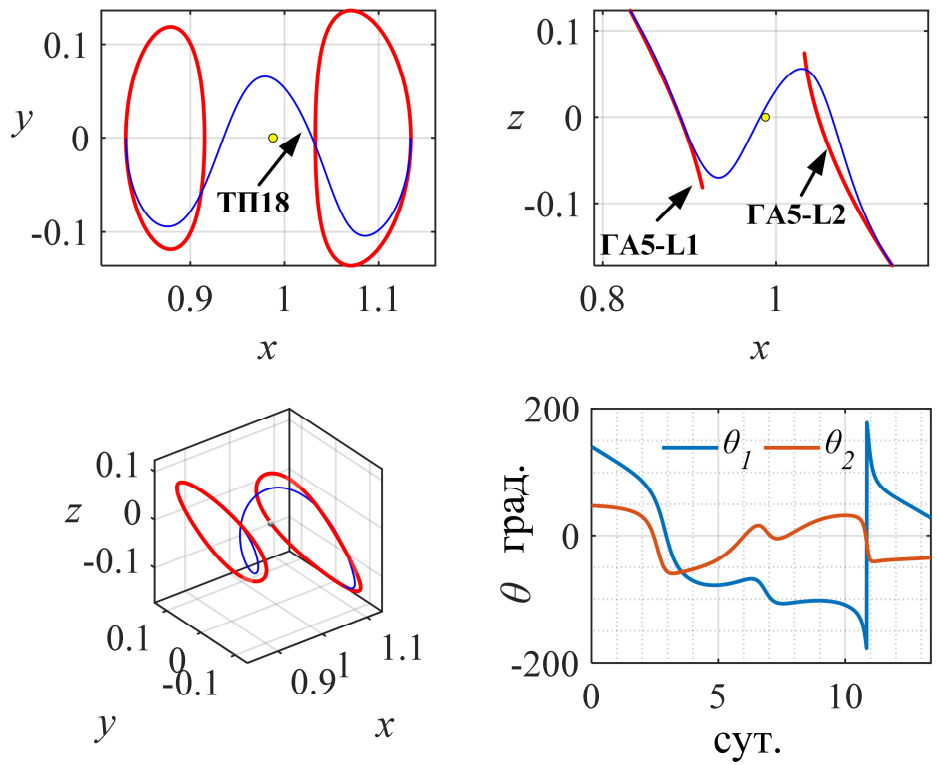


Рисунок 4.30 - **ТП18** между гало-орбитами ГА5-L2 и ГА5-L1 (угловая дальность – половина витка)

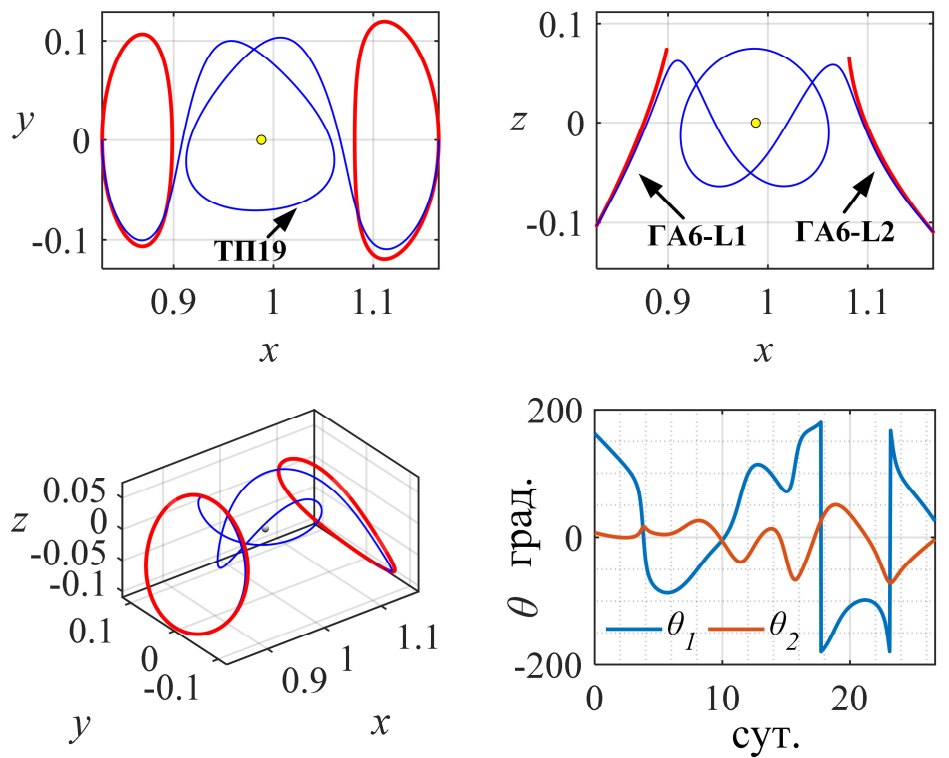


Рисунок 4.31 - **ТП19** между гало-орбитами ГА6-L2 и ГА6-L1 (угловая дальность – один виток)

Таблица 4.14 - Параметры выбранных гало-орбит

Орбиты	период	мак $ x $	$ Az $	$J$
ГА5-L2	13,25 сут.	56259,49 км	65914,52 км	3,0481
ГА5-L1	14,53 сут.	60080,83 км	47408,76 км	3,0741
ГА6-L2	14,35 сут.	68294,94 км	42101,58 км	3,1049
ГА6-L1	12,09 сут.	61283,76 км	39696,97 км	3,0992
ГА7-L2	14,09 сут.	64925,29 км	50913,84 км	3,0857
ГА7-L1	12,08 сут.	59925,83 км	48267,09 км	3,0712

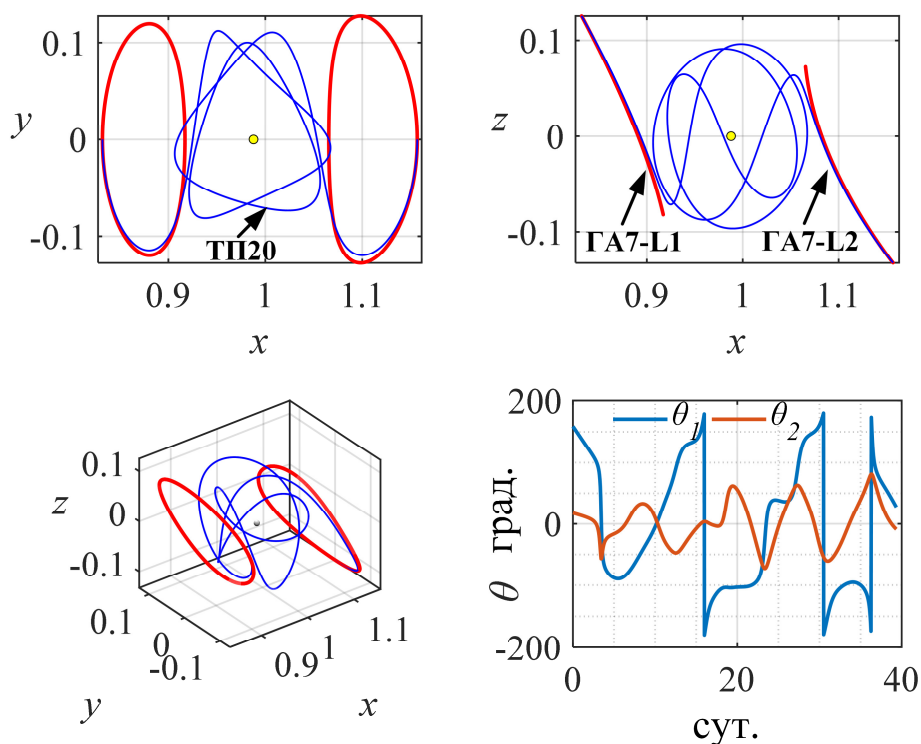


Рисунок 4.32 - **ТП20** между гало-орбитами ГА7-L2 и ГА7-L1 (угловая дальность – два витка)

Таблица 4.15 - Параметры перелётов **ТП18**, **ТП19** и **ТП20**

ТП	ВП	РТ	тяга
<b>ТП18</b>	13,37 сут.	29,51 кг	500 мН
<b>ТП19</b>	26,65 сут.	11,76 кг	100 мН
<b>ТП20</b>	39,33 сут.	13,88 кг	80 мН

Видно, что ТП вокруг Луны с угловой дальностью – половина и два витка (**ТП18** и **ТП20**) больше подходят для перелётов между гало-орбитами различных направлений семейств (южные и северные), а ТП вокруг Луны с

угловой дальностью в один виток подходит для перелётов между гало-орбитами принадлежащих семействам с одинаковыми направлениями движения.

Эти ТП также имеют симметричные сопряжённые пары относительно плоскости  $x$ - $y$  с аналогичными процедурами расчёта.

#### 4.5 Расчёт траектории перелёта с L2-ОЛ на L2-ГА с учётом действующих в окололунном пространстве возмущений

В качестве демонстрации применения разработанной методики для расчёта перелётов КА с учётом возмущения, действующих в системе Земля-Луна выбираем траекторию перелёта с **L2-ОЛ** на **L2-ГА**. Рассмотрим методику учёта гравитации Солнца, как самого большого возмущающего фактора в этой задаче.

Сначала рассчитываем ТП с помощью вышеупомянутых методик и процедур без учёта возмущений. Затем полученная траектория используется в качестве начального приближения для вычислений, а для постепенного учёта возмущений применяется методика продолжения по параметру **МП**-возмущения. На верхнем рисунке 4.33 показана ТП, рассчитанная без учёта гравитации Солнца, а на нижнем – с учётом гравитации Солнца. Они не сильно отличаются друг от друга. Параметры орбит и ТП представлены в таблицах 4.16 и 4.17.

Это показывает обоснованность использования ТП, рассчитанной в идеальном случае, в качестве начального приближения для решения задачи об оптимизации перелёта в реальной эфемеридной модели.

Таблица 4.16 - Параметры орбит **ОЛ1-L2** и **ГА8-L2**

Орбиты	период	мак $ x $	мин $ x $	$Az$	$J$
<b>ОЛ1-L2</b>	14,89 сут.	-	48453,92 км	-	3,1453
<b>ГА8-L2</b>	13,41 сут.	57716,75 км	-	63926,76 км	3,0534

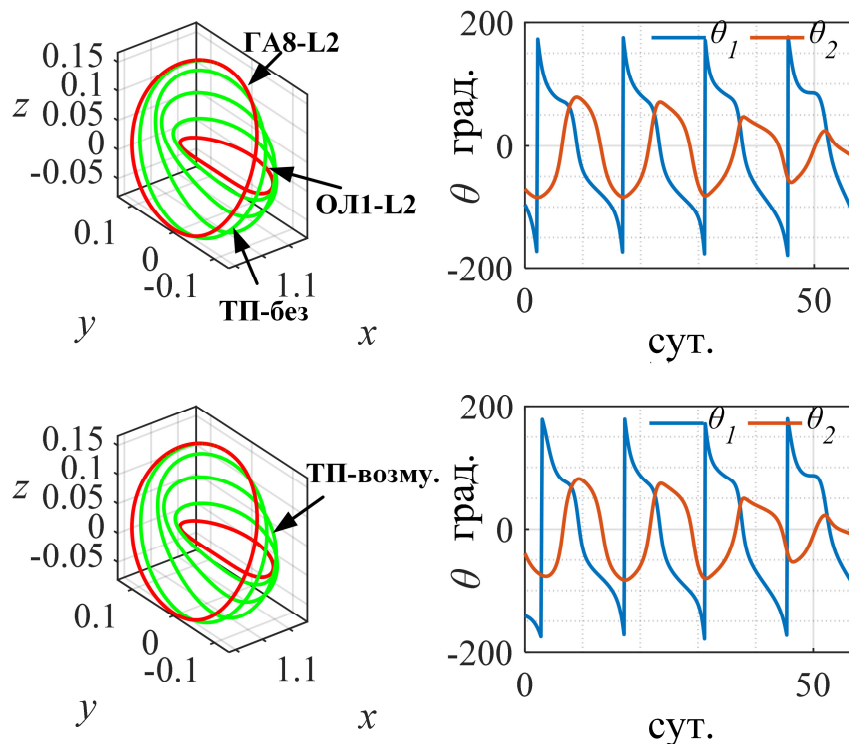


Рисунок 4.33 - ТП без учёта и с учётом влияния гравитации Солнца

Таблица 4.17 - Параметры перелётов **ТП-без** и **ТП-с возмущениями**.

ТП	ВП	РТ	тяга
<b>ТП-без</b>	56,62 сут.	24,99 кг	100 мН
<b>ТП-с возмущениями</b>	56,81 сут.	25,07 кг	100 мН

Заметим, что из-за периодического характера движения Солнца необходимо учитывать конкретные эфемериды небесных тел в различных эпохах, как показано на рисунке 4.34.

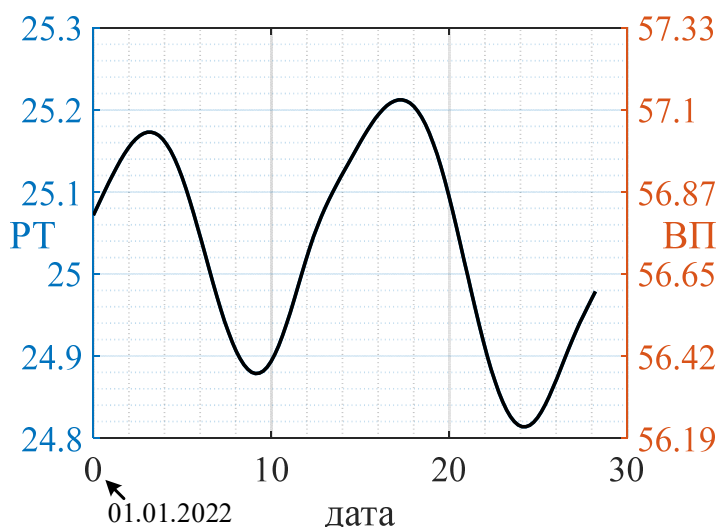


Рисунок 4.34 - ВП и расход РТ для ТП с **ОЛ1-L2** на **ГА8-L2** с учётом влияния гравитации Солнца для различных эпох

Горизонтальная координата на рисунке 4.34 представляет собой начальную дату старта КА. ВП и расход РТ у ТП в данном случае постоянно меняются в течение синодического периода Солнца и Луны. Данный пример построения ТП с учётом возмущения от гравитации Солнца в околосолнечном пространстве справедливо и для расчёта других возмущений.

#### Выводы по четвёртой главе

Таким образом, в четвёртой главе получены следующие основные результаты:

1. Приведены и проанализированы результаты моделирования перелётов КА с ЭРДУ в околосолнечном пространстве между периодическими орбитами:

- между орбитами Ляпунова L2;
- между гало-орбитами L2;
- от орбиты Ляпунова L2 к вертикальной орбите L2;
- от орбиты Ляпунова L2 к орбите Ляпунова L1;
- от гало-орбиты L2 к гало-орбите L1.

2. Показано, что глобально-оптимальное решение характеризуется монотонным изменением постоянной Якоби системы вдоль оптимальной траектории.

3. Использование многовитковой орбитальной структуры и инвариантных многообразий позволяет осуществлять перелёты КА с меньшей тягой по сравнению с классическими сценариями перелётов.

4. Многовитковые орбитальные структуры могут использоваться в качестве начального приближения для расчёта перелётов с плоских орбит Ляпунова на вертикальные орбиты и на гало-орбиты с большими амплитудами движения вне плоскости.

5. Структура инвариантных многообразий могут использоваться в качестве начального приближения для расчёта перелётов между гало-орбитами относительно одной и той же точки либрации в разных

направлениях (гомоклиническое соединение), а также для перелётов между периодическими орбитами относительно разных точек либрации (гетероклинические соединения).

6. Влияние возмущений на траектории перелётов изменяется в зависимости от характеристик возмущающих факторов. Основное влияние учёт возмущений оказывает на увеличение длительности перелёта.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате исследований проведена оптимизация перелётов космических аппаратов с электроракетной двигательной установкой между периодическими орбитами относительно точек либрации L1 и L2 в системе Земля – Луна. В работе были получены следующие основные результаты:

1. Разработана математическая модель пассивного возмущённого движения КА в системе Земля - Луна и проанализирована влияние на движение КА следующих возмущающих факторов:

- гравитация от других небесных тел Солнечной системы;
- нецентральность гравитационных полей Луны и Земли;
- особенности движения Луны (лунная либрация и лунный «застой»),
- давление солнечного света;
- эксцентриситет орбиты Луны.

Выявлено, что наиболее существенное влияние на движение КА в окололунном пространстве оказывают гравитация Солнца и эксцентриситет орбиты Луны.

2. Разработана математическая модель управляемого движения КА с ЭРДУ в окололунном пространстве с учётом действующих возмущений от гравитации небесных тел Солнечной системы, нецентральности гравитационных полей Луны и Земли, особенностей движения Луны (эксцентриситет орбиты, лунные либрация и «застой»), светового давления.

3. Разработаны методики формирования оптимального номинального управления КА с ЭРДУ при перелётах в системе Земля - Луна между периодическими орбитами по критериям минимальных времени перелёта и расхода рабочего тела, включающие постоение начальных приближений для итерационных процессов решения краевых задач.

4. Разработано программно-математическое обеспечение и получены результаты расчётов оптимального номинального управления и соответствующих траекторий перелётов между периодическими орбитами в

системе Земля - Луна: между орбитами Ляпунова относительно  $L_2$ ; между гало-орбитами относительно  $L_2$ ; от орбиты Ляпунова к вертикальной орбите относительно  $L_2$ ; между орбитами Ляпунова относительно точек либрации  $L_2$  и  $L_1$ ; между гало-орбитами относительно точек либрации  $L_2$  и  $L_1$ . На базе анализа этих решений показано, что:

- глобально-оптимальное решение характеризуется монотонным изменением постоянной Якоби системы вдоль оптимальной траектории;

- использование многовитковой орбитальной структуры и инвариантных многообразий позволяет осуществлять перелёты КА с меньшей тягой по сравнению с классическими сценариями перелётов;

- многовитковые орбитальные структуры могут использоваться в качестве начального приближения для расчёта перелётов с плоских орбит Ляпунова на вертикальные орбиты и на гало-орбиты с большими амплитудами движения вне плоскости;

- структура инвариантных многообразий могут использоваться в качестве начального приближения для расчёта перелётов между гало-орбитами относительно одной и той же точки либрации в разных направлениях (гомоклиническое соединение), а также для перелётов между периодическими орбитами относительно разных точек либрации (гетероклинические соединения);

- влияние возмущений на траектории перелётов изменяется в зависимости от характеристик возмущающих факторов. Основное влияние учёт возмущений оказывает на увеличение длительности перелёта.

По результатам проведённого исследования можно дать следующие рекомендации:

- Возмущающими факторами нельзя пренебрегать при изучении динамики полёта КА в окололунном пространстве.

- ЭРДУ может изменять положение точек либрации системы Земля-Луна, тем самым создавая искусственную периодическую орбиту при загруженной целевой орбите.



- Задача перелёта КА с ЭРДУ между периодическими орбитами в окололунном пространстве может быть решена методами коллокации и продолжения по параметру, используя динамическую структуру задачи трёх тел.

- Для перелётов КА с ЭРДУ между периодическими орбитами в окололунном пространстве использование в качестве начального приближения инвариантных многообразий даёт лучшие результаты по сравнению с традиционными многовитковыми траекториями перелётов.

Вместе с тем определены вопросы, требующие дальнейшего изучения:

- Используя предложенный в данной работе критерий оптимальности глобального перелёта (постоянная Якоби монотонно изменяется вдоль траектории глобального оптимального перелёта), можно получить оптимальное решение для межорбитальных перелётов в задаче трёх тел.

- Для проектирования реальных миссий необходимо использовать реальную модель движения небесных тел в эфемеридах.

## СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ

КА	– космический аппарат
ЭРДУ	– электроракетная двигательная установка
ДУ	– двигательная установка
ТП	– траектория перелёта
ТП1	– траектория перелёта 1
ЛКС	– лунная космическая станция
ОЛ	– орбита Ляпунова
ОЛ1	– орбита Ляпунова 1
ОЛБ	– орбита Ляпунова Б
L2-ОЛ	– орбита Ляпунова относительно точки L2
ГА	– гало-орбита
ОС	– осевая орбита
ВЕ	– вертикальная орбита
ВП	– время перелёта
ПМП	– принцип максимума Понтрягина
РТ	– рабочее тело
мин-ВП	– минимальное время перелёта
мин-ЭН	– минимальное энергопотребление
мин-РТ	– минимальный расход рабочего тела
МП	– метод продолжения по параметру
ЛНОС	– линии нулевой относительной скорости
ОВ	– орбита вылета
ОП	– орбита прибытия
МГ	– метод гомотопии
О1	– орбита 1
ПГА	– почти прямолинейная гало-орбита

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Valtonen M., Karttunen H. The three-body problem. – Cambridge University Press, 2006.
2. d'Alembert J. L. R. Opuscles mathématiques ou Mémoires sur différens sujets de géométrie, de mécanique, etc. – 1768. – Т. 5.
3. Llibre J. On the extendable regular integrals of the n-body problem //Journal of differential equations. – 1984. – Т. 54. – №. 2. – С. 221-230.
4. Richardson D. L. Analytic construction of periodic orbits about the collinear points //Celestial mechanics. – 1980. – Т. 22. – №. 3. – С. 241-253.
5. Howell K. C., Pernicka H. J. Numerical determination of Lissajous trajectories in the restricted three-body problem //Celestial mechanics. – 1987. – Т. 41. – №. 1. – С. 107-124.
6. Кугушев Е. И., Мельдианова В. А. Об инвариантных многообразиях механических систем //Препринты Института прикладной математики им. МВ Келдыша РАН. – 2002. – С. 19-32.
7. Ширококов М. Г. Баллистико-навигационные аспекты миссий малых космических аппаратов к Луне и точкам либрации : дис. – Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Институт Прикладной Математики им. МВ Келдыша (РАН), 2017. 58, 2017.
8. Xiangyu L., Dong Q., Yu C. PROGRESS OF THREE-BODY ORBITAL DYNAMICS STUDY // Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – 2021. – Т. 53. – №. 5. – С. 1223-1245.
9. Parker J. S., Anderson R. L. Low-energy lunar trajectory design. – John Wiley & Sons, 2014. – Т. 12.
10. Шиманчук Д. В., Шмыров А. С., Шмыров В. А. Орбитальное маневрирование в окрестностях коллинеарных точек либрации с использованием сил светового давления / Д. В. Шиманчук, А. С. Шмыров, В. А. Шмыров //Письма в Астрономический журнал. – 2021. – Т. 47. –

- №. 10. – C. 733-742.
11. Lu L. et al. Design and analysis of a direct transfer trajectory from a near rectilinear halo orbit to a low lunar orbit // *Advances in Space Research*. – 2021. – T. 67. – №. 3. – C. 1143-1154.
  12. Shirobokov M., Trofimov S., Ovchinnikov M. Recovery of halo orbit missions in case of contingent station-keeping maneuver delay // *Advances in Space Research*. – 2016. – T. 58. – №. 9. – C. 1807-1818.
  13. Gómez G. et al. Study of the transfer from the Earth to a halo orbit around the equilibrium point L 1 // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. – 1993. – T. 56. – №. 4. – C. 541-562.
  14. Howell K. C., Barden B. T., Lo M. W. Application of dynamical systems theory to trajectory design for a libration point mission // *The Journal of the Astronautical Sciences*. – 1997. – T. 45. – №. 2. – C. 161-178.
  15. Canalias E., Masdemont J. J. Homoclinic and heteroclinic transfer trajectories between planar Lyapunov orbits in the sun-earth and earth-moon systems // *Discrete & Continuous Dynamical Systems*. – 2006. – T. 14. – №. 2. – C. 261.
  16. Gómez G., Masdemont J. Some zero cost transfers between libration point orbits // *Advances in the Astronautical Sciences*. – 2000. – T. 105. – №. 2. – C. 1199-1216.
  17. Guo T., Jiang F., Li J. Homotopic approach and pseudospectral method applied jointly to low thrust trajectory optimization // *Acta Astronautica*. – 2012. – T. 71. – C. 38-50.
  18. Zhang C. et al. Low-thrust minimum-fuel optimization in the circular restricted three-body problem // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2015. – T. 38. – №. 8. – C. 1501-1510.
  19. Hargraves C. R., Paris S. W. Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation // *Journal of guidance, control, and dynamics*. – 1987. – T. 10. – №. 4. – C. 338-342.
  20. Ranieri C. L., Ocampo C. A. Indirect optimization of spiral trajectories // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2006. – T. 29. – №. 6. – C.

- 1360-1366.
21. Trélat E. Optimal control and applications to aerospace: some results and challenges // *Journal of Optimization Theory and Applications*. – 2012. – Т. 154. – №. 3. – С. 713-758.
  22. Pérez-Palau D., Epenoy R. Fuel optimization for low-thrust Earth–Moon transfer via indirect optimal control // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. – 2018. – Т. 130. – №. 2. – С. 1-29.
  23. Pan B., Pan X., Ma Y. A quadratic homotopy method for fuel-optimal low-thrust trajectory design // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. – 2019. – Т. 233. – №. 5. – С. 1741-1757.
  24. Russell R. P. Primer vector theory applied to global low-thrust trade studies // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2007. – Т. 30. – №. 2. – С. 460-472.
  25. Singh S. K. et al. Low-Thrust Earth-Moon Transfers via manifolds of a halo orbit in the cis-lunar space // *43rd Annual AAS Guidance, Navigation and Control Conference at: Breckenridge, Colorado*. – 2020.
  26. Chupin M., Haberkorn T., Trélat E. Low-thrust Lyapunov to Lyapunov and Halo to Halo missions with L2-minimization // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. – 2017. – Т. 51. – №. 3. – С. 965-996.
  27. Chupin M., Haberkorn T., Trélat E. Transfer between invariant manifolds: from impulse transfer to low-thrust transfer // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2018. – Т. 41. – №. 3. – С. 658-672.
  28. Fain M. K., Starinova O. L. Ballistic optimization of the L1-L2 and L2-L1 low thrust transfers in the Earth-Moon system // *2015 7th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST)*. – IEEE, 2015. – С. 95-98.
  29. Ширококов М. Г., Трофимов С. П. Перелеты с малой тягой на окололунные орбиты с гало-орбит вокруг лунных точек либрации L 1 и L 2 // *Космические исследования*. – 2020. – Т. 58. – №. 3. – С. 223-234.
  30. Kayama Y. et al. Low-Thrust Trajectory Design with Convex Optimization for

- Libration Point Orbits //AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. – 2021.
- 31.Pritchett R., Howell K., Grebow D. Low-thrust transfer design based on collocation techniques: applications in the restricted three-body problem. – 2017.
- 32.Parrish N. L. et al. Low-thrust transfers from distant retrograde orbits to L2 halo orbits in the Earth-Moon system //International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques. – 2016. – №. GSFC-E-DAA-TN30224.
- 33.Константинов М. С., Мин Т. Оптимизация траектории выведения космического аппарата на рабочую гелиоцентрическую орбиту //Труды МАИ. – 2013. – №. 67. – С. 9-9..
- 34.Racca G. D., Whitcomb G. P., Foing B. H. The SMART-1 mission //ESA bulletin. – 1998. – Т. 95. – С. 72-81.
- 35.Foing B. H. et al. SMART-1 mission to the Moon: status, first results and goals //Advances in Space Research. – 2006. – Т. 37. – №. 1. – С. 6-13.
- 36.Sarli B. V. et al. Destiny+ trajectory design to (3200) phaeon //The Journal of the Astronautical Sciences. – 2018. – Т. 65. – №. 1. – С. 82-110.
- 37.Tsuda Y. et al. Flight status of robotic asteroid sample return mission Hayabusa2 //Acta Astronautica. – 2016. – Т. 127. – С. 702-709.
- 38.Шапеев В. П., Беляев В. А. Решение краевых задач для уравнений с частными производными в треугольных областях методом коллокации и наименьших квадратов //Вычислительные методы и программирование. – 2018. – Т. 19. – С. 96-111.
- 39.Старинова О. Л. Расчет межпланетных перелетов космических аппаратов с малой тягой. – 2007.
- 40.Чунжуй, Д., Старинова, О.Л. Генерация искусственных гало-орбит в окололунном пространстве с использованием двигателей малой тягой //Космические исследования. – 2022. – Т. 60. – №. 2. – С. 151-166.
- 41.Иванюхин А. В., Петухов В. Г. Низкоэнергетические квазиоптимальные траектории с малой тягой к точкам либрации и гало-орбитам //Космические исследования. – 2020. – Т. 58. – №. 2. – С. 165-176.

42. Ferrari F., Lavagna M. Periodic motion around libration points in the elliptic restricted three-body problem // *Nonlinear Dynamics*. – 2018. – Т. 93. – №. 2. – С. 453-462.
43. Trofimov S. et al. Transfers from near-rectilinear halo orbits to low-perilune orbits and the Moon's surface // *Acta Astronautica*. – 2020. – Т. 167. – С. 260-271.
44. Curtis H. *Orbital mechanics for engineering students*. – Butterworth-Heinemann, 2013.
45. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978.
46. Белецкий В. В., Родников А. В. Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // *Космические исследования*. – 2008. – Т. 46. – №. 1. – С. 42-50.
47. Bolliger M. J. *Cislunar Mission Design: Transfers Linking Near Rectilinear Halo Orbits and the Butterfly Family* : дис. – Purdue University Graduate School, 2019.
48. Koon W. S. et al. Dynamical systems, the three-body problem and space mission design // *Equadiff 99: (In 2 Volumes)*. – 2000. – С. 1167-1181.
49. Farquhar R. W., Kamel A. A. Quasi-periodic orbits about the translunar libration point // *Celestial mechanics*. – 1973. – Т. 7. – №. 4. – С. 458-473.
50. Connor Howell K. Three-dimensional, periodic, 'halo' orbits // *Celestial mechanics*. – 1984. – Т. 32. – №. 1. – С. 53-71.
51. Grebow D. Generating periodic orbits in the circular restricted three-body problem with applications to lunar south pole coverage // *MSSA Thesis, School of Aeronautics and Astronautics, Purdue University*. – 2006. – С. 8-14.
52. Luo T., Xu M., Dong Y. Natural formation flying on quasi-halo orbits in the photogravitational circular restricted three-body problem // *Acta Astronautica*. – 2018. – Т. 149. – С. 35-46.
53. Чунжуй Д., Старинова О. Л. Оптимальное управление при перелетах с малой тягой на вертикальные орбиты с орбит Ляпунова // *Мехатроника*,

- автоматизация, управление. – 2022. – Т. 23. – №. 3. – С. 158-167.
54. Ильин И. С., Сазонов В. В., Тучин А. Г. ГАЛО-ОРБИТЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ L 2 СИСТЕМЫ СОЛНЦЕ ЗЕМЛЯ //Космические исследования. – 2014. – Т. 52. – №. 3. – С. 201-201.
55. Gomez G. et al. Invariant manifolds, the spatial three-body problem and space mission design. – American Astronautical Society, 2001. – №. 109. – С. 3-22.
56. Кондратьев Б. П. К вопросу об отклонении центра масс Луны к востоку от направления на Землю. Механизм, основанный на эволюции орбиты //Астрономический журнал. – 2018. – Т. 95. – №. 8. – С. 574-582.
57. Du C, Starinova OL. Orbital perturbation analysis and generation of nominal near rectilinear halo orbits using low-thrust propulsion //Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, Mar. 2022.
58. Чунжуй Д., Старинова О. Л. Анализ стабильности низких селеноцентрических орбит //Инженерный журнал: наука и инновации. – 2020. – №. 10 (106). – С. 5.
59. Duan J., Wang Z. Orbit determination of CE-4' s relay satellite in Earth-Moon L2 libration point orbit //Advances in Space Research. – 2019. – Т. 64. – №. 11. – С. 2345-2355.
60. Pavlak T. A., Howell K. C. Evolution of the out-of-plane amplitude for quasi-periodic trajectories in the Earth–Moon system //Acta Astronautica. – 2012. – Т. 81. – №. 2. – С. 456-465.
61. Старинова О. Л., Шорников А. Ю. Моделирование гравитационного поля сложной конфигурации //Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2015. – Т. 17. – №. 2-1. – С. 167-170.
62. Roncoli R. B. Lunar constants and models document, JPL D-32296 //Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology. – 2005.
63. Sims L. D. What is a lunar standstill III? //Documenta Praehistorica. – 2016. – Т. 43. – С. 467-478.
64. Muralidharan V., Weiss A., Kalabic U. V. Control strategy for long-term



- station-keeping on near-rectilinear halo orbits //AIAA Scitech 2020 Forum. – 2020. – С. 1459.
- 65.Huang J., Biggs J. D., Cui N. Families of halo orbits in the elliptic restricted three-body problem for a solar sail with reflectivity control devices //Advances in Space Research. – 2020. – Т. 65. – №. 3. – С. 1070-1082.
- 66.Peng H., Xu S. Numerical stability study of multi-circle elliptic halo orbit in the elliptic restricted three-body problem //Proceedings 24th International Symposium on Space Flight Dynamics—24th ISSFD. Luarel, United States. – 2014. – С. 1-20.
- 67.Pan X., Pan B., Li Z. Bounding Homotopy Method for Minimum-Time Low-Thrust Transfer in the Circular Restricted Three-Body Problem //The Journal of the Astronautical Sciences. – 2020. – Т. 67. – №. 4. – С. 1220-1248.
- 68.Saghamanesh M., Baoyin H. A robust homotopic approach for continuous variable low-thrust trajectory optimization //Advances in Space Research. – 2018. – Т. 62. – №. 11. – С. 3095-3113.
- 69.Петухов В. Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой //Космические исследования. – 2012. – Т. 50. – №. 3. – С. 258-258.
- 70.Mingotti G., Topputo F., Bernelli-Zazzera F. Combined Optimal Low-Thrust and Stable-Manifold Trajectories to the Earth-Moon Halo Orbits //AIP Conference Proceedings. – American Institute of Physics, 2007. – Т. 886. – №. 1. – С. 100-112.
- 71.Shampine L. F. et al. Solving boundary value problems for ordinary differential equations in MATLAB with bvp4c //Tutorial notes. – 2000. – Т. 2000. – С. 1-27.
- 72.Higham D. J., Higham N. J. MATLAB guide. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2016.
- 73.Петухов В. Г., Чжоу Ж. Расчет возмущенной импульсной траектории перелета между околоземной и околулунной орбитами методом продолжения по параметру //Вестник Московского авиационного

- института. – 2019. – Т. 26. – №. 2. – С. 155-165.
74. Koon W. S. et al. Low energy transfer to the Moon // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. – 2001. – Т. 81. – №. 1. – С. 63-73.
75. Mingotti G., Topputo F., Bernelli-Zazzera F. Invariant manifold, low-thrust transfers to low Mars orbits // *Paper No. IAC-10-C1*. – 2010. – Т. 9.
76. Боровенко В. Н., Данилова М. И. Оценка энергозатрат на поддержание параметров орбит лунной орбитальной станции // *Космонавтика и ракетостроение*. – 2019. – №. 5. – С. 5-12.
77. Standish E. M. JPL planetary and lunar ephemerides, DE405/LE405, JPL IOM 312 // *F-98\_048*. – 1998. – С. 42-196.