

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЁВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи

**Чэнь Шумин**

**Разработка программ управления для развёртывания вращающихся  
тросовых группировок космических аппаратов**

**2.5.16 – Динамика, баллистика, управление движением  
летательных аппаратов**

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, профессор  
Заболотнов Юрий Михайлович

Самара – 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1 АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ИЗВЕСТНЫХ РАБОТ И РЕШАЕМЫЕ ЗАДАЧИ .....	11
1.1 Тросовые системы в космосе .....	11
1.2 Космические тросовые эксперименты .....	12
1.3 Согласованный полёт КА и тросовые группировки .....	16
1.4 Математическое описание движения тросовых группировок и анализ устойчивости их конфигураций .....	22
1.5 Методы стабилизации и управления движением тросовых группировок .....	28
1.6 Схема исследований и описание решаемых задач .....	33
1.7 Выводы по первой главе .....	35
2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ТРОСОВЫХ ГРУППИРОВОК КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ .....	37
2.1 Используемые системы координаты .....	37
2.2 Математические модели движения ТГКА в форме Лагранжа .....	39
2.2.1 Модель движения треугольной ТГКА .....	39
2.2.2 Модель движения ТГКА конфигурации «ступица-спицы» ....	46
2.3 Математическая модель движения треугольной ТГКА с учётом движений КА относительно своих центров масс .....	51
2.4 Основные результаты и выводы по второй главе .....	56
3 РАЗРАБОТКА ПРОГРАММ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ТРЕУГОЛЬНОЙ ТРОСОВОЙ ГРУППИРОВКИ .....	58
3.1 Анализ устойчивости движения вращающейся треугольной ТГКА в плоскости орбиты .....	58
3.2 Номинальная программа развёртывания треугольной ТГКА .....	63
3.2.1 Законы управления силами натяжения и реактивными силами для развёртывания вращательной ТГКА .....	63

3.2.2 Аналитическое решение уравнений движения треугольной ТГКА в номинальном случае.....	64
3.2.3 Численное моделирование движения треугольной ТГКА в номинальном случае.....	66
3.3 Проверка возможности реализации номинальной программы развёртывания треугольной ТГКА.....	69
3.3.1 Расчёт процесса разделения спутников.....	70
3.3.2 Численное моделирование процесса развёртывания треугольной ТГКА с использованием уравнений движения в геоцентрической неподвижной системе координат.....	73
3.4 Программы развёртывания треугольной ТГКА с учётом ограничения на управление.....	83
3.4.1 «Прямой» способ учёта ограничений на управление.....	84
3.4.2 Разработка программы управления с использованием вспомогательной динамической системы.....	89
3.4.3 Численное моделирование и его анализ.....	92
3.5 Основные результаты и выводы по третьей главе.....	98
4 РАЗРАБОТКА ПРОГРАММ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ТГКА КОНФИГУРАЦИИ «СТУПИЦА-СПИЦЫ».....	101
4.1 Анализ динамики ТГКА «ступица-спицы» при её вращении вокруг центра масс.....	101
4.2 Оптимальное управление развёртыванием ТГКА «ступица-спицы».....	104
4.2.1 Постановка задачи.....	104
4.2.2 Определение оптимального управления с использованием принципа динамического программирования Беллмана.....	105
4.2.3 Численное моделирование и его анализ.....	108
4.3 Разработка метода робастного управления движением ТГКА «ступица-спицы» при её формировании.....	112

4.3.1 Программа управления выпуском тросов и анализ устойчивости работы системы управления .....	112
4.3.2 Численное моделирование и его анализ .....	117
4.4 Основные результаты и выводы по четвёртой главе .....	123
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	124
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ .....	127
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	130

## ВВЕДЕНИЕ

В диссертации разрабатываются программы управления при формировании тросовых группировок космических аппаратов (ТГКА) конфигураций «треугольник» и «ступица-спицы» (открытая схема).

**Актуальность работы.**

В настоящее время использование космических тросовых систем (КТС) для формирования группировок космических аппаратов (КА) представляется перспективным. Тросовые группировки КА имеют определённые преимущества по сравнению с использованием обычных орбитальных группировок, в которых КА не связаны между собой механическими связями. Наличие механических связей (в виде тросов) между КА позволяет создавать на орбите достаточно сложные и в то же время протяжённые геометрические структуры, что невозможно с помощью традиционных технологий. Такие ТГКА могут функционировать на орбите при сохранении своей рабочей геометрической конфигурации в течение длительного времени с малым расходом топлива, которое всегда ограничено. В частности, это относится к вращающимся ТГКА, в которых заданная геометрическая конфигурация поддерживается центробежными силами инерции. В различных странах мира существует множество проектов полезного использования таких систем. Многоточечные измерения, мониторинг геомагнитного и гравитационного полей, ионосферы, системы наблюдения ближнего и дальнего космоса с большой базой, сканирование поверхности и недр Земли с помощью систем больших размеров, космические распределённые звёздные интерферометры, имеющие существенно меньшую массу по сравнению с монолитными телескопами и т.д. вот далеко не полный перечень полезного применения ТГКА.

Выполнения многих космических миссий и многочисленные публикации показывают необходимость дальнейших исследований по динамике и управлению движением КТС и ТГКА. Важные результаты в этом научном направлении получены Белецким В.В., Левиным Е.М., Алпатовым А.

П., Ивановым В.А., Аслановым В.С., Сидоренко В.В., Заболотновым Ю.М., Ишковым С.А., Кульковым В. М., Lorenzini E.C., Misra A.K, Williams P., Zhu Z.H., Hoyt R., Huang P., Wen H., и другими. Анализ известных работ показывает, что обеспечение согласованного полёта по орбите тросовых группировок как многоэлементных систем КА, связанных лёгкими и гибкими связями, представляется собой сложную задачу, решение которой ещё далеко от завершения. Особенно это относится к методам формирования таких систем на орбите. В представленном диссертационном исследовании основное внимание уделяется разработке программ управления для развёртывания двух типов плоских ТГКА, вращающихся в плоскости орбиты, а именно, конфигураций «треугольник» (замкнутая форма без центрального КА) и «ступица-спицы», состоящей из центрального КА и двух микроспутников. Причём в отличие от известных работ задачи решаются в более полной постановке, например, для треугольной группировки КА рассматриваются не как материальные точки, а как твёрдые тела конечных размеров, совершающие колебания относительно направления тросов, а для ТГКА «ступица-спицы» учитывается движение центрального КА относительно центра масс.

Исследование выполнено при финансовой поддержке CSC (Китайский стипендиальный совет), РФФИ и Государственного фонда естественных наук Китая в рамках совместных научных проектов № 21-51-53002 и № 62111530051.

**Объект исследования:** тросовая группировка космических аппаратов на околоземной орбите.

**Предмет исследования:** динамика и методы управления движением при формировании вращающихся ТГКА конфигураций «треугольник» и «ступица-спицы».

**Цель исследования:** разработка программ управления при формировании ТГКА «треугольник» и «ступица-спицы», и анализ устойчивости процесса их развёртывания с точки зрения сохранения заданной геометрической конфигурации.

Для достижения цели исследования необходимо решить следующие задачи:

1. Разработать математические модели движения ТГКА рассматриваемых конфигураций, с различной степенью детализации описывающих их движения.
2. Разработать программы управления при формировании вращающейся ТГКА конфигурации «треугольник» с использованием управления реактивными силами малой тяги и силами натяжения тросов с учётом ограничений на управляющие воздействия.
3. Разработать методы управления при формировании вращающейся ТГКА «ступица-спицы» с использованием реактивных сил малой тяги и управления силами натяжения тросов.
4. Провести проверку возможности реализации предлагаемых номинальных программ управления с использованием моделей движения ТГКА, учитывающих возмущения.

#### **Методы решения.**

Для решения сформулированных задач используются классические методы механики, теории управления, вычислительной и высшей математики.

#### **Область исследования.**

Область исследования соответствует п. 5 «Создание методов анализа и проектирования траекторий одиночных летательных аппаратов, а также группы ЛА» и п. 6 «Разработка алгоритмов автономного и дистанционного управления траекторией ЛА, а также однородных и разнородных группировок ЛА» паспорта специальности 2.5.16 – Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов.

#### **Научная новизна полученных результатов.**

Научная новизна представленных в диссертации результатов заключается в следующем:

1. Построены математические модели движения ТГКА конфигураций «треугольник» и «ступица-спицы», с различной степенью детализации

описывающие процесс их формирования и предназначенные для построения программ управления, и модели с учётом движения КА относительно центра масс для проверки реализуемости предлагаемых управлений при действии возмущений.

2. Предложена и исследована номинальная программа управления силами натяжения тросов и реактивными силами (релейный закон) при развёртывании треугольной ТГКА. Получено аналитическое решение уравнений, описывающих номинальное движение системы, при отсутствии возмущений в частном случае, когда конфигурация ТГКА «правильный треугольник» и реактивные силы отсутствуют.

3. Получены аналитические оценки для величины угловой скорости вращения треугольной ТГКА, необходимой для устойчивого её вращения после формирования системы.

4. С использованием метода, основанного на движении системы по поверхности скольжения, разработаны программы управления реактивными силами и силами натяжения тросов при развёртывании вращающейся треугольной ТГКА. Показано, что включение в контур управления вспомогательной динамической системы позволяет ещё на этапе проектирования системы управления учесть заданные ограничения на управляющих воздействия.

5. Предложены и исследованы программы управления при формировании ТГКА «ступица-спицы», реализующие терминальный принцип управления по конечному состоянию системы. Нелинейный закон развёртывания ТГКА строится в соответствии с принципом робастного управления с учётом наличия ограниченных возмущений и возмущений, связанных с начальным состоянием системы.

#### **Практическая ценность работы.**

Разработаны алгоритмы управления ТГКА для формирования конфигураций «треугольник» и «ступица-спицы» при их развёртывании, которые могут быть использованы при проектировании перспективных



космических миссий. Разработано соответствующее математическое, программное и методическое обеспечение.

### **Положения, выносимые на защиту.**

1. Модели движения ТГКА конфигураций «треугольник» и «ступица-спицы»: а) упрощённые модели движения для разработки программ управления и получения аналитических оценок; б) модели с учётом движения КА относительно центра масс для проверки работы программ с учётом действующих возмущений.

2. Номинальная программа управления для формирования ТГКА в виде правильного треугольника и аналитическое решение, описывающее движение ТГКА в идеальном случае при отсутствии возмущений и реактивных сил.

3. Аналитическая оценка необходимой величины скорости вращения треугольной ТГКА в её конечном состоянии.

4. Программа управления для формирования треугольной ТГКА, построенная на основе скользящего режима управления с учётом ограничений на управляющие воздействия.

5. Программа развёртывания ТГКА «ступица-спицы», построенная с использованием режима скольжения по поверхности и принципа робастного управления.

6. Доказательства асимптотической устойчивости заданных конечных состояний систем при использовании предлагаемых программ развёртывания рассматриваемых ТГКА с помощью второго метода Ляпунова.

7. Результаты моделирования процессов развёртывания рассматриваемых конфигураций ТГКА, подтверждающие возможность реализации предложенных программ управления при действии возмущений.

### **Степень достоверности и апробация результатов.**

Основные научные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на следующих всероссийских и международных конференциях: международная научно-техническая конференция «6th International Conference

on Tethers in Space (TiS-2019)» (г. Мадрид, Испания, 2019 г.), международный семинар «Навигация и управление движением» (г. Самара, 2020 г.), XXIV всероссийский семинар по управлению движением и навигации летательных аппаратов (г. Самара, 2021 г.), международная научно-техническая конференция «12th Asia-Pacific International Symposium on Aerospace Technology (APISAT 2021)» (Остров Чеджу, Южная Корея, 2021 г.).

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректным использованием методов теоретической механики, вычислительной математики, апробированных методов теории оптимального управления, и согласованностью полученных результатов с известными результатами по исследованию динамики КТС и ТГКА.

#### **Личный вклад автора.**

Все научные результаты и результаты, вынесенные на защиту, получены автором самостоятельно. Автором самостоятельно проведены теоретические исследования и вычислительные эксперименты, подтверждающие основные положения, выводы и рекомендации. Все публикации по работе подготовлены самостоятельно или при определяющем её участии.

#### **Основные публикации.**

По теме диссертационной работы опубликовано 11 работ. В том числе 3 статьи опубликованы в журналах, входящих в список, рекомендованный ВАК, и 6 статей – в изданиях, входящих в базы SCOPUS и WOS.

#### **Структура и объем диссертации.**

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка сокращений и обозначений, списка литературы. Объем работы составляет 138 страниц, она содержит 46 рисунков и 8 таблиц.

**Список источников** включает в себя 93 наименования, где знаком (\*) отмечены работы автора. Это сделано также в тексте работы.

# 1 АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ИЗВЕСТНЫХ РАБОТ И РЕШАЕМЫЕ ЗАДАЧИ

## 1.1 Тросовые системы в космосе

Историю космических тросовых систем (КТС) можно проследить с конца XIX века, когда основоположник современной космонавтики Константин Циолковский изобразил в научно-фантастической повести схему «космической башни» (также называемого космического лифта), поднимающей грузы с поверхности нашей планеты прямо на геостационарную орбиту без использования больших ракет [1]. С 1960 года развиваются концепции для «космического лифта» на основе тросовых систем, при этом элементы системы соединяются прочными и лёгкими кабелями (или тросами) и удерживаются силами натяжения [2]. Несмотря на то, что до сих пор у человечества всё ещё нет технологий для производства требуемого лёгкого и крепкого материала для реализации проекта космического лифта, попытки подступиться к этой задаче приносят пользу при развитии новых перспективных космических технологий – космических тросовых систем. В частности, с более глубоким освоением космоса стало возможным проведение миссий и экспериментов с использованием КТС на орбите. Среди них два эксперимента, выполненные США на пилотируемых космических кораблях "Джемини-11 и -12" в 1966 году, считаются самыми ранними миссиями, посвящёнными практической реализации тросовых систем на орбите.

За последние десятилетия большое количество исследований было посвящено анализу динамики КТС [3-6], и разработке методов управления для различных этапов их орбитального движения, например, развёртывание/свёртывание тросов [7], стабилизация движений [8], перевод систем во вращение [9] и др. Самой популярной и в то же время наиболее простой конструкцией КТС является связка двух космических объектов, к которым относятся космическая станция, космические корабли, спутники или грузы. Длина гибкой лёгкой механической связи (троса, кабеля, ленты) может

составлять от десяти метров до сотен километров в зависимости от требований космических миссий. По сравнению с космическими системами традиционного типа, КТС обладают некоторыми особенностями, которые были отражены в многочисленных космических проектах [10]. Во-первых, большая протяжённость КТС позволяют обеспечивать устойчивость системы на вертикальном положении [11], что делает протяжённые КТС идеальными для применения в задачах по исследованию верхних слоёв атмосферы планет [12]. Во-вторых, КТС с электропроводящим кабелем взаимодействуют с магнитным полем Земли [13]\*, что уменьшает потребность в традиционных двигательных установках на химическом топливе. В результате этого электродинамические космические тросовые системы (ЭКТС) особенно целесообразны в ситуациях, когда необходимо постоянно изменять высоту полёта, например, для удаления космического мусора [14] и для коррекции орбит КА [15]. В-третьих, вращающиеся вокруг центра масс КТС обеспечивают устойчивость движения системы за счёт действия центробежных сил инерции, причём на концевых телах системы создаётся искусственная сила тяжести. Более того, КА могут переходить на новую верхнюю или нижнюю орбиту путём отцепления концевых тел вращающихся КТС от троса, что может служить вспомогательным средством запуска при отсутствии химических ракетных двигателей [16, 17]. Четвёртая особенность КТС – это возможность изменения геометрической конфигурации системы путём выпуска/втягивания троса [18], что в отличие от традиционных космических систем открывает новые возможности при выполнении космических операций.

## **1.2 Космические тросовые эксперименты**

Российские учёные заложили основы теории исследования тросовых систем, а также создали условия для практического воплощения тросовых экспериментов в космосе. Ещё в 1965 году в ЦКБМ (нынешняя РКК "Энергия" им. С. П. Королёва) разработали проект "Союз-ИТ" для создания на корабле

"Союз" искусственной гравитации. В проекте предполагалось использовать километровый стальной трос для соединения корабля с последней ступенью ракеты-носителя и затем привести во вращение данную связку [10]. Проект был бы первой в мире попыткой использовать трос в области космических экспериментов, однако после кончины руководителя и главного конструктора ЦКБМ Сергея Королёва, проект был приостановлен.

Начиная с 1966 года проведения первого эксперимента, когда американский космический корабль "Джемини" был привязан к ступени ракеты "Аджена" в открытом космосе одним нейлоновым тросом, были реализованы многочисленные космические тросовые эксперименты для проверки технологий развёртывания троса, изучения устойчивости и выживаемости тросовых систем и т.д. Миссия на "Джемини" показала устойчивость движения связки двух КА как во вращательном режиме, так и в вертикальном положении [19]. Успех первых шагов в области тросовых экспериментов подтвердил возможность применения КТС в космосе и поднял интерес к организации дальнейших проектов.

В целом эти ранее проведённые космические эксперименты можно классифицировать по разным признакам, например, по способности троса проводить электрический ток. В качестве примера непроводящих КТС можно отметить американские эксперименты "SEDS-1" (The Small Expendable Deployer System-1, 1993 г.) и "SEDS-2" (1994 г.), которые впервые успешно развернули сверхпротяжённую тросовую систему. Развёрнутая длина троса в этих двух миссиях составляла около 20км. По сравнению с "SEDS-1" в миссии "SEDS-2" использовалось улучшенное управление выпуском по принципу обратной связи, так как в предыдущей миссии тормозная система сработала не так, как прогнозировалось, что привело к резкой приостановке процесса и подпрыгиванию троса при завершении развёртывания [20]. В 1996 году был проведён эксперимент "TiPS" (The Tether Physics and Survivability Experiment, США), в котором два концевых тела соединялись непроводящим тросом длиной 4км. Цель эксперимента – это изучение динамики гравитационно-

градиентного троса и оценка выживаемости системы при воздействии троса с окружающей средой во время длительного полёта [21]. Далее необходимо отметить эксперимент "YES" (The Young Engineers' Satellite), он планировался в 1997 году и по плану трос должен был развернут на 30км. Однако миссия была отменена из риска столкновения со спутниками на низкой околоземной орбите (НОО). Вторая миссия "YES-2" осуществилась уже через 10 лет. В работах проекта участвовали учёные и студенты из ESA и России. В данной миссии планировалось развернуть трос длиной 30км в два этапа, и после полного его развёртывания капсула "Fotino" должна была войти в атмосферу с помощью импульса, создаваемого качающимся тросом. Хотя спускаемая капсула не была обнаружена после входа в атмосферу, миссия подтвердила возможность спуска полезных грузов на поверхность Земли. Можно сказать, что эксперимент "YES-2" имеет большое значение для исследования динамики и управления развёртыванием непроводящих тросов, так как трос был почти полностью развёрнут, причём его длина стала рекордной среди проведённых экспериментов КТС. К тому же, был собран большой объём данных о развёртывании сверхпротяжённых КТС [22]. В последние годы несколько тросовых экспериментов было организовано Японией под названием серии миссий "STARS" (The Space Tethered Autonomous Robotic Satellite), включающихся эксперименты КТС с непроводящими тросами ("STARS", 2009 г.; "STARS-C", 2016 г.; "STARS-Me", 2018 г.) и с проводящим тросом ("STARS-II", 2014 г., об этом эксперименте будет рассказано ниже). Длины тросов, используемых в этих миссиях для соединения двух наноспутника, невелики (примерно десятки метров). Хотя эти миссии столкнулись с некоторыми неудачами [23, 24], однако удалось проверить технологии, связанные с выпуском троса, операциями орбитального робота и «космического лифта» небольшой длины.

Когда речь идёт о экспериментах КТС с проводящим тросом, то одними из самых первых являлись американо-японские эксперименты "CHARGE-1" и "CHARGE-2", проведённые в начале 1980-х г.. Проектная длина

электропроводящего троса – 500м, и в экспериментах тросы почти были полностью выпущены: в "CHARGE-1" длина троса составила 418м, а в "CHARGE-2" – 426м. Было обнаружено, что трос можно рассматривать как радиоантенну при пропускании тока по кабелю [25]. Следующий эксперимент "CHARGE-2B" (1992 г.) данной серии также был успешным. Канадский эксперимент "OEDIPUS-A" был осуществлён в 1989 г., в ходе которого электродинамический трос выпустился на длину 958м в авроральной ионосфере [26]. В 1990-е г. были проведены итапо-американские проекты "TSS-1" (the Tethered Satellite System) и "TSS-1R", которые считаются первыми попытками развёртывания КТС с большой длиной троса (20км). В первом эксперименте серии "TSS" привязанный спутник удалялся на тросе лишь на длину 260м из-за заедания троса в лебёдке. Вторая попытка "TSS-1R" была сделана в 1996 году, и на этот раз трос удалось выпустить почти на всю длину, однако он был неожиданно обрезан и вследствие этого итальянский спутник был потерян. Серия "TSS" направлена на исследование электромагнитного взаимодействия между тросом и окружающей космической плазмой, свойств электродинамического троса и на возможность генерации тока в тросе. Поставленные задачи не были выполнены из-за обрыва троса, тем не менее часть исследований с проводящим тросом была проведена. Так в "TSS-1R" по тросу генерировался ток силой 0.5А [27]. Также необходимо отметить эксперименты с электропроводящими тросами, организованные японскими агентствами ISAS и JAXA. Например, миссия "T-REX" (Tether Technologies Rocket Experiment, 2010 г.) была проведена для испытания нового типа электродинамического троса (300-метровая неизолированная алюминиевая лента). Использование таких тросов может привести к созданию бестопливных двигательных установок для КА на низкой околоземной орбите [28]. В 2014 г. был осуществлён второй запуск серии экспериментов "STARS" на высоту орбиты 390км. Основная цель миссии "STARS-II" состояла в том, чтобы оценить и проверить основные технологии активного удаления космического мусора с использованием электропроводящего троса.

Изменение высоты орбиты говорит о том, что трос был развёрнут, хотя и частично. Однако, по оптическим наблюдениям с наземной астрономической обсерватории был сделан вывод о том, что развёрнутый трос запутался [29]. В 2017 г. был выполнен эксперимент "HTV-KITE" (Kounotori Integrated Tether Experiment). Предполагалось размотать неизолированный трос длиной 720м, на конце которого располагался электро-излучатель. Хотя развёртывание троса было неудачным из-за механической неисправности тормозного механизма, электро-излучатель нормально работал на протяжении всего периода миссии и продемонстрировал свои способности на низкой околоземной орбите [30]. Тросовые эксперименты, проведённые в последние два-три года, в основном используются для проверки технологии спуска КА с орбиты с помощью ленточных неизолированных тросов. В качестве примера можно привести такие эксперименты, как "TEPCE" (Tether Electrodynamic Propulsion CubeSat Experiment, США, 2019 г.), "Terminator Tape" (Tethers Unlimited Inc. (TUI), 2019 г.), и миссия "Dragracer" (TUI, 2020 г.). Кроме того, в число запланированных экспериментов, которые будут запущены в ближайшем будущем, входят "DESCENT" (Deorbiting Spacecraft using Electrodynamic Tethers, Канада), и "E.T.PACK" (Electrodynamic Tether Technology for Passive Consumable-less Deorbit Kit, Евросоюз).

### **1.3 Согласованный полёт КА и тросовые группировки**

В последние годы в отрасли космической техники появился большой интерес к исследованию согласованного полёта нескольких космических объектов [31]. Прежде всего, это связано с преимуществами согласованного полёта КА, заключающимися в том, что он обеспечит создание в космосе крупных и сложных конструкций с низкой общей стоимостью по сравнению с традиционными КА большого размера. Следовательно, реализация распределённых мульти-звёздных структур на орбите рассматривается как одна из будущих тенденций в космических исследованиях. В большинстве случаев, желательно, чтобы группировка КА продолжительное время



функционировала на орбите, что требует постоянной коррекции орбит КА, обеспечения их ориентации и относительного положения. Таким образом, для поддержания заданной геометрической конфигурации группировок КА, не соединённых между собой механическими связями, необходимо постоянно расходовать топливо в течение длительного периода времени, что требует больших затрат. Кроме того, из-за ограничений в технологиях космической связи и точности измерительных приборов и датчиков, конфигурацию традиционных группировок КА трудно сохранять, поэтому точность обеспечения относительного положения КА невысока. Чтобы справиться с этими проблемами, была предложена идея осуществлять согласованный полёт КА путём соединения их тросами [32]. Если обеспечить натяжение тросов, то относительные расстояния между космическими объектами (т.е. конфигурации тросовых группировок) могут поддерживаться достаточно точно в течение большого количества оборотов вокруг Земли, при этом потребуется небольшое активное управление и низкий расход топлива.

Тросовые группировки космических аппаратов (ТГКА) – это КТС нового типа, состоящие обычно из нескольких КА. ТГКА могут иметь разные геометрические конфигурации и в то же время КА совершают согласованный полёт по орбите. Учитывая свойства ТГКА, такие космические системы особенно подходят для реализации космических операций долговременного характера, таких как исследование глубокого космоса [33], многоточечные распределённые измерения на орбите [34], создание искусственной гравитации [35], миссии, связанные с солнечными парусами [36] и т.д.

Из-за трудностей технологического характера реализованные до настоящего времени космические эксперименты в основном касаются КТС с двумя КА. Однако эксперименты с двумя КА послужат основой для проектирования и реализации экспериментов ТГКА в будущем. За последние десятилетия по мере развития теории и технологий проекты ТГКА все чаще предлагались и широко изучались учёными в различных странах мира.

В начале нашего века был предложен проект "SPECS" (The Submillimeter Probe of the Evolution of Cosmic Structure), который рассматривался NASA как преемник космического телескопа Хаббла и должен был в будущем сыграть роль зонда для получения изображений космоса высокого разрешения в субмиллиметровом диапазоне волн. Чтобы удовлетворить потребности этой задачи, диаметр одноапертурного телескопа должен достигать километрового уровня, что, несомненно, труднодостижимо с точки зрения строительства и запуска с учётом современных космических технологий. При этом предлагались различные решения, основанные на технологии формирования КА на тросах. Среди них самые известные концепции проекта – это конструкции "SPECS-HEX" [37] и "SPECS-TetraStar" [38]. Предполагалось, что три зеркала диаметром 3-4 метра могли бы использоваться для наблюдения, что позволяло не только выполнить эти задачи, но и проводить интерферометрию с высоким разрешением. В частности, тросы использовались в этом проекте для снижения расхода топлива при длительном полёте данной конфигурации. Структура концепции "SPECS-HEX", которая считается одной из возможных, показана на рисунке 1.1. В этом случае три зеркала (субапертуры) вместе с необходимыми приборами соединяются с центральной платформой тросами длиной 600м. На другом конце каждого троса находится концевое тело, основной функцией которого является уравнивание массы зеркала на другом конце. Скорость вращения системы можно регулировать путём выпуска/втягивания тросов. Вторая схема "SPECS-TetraStar" – закрытая, т.е. три субапертуры и соответствующие им массы расположены в вершинах внутреннего и внешнего треугольников, соответственно, как показано на рисунке 1.2. Таким образом, конфигурация "TetraStar" использует девять тросов, чтобы придать системе большую жёсткость в плоскости.

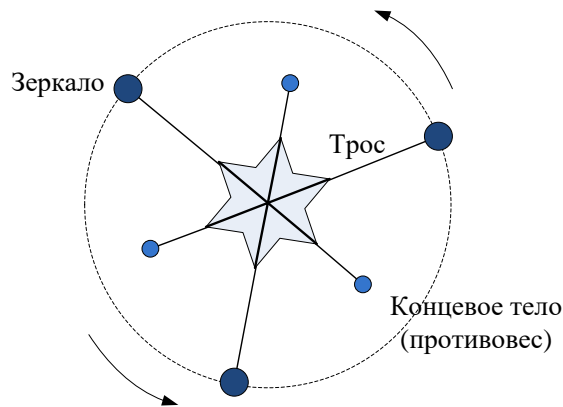


Рисунок 1.1 – Структурная схема "SPECS-HEX"

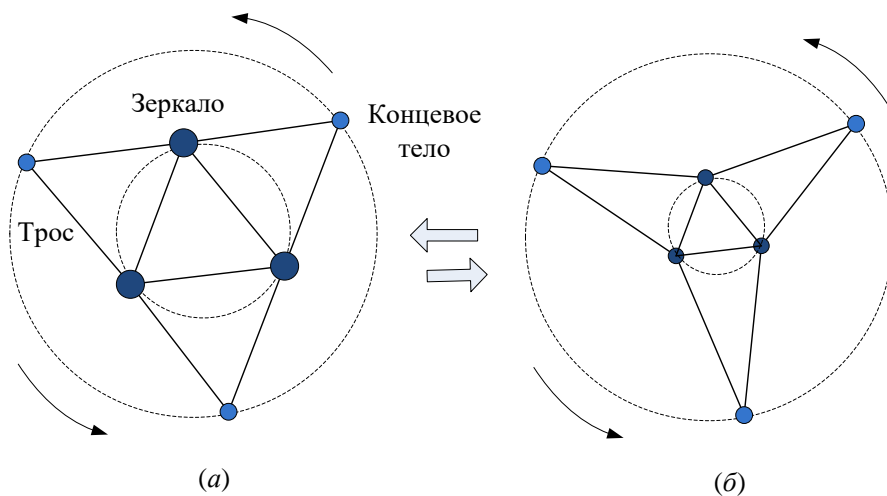


Рисунок 1.2 – Структурная схема "SPECS-TetraStar"

Поскольку на околоземных орбитах стабилизация тросовых систем может быть достигнута с помощью гравитационного градиента, то также была изучена возможность космической интерферометрии на основе линейной конфигурации ТГКА [39]. В 2007 г. был проведён эксперимент "MAST" (The Multi-Application Survivable Tether experiment). Цель проекта – оценка выживаемости тросовой системы, проверка технологии полёта КА в линейной конфигурации, выполнение операции транспортировки груза [40]. К сожалению, трос не удалось выпускать. В 2015 г. в рамках серии экспериментов "STARS" началась подготовка к миссии малого орбитального лифта. Разработанная миссия "STARS-E" предусматривала движение «подъёмника-модуля» по двухкилометровому кевларовому кабелю, соединяющему концевые спутники. В 2018 г. с международной космической станции (МКС) был запущен эксперимент "STARS-Me" с двумя наноспутниками для

демонстрации концепции малого космического лифта. Эксперимент оказался неудачным, хотя информация от одного НС была передана на наземную станцию, сигнал с другого НС с «подъёмником» принять не удалось, и причина до сих пор неизвестна [23].

В общем осуществление космических экспериментов с ТГКА – это довольно сложная задача для современной космической техники, успешных миссий было мало. В последние годы исследования динамики ТГКА различных конфигураций, а также разработка методов управления и подготовка соответствующих экспериментов не прекращались. В частности, некоторые проекты уже прошли предварительные лабораторные проверки на испытательных стендах и оказались на пороге запуска. Японские учёные продемонстрировали процесс формирования вращающейся ТГКА в треугольной конфигурации с помощью трёх КА-стимуляторов [41]. Показано, что разработанный механизм управления выпуском/втягиванием тросов может быть использован в будущих космических миссиях для треугольных ТГКА. Лабораторные эксперименты по исследованию устойчивости вращательного движения треугольной ТГКА вокруг центра масс были организованы китайскими учёными [42]. Между симуляторами (т.е. кубиками для имитации спутников) и испытательным стендом имеется тонкий слой воздуха, что позволяет имитировать состояние, близкое реальному космическому эксперименту. Ряд экспериментальных результатов показывают, что независимо от того, происходит ли вращение ТГКА против или по часовой стрелки (по направлению орбитального движения центра масс системы или нет), существует некоторое критическое значение угловой скорости вращения системы такое, чтобы тросы не провисали и вращательное движение треугольной конфигурации было устойчивым. Лаборатория космических систем Массачусетского технологического института (MIT-SSL, США) разработала испытательный стенд "SPHERES", на котором можно организовать эксперименты по согласованному полёту нескольких НС [43]. На этом стенде была проверена эффективность программ управления для этапов

формирования и изменения геометрии линейных конфигураций (из двух и трёх НС соответственно) и треугольных конфигураций (рисунок 1.3). В последние годы появились и лабораторные эксперименты с тросовыми группировками более сложной конструкции. Для создания искусственной гравитации и изучения физиологии человека при различных гравитационных условиях, учёные Хьюстонского университета (США) разработали концепцию нового испытательного стенда (рисунок 1.4), основанного на вращающейся тросовой группировке типа «ступица-спица» и включающего два корабля экипажа, соединённых тросами с центральным КА, который, в свою очередь, будет пристыкован к Международной космической станции [44]. Кроме того, для демонстрации работы механизма управления развёртыванием тросовой группировки конфигурации «ступица-спицы» была изготовлена испытательная модель, включающая один центральный КА и четыре НС [45].

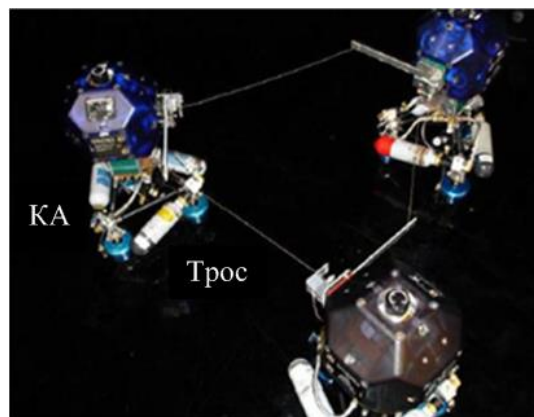


Рисунок 1.3 – Треугольная ТГКА на стенде [43]



Рисунок 1.4 – Концепция испытательного стенда для ТГКА конфигурации «ступица-спицы» [44]

Следует также отметить, что концепция электродинамических солнечных парусов (Е-парус) [46, 47], которой в последние годы уделяется большое внимание исследований, может рассматриваться как расширение концепции ТГКА, точнее, как расширение концепции ТГКА конфигурации «ступица-спицы». В своей базовой форме Е-парус состоит из ряда длинных, тонких, электропроводящих и центробежно натянутых тросов. В относительно ближайшем будущем может быть построен и запущен первый Е-парус с тягой 1Н и массой 100кг [46], который можно рассматривать как инновационную двигательную установку для путешествий по Солнечной системе.

#### **1.4 Математическое описание движения тросовых группировок и анализ устойчивости их конфигураций**

Тросовые группировки можно отнести к многоэлементным механическим системам, и из-за гибкости тросов они, по существу, представляют собой распределённую нелинейную систему с бесконечным числом степеней свободы. Их формирование путём развёртывания/втягивания тросов делает поведение системы очень сложным. Поэтому построение подходящих математических моделей и анализ по ним динамических характеристик ТГКА является основой исследования.

Количество публикаций, посвящённых математическому описанию движения ТГКА на различных этапах их функционирования огромно. В этом направлении первые публикации появились в конце 80-х годов прошлого века [35, 48-51]. Ранние исследования ТГКА, вдохновлённые перспективами применения создания искусственной гравитации (рисунок 1.5) и транспортировки грузов по тросам, в основном касались систем из трёх тел, последовательно соединённых тросами. Модели, построенные в этих работах, довольно просты. Используются такие предположения: система движется на круговой орбите, переносное движение тела по тросу оказывает незначительное влияние на орбитальное движение центра масс системы, тросы считаются неупругими и безмассовыми, угловое движение КА вокруг

собственного центра масс не учитывается и т.д. На раннем этапе исследований большое внимание уделяется движению ТГКА в плоскости, в частности, описанию и анализу движения тросовых систем из трёх тел вблизи местной вертикали. Следует отметить, что, исходя из принятых предположений, рассматриваемая система фактически становится системой с двумя жёсткими стержнями. Это делает разработку математической модели и анализ движения системы несколько более удобными и упрощает получение предварительных результатов.

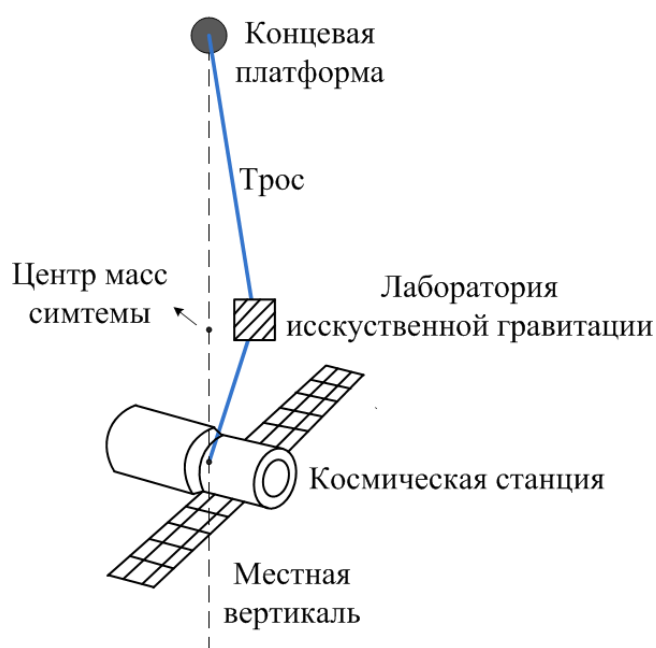


Рисунок 1.5 – ТГКА для создания искусственной гравитации

Хотя упомянутая выше модель "два жёстких стержня" кажется простой, поскольку масса и гибкость тросов не учитываются, её можно использовать для исследования поведения движения тросовых группировок в орбитальной плоскости без значительных вычислительных затрат и для исследования применимости разработанных программ управления. С использованием моделей, подобных "жёстким стержням", в начале нашего века при изучении динамики ТГКА, образующих линейные конфигурации, начали появляться работы, посвящённые анализу движения системы в более сложных, но более близких к практике случаях. В статьях [52, 53] рассматривается либрационное движение тросовой группировки из трёх тел относительно вертикали по

эллиптическим орбитам, для случаев, когда тросы бывают обычными и электропроводящими соответственно. Аналогично обычным КТС с двумя телами, либрационное движение линейной тросовой группировки из трёх тел ведёт себя хаотично на эллиптической орбите. В работе [54] отмечается, что либрационное движение линейной трёх-тельной системы относительно местной вертикали устойчиво при развёртывании тросов и неустойчиво при свёртывании. В работе [55] анализируется процесс формирования вертикальной линейной ТГКА, состоящей из базового КА и несколько НС. Для этого используются упрощённая модель и модель, которая учитывает работу механизмов управления выпуском троса и растяжимость троса. В работе [56] рассмотрены режимы движения КТС относительно местной горизонтали по эллиптическим орбитам, в том числе и учитывается гибкость тросов. Поскольку линейная КТС, расположенная вблизи горизонтали, неустойчива, то для поддержания такой конфигурации необходимо управление. Когда трос моделируется моделью с учётом его деформации, то можно изучать более сложное динамическое поведение тросовых систем. В статье [57] анализируется движение КТС с двумя спутниками, где трос рассматривается как множество материальных точек, связанных между собой упругими механическими односторонними механическими связями. Этот тип модели троса также может применяться к много-тельными ТГКА. Показано, что при наличии возмущений даже малой величины, таких как атмосферное сопротивление, движение гибкого троса может оказаться хаотичным. Как упоминалось выше, космические объекты, соединённые тросами, обычно рассматриваются как точечные массы, и мало исследований, где учитывается движения КА вокруг собственных центров масс. Когда при описании движения линейной конфигурации КА рассматриваются как твёрдые тела, динамическое поведение системы существенно усложняется [58\*, 59-62].

Для функционирования ТГКА на орбите необходимо рассмотреть их устойчивость с точки зрения сохранения её геометрии. Для цепочки КА, последовательно соединённых тросами, чаще всего используется метод



гравитационной стабилизации в положении, близком к местной вертикали [48-55]. Другой популярной подход к сохранению геометрии конфигурации ТГКА в течение длинного периода реализуется с помощью динамической стабилизации, основанной на вращении системы в определённой плоскости относительно собственного центра масс с некоторой угловой скоростью. Динамическая стабилизация часто применяется для более сложных конфигураций, к которым можно отнести двумерные плоские конфигурации (например, кольцеобразная и конфигурация «ступица-спицы») и трёхмерную пространственную конфигурацию (например, пирамидальная), о которых подробно будет сказано ниже. Следует отметить, что в таких проектах, как исследование дальнего космоса, чаще используются вращающиеся конфигурации. Понятно, что вращение системы обеспечивает тросы натянутыми за счёт действия центробежных сил инерции. Кроме того, силы инерции могут также использоваться для управления при формировании ТГКА линейной конфигурации [62].

Если в линейной конфигурации ТГКА соединить тросом первый и последний КА, то образуется закрытая кольцеобразная конфигурация. Самая простая конфигурация этого типа – треугольник, который считается особенно подходящим для миссий по космическим наблюдениям, когда плоскость ТГКА вращается вокруг оси, направленной на объект наблюдения. При описании движения треугольной ТГКА используются различные системы координат. В работе [63] движение системы описывается дифференциальными уравнениями, определяемыми в полярной системе координат, начало которой находится в центре треугольника, и в ортогональной системе координат, связанной с некоторым элементарным отрезком троса (рисунок 1.6). Анализируя силы, действующие на элементарный отрезок троса и используя закон Ньютона, в работе [64] получено динамическое уравнение троса в частных производных. Анализ, проведённый с помощью полученных уравнений, показывает, что сохранение геометрической конфигурации треугольной тросовой системы зависит от

соотношения масс троса и спутника. Математические модели, построенные в работах [63, 64], оказываются пригодными при анализе некоторых характеристик движения тросов с учётом их массы и гибкости, однако из-за сильной нелинейности и сложности уравнений их использование затруднительно из-за больших затрат времени. В этом случае разработка модели со сосредоточенными параметрами путём дискретизации троса является приемлемым компромиссом. Систематическое изложение и применение этой модели к движению КТС из двух КА было проведено в классических книгах Белецкого В.В. [5] и Левина Е.М. [6]. Когда речь идёт о треугольной формации, то её схема с использованием модели со сосредоточенными массами показана на рисунке 1.7 [65]\*.

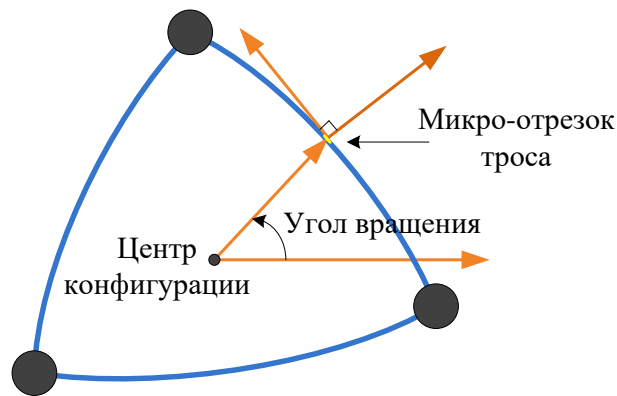


Рисунок 1.6 – Полярная и ортогональная системы координат

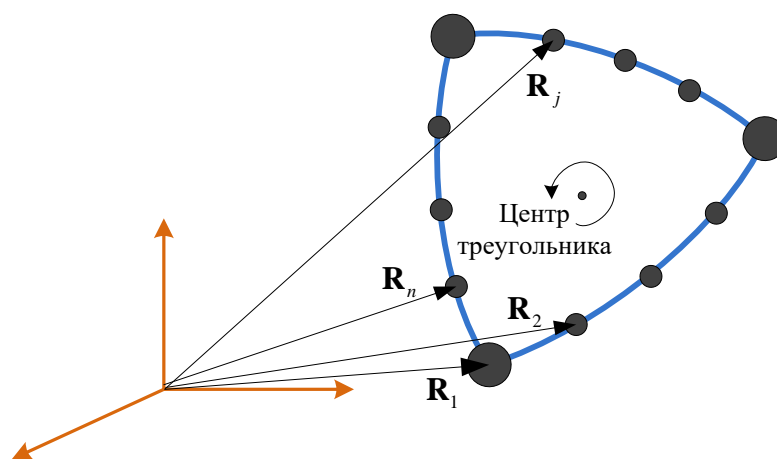


Рисунок 1.7 – Модель со сосредоточенными массами треугольной ТГКА

Для построения управлений при формировании ТГКА часто используемым подходом является использование уравнений Лагранжа. При

применении метода Лагранжа уравнение движения системы получаются путём дифференцирования полной кинетической и потенциальной энергий системы, что особенно подходит для многотельных тросовых систем. В последние годы такой метод широко применяется при описании и анализе движения ТГКА, например, в работах [66-69, 70\*]. Причём в этих работах тросы часто рассматриваются как нерастяжимые и невесомые механические связи, т.е. как жёсткие стержни. С помощью простой модели троса удобно получить систему уравнений движения, которая представляется в виде обыкновенных дифференциальных уравнений относительно небольшого порядка, что удобно применять в задачах разработки программ управления.

Помимо кольцеобразной конфигурации, существует ещё одна важная двумерная плоская конфигурация ТГКА, известная как конфигурация «ступица-спицы». Особенность структуры такого типа ТГКА состоит в том, что в центре системы находится центральный КА (ступица), на периферии которого расположены спутники, соединённые с КА тросами (спицами) соответственно. Концепция миссии "SPECS-HEX" (рисунок 1.1) предлагает использование именно конфигурации «ступица-спицы» (открытая схема). Если соседние периферийные спутники соединяются друг с другом тросами, то тогда имеем закрытую структуру. Более того, для открытой или закрытой систем «ступица-спицы» имеется возможность их преобразования в различные трёхмерные конфигурации, например, в конфигурацию «двойная пирамида», которая образуется путём соединения масс противовесов с обеих сторон с плоскостью вращения системы. В работах [71, 72] анализируется динамика вращения ТГКА открытой и закрытой схем «ступица-спицы», а также системы «двойная пирамида». Уравнения движения систем получены методом Лагранжа для двух случаев: когда конфигурация вращается в плоскости орбиты и когда она движется в обращённой к Земле плоскости, нормальной к орбите. Показано, что конфигурация с открытой схемой «ступица-спицы» не может быть устойчивой, когда количество периферийных спутников превышает три. При этом необходимо соединить соседние

спутники тросом. В работах [73, 74] рассмотрено движение открытой ТГКА «ступица-спицы» вблизи точки либрации  $L_2$ . Отмечено, что тросовая группировка более устойчива, чем обычная спутниковая группировка с тем же начальным положением вблизи точки  $L_2$ . Кроме того, относительно высокая угловая скорость полезна для подавления либрационного движения тросов относительно центрального КА, который рассматривается как материальная точка при анализе динамики системы. В отличие от [71-74], центральный КА в работах [75, 76\*] моделируется как твёрдое тело, что позволяет учитывать связь между вращением центрального тела и движением тросов.

### 1.5 Методы стабилизации и управления движением тросовых группировок

В последние годы количество исследований, посвящённых разработке методов стабилизации и управления движением на различных этапах функционирования ТГКА, быстро растёт. Среди этих работ наибольшее внимание было уделено управлению движением ТГКА на этапе формирования конфигурации, т.е. при развёртывании тросов. Это связано с тем, что успешное полное развёртывание тросов является предпосылкой для достижения желаемой рабочей конфигурации ТГКА. Как и при исследованиях управления КТС из двух КА, при управлении движением многотельных тросовых систем можно использовать различные способы, например, управление длиной и скоростью выпуска тросов, применение двигателей малой тяги. Однако из-за изменчивости и разнообразия геометрий ТГКА методы стабилизации и управления её движением имеют свои особенности для разных конфигураций. В таблице 1.1 представлены характеристики и способы стабилизации известных конфигураций ТГКА на околоземных орбитах.

Таблица 1.1 – Конфигурации ТГКА и способы их стабилизации движения

Конфигурация	Размерность	Схематическое изображение	Стабилизация и способы
--------------	-------------	---------------------------	------------------------

Линейная	Одномерная	Рисунок 1.5	Статистическая стабилизация: режим гравитационной стабилизации; Динамическая стабилизация: стабилизация вращением
Кольцеобразная	Двухмерная	Рисунок 1.2 (с противовесами), рисунки 1.3 и 1.7	Динамическая стабилизация
Открытая «ступица-спицы» (Y-форма)	Двухмерная	Рисунок 1.1 (с противовесами), рисунок 1.8 (a)	Динамическая стабилизация
Открытая «ступица-спицы» (крест-форма)	Двухмерная	Рисунок 1.9 (a)	Неустойчива
Закрытая схема «ступица-спицы»	Двухмерная	Рисунок 1.8 (б), рисунок 1.9 (б)	Динамическая стабилизация
Двойной четырёхгранник, двойная пирамида	Трёхмерная	Рисунок 1.10	Гравитационная стабилизация с вращением

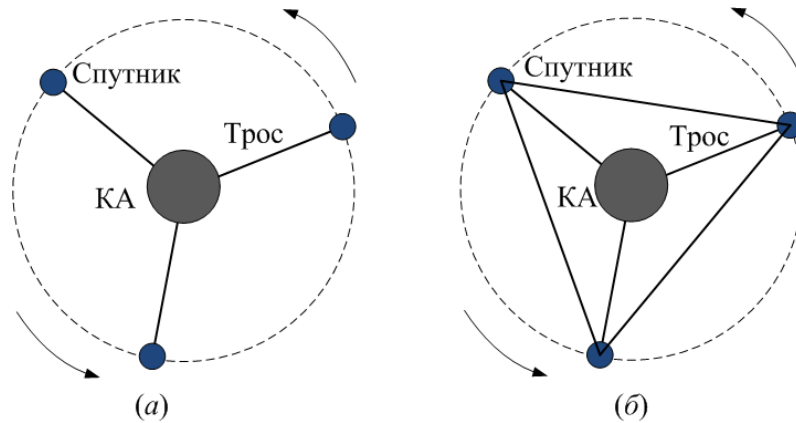


Рисунок 1.8 – Конфигурация «Y-форма»

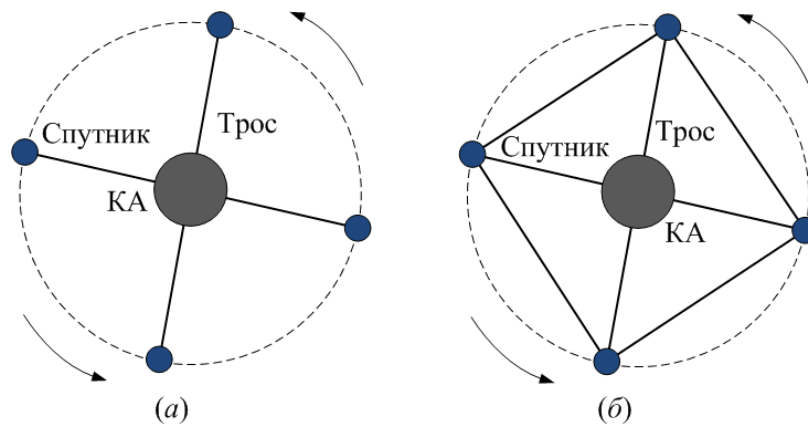


Рисунок 1.9 – Конфигурация «крест-форма»

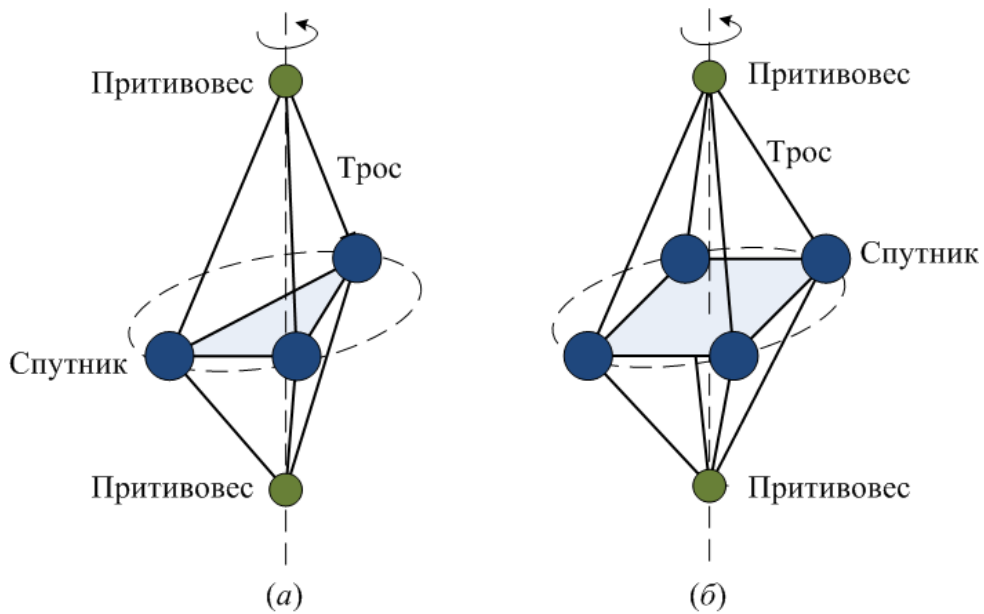


Рисунок 1.10 – Трёхмерные конфигурации: (а) двойной четырёхгранник; (б) двойная пирамида

При развёртывании ТГКА линейной конфигурации в работах [49, 54] применяется типичная трёхэтапная стратегия управления скоростью выпуска троса: скорость развёртывания тросов экспоненциально увеличивается на первом этапе, остаётся постоянной на втором этапе, а затем экспоненциально снижается на последнем этапе. В работе [59] выпуск троса осуществляется по программе, где первым этапом является быстрое развёртывание троса, а затем начинается процесс торможения. Что касается управления формированием линейной ТГКА, состоящей из нескольких КА, в работе [55] предлагается программа развёртывания вертикальной тросовой группировки, состоящей из КА и десяти НС. Закон управления осуществляется за счёт регулирования силы натяжения троса, причём НС последовательно выпускаются из базового КА.

После того, как конфигурация ТГКА полностью развёрнута, важным вопросом является поддержание взаимного положения космических объектов и обеспечение устойчивости движением системы при её функционировании на орбите. В работе [60] рассматривается управление угловым движением линейной тросовой группировки из трёх спутников. Показано, что с помощью линейного регулятора не удаётся управлять

движением системы, имеющей высокую нелинейность, поэтому предлагается использовать нелинейное оптимальное управление с применением уравнения Риккати. С точки зрения активного управления пространственным движением ТГКА ещё можно отметить работу [61], где рассматривается реализация манёвра перенацеливания оси вращения линейной тросовой группировки, движущейся вблизи точки либрации  $L_2$ . В отличие от работ [60, 61], в [77] большое внимание уделяется стабилизации углового движения тросовой группировки в плоскости, причём предполагается, что центральный спутник вращается с постоянной угловой скоростью. Таким образом, система уравнений углового движения тросовой группировки упрощается, что даёт возможность найти нелинейное управление с ограниченным управляющим моментом, создаваемым маховиком.

Поскольку ТГКА с двумерной структурой (отличной от линейной) стабилизируется и поддерживается на орбите только динамическим образом, как указано в таблице 1.1, то формирование конфигураций, таких как «кольцо» и «ступица-спицы» происходит при помощи вращения вокруг центра масс системы. В связи с тем, что по мере развёртывания тросов скорость вращения конфигурации будет уменьшаться (момент инерции системы увеличивается), необходимо разрабатывать методы управления движением ТГКА при таком развёртывании. При исследовании кольцеобразной ТГКА в последние годы больше всего публикаций были посвящены разработке управления развёртыванием треугольной конфигурации. Различаются два основных подхода к управлению формированием треугольной ТГКА в зависимости от использования реактивных двигателей или нет. Как пример чистого управления натяжением троса можно рассмотреть работу [67], где предлагается оптимальное управление натяжением тросов, которое используется в качестве управления наматыванием/разматыванием тросов для формирования и реформирования треугольной конфигурации на низкой околоземной орбите.

Однако в последнее время все большее внимание уделяется подходу к управлению движением ТГКА с помощью двигателей малой тяги, который считается более универсальным, так как позволяет достаточно быстро выполнить точное формирование конфигурации на орбите, активно стабилизировать движение системы и либрационное движение тросов в плоскости и вне плоскости вращения системы при наличии различных возмущений. В качестве примера применения данного подхода можно отметить следующие работы [41, 69, 78-84], в которых рассмотрены задачи управления движением треугольной ТГКА, а также работы [75, 76\*, 85\*, 86\*], посвящённые разработке программ для управления движением системы «ступица-спицы». Хотя этот подход требует расхода топлива, было доказано, что уровень расхода довольно низок в случае, когда натяжение тросов служит одним из управляющих воздействий [78, 79].

В перечисленных выше исследованиях используются различные методы управления. Предлагаемая в работе [41] схема управления формированием треугольной ТГКА, включающая в себя использование реактивных сил, управляющего крутящего момента и сил натяжения, основана на применение способа, основанного на виртуальном состоянии системы. Такой подход является одним из широко используемых методов управления движением для традиционных группировок КА. Основная особенность этого подхода заключается в том, что при управлении движение системы в каждый момент времени отслеживается виртуальное мгновенное желаемое состояние. В работе [79] заданы законы управления реактивными силами и моментами по принципу обратной связи, в то же время натяжения тросов задаются постоянными, чтобы поддерживать вращательное движение ТГКА при низком расходе топлива. В работе [80] закон управления импульсной реактивной силой применяется для обеспечения натяжения тросов и обеспечения заданной конфигурация ТГКА в каждый момент времени.

Следует отметить, что при разработке нелинейных методов управления движением ТГКА часто используются математическая модель, в которой



спутники рассматриваются как материальные точки [69, 80-84]. В работе [81] рассматривается задача стабилизации либрационного движения треугольной ТГКА при учёте влияния гравитационного возмущения  $J_2$ , и предлагается нелинейное оптимальное управление на основе обратной связи путём сравнения состояний системы со значениями переменных, взятых из эталонной модели. В работах [69, 82, 83\*] предложено несколько модификаций программы управления движением треугольной ТГКА на основе скользящего режима управления. Проведённый анализ и численное моделирование показывают, что разработанные на этой основе контролёры могут выполнять задачи управления при наличии влияния разнообразных возмущений, таких как неопределённость математической модели, ограниченность на управляющие воздействия и др.

В отличие от треугольной конфигурации, ТГКА в виде «ступица-спицы» имеет свою особенность с точки зрения управления её движением, которая заключается в том, что, во-первых, большинство операций управления может быть выполнено с помощью реактивных сил и крутящих моментов, приложенных к центральному КА; во-вторых, усложняется задача управления движением «ступица-спицы» из-за взаимной связи между движением центрального КА и тросов. В работах [75, 85\*, 86\*] рассматривается управление формированием системы «ступица-спицы» в плоскости орбиты, при этом центральный КА моделируется сферическим твёрдым телом.

## 1.6 Схема исследований и описание решаемых задач

Аналитический обзор известных работ показывает, что методы анализа движения ТГКА различных конфигураций и методы управления их движением, далеко не полностью изучены и требуют дальнейшей разработки и совершенствования. Здесь следует отметить, что хотя ТГКА могут иметь различную геометрию, но существуют некоторые основные базовые конфигурации, на основании которых путём обобщения могут быть исследованы более сложные структуры. К таким конфигурациям можно

отнести конфигурации «треугольник» и «ступица-спицы». Поэтому задачи, решаемые в данной диссертационной работе, в основном связаны с вопросами анализа движения и разработки методов управления движением этих двух конфигураций.

**Цель исследования:** разработка программ управления движением ТГКА конфигураций «треугольник» и «ступица-спицы» на этапах их формирования и стабилизации движения при полёте по околоземной орбите.

Для достижения поставленной цели исследования необходимо решить следующие задачи:

1. Разработать математические модели движения ТГКА рассматриваемых конфигураций, с различной полнотой описывающих их движения, в частности, без учёта и с учётом вращения КА относительно своих центров масс.

2. Разработать программы управления при формировании вращающейся ТГКА конфигурации «треугольник» с использованием реактивных сил малой тяги и управления силами натяжения тросов, и с учётом ограничений на управляющие воздействия.

3. Разработать программы управления при формировании вращающейся ТГКА конфигурации «ступица-спицы» с использованием реактивных сил малой тяги и управления силами натяжения тросов.

4. Провести проверку возможности реализации предлагаемых номинальных программ управления с использованием моделей движения рассматриваемых ТГКА, учитывающих возмущения.

Схема диссертационного исследования и связи между отдельными её частями приведены на рисунке 1.11.

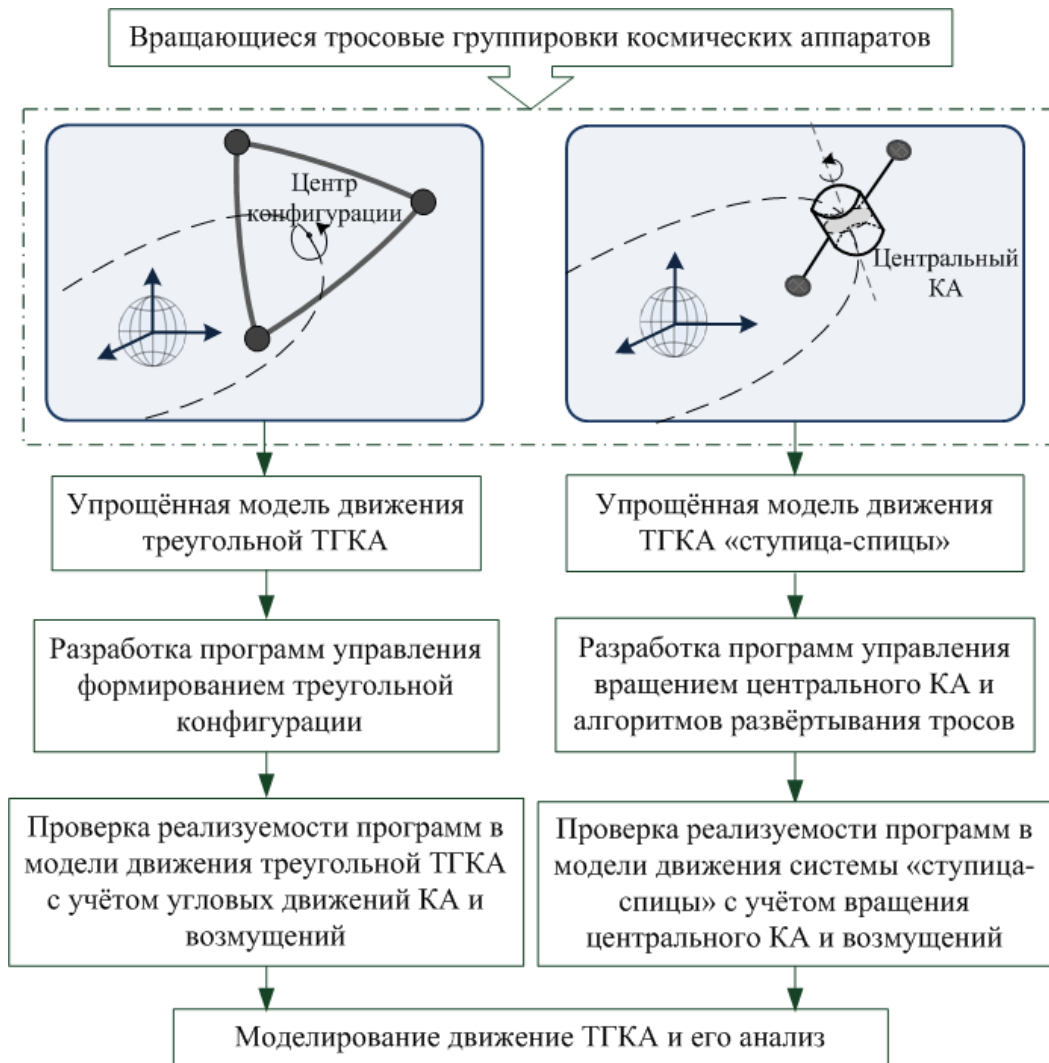


Рисунок 1.11 – Схема исследований

## 1.7 Выводы по первой главе

1. Проведён аналитический обзор известных работ, посвящённых КТС различных назначений и конфигураций, проанализированы особенности движения и управления ТГКА по сравнению с традиционными космическими системами.

2. Проведён обзор проектов и тросовых экспериментов на орбите, связанных с КТС, и установлено, что в последнее время основной интерес специалистов и учёных связан с ТГКА как перспективных космических систем, обеспечивающих согласованный полёт КА по орбите с минимальными затратами топлива.

3. Проведён подробный анализ известных работ, посвящённых методам формирования ТГКА конфигураций «треугольник» и «ступица-спица», по которому можно сделать вывод о недостаточной изученности динамики и методов управления движением таких ТГКА. Особенно это относится к вопросам, связанным с движением КА относительно своих центров масс в составе рассматриваемых ТГКА, в частности, в процессе их развёртывания.

4. Проведён обзор методов построения математических моделей ТГКА и их использования на этапах построения программ управления и проведения поверочных расчётов при оценке возможности реализации алгоритмов управления.

5. На основании проведённого аналитического обзора сформулированы цель исследования и решаемые задачи, составлена схема исследований.

## 2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ТРОСОВЫХ ГРУППИРОВОК КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

### 2.1 Используемые системы координаты

При математическом описании движения ТГКА на околоземной орбите используются системы координат, представленные на рисунке 2.1.

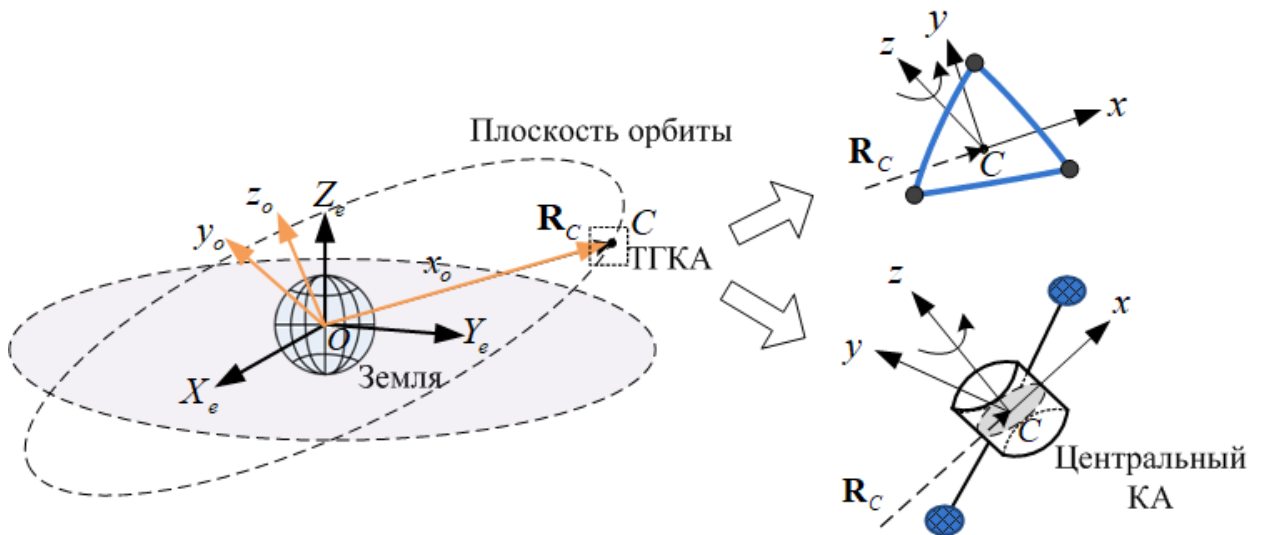


Рисунок 2.1 – Системы координат

1. Геоцентрическая неподвижная система координат (ГСК)  $OX_eY_eZ_e$ .

Начало системы координат находится в центре Земли, плоскость  $OX_eY_e$  совпадает с плоскостью экватора (рисунок 2.1). Направления осей: ось  $OX_e$  направлена от начала  $O$  к точке весеннего равноденствия, ось  $OZ_e$  направлена по оси вращения Земли, а ось  $OY_e$  завершает триаду по правилу правой руки.

2. Геоцентрическая орбитальная система координат (ОСК)  $OXYZ$ .

Геоцентрическая ОСК позволяет описать орбитальное движение центра масс ТГКА, обозначаемого буквой  $C$ . Начало системы координат – в центре масс Земли, плоскость  $OXY$  совпадает с плоскостью орбиты. Ось  $OX$  направлена в точку восходящего узла, ось  $OZ$  перпендикулярна к плоскости орбиты и коллинеарна вектору кинетического момента движения центра масс ТГКА по орбите, а ось  $OY$  дополняет систему координат до правой.

### 3. Геоцентрическая подвижная ОСК $Ox_o y_o z_o$ .

Начало системы координат – в центре масс Земли, плоскость  $Ox_o y_o$  совпадает с плоскостью  $OXY$ , ось  $Ox_o$  направлена от  $O$  к центру масс ТГКА по радиус-вектору  $\mathbf{R}_C$  (рисунок 2.1), ось  $Oz_o$  перпендикулярна плоскости орбиты (совпадает с осью  $OZ$ ), а ось  $Oy_o$  завершает триаду по правилу правой руки.

### 4. Подвижная ОСК $Sx_{uz}$ , связанная с центром масс ТГКА.

Начало системы координат – в центре масс ТГКА (рисунок 2.1). Оси подвижной ОСК  $Sx_{uz}$  параллельны осям геоцентрической подвижной ОСК  $Ox_o y_o z_o$ .

### 5. Связанная система координат $c_k x_k y_k z_k$ (рисунок 2.2).

Для описания углового движения спутников, входящих в состав тросовой группировки, выберем систему координат  $c_k x_k y_k z_k$ , связанную с центром масс  $k$ -го спутника. Начало системы координат – в центре масс  $k$ -го спутника, ось  $c_k x_k$  направлена в точку крепления троса, оси  $c_k y_k$ ,  $c_k z_k$  жёстко связаны с корпусом КА, причём система координат  $c_k x_k y_k z_k$  правая. При отсутствии возмущений (в номинальном случае) ось  $c_k z_k$  нормальна к плоскости орбиты центра масс ТГКА.

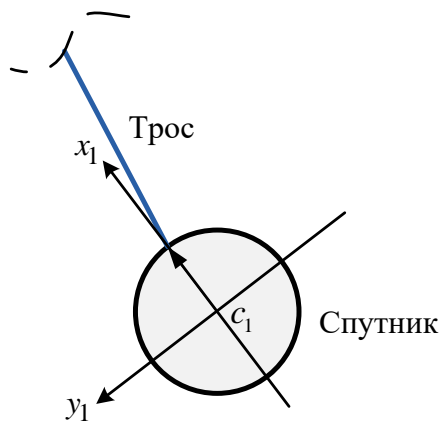


Рисунок 2.2 – Связанная система координат  $c_k x_k y_k z_k$  ( $k = 1$ )

## 2.2 Математические модели движения ТГКА в форме Лагранжа

Метод Лагранжа – это широко используемый классический метод для построения математических моделей движения многоэлементных механических систем. При построении моделей ТГКА для конфигураций «треугольник» и «ступица-спицы» с использованием уравнений Лагранжа спутники рассматриваются как материальные точки (за исключением центрального КА в системе «ступица-спицы», который моделируется как твёрдое тело), а тросы – невесомые и нерастяжимые механические связи. При этом математические модели ТГКА двух рассматриваемых конфигураций получаются в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений невысокого порядка. С помощью математических моделей, разработанных в работах [70, 76, 83-86]\* автора методом Лагранжа, можно провести предварительный анализ движения ТГКА, а также построить номинальные программы управления движением системы на различных этапах её функционирования.

### 2.2.1 Модель движения треугольной ТГКА

Движение рассматриваемой тросовой системы (рисунок 2.3) описывается в подвижной орбитальной системе координат  $S_{хуз}$ .

При построении математической модели приняты основные допущения:

- 1) Орбита центра масс тросовой системы невозмущённая и круговая;
- 2) Ось вращения конфигурации ТГКА нормальна к плоскости орбиты;
- 3) КА – материальные точки;
- 4) Гравитационное поле – центральное;
- 5) Тросы – нерастяжимые механические связи.

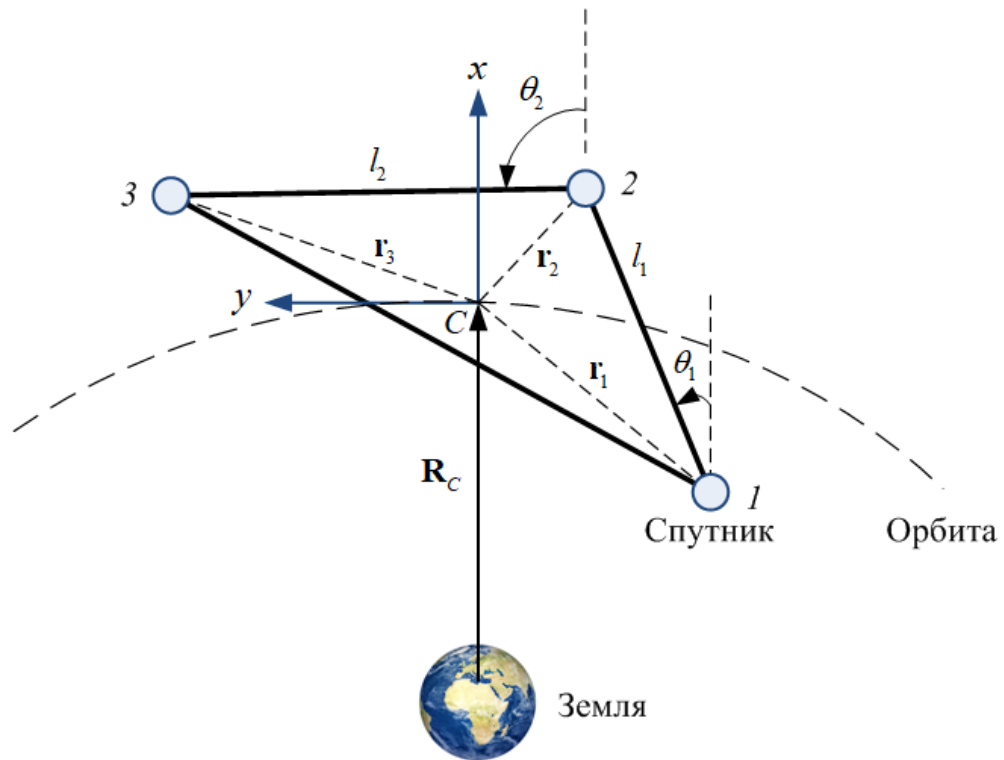


Рисунок 2.3 – Схема треугольной тросовой группировки и орбитальная подвижная система координат

Учитывая геометрические связи для треугольника (рисунок 2.3), система полностью характеризуется четырьмя обобщёнными координатами:  $l_1, l_2$  – длины любых двух тросов (здесь тросы 1 и 2), и  $\theta_1, \theta_2$  – углы наклона тросов 1 и 2 к местной вертикали. Вектор положения  $k$ -го спутника относительно центра масс ТГКА в орбитальной системе координат обозначается как  $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k)$ ,  $k = \overline{1,3}$ . Имеет место соотношение (положение центра масс)

$$\sum_{k=1}^3 m_k \mathbf{r}_k = 0, \quad (2.1)$$

где  $m_k$  – масса  $k$ -го спутника.

Уравнение (2.1) дополняется выражениям для координат спутников

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + l_1 \cos \theta_1, & y_2 &= y_1 + l_1 \cos \theta_1; \\ x_3 &= x_2 + l_2 \cos \theta_2, & y_3 &= y_2 + l_2 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получим выражения координат спутников через обобщённые координаты



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_\mu \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 \\ l_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_\mu \begin{bmatrix} l_1 \sin \theta_1 \\ l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

где

$$\mathbf{K}_\mu = \begin{bmatrix} -(\mu_2 + \mu_3) & -\mu_3 \\ \mu_1 & -\mu_3 \\ \mu_1 & \mu_1 + \mu_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $m = \sum_{k=1}^3 m_k$ ,  $\mu_k = m_k/m$  – безразмерные массы спутников.

Поскольку массы тросов не учитываются, кинетическая энергия системы определяется следующим образом

$$\begin{aligned} T_C &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 m_k (\dot{\mathbf{R}}_C + \dot{\mathbf{r}}_k) \cdot (\dot{\mathbf{R}}_C + \dot{\mathbf{r}}_k) \\ &= \frac{1}{2} \left[ m \dot{\mathbf{R}}_C \cdot \dot{\mathbf{R}}_C + 2 \dot{\mathbf{R}}_C \cdot \sum_{k=1}^3 m_k \dot{\mathbf{r}}_k + \sum_{k=1}^3 m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (2.4) есть кинетическая энергия орбитального движения центра масс треугольной ТГКА, а второе слагаемое равно нулю согласно (2.1). Тогда выражение кинетической энергии примет вид

$$\begin{aligned} T_C &= \frac{1}{2} m \omega^2 R_C^2 + \frac{1}{2} m \{ \mu_1 (\mu_2 + \mu_3) [ \dot{l}_1^2 + l_1^2 (\dot{\theta}_1 + \omega)^2 ] + \\ &\quad + \mu_3 (\mu_1 + \mu_2) [ \dot{l}_2^2 + l_2^2 (\dot{\theta}_2 + \omega)^2 ] + \\ &\quad + 2 \mu_1 \mu_3 [ \dot{l}_1 \dot{l}_2 (\dot{\theta}_2 + \omega) - l_1 \dot{l}_2 (\dot{\theta}_1 + \omega) ] \sin(\theta_1 - \theta_2) + \\ &\quad + 2 \mu_1 \mu_3 [ \dot{l}_1 \dot{l}_2 + l_1 l_2 (\dot{\theta}_1 + \omega) (\dot{\theta}_2 + \omega) ] \cos(\theta_1 - \theta_2) \}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $R_C$  – модуль радиуса-вектора  $\mathbf{R}_C$  центра масс системы,  $\omega$  – орбитальная угловая скорость центра масс системы, которая для круговой орбиты имеет вид  $\omega = \sqrt{\mu_e / R_C^3}$ ,  $\mu_e$  – гравитационный параметр Земли.

С учётом нерастяжимости тросов потенциальная энергия тросовой группировки, обусловленная гравитацией, определяется как

$$\Pi = -\sum_{k=1}^3 \frac{\mu_e m_k}{|\mathbf{R}_C + \mathbf{r}_k|} \quad (2.6)$$

Предполагая, что модуль радиуса-вектора  $k$ -го спутника относительно центра масс много меньше, чем расстояние центра масс системы до центра Земли, т.е.  $r_k \ll R_C$ , выражение для потенциальной энергии системы может быть аппроксимировано путём разложения его в биномиальный ряд и сохранения слагаемых до порядка  $O(1/R_C^3)$  включительно. Тогда

$$\begin{aligned} \Pi &\approx -\sum_{k=1}^3 \frac{\mu_e m_k}{R_C} + \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_e m_k x_k}{R_C^2} + \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_e m_k}{2R_C^3} (x_k^2 + y_k^2 - 3x_k^2) \\ &= -\sum_{k=1}^3 m_k \omega^2 R_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 m_k \omega^2 (y_k^2 - 2x_k^2). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставляя (2.3) в (2.7), выражение для потенциальной энергии можно выразить через обобщённые координаты

$$\begin{aligned} \Pi = -m\omega^2 R_C^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \{ &\mu_1 (\mu_2 + \mu_3) l_1^2 (1 - 3\cos^2 \theta_1) + \\ &+ \mu_3 (\mu_1 + \mu_2) l_2^2 (1 - 3\cos^2 \theta_2) + \\ &+ 2\mu_1 \mu_3 l_1 l_2 [\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3\cos \theta_1 \cos \theta_2] \}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Уравнения Лагранжа имеют следующий вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_C}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T_C}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad (2.9)$$

где  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T = [l_1, l_2, \theta_1, \theta_2]^T$  – вектор обобщённых координат,  $\dot{\mathbf{q}}$  – вектор обобщённых скоростей,  $\mathbf{Q} = [Q_{l_1}, Q_{l_2}, Q_{\theta_1}, Q_{\theta_2}]^T$  – вектор обобщённых сил.

Дифференцируя выражений (2.5) и (2.8) по обобщённым координатам и скоростям и подставляя полученные выражения в уравнения Лагранжа (2.9), получим уравнения движения треугольной тросовой группировки

$$\begin{aligned}
& m\mu_1(\mu_2 + \mu_3) \left\{ \ddot{l}_1 - l_1 \left[ (\dot{\theta}_1 + \omega)^2 + \omega^2 (3\cos^2 \theta_1 - 1) \right] \right\} + \\
& + m\mu_1\mu_3 \left\{ \left[ \ddot{l}_2 - l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 + 2\omega) \right] \cos(\theta_1 - \theta_2) + \right. \\
& \left. + \left[ l_2 \ddot{\theta}_2 + 2\dot{l}_2 (\dot{\theta}_2 + \omega) \right] \sin(\theta_1 - \theta_2) - 3\omega^2 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \right\} = Q_{l_1},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
& m\mu_3(\mu_1 + \mu_2) \left\{ \ddot{l}_2 - l_2 \left[ (\dot{\theta}_2 + \omega)^2 + \omega^2 (3\cos^2 \theta_2 - 1) \right] \right\} + \\
& + m\mu_1\mu_3 \left\{ \left[ \ddot{l}_1 - l_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + 2\omega) \right] \cos(\theta_1 - \theta_2) - \right. \\
& \left. - \left[ l_1 \ddot{\theta}_1 + 2\dot{l}_1 (\dot{\theta}_1 + \omega) \right] \sin(\theta_1 - \theta_2) - 3\omega^2 l_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \right\} = Q_{l_2},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
& m\mu_1(\mu_2 + \mu_3) l_1^2 \left[ \ddot{\theta}_1 + 2(\dot{l}_1/l_1)(\dot{\theta}_1 + \omega) + 3\omega^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \right] + \\
& + m\mu_1\mu_3 l_1 l_2 \left\{ 3\omega^2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \left[ \ddot{\theta}_2 + 2(\dot{l}_2/l_2)(\dot{\theta}_2 + \omega) \right] \cos(\theta_1 - \theta_2) + \right. \\
& \left. + \left[ (\dot{\theta}_2 + \omega)^2 - \omega^2 - (\ddot{l}_2/l_2) \right] \sin(\theta_1 - \theta_2) \right\} = Q_{\theta_1},
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
& m\mu_3(\mu_1 + \mu_2) l_2^2 \left[ \ddot{\theta}_2 + 2(\dot{l}_2/l_2)(\dot{\theta}_2 + \omega) + 3\omega^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \right] + \\
& + m\mu_1\mu_3 l_1 l_2 \left\{ 3\omega^2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 + \left[ \ddot{\theta}_1 + 2(\dot{l}_1/l_1)(\dot{\theta}_1 + \omega) \right] \cos(\theta_1 - \theta_2) + \right. \\
& \left. + \left[ \omega^2 - (\dot{\theta}_1 + \omega)^2 + (\ddot{l}_1/l_1) \right] \sin(\theta_1 - \theta_2) \right\} = Q_{\theta_2}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

При определении обобщённых сил  $Q_{l_1}, Q_{l_2}, Q_{\theta_1}, Q_{\theta_2}$  в системе уравнений (2.10-2.13) учитываются следующие неконсервативные силы: 1) силы натяжения тросов  $\mathbf{T}_k, k = \overline{1,3}$ , создаваемые тормозными механизмами выпуска тросов, причём силы натяжения направлены вдоль каждого троса от  $k$ -го спутника к спутнику  $k+1$ ; 2) реактивные силы  $\mathbf{F}_k, k = \overline{1,3}$ , создаваемые двигателями малой тяги и приложенные к спутникам. На рисунке 2.4 показана схема тросовой системы при действии сил натяжения и реактивных сил, где через  $\varphi_{1,2,3}$  обозначаются углы, определяющие линии действия реактивных

сил относительно направлений тросов длиной  $l_{1,2,3}$ . Обобщённые силы вычисляются с использованием принципа виртуальной работы

$$Q_{q_j} = (\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_3 + \mathbf{F}_1) \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_j} + (\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1 + \mathbf{F}_2) \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_j} + (\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_2 + \mathbf{F}_3) \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial q_j}, \quad j = \overline{1,4} \quad (2.14)$$

где векторы сил натяжения определяются как

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= T_1 (\cos \theta_1, \sin \theta_1), \quad \mathbf{T}_2 = T_2 (\cos \theta_2, \sin \theta_2), \\ \mathbf{T}_3 &= -\frac{T_3}{l_3} (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2, l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $l_3 = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$  – длина третьего троса.

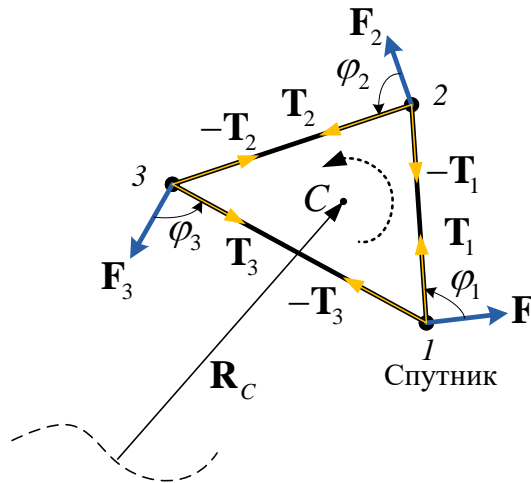


Рисунок 2.4 – Схема сил натяжения и реактивных сил

Согласно геометрическим соотношениям, показанным на рисунке 2.4, векторы реактивных сил определяются как

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k &= F_k (\cos \Delta \theta_k, \sin \Delta \theta_k), \quad k = \overline{1,2}, \\ \mathbf{F}_3 &= -F_3 (\cos \Delta \theta_3, \sin \Delta \theta_3), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $\Delta \theta_k = \theta_k - \varphi_k$ ,  $k = \overline{1,3}$ .

С учётом отношений

$$\cos \theta_3 = (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) / l_3, \quad \sin \theta_3 = (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2) / l_3,$$

получим выражение для вектора  $\mathbf{F}_3$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_3 &= -F_3 (\cos \Delta\theta_3, \sin \Delta\theta_3) = -F_3 \begin{pmatrix} \cos \theta_3 \cos \varphi_3 + \sin \theta_3 \sin \varphi_3 \\ \sin \theta_3 \cos \varphi_3 - \cos \theta_3 \sin \varphi_3 \end{pmatrix}^T \\
&= -F_3 \begin{pmatrix} \frac{l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2}{l_3} \cos \varphi_3 + \frac{l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2}{l_3} \sin \varphi_3 \\ \frac{l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2}{l_3} \cos \varphi_3 - \frac{l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2}{l_3} \sin \varphi_3 \end{pmatrix}^T \\
&= -\frac{F_3}{l_3} \begin{pmatrix} l_1 \cos(\theta_1 - \varphi_3) + l_2 \cos(\theta_2 - \varphi_3) \\ l_1 \sin(\theta_1 - \varphi_3) + l_2 \sin(\theta_2 - \varphi_3) \end{pmatrix}^T.
\end{aligned}$$

Подставляя (2.15-2.16) в выражение (2.14), получим обобщённые силы, соответствующие силам натяжения и реактивным силам

$$\begin{aligned}
Q_{l_1} &= -T_1 - (T_3/l_3) [l_1 + l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] - (\mu_2 + \mu_3) F_1 \cos \varphi_1 + \\
&\quad + \mu_1 F_2 \cos(\theta_2 - \theta_1 - \varphi_2) - \mu_1 F_3 \left[ \frac{l_1 \cos \varphi_3 + l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2 + \varphi_3)}{l_3} \right], \quad (2.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{l_2} &= -T_2 - (T_3/l_3) [l_2 + l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)] - \mu_3 F_1 \cos(\theta_1 - \varphi_1 - \theta_2) \\
&\quad - \mu_3 F_2 \cos \varphi_2 - (\mu_1 + \mu_2) F_3 \left[ \frac{l_2 \cos \varphi_3 + l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1 + \varphi_3)}{l_3} \right], \quad (2.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\theta_1} &= (T_3/l_3) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (\mu_2 + \mu_3) F_1 l_1 \sin \varphi_1 + \\
&\quad + \mu_1 F_2 l_1 \sin(\theta_2 - \varphi_2 - \theta_1) + \mu_1 F_3 l_1 \left[ \frac{l_1 \sin \varphi_3 + l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2 + \varphi_3)}{l_3} \right], \quad (2.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\theta_2} &= -(T_3/l_3) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \mu_3 F_1 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1 + \varphi_1) + \\
&\quad + \mu_3 F_2 l_2 \sin \varphi_2 + (\mu_1 + \mu_2) F_3 l_2 \left[ \frac{l_2 \sin \varphi_3 + l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1 + \varphi_3)}{l_3} \right]. \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (2.10-2.13) совместно с выражениями для обобщённых сил (2.17-2.20) описывают движение треугольной ТГКА в плоскости орбиты.

### 2.2.2 Модель движения ТГКА конфигурации «ступица-спицы»

Тросовая группировка КА вида «ступица-спицы» в своём конечном состоянии должна вращаться вокруг своего центра масс с некоторой угловой скоростью, чтобы обеспечивать устойчивость движения системы и поддерживать на орбите желаемую конфигурацию. Однако движение системы «ступица-спицы» имеет свою особенность, которая заключается в том, что центральный КА вращается вокруг своего центра масс и играет в роль «ведущего», а спутники, расположенные на периферии системы и соединённые с центральным КА тросами, являются «ведомыми». Управляя движением центрального КА, можно управлять движением всей системой, что является особенностью данной ТГКА. При этом существует механическая связь между вращательным движением центрального КА и развёртыванием тросов. Таким образом, при построении уравнений движения ТГКА и программы управления для конфигурации «ступица-спицы» нецелесообразно рассматривать центральный КА как материальную точку. Математическая модель движения системы с учётом размеров центрального КА как твёрдого тела позволяет более полно описывать динамику системы, в частности, позволяет учесть ограничения на движения тросов. Тросы не должны соприкасаться и не должны наматываться на корпус центрального КА.

В работе рассмотрена трёх-тельная система «ступица-спицы» открытой схемы, представленная на рисунке 2.5. Движение системы описывается в подвижной орбитальной системе координат  $S_{хуз}$ . В систему входит центральный КА массой  $m_C$  и два микроспутника массой  $m_i$ ,  $i = 1, 2$ . Здесь КА моделируется как симметричный однородный цилиндр радиусом  $r_C$  и длиной  $h_C$ , в то время как микроспутники рассматриваются как материальные точки. Кроме этого, принимаются те же допущения, что и при описании движения треугольной конфигурации.

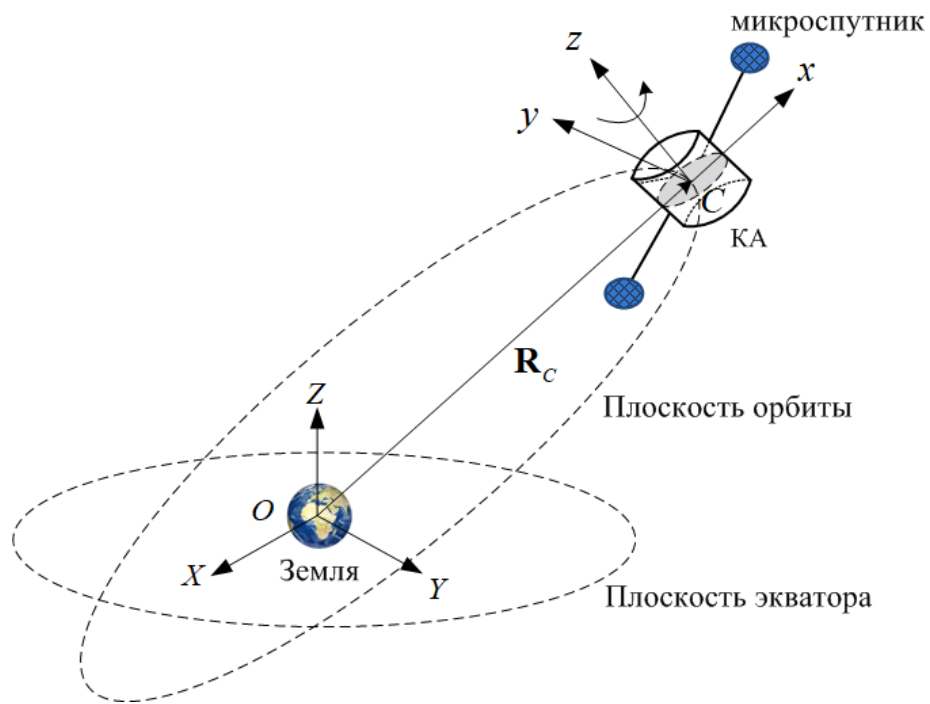


Рисунок 2.5 – Система «ступица-спицы»

При построении модели движения рассматриваемой ТГКА, предполагается, что конфигурация системы близка к симметричной относительно оси вращения. В этом случае центры масс центрального КА и системы совпадают. Орты системы координат  $S_{хуz}$  задаются как  $\mathbf{i}_c, \mathbf{j}_c, \mathbf{k}_c$ , поэтому орбитальная скорость центра масс системы имеет вид  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega} \mathbf{k}_c$ .

Для описания вращательного движения КА относительно центра масс и движения тросов в плоскости орбиты используются следующие переменные: 1) радиусы-векторы  $\mathbf{r}_i, i=1,2$  и углы  $\alpha_i$  (рисунок 2.6), где  $\mathbf{r}_i$  определяет положение точки крепления  $i$ -го троса на корпусе КА, причём при симметричном расположении точек крепления имеем  $|\mathbf{r}_i| = r_c$ , а  $\alpha_i$  – это угол, на который радиус-вектор  $\mathbf{r}_i$  поворачивается вокруг центра масс; 2) длины  $l_i, i=1,2$  и углы  $\theta_i$  (рисунок 2.6), где  $\theta_i$  характеризует отклонение  $i$ -го троса от направления радиуса-вектора  $\mathbf{r}_i$ . При использовании метода Лагранжа в качестве обобщённых координат выбираются  $\mathbf{q}_i = [\alpha_i, \theta_i, l_i]^T, i=1,2$ .

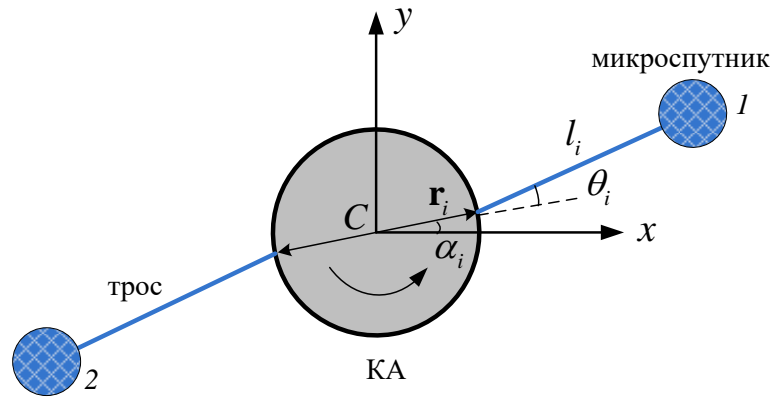


Рисунок 2.6 – Обобщённые координаты

Вектор положения  $i$ -го микроспутника относительно центра масс системы в системе координат  $S_{xyz}$  выражается как

$$\mathbf{p}_i = x_i \mathbf{i}_C + y_i \mathbf{j}_C + z_i \mathbf{k}_C, \quad i=1,2, \quad (2.21)$$

где  $x_i = r_C \cos \alpha_i + l_i \cos(\alpha_i - \theta_i)$ ,  $y_i = r_C \sin \alpha_i + l_i \sin(\alpha_i - \theta_i)$ , и  $z_i = 0$  в плоском случае.

Полная кинетическая энергия системы «ступица-спицы», входящая в уравнения Лагранжа (2.9), определяется следующим образом

$$T_C = \frac{1}{2} m_C \mathbf{v}_C^2 + \frac{1}{2} J_C (\Omega + \omega_\alpha)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_i)^2, \quad (2.22)$$

где  $\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_C$  – вектор орбитальной скорости центра масс системы,  $J_C$  – момент инерции центрального КА,  $\omega_\alpha = \dot{\alpha}_i$  – угловая скорость вращения КА,  $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{p}}_i + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{p}_i$  – вектор скорости  $i$ -го микроспутника относительно центрального КА. Подставляя (2.21) в выражение вектора  $\mathbf{v}_i$ , получим

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} -r_C (\Omega + \dot{\alpha}_i) \sin \alpha_i + \dot{l}_i \cos(\alpha_i - \theta_i) - l_i (\Omega + \dot{\alpha}_i - \dot{\theta}_i) \sin(\alpha_i - \theta_i) \\ r_C (\Omega + \dot{\alpha}_i) \cos \alpha_i + \dot{l}_i \sin(\alpha_i - \theta_i) + l_i (\Omega + \dot{\alpha}_i - \dot{\theta}_i) \cos(\alpha_i - \theta_i) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Тогда выражение для кинетической энергии примет вид



$$\begin{aligned}
T_C = & \frac{1}{2} m_C v_C^2 + \frac{1}{2} J_C (\Omega + \omega_\alpha)^2 + v_C \sum_{i=1}^2 m_i \left[ \dot{l}_i \sin(\alpha_i - \theta_i) + \right. \\
& \left. + r_C (\Omega + \dot{\alpha}_i) \cos \alpha_i + l_i (\Omega + \dot{\alpha}_i - \dot{\theta}_i) \cos(\alpha_i - \theta_i) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \left[ \dot{l}_i^2 + r_C^2 (\Omega + \dot{\alpha}_i)^2 - 2r_C \dot{l}_i (\Omega + \dot{\alpha}_i) \sin \theta_i + l_i^2 (\Omega + \dot{\alpha}_i - \dot{\theta}_i)^2 + \right. \\
& \left. + 2r_C l_i (\Omega + \dot{\alpha}_i - \dot{\theta}_i) (\Omega + \dot{\alpha}_i) \cos \theta_i \right], \tag{2.24}
\end{aligned}$$

где  $v_C = |\mathbf{v}_C|$  – модуль вектора орбитальной скорости  $\mathbf{v}_C$ .

Поскольку тросы считаются невесомыми и нерастяжимыми, то общая потенциальная энергия системы, обусловленная гравитацией, определяется как

$$\Pi = -\mu_e \left( \frac{m_C}{|\mathbf{R}_C|} + \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{|\mathbf{R}_C + \mathbf{p}_i|} \right). \tag{2.25}$$

Выражение для потенциальной энергии можно упростить, учитывая, что размер центрального КА много меньше, чем расстояние центра масс системы до центра Земли, т.е.  $r_i \ll R_C$ . Тогда, подставляя выражение для вектора  $\mathbf{p}_i$  в (2.25) и приближая слагаемое  $|\mathbf{R}_C + \mathbf{p}_i|^{-1}$  биномиальным рядом (сохраняя слагаемые до порядка  $O(1/R_C^3)$ ), получим

$$\begin{aligned}
\Pi = & -\mu_e \left( \frac{m_C}{|\mathbf{R}_C|} + \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{|\mathbf{R}_C + \mathbf{p}_i|} \right) \\
\approx & -\frac{\mu_e}{R_C} \left( m_C + \sum_{i=1}^2 m_i \right) + \frac{\mu_e}{R_C^2} \sum_{i=1}^2 m_i \left[ r_C \cos \alpha_i + l_i \cos(\alpha_i - \theta_i) \right] + \\
& + \frac{\mu_e}{2R_C^3} \sum_{i=1}^2 m_i \left\{ r_C^2 + l_i^2 + 2r_C l_i \cos \theta_i - 3 \left[ r_C^2 \cos^2 \alpha_i + l_i^2 \cos^2(\alpha_i - \theta_i) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2r_C l_i \cos \alpha_i \cos(\alpha_i - \theta_i) \right] \right\}. \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Дифференцируя выражений кинетической и потенциальной энергий по обобщённым координатам  $\alpha_i, \theta_i, l_i$  и подставляя их в уравнения Лагранжа (2.9), получим уравнения движения ТГКА конфигурации «ступица-спицы»

$$\begin{aligned} & \left[ J_C + \sum_{i=1}^2 m_i (r_C^2 + l_i^2 + 2r_C l_i \cos \theta_i) \right] \ddot{\alpha}_i - \sum_{i=1}^2 m_i (l_i^2 + r_C l_i \cos \theta_i) \ddot{\theta}_i - \\ & \sum_{i=1}^2 m_i r_C \sin \theta_i \ddot{l}_i + \sum_{i=1}^2 m_i \left[ 2\dot{l}_i (\dot{\alpha}_i - \dot{\theta}_i + \Omega) (l_i + r_C \cos \theta_i) - \right. \\ & \left. r_C l_i \dot{\theta}_i (2\dot{\alpha}_i - \dot{\theta}_i + 2\Omega) \sin \theta_i \right] + d_{\alpha_i} = Q_{\alpha_i}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\ddot{\theta}_i - \left( 1 + \frac{r_C}{l_i} \cos \theta_i \right) \ddot{\alpha}_i - 2 \frac{\dot{l}_i}{l_i} (\dot{\alpha}_i - \dot{\theta}_i + \Omega) + \frac{r_C}{l_i} \sin \theta_i (\dot{\alpha}_i^2 + 2\Omega \dot{\alpha}_i) + d_{\theta_i} = \frac{Q_{\theta_i}}{m_i l_i^2}, \quad (2.28)$$

$$\ddot{l}_i - r_C \sin \theta_i \ddot{\alpha}_i - l_i \left[ (\dot{\alpha}_i - \dot{\theta}_i + \Omega)^2 - \Omega^2 \right] - r_C \cos \theta_i (\dot{\alpha}_i^2 + 2\Omega \dot{\alpha}_i) + d_{l_i} = \frac{Q_{l_i}}{m_i}, \quad (2.29)$$

где  $Q_{\alpha_i}, Q_{\theta_i}, Q_{l_i}, i=1,2$  – обобщённые силы,  $d_{\alpha_i}, d_{\theta_i}, d_{l_i}$  – слагаемые, зависящие от вращения центрального КА вокруг центра масс и имеющие следующий вид

$$d_{\alpha_i} = d_0 \sum_{i=1}^n m_i \left[ 0.5 r_C^2 \sin 2\alpha_i + 0.5 l_i^2 \sin (2\alpha_i - 2\theta_i) + r_C l_i \sin (2\alpha_i - \theta_i) \right], \quad (2.30)$$

$$d_{\theta_i} = -d_0 \left[ \cos(\alpha_i - \theta_i) \sin(\alpha_i - \theta_i) + r_C \cos \alpha_i \sin(\alpha_i - \theta_i) / l_i \right], \quad (2.31)$$

$$d_{l_i} = -d_0 \left[ l_i \cos^2(\alpha_i - \theta_i) + r_C \cos \alpha_i \cos(\alpha_i - \theta_i) \right], \quad (2.32)$$

где  $d_0 = 3\Omega^2$  – есть постоянная, если центр масс системы движется на круговой орбите.

При определении обобщённых сил  $Q_{\alpha_i}, Q_{\theta_i}, Q_{l_i}$  учитываются следующие факторы: 1) крутящий момент  $\mathbf{M}_C$ , приложенный к центральному КА; 2) силы натяжения  $\mathbf{T}_i, i=1,2$  и реактивные силы малой тяги  $\mathbf{F}_i, i=1,2$ , приложенные к микроспутникам. Если направление реактивных сил ортогонально тросам и ориентировано по направлению вращения системы, то обобщённые силы имеют вид:  $Q_{\alpha_i} = M_C, Q_{\theta_i} = -F_i l_i, Q_{l_i} = -T_i$ .

### 2.3 Математическая модель движения треугольной ТГКА с учётом движений КА относительно своих центров масс

В этом разделе разрабатывается математическая модель движения треугольной ТГКА в геоцентрической системе координат с учётом вращения КА относительно центра масс и других возмущений. В этой модели нет многих допущений, принятых в упрощённой математической модели в форме Лагранжа, в частности, тросы в этой модели растяжимы и представляют собой односторонние механические связи, рассматривается пространственное движение системы, учитывается движение КА относительно своих центров масс и др.

При выводе уравнений движения системы используются геоцентрическая система координат  $OX_eY_eZ_e$  и связанные с КА системы координат  $c_kx_ky_kz_k$ ,  $k = \overline{1,3}$ .

Уравнения движения тросовой системы, показанной на рисунке 2.7, записываются следующим образом

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 &= \mathbf{G}_1 + \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_3 + \mathbf{F}_1, \\ m_k \ddot{\mathbf{R}}_k &= \mathbf{G}_k + \mathbf{T}_k - \mathbf{T}_{k-1} + \mathbf{F}_k, \quad k = 2, 3, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где  $k = 1, 2, 3$  – номера КА,  $\mathbf{G}_k = -\mu_e m_k \mathbf{R}_k / R_k^3$  – гравитационные силы, действующие на КА,  $\mathbf{R}_k$  – радиусы-векторы центров масс КА,  $\mathbf{T}_k$  – силы натяжения тросов,  $\mathbf{F}_k$  – реактивные силы малой тяги. Предполагается, что направления реактивных сил неизменны в связанных системах координат, причём они принадлежат плоскостям  $c_kx_ky_k$ , проходят через центры масс КА, и составляют углы  $\varphi_k$  с осями  $c_kx_k$ . В качестве примера на рисунке 2.8 показаны силы, действующие на первый КА в связанной системе координат  $c_1x_1y_1z_1$  (при  $z_1 = 0$ ).

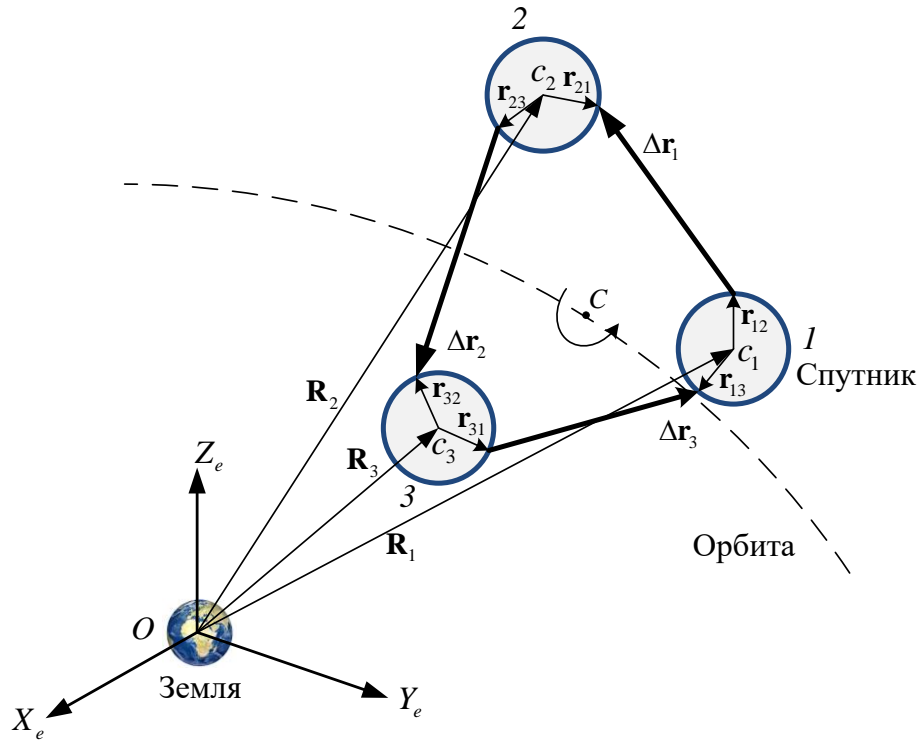


Рисунок 2.7 – Схема треугольной ТГКА с учётом углового движения спутников

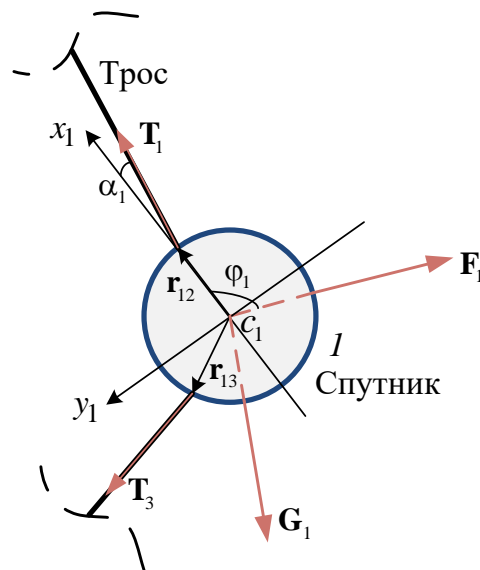


Рисунок 2.8 – Силы, действующие на первый спутник

Сила натяжения  $T_k$  в уравнении (2.33) описывает одностороннюю механическую связь между соседними спутниками и имеет следующий вид по закону Гука

$$\mathbf{T}_k = T_k \frac{\Delta \mathbf{r}_k}{\Delta r_k}, T_k = \begin{cases} ES \frac{\Delta r_k - L_k}{L_k}, & \text{при } \Delta r_k - L_k \geq 0, \\ 0 & , \text{ при } \Delta r_k - L_k < 0, \end{cases} \quad (2.34)$$

где  $ES$  – жёсткость материала троса,  $L_k$  – недеформированная длина троса между спутниками  $k$  и  $k+1$ . Точки крепления тросов на корпусах спутников соединяются радиусы-векторами  $\Delta \mathbf{r}_k$ ,  $k = \overline{1,3}$ , направленных от  $k$ -го спутника к спутнику  $k+1$ . Выражения для векторов  $\Delta \mathbf{r}_k$  определяются следующим образом (рисунок 2.7)

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}_1 &= (\mathbf{R}_2 + \mathbf{r}_{21}) - (\mathbf{R}_1 + \mathbf{r}_{12}), \\ \Delta \mathbf{r}_2 &= (\mathbf{R}_3 + \mathbf{r}_{32}) - (\mathbf{R}_2 + \mathbf{r}_{23}), \\ \Delta \mathbf{r}_3 &= (\mathbf{R}_1 + \mathbf{r}_{13}) - (\mathbf{R}_3 + \mathbf{r}_{31}), \end{aligned} \quad (2.35)$$

где радиусы-векторы  $\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{21}, \mathbf{r}_{23}, \mathbf{r}_{32}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{31}$  определяют положение точек крепления тросов в связанных с центрами масс спутников системах координат.

Предполагается, что процесс развёртывания тросов осуществляется с использованием наиболее простых механизмов выпуска, которые работают только на торможение, а не могут втягивать тросы обратно. При этом динамические уравнения, моделирующие работу механизма выпуска тросов, записываются в следующем виде [87]

$$m_e \ddot{L}_k = T_k - U_k, k = \overline{1,3}, \quad (2.36)$$

где коэффициент  $m_e$  – инерционность механизмов выпуска тросов,  $U_k$  – управляющие силы. Принимается, что направление выпуска тросов длиной  $L_k$  совпадает с направлением вектора  $\Delta \mathbf{r}_k$  (рисунок 2.7), т.е., развёртывание  $k$ -го троса осуществляется с  $k$ -го спутника.

Управляющие силы  $U_k$  определяются с использованием принципа обратной связи по длине тросов и их скорости

$$U_k = p_g (L_k - l_k) + w_g (\dot{L}_k - \dot{l}_k), k = \overline{1,3}, \quad (2.37)$$

где  $p_g, w_g$  – коэффициенты закона обратной связи,  $l_k, \dot{l}_k$  – номинальные значения длин тросов и скоростей выпуска, полученные интегрированием упрощённой модели (2.10-2.13) или интерполяцией из предварительно составленных таблиц. Так как механизмы управления выпуском обеспечивают только торможение тросов, то если  $\dot{L}_k \leq 0$  или  $T_k \leq 0$ , то процесс развёртывания прекращается:  $\dot{L}_k = \ddot{L}_k = 0$ .

Для описания углового движения трёх спутников относительно их центров масс применяются классические динамические уравнения Эйлера

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_k = J_k^{-1} (\mathbf{M}_k - \boldsymbol{\omega}_k \times J_k \boldsymbol{\omega}_k), k = \overline{1,3}, \quad (2.38)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_k$  – вектор угловой скорости  $k$ -го спутника и  $J_k$  – его тензор инерции, определённый в системе координат  $c_k x_k y_k z_k$ , связанной с главными центральными осями инерции  $k$ -го спутника. В качестве примера на рисунке 2.8 показаны направления осей  $c_1 x_1$  и  $c_1 y_1$  для спутника 1. Поскольку направления реактивных сил малой тяги проходят через центры масс спутников, то соответствующие моменты не учитываются. Тогда следует отметить, что  $\mathbf{M}_k$  – это вектор моментов от сил натяжения тросов в случае, когда возмущающие моменты, такие как гравитационные, аэродинамические и др., не учитываются. Моменты  $\mathbf{M}_k$  представляют собой суммы

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{13}, \\ \mathbf{M}_2 &= \mathbf{M}_{21} + \mathbf{M}_{23}, \\ \mathbf{M}_3 &= \mathbf{M}_{31} + \mathbf{M}_{32}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где  $\mathbf{M}_{12} = \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{M}_{13} = \mathbf{r}_{13} \times (-\mathbf{T}_3)$ ,  $\mathbf{M}_{21} = \mathbf{r}_{21} \times (-\mathbf{T}_1)$ ,  $\mathbf{M}_{23} = \mathbf{r}_{23} \times \mathbf{T}_2$ ,  $\mathbf{M}_{31} = \mathbf{r}_{31} \times \mathbf{T}_3$ ,  $\mathbf{M}_{32} = \mathbf{r}_{32} \times (-\mathbf{T}_2)$ .

Кинематические уравнения спутников определяются с помощью уравнений Эйлера-Пуассона

$$\dot{\mathbf{e}}_{xk} = \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{e}_{xk}, \dot{\mathbf{e}}_{yk} = \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{e}_{yk}, \dot{\mathbf{e}}_{zk} = \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{e}_{zk}, \quad (2.40)$$

где  $\mathbf{e}_{xk}, \mathbf{e}_{yk}, \mathbf{e}_{zk}, k = \overline{1,3}$  – орты связанных систем координат  $c_k x_k y_k z_k$ . Проекции векторов  $\mathbf{e}_{xk}, \mathbf{e}_{yk}, \mathbf{e}_{zk}$  на оси геоцентрической системы координат  $OX_e Y_e Z_e$  являются элементами матриц перехода от системы координат  $OX_e Y_e Z_e$  к связанным системам координат  $c_k x_k y_k z_k$ . Тогда эти матрицы перехода имеют вид

$$\mathbf{E}_k = [\mathbf{e}_{xk}, \mathbf{e}_{yk}, \mathbf{e}_{zk}], k = \overline{1,3}. \quad (2.41)$$

Кроме того, при решении кинематических уравнений (2.40) углового движения спутников должны выполняться следующие условия с заданной погрешностью: 1)  $|\mathbf{e}_{xk}| = |\mathbf{e}_{yk}| = |\mathbf{e}_{zk}| = 1$ ; 2) условие ортогональности единичных векторов  $\mathbf{e}_{xk}, \mathbf{e}_{yk}, \mathbf{e}_{zk}$ . Для этого использовать алгоритм коррекции компонент векторов  $\mathbf{e}_{xk}, \mathbf{e}_{yk}, \mathbf{e}_{zk}$ , который разработан на основе минимизации корректирующих добавок [88].

При движении тросовой группировки необходимо обратить внимание на его безопасность, в частности, следует избежать запутывания тросов на спутниках, так как это может привести к нештатной ситуации и неудачи миссии. Для этого необходимо осуществлять контроль за угловым движением спутников относительно центра масс, а именно за углами между направлениями тросов  $\Delta \mathbf{r}_k, k = \overline{1,3}$  и характерными осями  $\mathbf{e}_{xk}$  спутников для рассматриваемой треугольной ТГКА (рисунок 2.8). Эти углы определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \arccos\left(\frac{\Delta \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{e}_{xk}}{\Delta r_k}\right), k = \overline{1,3}, \\ \alpha_1^{(3)} &= \arccos\left(\frac{\Delta \mathbf{r}'_3 \cdot \mathbf{e}_{x1}}{\Delta r_3}\right), \\ \alpha_k^{(k-1)} &= \arccos\left(\frac{\Delta \mathbf{r}'_{k-1} \cdot \mathbf{e}_{xk}}{\Delta r_{k-1}}\right), k = 2,3, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где  $\Delta \mathbf{r}'_k = -\Delta \mathbf{r}_k, k = \overline{1,3}$ .

Стоит отметить, что в идеальном случае при отсутствии колебаний углового движения спутников для ТГКА в форме правильного треугольника имеем  $\alpha_k = 0, \alpha_k^{(k-1)} = \alpha_1^{(3)} = \pi/3$ . В общем случае, т.е. при наличии возмущений, по требованиям безопасности и устойчивости движения амплитуды колебаний пространственных углов (2.42) должны быть ограничены относительно их идеальных невозмущённых значений.

Построенная выше модель используется для анализа углового движения спутников в составе развёртываемой треугольной ТГКА, для проведения проверочных расчётов и для оценки возможности реализации предложенных номинальных программ управления, полученной методом Лагранжа. В общем она учитывает растяжимость тросов, моделирует работу механизмов управления выпуском тросов, рассматривает спутники как твёрдые тела, то есть учитывает их пространственное положение, что влияет на направления действия реактивных сил, зависящих от угловых движений КА. Кроме того, данная модель позволяет оценить влияние возмущений, возникающих при разделении спутников, учесть влияние статической и динамической асимметрий КА на их угловое движение.

## 2.4 Основные результаты и выводы по второй главе

1. С помощью уравнений Лагранжа построена математическая модель движения треугольной ТГКА, предназначенная для построения номинальных программ управления при её формировании и для получения соответствующих аналитических оценок.

2. С помощью уравнений Лагранжа построена математическая модель движения ТГКА конфигурации «ступица-спицы», учитывающая движение центрального КА относительно своего центра масс.

3. Для оценки влияния угловых движений КА на процесс развёртывания треугольной ТГКА построена пространственная математическая модель системы, в которой уравнения движения записываются в геоцентрической неподвижной системе координат, тросы растяжимы и рассматриваются как



односторонние механические связи, силы натяжения и направления реактивных сил вычисляются с учётом угловых колебаний КА относительно центров масс.

### **3 РАЗРАБОТКА ПРОГРАММ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ТРЕУГОЛЬНОЙ ТРОСОВОЙ ГРУППИРОВКИ**

Анализ динамики и управление движением ТГКА обычно рассматриваются на двух этапах: 1) развёртывание системы; 2) движение системы после развёртывания и его анализ с точки зрения сохранения заданной геометрической конфигурации.

Для первого этапа движения ТГКА в этом разделе разрабатываются два вида номинальных программ управления развёртыванием треугольной ТГКА, включающих управление силами натяжением тросов и реактивными силами, создаваемыми двигателями малой тяги. Для построения номинальных программ управления используется упрощённая модель треугольной ТГКА, построенная с помощью уравнений Лагранжа. Для частного случая, когда массы трёх спутников равны, получено аналитическое решение упрощённой модели, которое может быть использовано для предварительного выбора параметров номинальной программы управления.

А для второго этапа движения треугольной ТГКА, т.е. после того, как тросы полностью развёрнуты, и желаемая треугольная конфигурация сформирована, важно оценить устойчивость вращательного движения ТГКА вокруг центра масс. Это требует аналитического анализа движения ТГКА с использованием уравнений движения, учитывающих растяжимость тросов.

#### **3.1 Анализ устойчивости движения вращающейся треугольной ТГКА в плоскости орбиты**

Чтобы уточнить факторы, влияющие на устойчивость вращательного движения треугольной ТГКА в плоскости орбиты, немного модифицируем математическую модель, полученную во второй главе методом Лагранжа. Особенностью улучшенной модели является то, что учитывается растяжимость тросов. Тогда выражение для потенциальной энергии (2.6) треугольной тросовой группировки примет вид

$$\Pi = -\sum_{k=1}^3 \frac{\mu_e m_k}{|\mathbf{R}_C + \mathbf{r}_k|} + \frac{1}{2} ES \sum_{k=1}^3 l_k^{\text{nom}} \cdot \varepsilon_k^2 e_k, \quad (3.1)$$

где  $ES$  – жёсткость троса,  $l_k^{\text{nom}}$ ,  $k = \overline{1,3}$  – недеформированная (нерастянутая) длина  $k$ -го троса,  $\varepsilon_k = (l_k - l_k^{\text{nom}}) / l_k^{\text{nom}}$  – коэффициент удлинения  $k$ -го троса,  $l_k$  – это длина растянутого троса,  $e_k$  – знаковая функция, которая определяется в виде

$$e_k = \begin{cases} 1, & \text{при } \varepsilon_k \geq 0; \\ 0, & \text{при } \varepsilon_k < 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

где  $k = \overline{1,3}$ . Введение функции  $e_k$  позволяет учесть, что механическая связь является односторонней. Если тросы становятся не натянутыми ( $\varepsilon_k < 0$ ), то это неизбежно ведёт к их провисанию, потере управляемости и к нарушению заданной геометрической конфигурации тросовой группировки.

С учётом этого потенциальная энергия системы может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \Pi \approx & -m\omega^2 R_C^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \{ \mu_1 (\mu_2 + \mu_3) l_1^2 (1 - 3\cos^2 \theta_1) + \\ & + \mu_3 (\mu_1 + \mu_2) l_2^2 (1 - 3\cos^2 \theta_2) + 2\mu_1 \mu_3 l_1 l_2 [\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3\cos \theta_1 \cos \theta_2] \} \\ & + \frac{1}{2} ES \sum_{k=1}^3 l_k^{\text{nom}} \cdot \varepsilon_k^2 e_k, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $l_3^{\text{nom}} = \sqrt{(l_1^{\text{nom}})^2 + (l_2^{\text{nom}})^2 + 2l_1^{\text{nom}} l_2^{\text{nom}} \cos(\Delta\theta^{\text{nom}})}$ , здесь  $\Delta\theta^{\text{nom}}$  – разность углов наклона тросов.

Далее, дифференцируя выражений (2.5) и (3.3) по обобщённым координатам и их скоростям и используя уравнения Лагранжа (2.9), получим уравнения движения треугольной ТГКА с учётом растяжимости тросов

$$\begin{aligned}
& m\mu_1(\mu_2 + \mu_3) \left\{ \ddot{l}_1 - l_1 \left[ (\dot{\theta}_1 + \omega)^2 + \omega^2 (3\cos^2 \theta_1 - 1) \right] \right\} + \\
& + m\mu_1\mu_3 \left\{ \left[ \ddot{l}_2 - l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 + 2\omega) \right] \cos(\theta_1 - \theta_2) + \right. \\
& + \left. \left[ l_2 \ddot{\theta}_2 + 2\dot{l}_2 (\dot{\theta}_2 + \omega) \right] \sin(\theta_1 - \theta_2) - 3\omega^2 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \right\} + \\
& + ES \left\{ \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_3 e_3 \left[ l_1 + l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] / l_3 \right\} = Q_{l_1},
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
& m\mu_3(\mu_1 + \mu_2) \left\{ \ddot{l}_2 - l_2 \left[ (\dot{\theta}_2 + \omega)^2 + \omega^2 (3\cos^2 \theta_2 - 1) \right] \right\} + \\
& + m\mu_1\mu_3 \left\{ \left[ \ddot{l}_1 - l_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + 2\omega) \right] \cos(\theta_1 - \theta_2) - \right. \\
& - \left. \left[ l_1 \ddot{\theta}_1 + 2\dot{l}_1 (\dot{\theta}_1 + \omega) \right] \sin(\theta_1 - \theta_2) - 3\omega^2 l_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \right\} + \\
& + ES \left\{ \varepsilon_2 e_2 + \varepsilon_3 e_3 \left[ l_2 + l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] / l_3 \right\} = Q_{l_2},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
& m\mu_1(\mu_2 + \mu_3) l_1^2 \left[ \ddot{\theta}_1 + 2(\dot{l}_1/l_1)(\dot{\theta}_1 + \omega) + 3\omega^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \right] + \\
& + m\mu_1\mu_3 l_1 l_2 \left\{ 3\omega^2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \left[ \ddot{\theta}_2 + 2(\dot{l}_2/l_2)(\dot{\theta}_2 + \omega) \right] \cos(\theta_1 - \theta_2) + \right. \\
& + \left. \left[ (\dot{\theta}_2 + \omega)^2 - \omega^2 - (\ddot{l}_2/l_2) \right] \sin(\theta_1 - \theta_2) \right\} + \\
& + ES \left[ -l_1 l_2 \varepsilon_3 e_3 \sin(\theta_1 - \theta_2) / l_3 \right] = Q_{\theta_1},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
& m\mu_3(\mu_1 + \mu_2) l_2^2 \left[ \ddot{\theta}_2 + 2(\dot{l}_2/l_2)(\dot{\theta}_2 + \omega) + 3\omega^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \right] + \\
& + m\mu_1\mu_3 l_1 l_2 \left\{ 3\omega^2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 + \left[ \ddot{\theta}_1 + 2(\dot{l}_1/l_1)(\dot{\theta}_1 + \omega) \right] \cos(\theta_1 - \theta_2) + \right. \\
& + \left. \left[ \omega^2 - (\dot{\theta}_1 + \omega)^2 + (\ddot{l}_1/l_1) \right] \sin(\theta_1 - \theta_2) \right\} + \\
& + ES \left[ l_1 l_2 \varepsilon_3 e_3 \sin(\theta_1 - \theta_2) / l_3 \right] = Q_{\theta_2}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

В идеальном случае, когда  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1/3$ , и  $\ddot{l}_k = \dot{l}_k = 0$ ,  $l_k = l$ ,  $\ddot{\theta}_k = 0$ ,  $\dot{\theta}_k = \dot{\theta}$ , уравнения (3.4-3.7) упрощаются, и при отсутствии возмущений и управляющих сил принимают вид

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{9}ml\left[\dot{\theta}(\dot{\theta} + 2\omega) + 3\omega^2 \cos^2 \theta_1\right] \\
& -\frac{1}{9}ml\left\{\dot{\theta}(\dot{\theta} + 2\omega)\cos(\theta_1 - \theta_2) + 3\omega^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2\right\} + \\
& + ES\left\{\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_3 e_3\left[1 + \cos(\theta_1 - \theta_2)\right]\right\} = 0,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{9}ml\left[\dot{\theta}(\dot{\theta} + 2\omega) + 3\omega^2 \cos^2 \theta_2\right] \\
& -\frac{1}{9}ml\left\{\dot{\theta}(\dot{\theta} + 2\omega)\cos(\theta_1 - \theta_2) + 3\omega^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2\right\} + \\
& + ES\left\{\varepsilon_2 e_2 + \varepsilon_3 e_3\left[1 + \cos(\theta_1 - \theta_2)\right]\right\} = 0,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{3}ml^2\omega^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + ES\left[-l\varepsilon_3 e_3 \sin(\theta_1 - \theta_2)\right] + \\
& + \frac{1}{9}ml^2\left\{3\omega^2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \dot{\theta}(\dot{\theta} + 2\omega)\sin(\theta_1 - \theta_2)\right\} = 0,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{3}ml^2\omega^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + ES\left[l\varepsilon_3 e_3 \sin(\theta_1 - \theta_2)\right] + \\
& + \frac{1}{9}ml^2\left\{3\omega^2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 - \dot{\theta}(\dot{\theta} + 2\omega)\sin(\theta_1 - \theta_2)\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Из уравнений (3.8-3.11) определяются коэффициенты, определяющие удлинения тросов

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 = & \frac{1}{9ES}ml\dot{\theta}(\dot{\theta} + 2\omega) + \frac{1}{3ES}ml\omega^2 \cos \theta_1 (2\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \\
& - \frac{1}{3ES}ml\omega^2 \frac{\sin \theta_1 (2\cos \theta_1 + \cos \theta_2)[1 + \cos(\theta_1 - \theta_2)]}{\sin(\theta_1 - \theta_2)},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 = & \frac{1}{9ES}ml\dot{\theta}(\dot{\theta} + 2\omega) + \frac{1}{3ES}ml\omega^2 \cos \theta_2 (2\cos \theta_2 + \cos \theta_1) \\
& - \frac{1}{3ES}ml\omega^2 \frac{\sin \theta_1 (2\cos \theta_1 + \cos \theta_2)[1 + \cos(\theta_1 - \theta_2)]}{\sin(\theta_1 - \theta_2)},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{3ES} \frac{ml\omega^2 \sin \theta_1 (2\cos \theta_1 + \cos \theta_2)}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} + \frac{1}{9ES}ml\dot{\theta}(\dot{\theta} + 2\omega). \tag{3.14}$$

При анализе устойчивости вращательного движения треугольной ТГКА вокруг центра масс можно выделить несколько её критических положений с точки зрения анализа величины натяжения тросов. Первым положением конфигурации, на которое стоит обратить внимание, является её положение, когда  $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 120^\circ$ . В этот момент трос 1 параллелен оси  $Cx$ , т.е. направлен вдоль местной вертикали, тогда за счёт действия гравитационных сил натяжение троса 1 наибольшее. Второе положение – это когда  $\theta_1 = 90^\circ, \theta_2 = 210^\circ$ . В этот момент трос 1 параллелен оси  $Cy$  и перпендикулярен местной вертикали. При прохождении троса 1 через это положение сила натяжения минимальна.

Поскольку конфигурация треугольной ТГКА в данном случае симметрична, то достаточно в качестве примера рассмотреть диапазон изменения силы натяжения троса 1. Анализ для сил натяжения тросов 2 и 3 аналогичен и здесь не приводится. Подставляя для первого характерного положения системы в уравнения (3.12-3.14), получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{9ES} ml \left[ (\dot{\theta}^2 + \omega)^2 + \frac{7}{2} \omega^2 \right], \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 &= \frac{1}{9ES} ml \left[ (\dot{\theta}^2 + \omega)^2 - \omega^2 \right].\end{aligned}\quad (3.15)$$

Аналогично, подставляя в (3.12-3.14) условия второго положения, найдём

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{9ES} ml \left[ (\dot{\theta} + \omega)^2 - \frac{5}{2} \omega^2 \right], \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 &= \frac{1}{9ES} ml \left[ (\dot{\theta} + \omega)^2 + 2\omega^2 \right].\end{aligned}\quad (3.16)$$

Для обеспечения устойчивости вращательного движения треугольной ТГКА минимальное натяжение тросов должно быть всегда больше 0, что требует, чтобы коэффициенты удлинения тросов во всяких случаях должны быть положительными, т.е.  $\varepsilon_k > 0, k = \overline{1,3}$ . Тогда из (3.15-3.16) получим

неравенства, определяющие допустимые значения для угловой скорости вращения системы

$$\dot{\theta} > \left( \sqrt{\frac{5}{2}} - 1 \right) \omega, \text{ или } \dot{\theta} < \left( -\sqrt{\frac{5}{2}} - 1 \right) \omega. \quad (3.17)$$

Из условий (3.17) можно сделать следующий вывод: чтобы избежать провисания тросов и обеспечить устойчивость вращения треугольной ТГКА её угловая скорость должна быть больше критического минимального значения, которое приблизительно равна  $0.581\omega$ , если направление вращения системы совпадает с направлением движения системы по орбите. И равна  $2.581\omega$ , если группировка вращается противоположно. Знание соотношений между критической угловой скоростью вращения системы и её орбитальной угловой скоростью движения центра масс полезно для обоснованного выбора конечного состояния ТГКА после её развёртывания.

## 3.2 Номинальная программа развёртывания треугольной ТГКА

3.2.1 Законы управления силами натяжения и реактивными силами для развёртывания вращательной ТГКА

Законы изменения сил натяжения  $T_k, k = \overline{1,3}$  и реактивных сил  $F_k, k = \overline{1,3}$  строятся независимо друг от друга. Силы натяжения тросов изменяются в соответствии с принципом обратной связи по длине развёрнутых тросов и их скорости выпуска, и имеют следующий вид

$$T_k = T_k^0 + p_k (l_k - L_{d_k}) + w_k \dot{l}_k, \quad k = \overline{1,3}, \quad (3.18)$$

где  $T_k^0$  – величина сил натяжения в идеальном случае, когда конфигурация системы есть «правильный треугольник»,  $p_k, w_k$  – коэффициенты обратной связи,  $L_{d_k}$  – конечные длины тросов. В идеальном случае имеем  $L_{d_k} = L_d$ .

Полагая  $F_k = 0, \ddot{l}_k = \dot{l}_k = 0$  и  $\ddot{\theta} = 0$  с использованием системы (2.10-2.13), получим

$$\begin{aligned}
 T_k^0 &= ml_k (\dot{\theta}_k + \omega)^2 / 9, \quad k = 1, 2, \\
 T_3^0 &= ml_3 (\dot{\theta}_2 + \omega)^2 / 9.
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

Помимо слагаемых  $T_k^0$  в закон управления натяжением (3.18) входят слагаемые, зависящие от коэффициентов обратной связи и служащие для приведения тросовой группировки в заданное конечное состояние. Конечное состояние ТГКА, во-первых, это правильный треугольник, поэтому выполняются условия  $l_k = L_d, \dot{l}_k = 0, k = \overline{1,3}$ ; во-вторых, в своём конечном состоянии ТГКА вращается с заданной угловой скоростью  $\dot{\theta}_k = \dot{\theta}_d = \text{const}$ . Конечное значение угловой скорости определяется величиной реактивных сил  $F_k, k = \overline{1,3}$  и моментом выключения двигателей малой тяги  $t_e$ . В номинальном случае полагается, что реактивные силы равны по модули:  $F_k = F$ , причём углы между направлением реактивных сил и направлением тросов также равны:  $\varphi_k = \varphi$ . Таким образом, реактивные силы изменяются по релейному закону

$$F_k = \begin{cases} F, & \text{при } t < t_e, \\ 0, & \text{при } t \geq t_e \end{cases}, \quad k = \overline{1,3}.
 \tag{3.20}$$

3.2.2 Аналитическое решение уравнений движения треугольной ТГКА в номинальном случае

Здесь рассматривается частный случай, когда  $l_1 = l_2 = l_3, m_1 = m_2 = m_3$ . Этот случай принимается за номинальный. Показано, что после выключения двигателей малой тяги ( $F_k = 0$ ) угловая скорость вращения системы асимптотически стремится к некоторому постоянному значению  $\dot{\theta}_k \rightarrow \dot{\theta}_d$ , и в то же время при соответствующим выборе коэффициентов обратной связи  $l_k \rightarrow L_d, \dot{l}_k \rightarrow 0$ , то есть конфигурация ТГКА приближается к конфигурации «правильный треугольник». При этом необходимо, чтобы в процессе



развёртывания системы выполнялись ограничения  $l_k < L_d$ ,  $\dot{l}_k > 0$ , т.е. процесс перехода системы в конечное состояние должен быть аperiodическим. Последнее условие связано с предположением, что используются управляющие механизмы выпуска тросов, работающие только на торможение и не втягивающие тросы обратно.

В этом частном случае длины тросов и их углы наклона к местной вертикали тождественно совпадают и после выключения двигателей ( $F_k = 0$ ) система нелинейных уравнений (2.10-2.13) приводится к линейной системе

$$\Delta \ddot{l} = -9(p \Delta l + w \Delta \dot{l})/m, \quad (3.21)$$

$$\ddot{\theta} = -2 \frac{\Delta \dot{l}}{l} \dot{\theta}, \quad (3.22)$$

где  $\Delta l = l - L_d$ ,  $l = l_k$ ,  $\theta = \theta_k$ , причём коэффициенты обратной связи одинаковы  $p = p_k$ ,  $w = w_k$ .

Решение системы уравнений (3.21-3.22) имеет вид

$$\Delta l(t) = C_1 e^{\lambda_1(t-t_e)} + C_2 e^{\lambda_2(t-t_e)}, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{9w}{2m} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mp}{9w^2}} \right), \quad (3.23)$$

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(t_e) \exp \left( -2 \int_{t_e}^t \frac{\Delta \dot{l}(t)}{\Delta l(t) + L_d} dt \right) = \dot{\theta}(t_e) \left( \frac{C_1 + C_2 + L_d}{\Delta l(t) + L_d} \right)^2, \quad (3.24)$$

где произвольные постоянные  $C_{1,2}$  и  $\dot{\theta}(t_e)$  определяются по значениям состояний системы в момент времени выключения двигателей  $t = t_e$ .

Из выражений для собственных чисел (3.23) следует, что условия асимптотической устойчивости ( $l_k \rightarrow L_d$ ,  $\dot{l}_k \rightarrow 0$ ) будут выполнены и переходный процесс будет аperiodическим ( $l_k < L_d$ ,  $\dot{l}_k > 0$ ), если

$$w > 0, \quad 0 < \frac{4mp}{9w^2} < 1. \quad (3.25)$$

При выполнении условия  $l_k \rightarrow L_d$  предельное значение угловой скорости вращения системы определяется следующим образом

$$\dot{\theta}_d = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(t_e) \left( \frac{C_1 + C_2 + L_d}{L_d} \right)^2. \quad (3.26)$$

Стоит отметить, что параметр  $t_e$  должен быть выбран так, чтобы  $l(t_e) < L_d$ , то есть имелось бы ещё время для завершения переходного процесса при развёртывании рассматриваемой тросовой группировки.

### 3.2.3 Численное моделирование движения треугольной ТГКА в номинальном случае

Численное моделирование движения ТГКА в номинальном случае, когда используется программа управления (3.18) и (3.20), проводится использованием математической модели, полученной с помощью уравнений Лагранжа (2.10-2.13). Исходные данные для моделирования приводятся в таблицах 3.1, 3.2.

Таблица 3.1 – Параметры треугольной ТГКА и начальные условия движения

Параметры	Значение
Высота орбиты центра масс системы, км	500
Масса трёх спутников, кг	10
Начальная длина тросов, м	0.3
Начальная скорость выпуска тросов, м/с	0.05
Начальная угловая скорость вращения системы, $c^{-1}$	0.1
Начальные значения углов $\theta_1, \theta_2$	$0, 2\pi/3$

Таблица 3.2 – Параметры номинальной программы управления

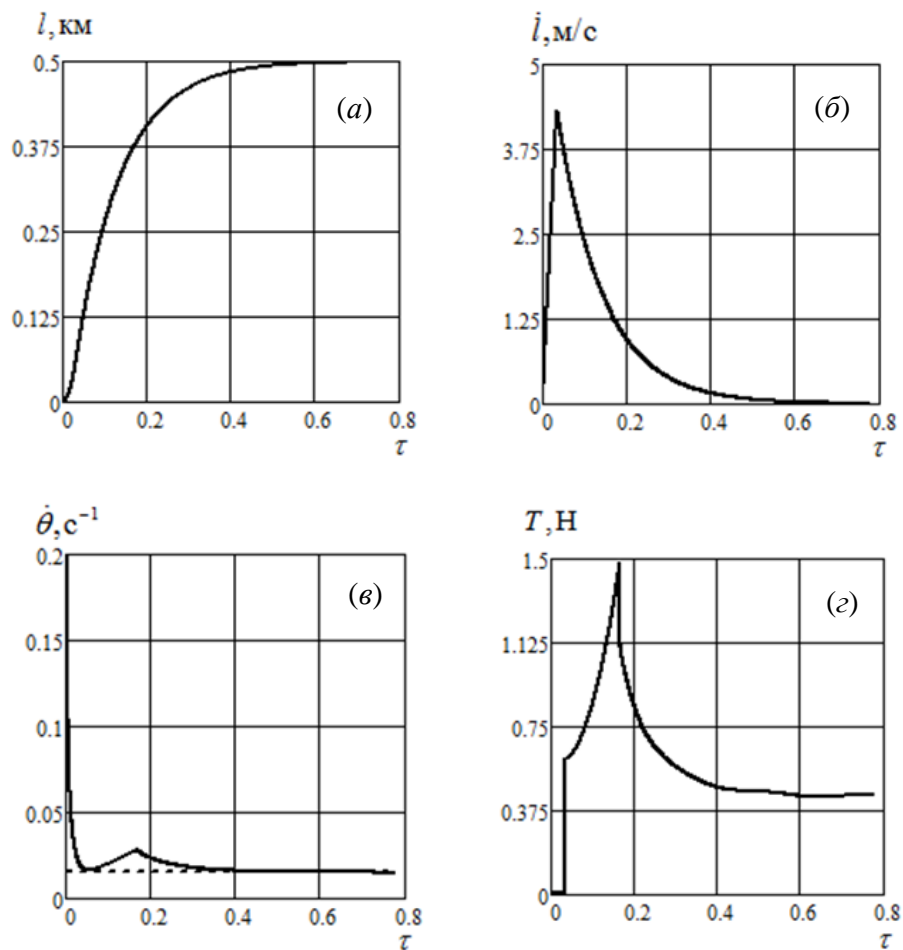
Параметры	Значение
Конечная длина тросов, м	500
Коэффициенты обратной связи $p_{1,2,3}$ , $кг/с^2$	15

Коэффициенты обратной связи $w_{1,2,3}$ , кг/с	0.15
Ограничение на силы натяжения $T_{\min}$ , Н	0.01
Тяга двигателей $F$ , Н	1
Углы направления тяги относительно направления выпуска троса $\varphi_{1,2,3}$ , град	100
Момент времени выключения двигателей $t_e$ , с	150

На рисунке 3.1 представлены зависимости, характеризующие движением рассматриваемой системы по номинальной программе управления, где  $\tau = \omega t$  – безразмерное время, здесь  $\omega$  – орбитальная угловая скорость центра масс тросовой системы. В номинальном случае все переменные состояний системы (длины тросов  $l_{1,2,3}$ , линейные скорости тросов  $\dot{l}_{1,2,3}$  и угловые скорости вращения тросов  $\dot{\theta}_{1,2,3}$ ) изменяются по одинаковым законам, поэтому для примера на рисунке 3.1 показаны только изменения зависимостей для первого троса. Более того, это означает, что в любой момент времени конфигурации ТГКА есть «правильный треугольник».

После того, как двигатели малой тяги выключаются ( $t > t_e$ ), изменения от времени длин, линейных и угловых скоростей тросов, соответствующие аналитическим решениям линейной системы (3.21-3.22), практически совпадают с зависимостями, полученными численным интегрированием системы нелинейных уравнений (2.10-2.13). В качестве примера на рисунке 3.1,в штриховой прямой линией показано предельное значение угловой скорости вращения тросов  $\dot{\theta}_d$ , вычисленное по формуле (3.26) и равное 0.015рад/с при принятых исходных данных (таблицы 3.1, 3.2). С этой угловой скоростью сформированная тросовая группировка устойчиво вращается относительно центра масс системы (0,0) в плоскости орбиты. Траектории трёх спутников относительно центра масс в процессе формирования конфигурации изображены на рисунке 3.1,д.

Здесь следует отметить, что согласно формулу (3.19), в начале развёртывания тросов значения  $T_k^0$  малы из-за небольших значений  $l_k$ . Поэтому при вычислении управляющих сил натяжения по закону управления (3.18) их значения могут стать отрицательными. Это означает, что в этом случае тросы должны толкать спутники. Однако это невозможно, так как тросы не работают на сжатие. Чтобы справиться с этой проблемой, необходимо ввести ограничения на силы натяжения. Поэтому на начальном участке сразу после разделения спутников развёртывание тросов осуществляется в соответствии с условием  $T_k = T_{\min}$ . Как только, определённая в соответствии (3.18) с сила становится больше  $T_{\min}$ , то необходимо перейти выпуску тросов по закону (3.18). Приведённые рассуждения иллюстрируются на рисунке 3.1,з, где  $T_{\min}$  задаётся как 0.01Н.



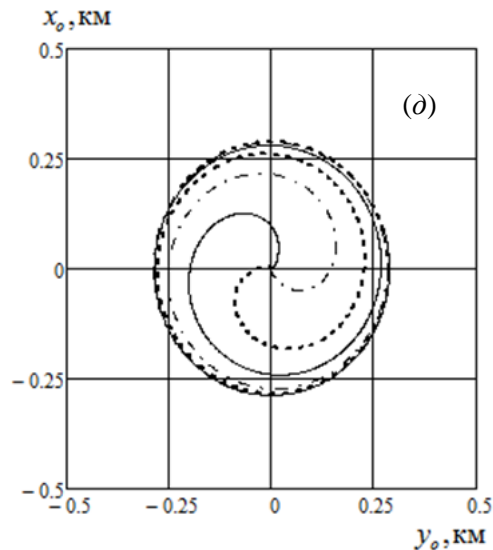


Рисунок 3.1 – Характерные зависимости для треугольной ТГКА при её формировании в номинальном случае

В качестве двигателей малой тяги здесь можно использовать, например, двигательные установки с РДМТ (ракетные двигатели малой тяги) [89], обладающие большим удельным импульсом (или скоростью истечения рабочего тела) и малым расходом массы. Так, например, при удельном импульсе  $I_y = 1950 \text{ м/с}$  и с тягой  $F = 1 \text{ Н}$  массовый расход рабочего тела двигателя составит  $F / I_y = 5.13 \times 10^{-4} \text{ кг/с}$ . Таким образом, для рассматриваемого времени работы двигателей в номинальной программе управления (3.20) общий расход массы для трех двигателей составит  $0.23 \text{ кг}$ , что существенно меньше масс КА. Поэтому изменением массы КА при формировании тросовой группировки в данном случае можно пренебречь.

### 3.3 Проверка возможности реализации номинальной программы развёртывания треугольной ТГКА

Как будет показано ниже, приведённые аналитические оценки и численные результаты, полученные для номинальной программы при формировании треугольной тросовой группировки и соответствующие упрощённой математической модели (2.10-2.13), подтвердились с использованием модели, записанной в неподвижной геоцентрической системе

координат и учитывающей возмущения, которые не учитывались при построении номинальной программы управления. К таким возмущениям можно отнести разброс начальных условий движения системы при разделении КА, растяжимость тросов, односторонность механических связей между КА, неточность работы механизмов управления выпуском тросов, влияние угловых движений КА на направление действия реактивных сил, статическую и динамическую асимметрию КА и др.

### 3.3.1 Расчёт процесса разделения спутников

При расчёте процесса разделения спутников в самом начале развёртывания ТГКА концевые тела рассматриваются как тела конечных размеров. В целом формирование ТГКА состоит из нескольких этапов (рисунок 3.2): 1) выведение группировки КА, жёстко связанных между собой, на орбиту вместе с космической станцией или с помощью ракетоносителя; 2) отделение связки КА; 3) разделение спутников; 4) развёртывание системы (формирование заданной конфигурации). После выведения группировки КА на орбиту вся система вращается относительно своего центра масс с некоторой угловой скоростью  $\omega_0$ , которая принимается за начальную угловую скорость системы при расчёте разделения КА. Здесь предполагается, что в исходном состоянии до момента разделения КА линии, соединяющие центры масс спутников, образуют правильный треугольник. Причём в общем случае тросовая группировка спутников как твёрдое тело совершает пространственное движение.

Исходя из того, что после разделения связки изменяются векторы скоростей центров масс и угловых скоростей вращения относительно центров масс КА, к модели движения системы, построенной в разделе 2.3, необходимо добавить алгоритм их вычисления, основанный на известных теоремах теоретической механики. Допустим, что процесс разделения осуществляется путём отделения спутников 1 и 3 от спутника 2 соответственно, и их относительные скорости отделения обозначаются через  $V_{r1}$  и  $V_{r3}$ . Тогда,

нетрудно определить векторы скоростей центров масс спутников  $\mathbf{V}_{1,2,3}$  после их разделения с использованием закона сохранения импульса

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_2 &= \mathbf{V}_C - (m_1 \mathbf{V}_{r1} + m_3 \mathbf{V}_{r3})/m, \\ \mathbf{V}_{1,3} &= \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_{r1,3},\end{aligned}\quad (3.27)$$

где  $\mathbf{V}_C$  – вектор скорости центра масс системы до разделения спутников.

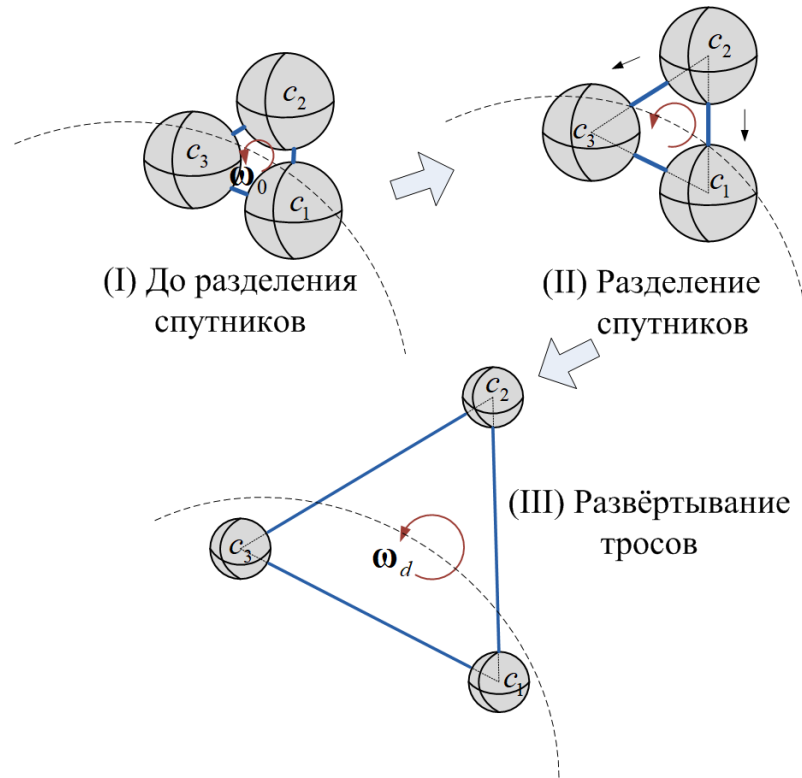


Рисунок 3.2 – Этапы формирования треугольной ТГКА

Дальше используя теорему об изменении кинетического момента твёрдого тела при ударном воздействии, определим векторы угловых скоростей спутников после их разделения

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{K}_1 &= \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{S}_1, \\ \Delta \mathbf{K}_2 &= \mathbf{r}_{21} \times \mathbf{S}'_1 + \mathbf{r}_{23} \times \mathbf{S}'_3, \\ \Delta \mathbf{K}_3 &= \mathbf{r}_{32} \times \mathbf{S}_3,\end{aligned}\quad (3.28)$$

где  $\Delta \mathbf{K}_{1,2,3}$  – приращение кинетических моментов спутников,  $\mathbf{S}_{1,3}$  – ударные импульсы, действующие на спутники 1 и 3 в момент отделения от спутника 2, причём  $\mathbf{S}'_{1,3} = -\mathbf{S}_{1,3}$ . Векторы импульсов  $\mathbf{S}_{1,3}$  определяются из выражений

$$\mathbf{S}_{1,3} = m_{1,3}(\mathbf{V}_{1,3} - \mathbf{V}_c). \quad (3.29)$$

Зная приращения  $\Delta \mathbf{K}_{1,2,3}$ , найдём изменение угловых скоростей спутников после их разделения

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_k = J_k^{-1} \Delta \mathbf{K}_k, k = \overline{1,3}. \quad (3.30)$$

Следует отметить, если в момент отделения векторы импульсов  $\mathbf{S}_{1,3}$  проходят через центры масс спутников, то их угловые скорости не изменяются и равны угловым скоростям системы ( $\boldsymbol{\omega}_0$ ) до разделения спутников. Если же, например, центры масс спутников смещены относительно их геометрических центров, то угловые скорости спутников после их разделения изменяются. Асимметрию, связанную с погрешностью положений центра масс, можно назвать статической. Для задач формирования ТГКА в плоскости орбиты, статическая асимметрия в связанной системе координат  $c_k x_k y_k z_k$  (рисунок 2.8) будет характеризоваться смещениями координат центров масс спутников от осей  $c_k x_k$  и  $c_k y_k$ , величины которых обозначим через  $\Delta x_k$  и  $\Delta y_k$  (в идеальном случае  $\Delta x_k = \Delta y_k = 0$ ). Кроме статической асимметрии, рассматривается ещё один вид асимметрии, связанный с отличием систем координат  $c_k x_k y_k z_k$  от главной системы координат, оси которой являются главными центральными осями инерции спутников. Данная асимметрия называется динамической (массово-инерционная). В случае, когда спутник является динамически симметричным телом вращения, то матрица его тензора инерции – диагональная, т.е.  $J_k = \text{diag}(J_{xk}, J_{yk}, J_{zk})$ ,  $k = \overline{1,3}$ , причём компоненты на диагонали матрицы тензора удовлетворяют соотношениям:  $J_{yk} = J_{zk}$ . При наличии динамической асимметрии, существует разность осевых моментов инерции  $J_{yk} \neq J_{zk}$ .

При изготовлении КА и даже в процессе выполнения ими задач неизбежно возникают упомянутые выше асимметрии. Например, выпуск тросов от спутников для формирования тросовой группировки может



привести к тому, что центры масс спутников не всегда совпадают с их геометрическими центрами. Хотя с помощью современной техники можно свести асимметрию спутника к минимуму, однако всегда важно знать степень её влияния на движение. Конкретно, влияние рассматриваемой совокупности асимметрий спутников, входящих в состав треугольной ТГКА, на их угловые колебания заключается в следующем: 1) в изменении начальных угловых скоростей (3.30) спутников после их разделения; 2) в изменении характера колебаний спутников относительно центров масс при развёртывании тросов и при последующем движении тросовой группировки, которое описывается уравнениями (2.38) и (2.40).

3.3.2 Численное моделирование процесса развёртывания треугольной ТГКА с использованием уравнений движения в геоцентрической неподвижной системе координат

Для проверки реализуемости предлагаемой программы с использованием модели, учитывающей движение КА относительно центра масс, проводятся численные расчёты для невозмущённого и возмущённого случаев. Принципиальная схема управления показана на рисунке 3.3.

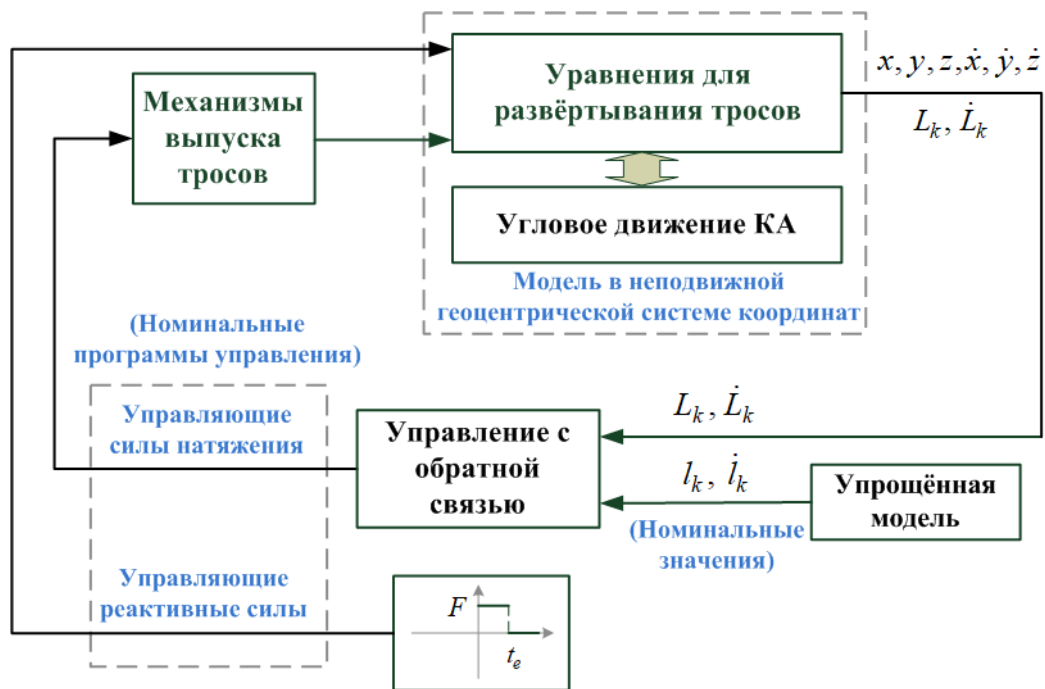


Рисунок 3.3 – Принципиальная схема управления процессом развёртывания треугольной ТГКА

Исходные данные для численного моделирования движения вращающейся треугольной ТГКА (системе уравнений (2.33), (2.36), (2.38) и (2.42)), и коэффициенты номинальной программы не изменяются (таблицы 3.1 и 3.2). Эти исходные данные дополняются данными, которые приводятся в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Исходные данные для моделирования процесса развёртывании треугольной ТГКА

Параметры	Значение
Диаметр спутников, м	0.3
Начальные угловые скорости тросовой системы до разделения спутников $\omega_{x,y,z}$ , $c^{-1}$	0, 0, 0.1
Диаметр тросов, мм	0.6
Модуль Юнга материала тросов, ГПа	25
Коэффициент инерционности механизмов управления $m_e$ , кг	0.2
Коэффициент обратной связи $p_g$ , $кг/с^2$	7.8
Коэффициент обратной связи $w_g$ , $кг/с$	1.5

### *Невозмущённый случай*

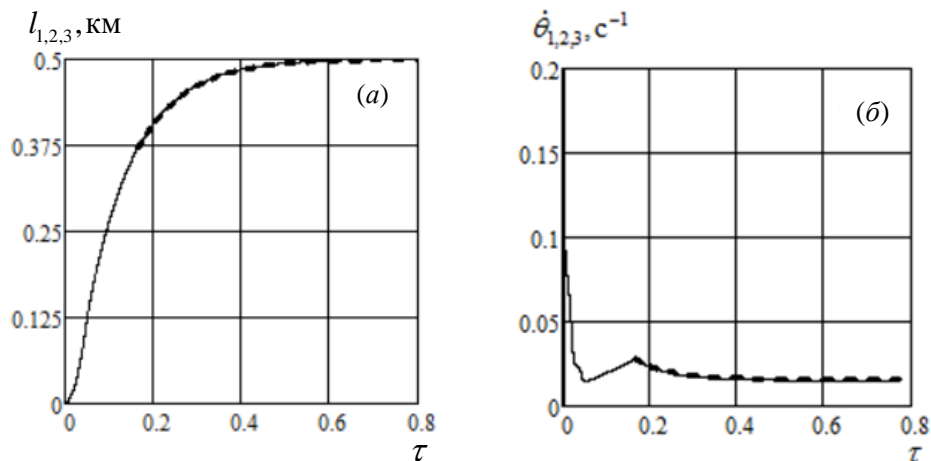
В номинальном невозмущённом плоском случае система до разделения спутников вращается с некоторой ненулевой угловой скоростью, которая в численном примере принимается как  $\omega_z = 0.1c^{-1}$ . Причём предполагается, что в момент отделения спутников 1 и 3 от спутника 2, векторы относительных скоростей  $\mathbf{V}_{r1}$  и  $\mathbf{V}_{r3}$  лежат в плоскости вращения системы, а направления векторов  $\mathbf{V}_{r1}$  и  $\mathbf{V}_{r3}$  относительно их скоростей до разделения  $\mathbf{V}_1$  и  $\mathbf{V}_3$  составляют  $-\pi/6$  и  $\pi/6$ , соответственно.

Рисунок 3.4 иллюстрирует изменение характерных параметров движения тросовой группировки в процессе формирования заданной конфигурации в плоскости орбиты при реализации номинальной программы управления в математической модели, построенной в геоцентрической системе координат. Из рисунка 3.4,*а* следует, что кривая изменения длин тросов  $l_{1,2,3}$  (сплошная линия), определённая в соответствии с моделью (2.33) гладкая и практически совпадает с номинальной зависимостью, причём в конечном итоге тросы развёртываются на заданную длину ( 0.5км ). Согласованность изменений длин трех тросов показывает, что в процессе развёртывания конфигурация системы всегда представляет собой правильный треугольник. Причём после выключения двигателей малой тяги ( $\tau = 0.17$ ) изменение длин тросов совпадает с аналитическим решением (3.23) (жирная штриховая линия). На рисунке 3.4,*б* приводится график изменения угловых скоростей вращения тросов  $\dot{\theta}_{1,2,3}$  длиной  $l_{1,2,3}$ , где жирной штриховой линией изображено аналитическое решение (3.24). При развёртывании тросов изменения скоростей вращения тросов  $\dot{\theta}_{1,2,3}$  также практически совпадают, и в конечном итоге, тросовая группировка вращается с постоянной угловой скоростью, приблизительно равной  $0.015\text{с}^{-1}$ . Окончательное значение угловой скорости вращения тросовой группировки можно изменить, изменяя величину малой тяги  $F$  или смещая момент времени выключения реактивных двигателей  $t_e$ .

Рисунок 3.4,*в* иллюстрирует изменение силы натяжения первого троса  $T_1$ , где штриховой линией показано изменение силы натяжения, определённое по упрощённой модели (2.10-2.13). Силы натяжения второго и третьего троса  $T_{2,3}$  изменяются аналогично. По графику изменения силы натяжения можно определить несколько характерных участков движения треугольной тросовой группировки при её развёртывании. Первый участок – это начальный небольшой по времени участок ( $0 \leq \tau < 0.05$ ). Сила натяжения на первом

участке ведёт себя сложным образом, что объясняется ступенчатым изменением малой тяги в самом начале, при этом неизбежно возникает возмущение из-за включения двигателей. Далее на втором участке сила натяжения постепенно возрастает до момента выключения реактивных двигателей ( $\tau = 0.17$ ). Дальнейшее развёртывание тросовой группировки происходит только под действием центробежных сил до тех пор, пока все тросы не достигнут заданной длины. При этом сила натяжения постепенно уменьшается до постоянной величины (0.42Н). На всех участках движения системы тросы остаются натянутыми.

Стоит отметить, что в таблице 3.3 значения коэффициентов обратной связи  $p_g, w_g$  для закона управления (2.37), предложенного в геоцентрической системе координат, по сравнению с коэффициентами  $p_{1,2,3}, w_{1,2,3}$  для номинальной программы (таблице 3.2), были изменены, так как в противном случае по окончанию выпуска тросов, когда длины тросов фиксируются, имеют место колебания сил натяжения тросов с увеличенной амплитудой (рисунок 3.4,з).



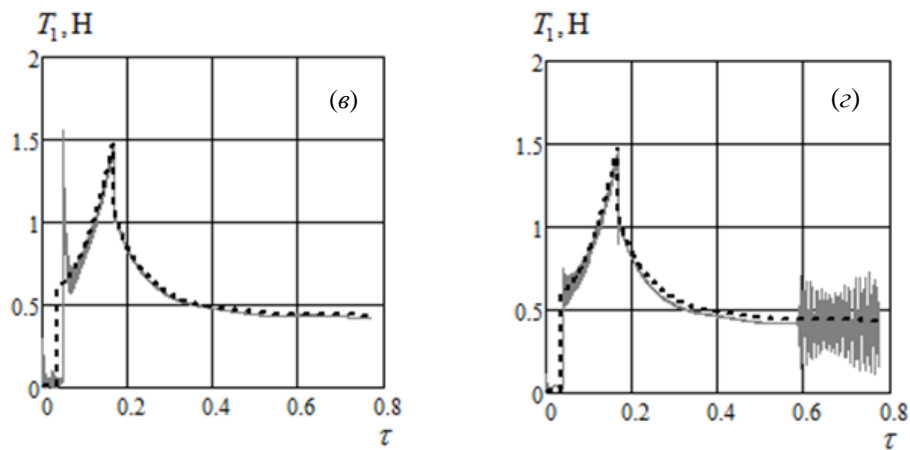


Рисунок 3.4 – Характеристики невозмущённого движения ТГКА, полученные с помощью модели в геоцентрической неподвижной системе координат

Чтобы проиллюстрировать угловое движение спутников относительно своих центров масс во время развёртывания ТГКА в невозмущённом случае, на рисунке 3.5,а-в для примера показано изменение характеристик углового движения первого спутника:  $\alpha_1$ ,  $\alpha_1^{(3)}$  – углов между продольной осью спутника 1 и направлениями троса 1 и 3, соответственно; и угловой скорости спутника  $\omega_{z1}$  при начальных условиях  $\omega_{x1} = \omega_{y1} = 0$ . Из рисунка 3.5,а следует, что в начале развёртывании тросов угол  $\alpha_1$  отличается от начального значения ( $\alpha_1 = 0$ ), что обусловлено возмущением при включении реактивных двигателей малой тяги, приложенной к спутнику. По мере развёртывания тросовой группировки угол  $\alpha_1$  постепенно стремится к нулю и в итоге колеблется с небольшой амплитудой ( $\alpha_1 \approx 2$ град). При этом угол  $\alpha_1^{(3)}$  совершает колебания относительно своего идеального начального значения  $\pi/3$ , амплитуда которых также ограничена. Угловая скорость  $\omega_{z1}$  КА относительно центра масс колеблется относительно нуля. Аналогично изменяются характеристики углового движения других КА относительно центра масс.

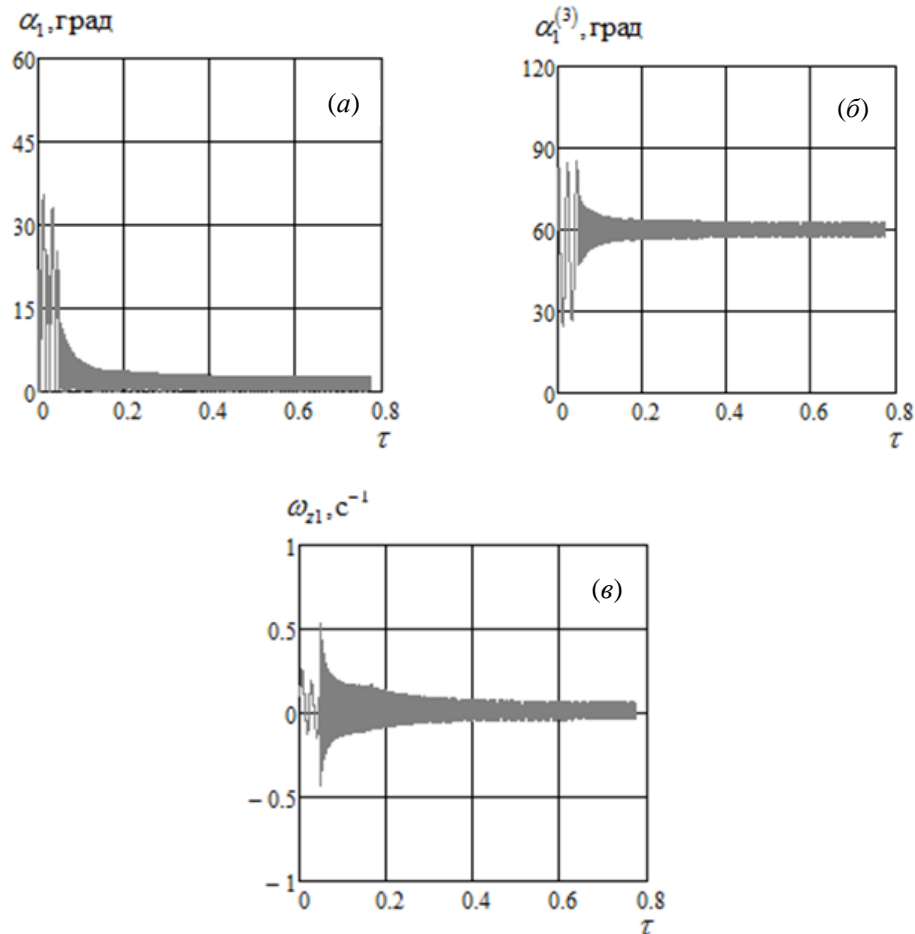


Рисунок 3.5 – Характерные зависимости для углового движения КА в невозмущённом случае

В итоге, конфигурация тросовой группировки при невозмущённом развёртывании представляет собой почти правильный треугольник. Процесс формирования заданной конфигурации идёт устойчиво и безопасно (не существует риска наматывания тросов вокруг спутников). В конечном состоянии сформированная тросовая группировка вращается с постоянной угловой скоростью. При этом спутники совершают ограниченные по амплитуде колебания относительно линий, характеризующих направления тросов (направления действия сил натяжения).

### ***Возмущённый случай***

Далее рассмотрим возмущённое движение треугольной ТГКА при её формировании на орбите. При этом для моделирования движения системы, в

отличие от таблиц 3.1 и 3.3, был выбран один из наиболее сложных вариантов исходных данных тросовой системы, приведённых в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Исходные данные для моделирования возмущённого движения треугольной ТГКА

Параметры	Значение
Массы трёх спутников, кг	8, 10, 12
Начальные угловые скорости тросовой системы до разделения спутников $\omega_{x,y,z}$ , с <sup>-1</sup>	0.1, -0.1, 0.1
Смещение центров масс спутников от их геометрических центров, м	0.03

Рассматривается случай, когда массы спутников 1 и 3 отличаются от номинального значения ( $m_{1,2,3} = 10\text{кг}$ ). До разделения спутников вектор начальной угловой скорости системы принимается как  $\omega_x = \omega_z = 0.1\text{с}^{-1}$ ,  $\omega_y = -0.1\text{с}^{-1}$ , т.е. составляющие угловой скорости по осям связанной системы координат  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  по модулю равны номинальному значению угловой скорости вращения системы  $\omega_z$  (таблица 3.3). При этом в момент разделения спутников векторы относительных скоростей спутников 1 и 3 ( $\mathbf{V}_{r1}$  и  $\mathbf{V}_{r3}$ ) не лежат в плоскости вращения системы, а составляют с плоскостью вращения угол, равный 10град, который рассматривается как возмущение, возникающее при разделении спутников.

Кроме того, при выборе исходных данных также учитывается сложная совокупность статической и динамической асимметрии спутников: 1) наличие небольшого смещения центров масс спутников по отношению к их геометрическим центрам сфер, обозначаемого через величину  $\Delta D/D = 0.1$ , где  $D$  – диаметр спутников,  $\Delta D$  – величина смещения центра масс спутника; 2) разность моментов инерции  $J_{yk} \neq J_{zk}$ ,  $k = \overline{1,3}$ , где  $J_{yk}$ ,  $J_{zk}$  – моменты инерции спутников относительно связанных систем координат  $c_k x_k y_k z_k$ . При

численном расчёте принимается  $|J_{zk} - J_{yk}|/J_s = 0.1$ , где  $J_s$  – момент инерции идеальной однородной сферы. Наличие статической и динамической асимметрии КА приводит к соответствующему изменению их начальных угловых скоростей  $\omega_{xk}, \omega_{yk}, \omega_{zk}$  после разделения в соответствии с (3.30), так как направления ударных импульсов при разделении не проходят через центры масс спутников. Кроме того, асимметрия также влияет на последующее движение КА относительно своих центров масс.

На рисунке 3.6 показано изменение характерных параметров движения тросовой группировки при наличии рассматриваемых возмущений. Результаты моделирования показывают, что зависимости, характеризующие изменение длин трёх тросов, почти совпадают (рисунке 3.6,*а*). По окончании развёртывания системы скорость вращения тросов отличается от номинального значения. В качестве примера на рисунке 3.6,*б* приводится изменение угловой скорости вращения первого троса, где штриховой линией показано номинальное значение. Очевидно, что конечное значение угловой скорости вращения системы уменьшается по сравнению с номинальным невозмущённым случаем. Кроме этого, действие рассматриваемых возмущений также изменяет силы натяжения тросов, величины которых в конце развёртывания тросов отличаются от номинальных значений (штриховые линии на рисунке 3.6,*в-д*). Причём в связи с разными массами спутников конечные величины натяжения тросов различны. На рисунке 3.6,*е* показаны траектории центров масс спутников относительно центра масс  $(0,0)$  тросовой группировки при её развёртывании в возмущённом случае.



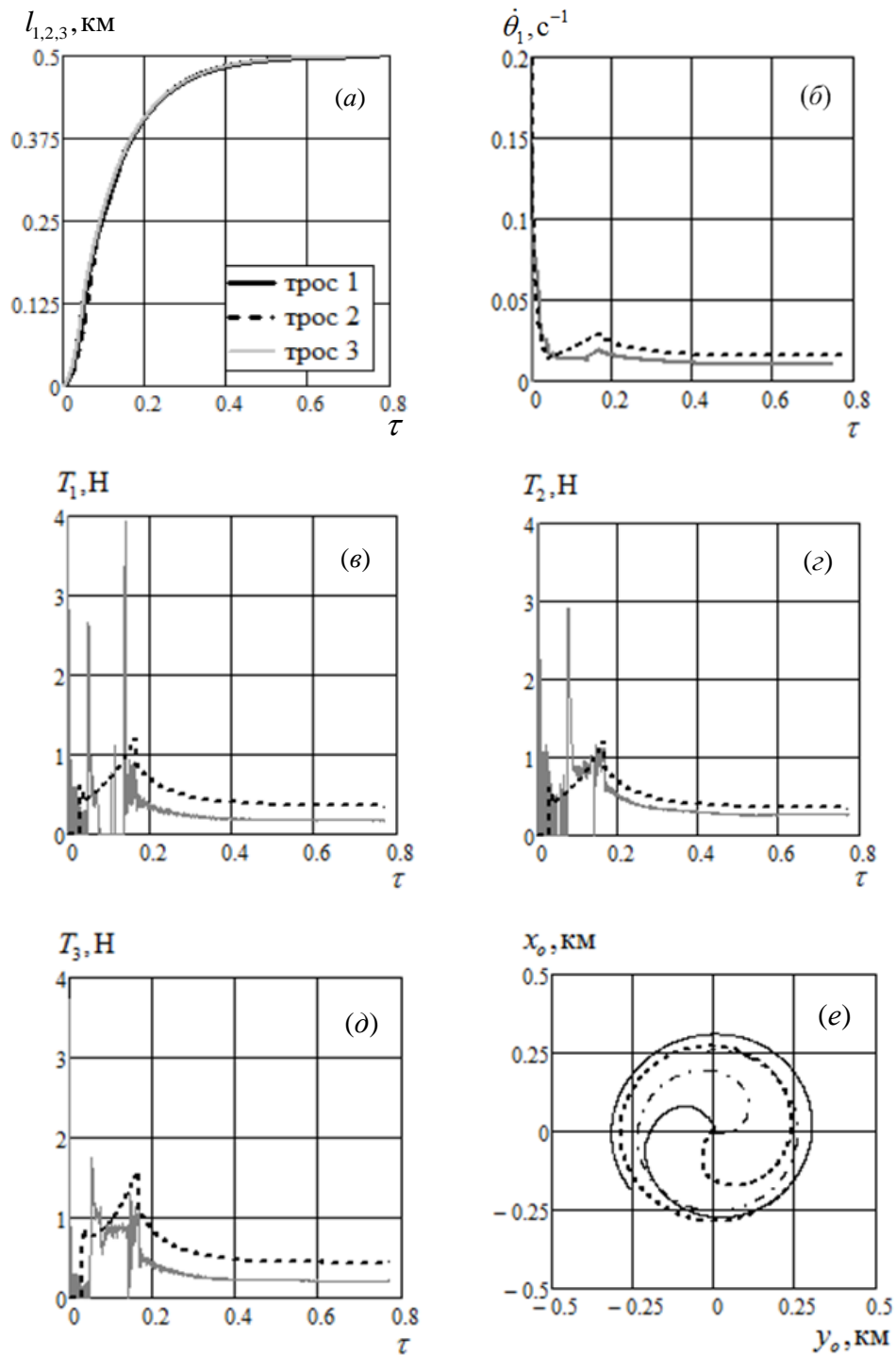


Рисунок 3.6 – Характеристики движения треугольной ТГКА в возмущённом случае

Угловое движение КА в составе треугольной тросовой группировки при наличии возмущений иллюстрируется на рисунках 3.7 и 3.8. На рисунке 3.7,*a*-*в* приводится изменение углов  $\alpha_{1,2,3}$ , характеризующих угловое движение спутников относительно направлений тросов длиной  $l_{1,2,3}$ , на рисунке 3.7,*г* – в

качестве примера приводится зависимость для угла  $\alpha_1^{(3)}$  между продольной осью спутника 1 и направлением троса 3. Как следует из приведённых результатов, максимальные значения углов  $\alpha_{1,2,3}$  не превышают  $\pi/2$ , что исключает наматывание тросов на спутники и обеспечивает безопасность движения системы, причём по окончании развёртывания системы колебания углов  $\alpha_{1,2,3}$  и  $\alpha_1^{(3)}$  имеют ограниченный характер (не превышают 12град). В качестве примера на рисунке 3.8 показано изменение угловых скоростей  $\omega_{x2}, \omega_{y2}, \omega_{z2}$  для спутника 2. Результаты показывают, что спутник 2 совершает сложное пространственное движение относительно направлений тросов. Это же имеет место для угловых скоростей спутников 1 и 3, аналогичные зависимости для которых здесь не приводятся.

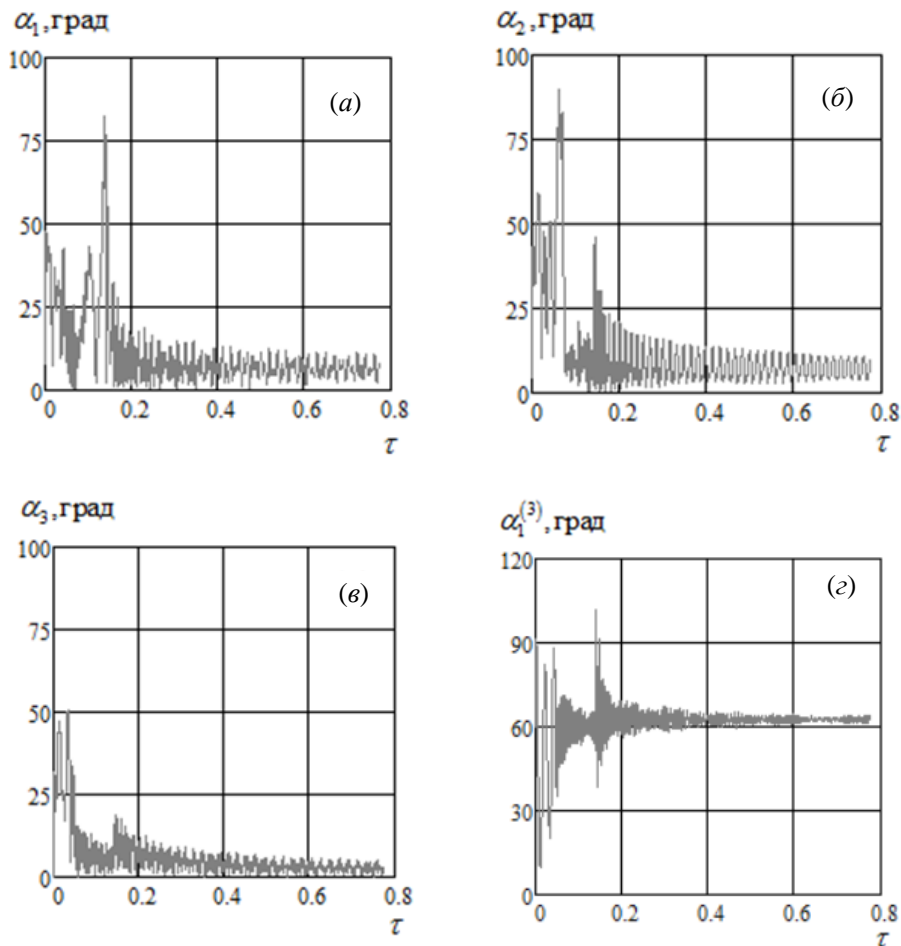


Рисунок 3.7 – Углы между продольными осями спутников и направлениями тросов

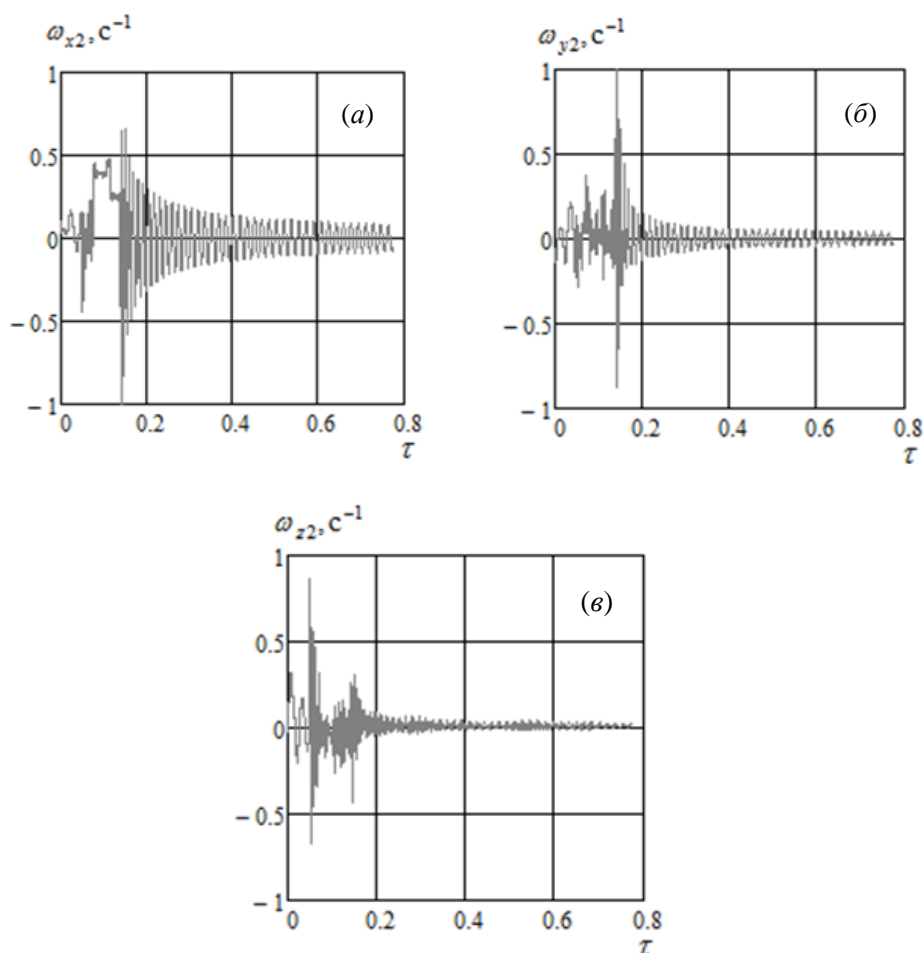


Рисунок 3.8 – Изменение угловых скоростей для спутника 2

Таким образом, наиболее существенное влияние на процесс развёртывания треугольной ТГКА оказывают возмущения в начальных условиях, обусловленные наличием статической асимметрии КА. И это не оказывает существенного влияния на дальнейшее движение тросовой группировки, которая в конце развёртывания имеет треугольную конфигурацию и вращается с постоянной угловой скоростью. Более того, наличие возмущений не приводит к неустойчивости углового движения спутников, колебания которых относительно направлений тросов ограничены.

### 3.4 Программы развёртывания треугольной ТГКА с учётом ограничения на управление

В данной разделе рассматривается задача управления движением треугольной ТГКА при наличии различных возмущений и с учётом

ограничения на управление. В предлагаемом подходе в отличие рассмотренного ранее управления по отклонениям от номинальной программы, управление осуществляется по конечному состоянию системы, то есть используется терминальное управление. Для построения терминального управления используется режим перемещения по поверхности скольжения. С одной стороны, наличие возмущений, как обсуждалось ранее, неизбежно и требует активного управления. С другой стороны, управление развёртыванием ТГКА с учётом контроля за силами натяжения и реактивными силами имеет свою особенность, которая заключается в том, что, во-первых, силы натяжения должны быть всегда положительными, а во-вторых, реактивные силы, создаваемые двигателями малой тяги (например, электрическими двигателями), ограничены по направлению, модулю и продолжительности действия. Исходя из этого, актуальной является задача разработки метода управления, учитывающего действие возмущений и удовлетворяющего ограничениям на управляющие силы.

#### 3.4.1 «Прямой» способ учёта ограничений на управление

Для разработки программы управления в этом случае введём обозначения  $x_1 = l_1$ ,  $x_2 = l_2$ ,  $x_3 = \theta_1$ ,  $x_4 = \theta_2$  и перепишем систему уравнений (2.10-2.13) в матричном виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U} + \mathbf{o}, \quad (3.31)$$

где  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T \in \mathfrak{R}^4$  – вектор состояний системы,  $\mathbf{o} = [o_1 \ o_2 \ o_3 \ o_4]^T$  – вектор возможных возмущений,  $\mathbf{U} = [u_1 \ \dots \ u_6]^T = [T_1 \ T_2 \ T_3 \ F_1 \ F_2 \ F_3]^T \in \mathfrak{R}^6$  – вектор управляющих сил.

Матрицы  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  и  $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$  имеют следующий вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4},$$

где  $A_{11} = m\mu_1(\mu_2 + \mu_3)$  ,  $A_{12} = m\mu_1\mu_3 \cos(x_3 - x_4)$  ,  $A_{13} = 0$  ,  
 $A_{14} = m\mu_1\mu_3 x_2 \sin(x_3 - x_4)$  ;  $A_{21} = m\mu_1\mu_3 \cos(x_3 - x_4)$  ,  $A_{22} = m\mu_3(\mu_1 + \mu_2)$  ,  
 $A_{23} = -m\mu_1\mu_3 x_1 \sin(x_3 - x_4)$  ,  $A_{24} = 0$  ;  $A_{31} = 0$  ,  $A_{32} = -m\mu_1\mu_3 x_1 \sin(x_3 - x_4)$  ,  
 $A_{33} = m\mu_1(\mu_2 + \mu_3)x_1^2$  ,  $A_{34} = m\mu_1\mu_3 x_1 x_2 \cos(x_3 - x_4)$  ;  $A_{41} = m\mu_1\mu_3 x_2 \sin(x_3 - x_4)$  ,  
 $A_{42} = 0$  ,  $A_{43} = m\mu_1\mu_3 x_1 x_2 \cos(x_3 - x_4)$  ,  $A_{44} = m\mu_3(\mu_1 + \mu_2)x_2^2$  ;

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = [B_{11} \quad B_{21} \quad B_{31} \quad B_{41}]^T,$$

где

$$B_{11} = m\mu_1(\mu_2 + \mu_3)x_1 \left[ (\dot{x}_3 + \omega)^2 + \omega^2(3\cos^2 x_3 - 1) \right] -$$

$$m\mu_1\mu_3 \left[ -x_2 \dot{x}_4 (\dot{x}_4 + 2\omega) \cos(x_3 - x_4) + 2\dot{x}_2 (\dot{x}_4 + \omega) \sin(x_3 - x_4) - 3\omega^2 x_2 \cos x_3 \cos x_4 \right];$$

$$B_{21} = m\mu_3(\mu_1 + \mu_2)x_2 \left[ (\dot{x}_4 + \omega)^2 + \omega^2(3\cos^2 x_4 - 1) \right] -$$

$$m\mu_1\mu_3 \left[ -x_1 \dot{x}_3 (\dot{x}_3 + 2\omega) \cos(x_3 - x_4) - 2\dot{x}_1 (\dot{x}_3 + \omega) \sin(x_3 - x_4) - 3\omega^2 x_1 \cos x_3 \cos x_4 \right];$$

$$B_{31} = -m\mu_1(\mu_2 + \mu_3)x_1^2 \left[ 2 \frac{\dot{x}_1}{x_1} (\dot{x}_3 + \omega) + 3\omega^2 \sin x_3 \cos x_3 \right] -$$

$$m\mu_1\mu_3 x_1 x_2 \left[ 3\omega^2 \sin x_3 \cos x_4 + 2 \frac{\dot{x}_2}{x_2} (\dot{x}_4 + \omega) \cos(x_3 - x_4) + (\dot{x}_4^2 + 2\dot{x}_4 \omega) \sin(x_3 - x_4) \right];$$

$$B_{41} = -m\mu_3(\mu_1 + \mu_2)x_2^2 \left[ 2 \frac{\dot{x}_2}{x_2} (\dot{x}_4 + \omega) + 3\omega^2 \sin x_4 \cos x_4 \right] -$$

$$m\mu_1\mu_3 x_1 x_2 \left[ 3\omega^2 \sin x_4 \cos x_3 + 2 \frac{\dot{x}_1}{x_1} (\dot{x}_3 + \omega) \cos(x_3 - x_4) - (\dot{x}_3^2 + 2\dot{x}_3 \omega) \sin(x_3 - x_4) \right];$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} & Q_{26} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} & Q_{36} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} & Q_{45} & Q_{46} \end{bmatrix}_{4 \times 6},$$

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= -1, \quad Q_{12} = 0, \quad Q_{13} = -[x_1 + x_2 \cos(x_3 - x_4)]/l_3, \quad Q_{14} = 0, \quad Q_{15} = \mu_1 \sin(x_4 - x_3), \\
Q_{16} &= -\mu_1 (x_2/l_3) \sin(x_4 - x_3); \quad Q_{21} = 0, \quad Q_{22} = -1, \quad Q_{23} = -[x_2 + x_1 \cos(x_3 - x_4)]/l_3, \\
Q_{24} &= \mu_3 \sin(x_4 - x_3), \quad Q_{25} = 0, \quad Q_{26} = (\mu_1 + \mu_2)(x_1/l_3) \sin(x_4 - x_3); \quad Q_{31} = 0, \quad Q_{32} = 0, \\
Q_{33} &= (x_1 x_2/l_3) \sin(x_3 - x_4), \quad Q_{34} = (\mu_2 + \mu_3)x_1, \quad Q_{35} = -\mu_1 l_1 \cos(x_4 - x_3), \\
Q_{36} &= \mu_1 (x_1/l_3)[x_1 + x_2 \cos(x_3 - x_4)]; \quad Q_{41} = 0, \quad Q_{42} = 0, \quad Q_{43} = -(x_1 x_2/l_3) \sin(x_3 - x_4), \\
Q_{44} &= \mu_3 x_2 \cos(x_4 - x_3), \quad Q_{45} = \mu_3 x_2, \quad Q_{46} = (\mu_1 + \mu_2)(x_2/l_3)[x_2 + x_1 \cos(x_4 - x_3)].
\end{aligned}$$

Далее, для краткости для матрицы  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  и  $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$  будем использовать более простые обозначения  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{Q}$ . Поскольку массовая матрица  $\mathbf{A}$  является невырожденной, то система (3.31) преобразуется к виду

$$\ddot{\mathbf{x}} = \Phi + \Psi \cdot \mathbf{U} + \delta, \quad (3.32)$$

где  $\Phi = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ ;  $\Psi = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$ ;  $\delta = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{o} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ .

Для разработки закона управления используется скользящий режим управления (СРУ) [90]. При этом необходимо задать желаемое состояние системы  $x_i^d, i = \overline{1, 4}$  в конечный момент времени, которое характеризуется размерами ТГКА (правильный треугольник) и величиной угловой скорости вращения системы относительно своего центра масс. Поэтому для того, чтобы привести систему в заданное состояние, во-первых, тросы должны быть развёрнуты полностью на заданную длину  $l_d$ , т.е.  $x_1^d = x_2^d = l_d$ ; во-вторых, сформированная тросовая группировка должна вращаться с заданной постоянной угловой скоростью  $\omega_d$ . В этом случае углы наклона тросов к местной вертикали по окончанию развёртывания системы будут изменяться линейно

$$x_3^d = \omega_d \cdot t + \theta_1(0), \quad x_4^d = \omega_d \cdot t + \theta_2(0),$$

где  $\theta_1(0), \theta_2(0)$  – начальные значения углов наклона тросов, причём  $\theta_1(0) - \theta_2(0) = -2\pi/3$ .

Таким образом, задача управления при формировании ТГКА состоит в том, чтобы  $x_i, i = \overline{1,4}$  стремились к конечному состоянию  $x_i^d$ , приведённому выше. Поверхность скольжения зададим с помощью отклонения состояния системы  $e_i = x_i - x_i^d$

$$s_i = c_i \cdot e_i + \dot{e}_i, \quad i = \overline{1,4}, \quad (3.33)$$

где коэффициенты поверхностей скольжения  $c_i > 0$ .

Программа управления предлагается следующая

$$\mathbf{U} = \Psi^{-1} \cdot (-\Phi - \mathbf{c} \cdot \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \text{sign } \mathbf{s}), \quad (3.34)$$

где  $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4]^T$ ;  $\mathbf{s} = [s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4]^T$ ;  $\mathbf{c} = \text{diag}\{c_1, \dots, c_4\}$ ;  $\mathbf{k} = \text{diag}\{k_1, \dots, k_4\}$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{diag}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4\}$ . Здесь  $\mathbf{c}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\varepsilon}$  – матрицы коэффициентов программы управления, причём их компоненты должны удовлетворять соотношениям:  $k_i > 0$ ,  $\varepsilon_i > \max(|\delta_i|)$ , где  $\delta_i$  –  $i$ -й элемент вектора-столбца  $\boldsymbol{\delta}$ , связанного с возмущениями.  $\text{sign}$  – знаковая функция, которая имеет вид

$$\text{sign } s_i = \begin{cases} 1, & \text{если } s_i > 0; \\ 0, & \text{если } s_i = 0; \\ -1, & \text{если } s_i < 0, \end{cases} \quad i = \overline{1,4}.$$

При анализе устойчивости движения системы используется теория Ляпунова. Для этого в качестве функции Ляпунова рассматриваются положительно определённые функции

$$V_i = \frac{1}{2} s_i^2, \quad i = \overline{1,4}, \quad (3.35)$$

производные которых примут вид

$$\begin{aligned}
\dot{V}_i &= s_i \cdot \dot{s}_i = s_i \cdot (c_i \dot{e}_i + \ddot{e}_i) = s_i \left[ c_i (\dot{x}_i - \dot{x}_i^d) + \ddot{x}_i \right] \\
&= s_i \left[ c_i (\dot{x}_i - \dot{x}_i^d) + \phi_i + \langle \Psi \cdot \mathbf{U} \rangle_i + \delta_i \right] \\
&= s_i \left[ c_i (\dot{x}_i - \dot{x}_i^d) + \phi_i + \langle \Psi \cdot \Psi^{-1} \cdot (-\Phi - \mathbf{c} \cdot \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \text{sign } \mathbf{s}) \rangle_i + \delta_i \right] \quad (3.36) \\
&= s_i (-k_i \cdot s_i - \varepsilon_i \cdot \text{sign } s_i + \delta_i) \\
&= -k_i s_i^2 - \varepsilon_i |s_i| + \delta_i s_i .
\end{aligned}$$

Поскольку  $\varepsilon_i > \max(|\delta_i|) = \max(|\mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{o}|)$ , то производные функции Ляпунова  $\dot{V}_i \leq -k_i s_i^2 \leq 0$  есть отрицательно определённые функции. Здесь  $\phi_i$  –  $i$ -й элемент вектора-столбца  $\Phi$ , а знак  $\langle \rangle_i$  также обозначает  $i$ -й элемент соответствующего вектора-столбца. Очевидно,  $\dot{V}_i = 0$  верно только тогда, когда конечное состояние системы достигнуто и  $\mathbf{s} = 0$ . Из этого следует асимптотическая устойчивость движения системы с использованием предлагаемой программы управления (3.34) при наличии вектора внешних возмущений  $\boldsymbol{o}$ .

Однако следует отметить, что после отделения спутников от друг друга имеет место  $l_i \ll l_i^d$ , что может привести к тому, что значения сил натяжения в соответствии с предлагаемой программой (3.34) будут отрицательны. Это неприемлемо, так как тросы не работают на сжатие с учётом их физических характеристик. Кроме того, реактивные силы не должны создавать моменты противоположного (по сравнению с направлением вращения системы) знака. С другой стороны, значение реактивных сил в реальных задачах ограничено. Другими словами, величины сил натяжения тросов и реактивных сил, а также направления действия реактивных сил, имеют ограничения. Таким образом, необходимо ввести поправки в предлагаемую программу управления с учётом рассматриваемых ограничений. Для этого можно поступить по-разному. Самый простой способ – это ограничить управляющие силы непосредственно допустимыми пределами их изменения, т.е. если  $u_j < u_j^{\min}$  или  $u_j > u_j^{\max}$ , то принимается  $u_j = u_j^{\min}$ ,  $u_j = u_j^{\max}$ , где  $u_j, j = \overline{1, 6}$  –  $j$ -й элемент вектора-столбца



управления  $U$ , а  $u_j^{\min}, u_j^{\max}$  – предельные значения управлений  $u_j$ . Более конкретно, если управляющие силы  $T_{1,2,3} < T_{\min}$ ,  $F_{1,2,3} > F_{\max}$  или моменты реактивных сил  $M(F_{1,2,3}) < 0$ , то полагается  $T_{1,2,3} = T_{\min}$ ,  $F_{1,2,3} = F_{\max}$  или  $F_{1,2,3} = 0$ , соответственно. В этом случае на начальном этапе развёртывания системы тросы выпускаются с минимально разрешённой силой натяжения  $T_{\min}$ , а затем (как только  $T_{1,2,3} > T_{\min}$ ) принимается программа (3.34). Аналогично поступают с ограничениями на реактивные силы, когда  $F_{1,2,3} \leq F_{\max}$  и  $M(F_{1,2,3}) \geq 0$ .

Таким образом, в данном случае программа управления с учётом ограничений фактически включает в себя несколько характерных участков: первый сравнительно небольшой участок – это начальный участок, когда управляющие силы принимают заданные граничные значения; и второй участок, когда силы натяжения и реактивные силы изменяются по программе (3.34). Однако следует отметить, что недостаток такого «прямого» способа внесения поправок в программу управления состоит в том, что в этом случае с теоретической точки зрения трудно доказать устойчивость движения системы с ограничениями, и такой подход может быть обоснован только с помощью численного моделирования.

#### 3.4.2 Разработка программы управления с использованием вспомогательной динамической системы

Одним из возможных способов улучшения программы (3.34) – это когда упомянутые выше ограничения напрямую учитываются при построении программы управления, что позволяет провести доказательство устойчивости движения системы. Предлагаемую модифицированную программу управления с учётом ограничений можно рассматривать как изменение программы (3.34), построенной с помощью поверхности скольжения (3.33). Основное различие между двумя подходами заключается в том, что поправки к управлениям вводятся в управляющую систему не непосредственно, а косвенным образом с помощью вспомогательной динамической системы

(ВДС), входом которой является разница между текущими программными значениями управлений  $u_j^n$  ( $j = \overline{1,6}$ ) и их заданными предельными значениями

$u_j = \text{sat}(u_j^n)$ , т.е.  $\Delta u_j = u_j - u_j^n = \text{sat}(u_j^n) - u_j^n$ , где функция насыщения  $\text{sat}(u_j^n)$

имеет вид

$$\text{sat}(u_j^n) = \begin{cases} u_j^{\max}, & u_j^n > u_j^{\max}; \\ u_j^n, & u_j^{\min} < u_j^n < u_j^{\max}; \\ u_j^{\min}, & u_j^n < u_j^{\min}; \end{cases} \quad j = \overline{1,6}. \quad (3.37)$$

Введём обозначения для вектора текущих управлений  $\mathbf{U}^n = [u_1^n \dots u_6^n]^T$ ,

и вектора отклонения управлений от соответствующих предельных значений

$\Delta \mathbf{U} = [\Delta u_1 \dots \Delta u_6]^T$ . Вспомогательная системы имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_{i,1} = -\xi_{i,1} \cdot \lambda_{i,1} + \lambda_{i,2}; \\ \dot{\lambda}_{i,2} = -\xi_{i,2} \cdot \lambda_{i,2} + \psi_{i,\text{row}} \cdot \Delta \mathbf{U}; \end{cases} \quad i = \overline{1,4}, \quad (3.38)$$

где  $\psi_{i,\text{row}}$  –  $i$ -я вектор-строка матрицы  $\Psi$ ,  $\xi_{i,1}, \xi_{i,2}$  – коэффициенты ВДС,

которые должны быть положительными. В этом случае матрица

коэффициентов системы уравнений (3.38)  $\begin{bmatrix} -\xi_{i,1} & 1 \\ 0 & -\xi_{i,2} \end{bmatrix}$  будет матрицей

Гурвица, и тогда при  $t \rightarrow \infty$  для решение ВДС имеем  $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2} \rightarrow 0$ .

Пусть  $\Lambda_1 = [\lambda_{1,1} \dots \lambda_{4,1}]^T$ ,  $\Lambda_2 = [\lambda_{1,2} \dots \lambda_{4,2}]^T$ . Тогда система (3.38)

перепишется в матричной форме

$$\begin{cases} \dot{\Lambda}_1 = -\xi_1 \cdot \Lambda_1 + \Lambda_2; \\ \dot{\Lambda}_2 = -\xi_2 \cdot \Lambda_2 + \Psi \cdot \Delta \mathbf{U}, \end{cases} \quad (3.39)$$

где  $\xi_1 = \text{diag}\{\xi_{1,1}, \dots, \xi_{4,1}\}$ ,  $\xi_2 = \text{diag}\{\xi_{1,2}, \dots, \xi_{4,2}\}$ .

На рисунке 3.9 показана схема системы управления с ВДС, построенная

с учётом рассматриваемых ограничений, где  $\mathbf{x}_d = [x_1^d \ x_2^d \ x_3^d \ x_4^d]^T$  – вектор

желаемого состояния системы.

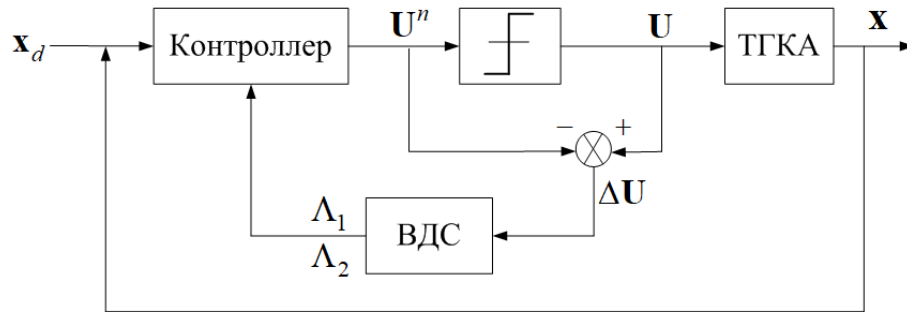


Рисунок 3.9 – Схема системы управления с вспомогательной динамической системой

В этом случае вектор ошибок определяется как  $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4]^T$ , где  $e_i = x_i - x_i^d - \lambda_{i,1}$ ,  $i = \overline{1,4}$ . С учётом (3.38) их производные по времени имеют вид  $\dot{e}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_i^d + \xi_{i,1} \cdot \lambda_{i,1} - \lambda_{i,2}$ . Определяя поверхность скольжения в виде (3.33)  $s_i = c_i \cdot e_i + \dot{e}_i$ , модифицированную программу управления зададим как

$$\mathbf{U}^n = \Psi^{-1} \cdot \left[ -\Phi - \mathbf{c} \cdot \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - \xi_1 (-\xi_1 \cdot \Lambda_1 + \Lambda_2) - \xi_2 \cdot \Lambda_2 - \varepsilon \cdot \text{signs} \right]. \quad (3.40)$$

Определим производные по времени для поверхности скольжения

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= c_i \cdot \dot{e}_i + \ddot{e}_i = c_i \cdot \dot{e}_i + (\ddot{x}_i - \ddot{x}_i^d - \ddot{\lambda}_{i,1}) = c_i \cdot \dot{e}_i + \ddot{x}_i + \xi_{i,1} \cdot \dot{\lambda}_{i,1} - \dot{\lambda}_{i,2} \\ &= c_i \cdot \dot{e}_i + \phi_i + \langle \Psi \cdot \mathbf{U} \rangle_i + \delta_i + \xi_{i,1} \cdot (-\xi_{i,1} \cdot \lambda_{i,1} + \lambda_{i,2}) + \xi_{i,2} \cdot \lambda_{i,2} - \psi_{i,\text{row}} \cdot \Delta \mathbf{U} \\ &= c_i \cdot \dot{e}_i + \phi_i + \delta_i + \langle \Psi \cdot (\mathbf{U} - \Delta \mathbf{U}) \rangle_i + \xi_{i,1} \cdot (-\xi_{i,1} \cdot \lambda_{i,1} + \lambda_{i,2}) + \xi_{i,2} \cdot \lambda_{i,2} \\ &= c_i \cdot \dot{e}_i + \phi_i + \delta_i + \langle \Psi \cdot \mathbf{U}^n \rangle_i + \xi_{i,2} \cdot (-\xi_{i,1} \cdot \lambda_{i,1} + \lambda_{i,2}) + \xi_{i,2} \cdot \lambda_{i,2} \\ &= -k_i \cdot s_i - \varepsilon_i \cdot \text{sign} s_i + \delta_i. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Таким образом, полные производные по времени от  $i$ -й функции Ляпунова (3.35) будут иметь вид

$$\dot{V}_i = s_i \cdot \dot{s}_i = s_i \cdot (-k_i \cdot s_i - \varepsilon_i \cdot \text{sign} s_i + \delta_i) \leq -k_i s_i^2 \leq 0. \quad (3.42)$$

Из (3.42) следует, что производные функции Ляпунова  $\dot{V}_i$  являются определённо отрицательными функциями. Исходя из этого, можно сделать вывод, что движение системы (3.32) с программой управления (3.40) и с условиями ограничений (3.37) асимптотически устойчиво. Необходимо

отметить, что при  $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2} \rightarrow 0$  и  $e \rightarrow 0, \dot{e} \rightarrow 0$  в конечный момент времени  $t_d$  обеспечивается приведение движения тросовой группировки в заданное состояние  $x_i \rightarrow x_i^d$  и  $\dot{x}_i \rightarrow \dot{x}_i^d$ , из чего следует выполнение целевой задачи с точки зрения управления. С другой стороны, как следует из структуры ВДС, записанной в виде (3.38), ограниченность отклонения управлений от предельных значений  $\Delta U$  является необходимым для выполнения условий  $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2} \rightarrow 0$ , что и обеспечивает желаемые свойства при применении предложенной программы управления.

### 3.4.3 Численное моделирование и его анализ

Для иллюстрации эффективности предлагаемых выше программ управления с учётом ограничений проводится численное моделирование процесса формирования треугольной ТГКА. При этом были приняты начальные данные, представленные в таблице 3.1. Желательно, чтобы в конечный момент времени ТГКА была сформирована в виде правильного треугольника и выполнялись следующие конечные условия:  $l_{1,2,3}^d = 500\text{ м}$ ,  $i_{1,2,3}^d = 0$ ,  $\theta_1^d = \theta_2^d = \omega_d = 0.05\text{ рад/с}$ .

При определении вектора внешних возмущений ( $\boldsymbol{o}$ ) в (3.31) обычно учитываются такие возмущения как гравитационные аномалии, аэродинамические силы, давление солнечного излучения и др. Суммарная амплитуда этих возмущений ограничены, в частности, для низкой околоземной орбиты, имеются оценки  $|\boldsymbol{o}| \leq 1 \times 10^{-5}$  [91]. Кроме того, из-за сложности построения модели с учётом рассматриваемой совокупности возмущений обычной практикой является приближённое представление внешних возмущений с помощью периодических функций. Поэтому в численных расчётах часто внешние возмущения описываются как  $o_1(t) = o_2(t) = 1 \times 10^{-5} \sin(100\omega t)\text{ Н}$ ,  $o_3(t) = o_4(t) = 1 \times 10^{-5} \sin(100\omega t)\text{ рад/с}^2$ , где  $\omega$  – орбитальная угловая скорость центра масс тросовой группировки.

При выборе коэффициентов программ управления (3.34) и (3.40), построенных методом скользящих режимов, необходимо учитывать следующее:

1) Слагаемое  $-\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}$  в программах управления придаёт системе свойство экспоненциальной устойчивости, так как из  $\dot{s}_i = -k_i s_i$  имеем решение  $s_i = s_i(0) \cdot e^{-k_i t}$ , что обеспечивает приближение траектории системы к поверхности скольжения со скоростью, зависящей от значения коэффициентов  $k_i$ .

2) Однако, если в программе управления учитывается только слагаемое  $-\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}$ , то сходимость траектории системы к поверхности скольжения за заданное конечное время не может быть гарантирована, что является недостатком закона экспоненциального сближения.

Поэтому предлагается ввести в программу управления дополнительное слагаемое  $-\varepsilon \cdot \text{sign } \mathbf{s}$ , где коэффициенты  $\varepsilon_i$  определяют скорость приближения системы к поверхности при  $s_i \rightarrow 0$ . Таким образом, когда траектория системы находится далеко от поверхности скольжения ( $s_i \neq 0$ ), то сближение с поверхностью обеспечивается членом  $-\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}$ , а после попадания траектории системы в окрестность поверхности скольжения слагаемое  $-\varepsilon \cdot \text{sign } \mathbf{s}$  позволяет достичь поверхности за заданное время.

3) Для уменьшения колебаний траектории состояния системы относительно поверхности  $s_i = 0$  на конечном этапе, традиционная знаковая функция  $\text{sign } s_i$  в программе управления была заменена функцией типа «насыщения»  $\sigma(s_i)$  (рисунок 3.10), которая имеет вид

$$\sigma(s_i) = \begin{cases} 1, & s_i > \eta; \\ \sigma \cdot s_i, & |s_i| \leq \eta; \quad i = \overline{1,4}, \\ -1, & s_i < -\eta; \end{cases}$$

где  $\sigma = 1/\eta$ , а коэффициент  $\eta > 0$  определяет отрезок  $[-\eta \quad \eta]$ , где используется линейный закон с обратной связью.

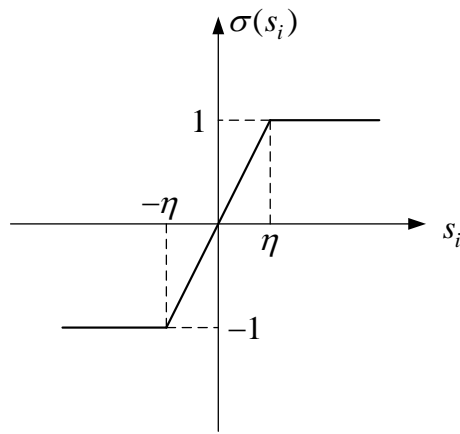


Рисунок 3.10 – Функция типа «насыщения»  $\sigma(s_i)$

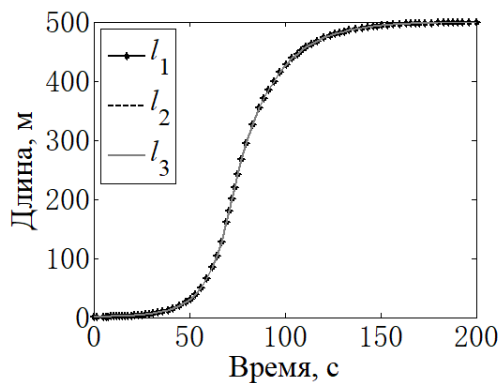
С учётом вышеизложенного были приняты значения коэффициентов программы управления (3.34), приведённые в таблице 3.5. Результаты численного моделирования по программе (3.34) с использованием математической модели (3.31) представлены на рисунке 3.11.

Таблица 3.5 – Коэффициенты программы управления (3.34)

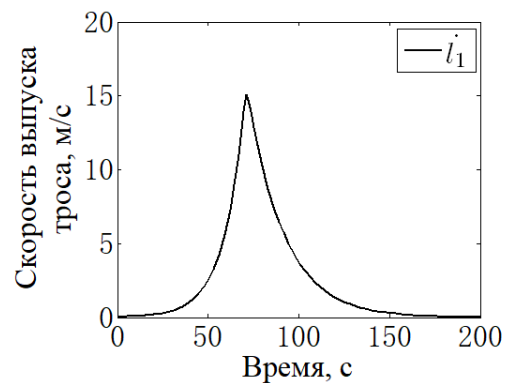
Параметры	Значение
Матрица коэффициентов $\mathbf{c} = \text{diag}\{c_1, \dots, c_4\}$	$\mathbf{c} = \text{diag}\{0.05, 0.05, 0.01, 0.01\}$
Матрица коэффициентов $\mathbf{k} = \text{diag}\{k_1, \dots, k_4\}$	$\mathbf{k} = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$
Матрица коэффициентов $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{diag}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4\}$	$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{diag}\{0.01, 0.01, 0.01, 0.01\}$
Параметр $\eta$	0.05
Минимальное значение силы натяжения $T_{\min}$ , Н	0.01
Максимум силы тяги $F_{\max}$ , Н	10

Из рисунка 3.11,*а* следует, что зависимости для длин тросов практически совпадают. В качестве примера на рисунке 3.11,*б* показана зависимость, характеризующая изменение скорости выпуска первого троса от времени. Процесс формирования треугольной тросовой группировки по программе (3.34) с учётом ограничений на управление подтверждает некоторые

особенности, которые согласуется с приведённым выше теоретическим анализом. Так на начальном участке ( $t \leq 5.2$  с) развёртывания ТГКА система движется таким образом, что управления принимают свои предельные значения  $T_{1,2,3} = 0.01$  Н (рисунок 3.11, *д*),  $F_{1,2,3} = 0$  (рисунок 3.11, *е*). При этом скорость выпуска тросов увеличивается, а угловая скорость вращения системы уменьшается до желаемого конечного значения  $\omega_d = 0.05$  рад/с (рисунок 3.11, *з*) за счёт увеличения момента инерции системы относительно центра масс. На следующем участке ( $5.2$  с  $< t < 69.6$  с) реактивные тяги начинают изменяться по закону управления (3.34), а силы натяжения тросов минимальны. После этого ( $t \geq 69.6$  с) имеется участок плавного торможения тросов и приведения тросовой группировки в заданное состояние, когда при  $t = 186$  с, имеем  $l_{1,2,3} \rightarrow l^d = 500$  м,  $\dot{l}_{1,2,3} \rightarrow 0$  и  $\dot{\theta}_{1,2} \rightarrow \omega_d$ . Во время формирования системы её конфигурация всегда представляет собой правильный треугольник и по окончании развёртывания тросов силы натяжения принимают постоянные значения ( $T_{1,2,3} = 4.3$  Н), так как система вращается с постоянной угловой скоростью ( $\omega_d = 0.05$  рад/с), причём реактивные силы стремятся к нулю. Следует отметить, что в связи с введением функции типа «насыщения»  $\sigma(s_i)$  в программу управления амплитуды колебаний системы относительно поверхности скольжения небольшие.



(а)



(б)

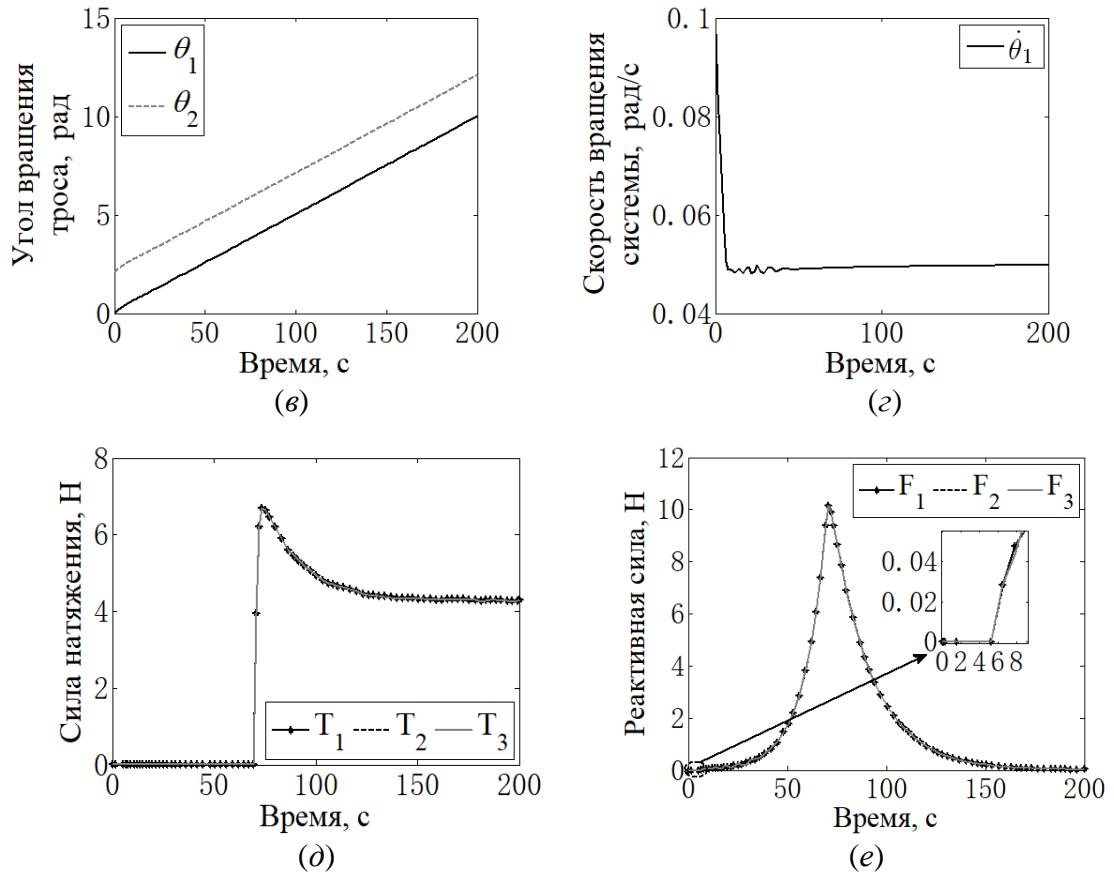


Рисунок 3.11 – Характерные зависимости для процесса развёртывания ТГКА по программе управления (3.34)

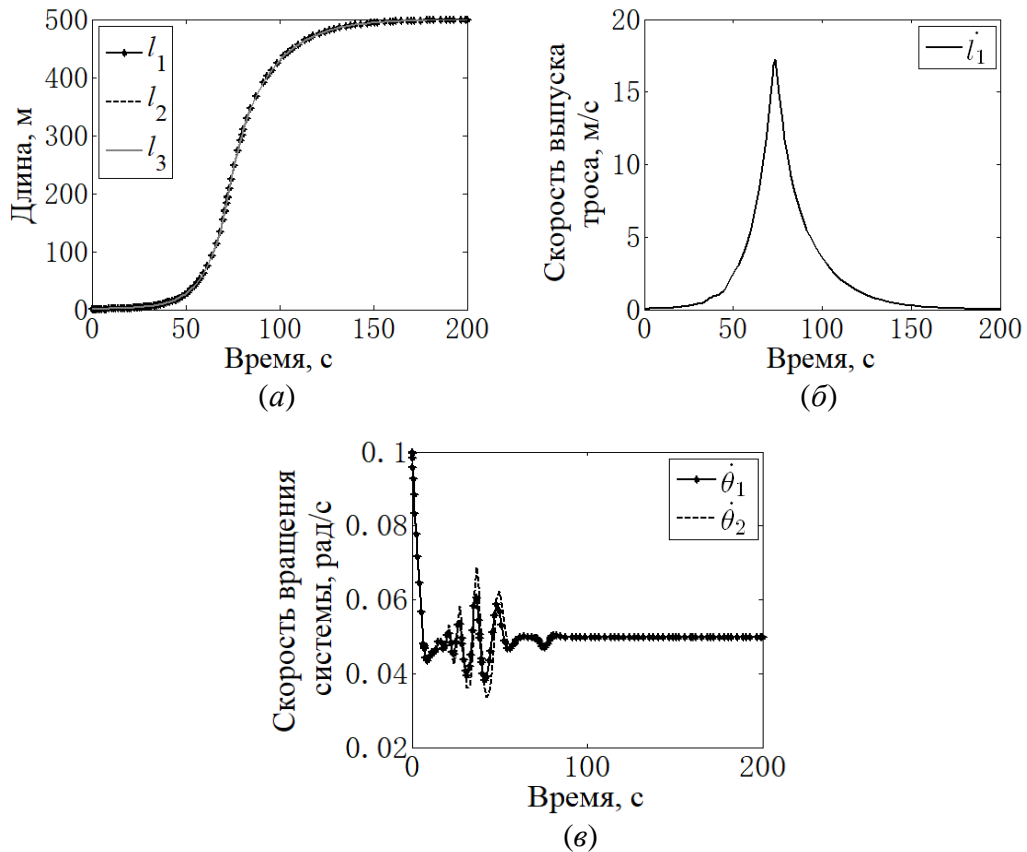
Далее проводится численное моделирование по программе управления (3.40) с ВДС (3.39) при тех же исходных данных, что и в таблице 3.1, и тех же коэффициентах программы управления, что и для программы (3.34), представленных в таблице 3.5. Поэтому здесь приведены только значения коэффициентов, характеризующих ВДС: коэффициенты  $\xi_{i,1} = \xi_{i,2} = 0.25$ ,  $i = \overline{1,4}$ ; и начальные значения для интегрирования ВДС  $\lambda_{i,1}(0) = \lambda_{i,2}(0) = 0$ . Результаты моделирования показаны на рисунке 3.12.

На рисунке 3.12 приводятся зависимости, характеризующие изменения от времени переменных треугольной тросовой группировки в процессе её формирования. Зависимости, характеризующие изменения длин тросов от времени (рисунке 3.12,а), практически согласуются с результатами, полученными с использованием программы (3.34), только максимальное значение скорости выпуска тросов больше (рисунке 3.12,б). В конечном итоге



сформированная тросовая группировка вращается с заданной угловой скоростью  $\omega_d = 0.05 \text{ рад/с}$  (рисунок 3.12,в).

В качестве примера на рисунке 3.12,г показано изменение управляющей силы натяжения  $u_1 (T_1)$  для первого троса и соответствующего текущего программного значения управления  $u_1^n$  без учёта ограничения. По мере выпуска троса, разность между  $u_1$  и  $u_1^n$  стремится к нулю:  $\Delta u_1 = u_1 - u_1^n \rightarrow 0$ . На рисунке 3.12,д показано сравнение управляющей реактивной силы  $u_4 (F_1)$ , приложенной к первому спутнику, и текущего значения реактивной силы  $u_4^n$ , определённой по программе (3.40). Из рисунке 3.12,д следует, что реактивная сила отличается от своего программного значения на начальном участке ( $t \leq 6.9 \text{ с}$ ), когда двигатель малой тяги не включает. Кроме того, на участке ( $71 \text{ с} \leq t \leq 79 \text{ с}$ ), когда тросы выпускаются с максимальной скоростью, значение реактивной силы ограничивается с помощью вспомогательной системы. Изменение управляющих сил от времени для тросов 2 и 3 аналогично и здесь не приводится.



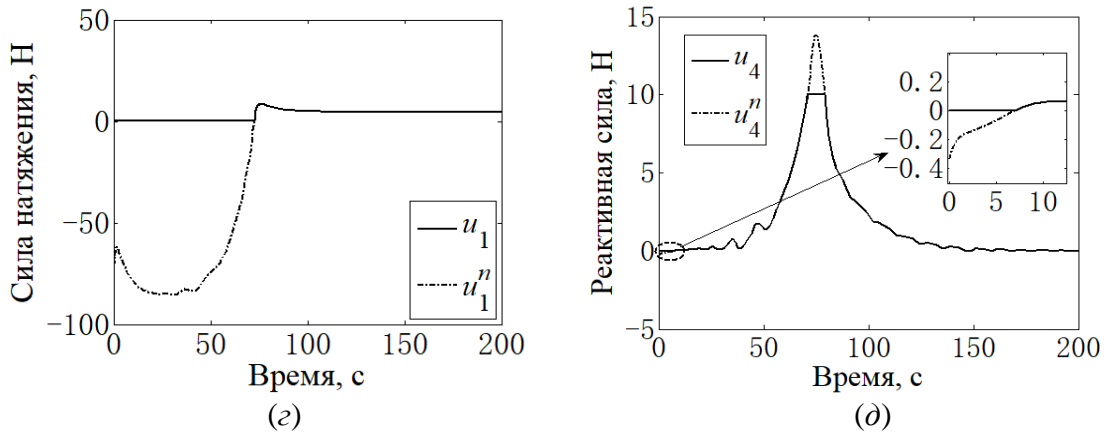


Рисунок 3.12 – Характерные зависимости для процесса развёртывания ТГКА по программе управления (3.40) с ВДС

Рисунок 3.13 иллюстрирует изменение решений для ВДС  $\lambda_{i,1}$  и  $\lambda_{i,2}$  от времени. Как следует из приведённых результатов, решения ВДС приближаются к нулю по окончании развёртывания ТГКА, что обеспечивает выполнение условия устойчивости конечного состояния как для самой ВДС, так и для всей системы в целом.

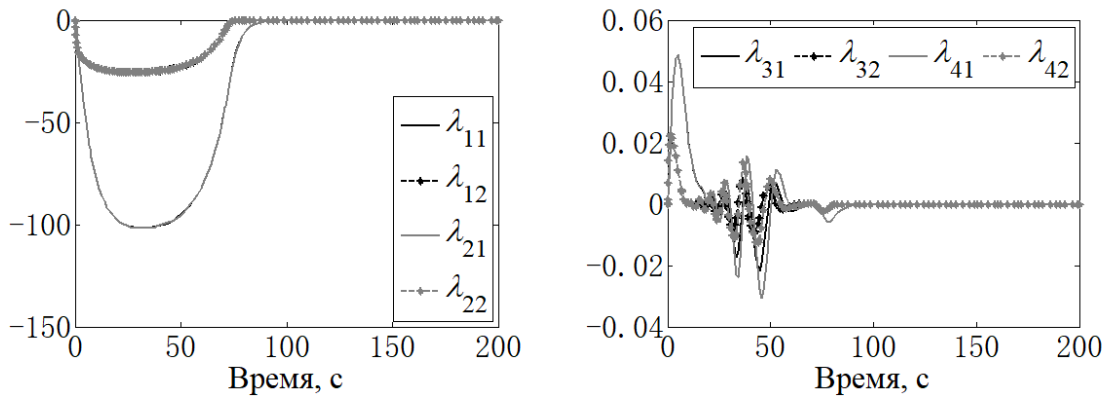


Рисунок 3.13 – Изменение переменных ВДС  $\lambda_{i,1}$  и  $\lambda_{i,2}$  от времени

### 3.5 Основные результаты и выводы по третьей главе

1. Получены аналитические выражения для необходимой (критической) угловой скорости вращения треугольной ТГКА для сохранения её геометрической конфигурации для двух случаев: 1) направление вращения системы совпадает с направлением орбитального движения её центра масс; 2)

направление вращения системы противоположно направлению орбитального движения.

2. Разработана номинальная программа управления для формирования треугольной ТГКА, отличительной особенностью которой является простой релейный закон изменения сил двигателей малой тяги (3.20).

3. Найдено аналитическое решение уравнений движения треугольной ТГКА при её развёртывании при использовании номинальной программы, когда ТГКА представляет собой правильный треугольник, после выключения реактивных двигателей. Показано, что в этом случае при соответствующим выборе коэффициентов номинальной программы решение системы уравнений асимптотически приближается к своему конечному состоянию, когда вся система вращается с некоторой постоянной угловой скорости. Конечная угловая скорость вращения ТГКА регулируется с помощью изменения момента выключения двигателей.

4. Проведена проверка реализуемости разработанной релейной номинальной программы управления при формировании ТГКА в виде правильного треугольника с помощью модели движения ТГКА, записанной в геоцентрической неподвижной системе координат. Показано, что несмотря на действие сложной совокупности возмущений, система стабилизации движения ТГКА, основанная только на контроле длины и скорости выпуска тросов, успешно обеспечивает приемлемое качество регулирования, то есть переводит систему в заданное состояние. Учитываются следующие возмущения: растяжимость тросов, односторонность механических связей (тросы не воспринимают сжимающих усилий и провисают), ошибки в момент разделения КА, статическая и динамическая асимметрии КА как твёрдых тел, угловое движение КА относительно своих центров масс, влияющее на направления действия реактивных сил и др.

5. На основе скользящего режима построена терминальная программа развёртывания треугольной ТГКА (одновременное регулирование сил натяжения тросов и реактивных сил), которая уже на этапе проектирования

процесса формирования системы позволяет учесть заданные ограничения на управления и возможные действующие возмущения. Показано, что использование в контуре управления так называемой вспомогательной динамической системы позволяет избежать выхода управлений на свои предельные значения. Предложенный метод управления обосновывается с помощью второго метода Ляпунова.

## 4 РАЗРАБОТКА ПРОГРАММ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ТГКА КОНФИГУРАЦИИ «СТУПИЦА-СПИЦЫ»

В этой главе разрабатывается метод управления движением конфигурации «ступица-спицы» при её формировании. В своём конечном состоянии система вращается с некоторой постоянной скоростью и состоит из центрального КА (ступицы) и двух периферийных КА, расположенных на концах тросов (спиц).

Для проведения анализа динамики и построения законов управления движением тросовой группировки в данной главе используется математическая модель (2.27-2.29), при построении которой учитывается движение центрального КА относительно центра масс как твёрдого тела.

### 4.1 Анализ динамики ТГКА «ступица-спицы» при её вращении вокруг центра масс

Для того, чтобы проанализировать характеристики движения рассматриваемой системы в плоскости орбиты, перепишем уравнения (2.27-2.29) в случае  $\dot{\alpha}_i = \text{const} = N \cdot \Omega$ ,  $l_i = l_d$ ,  $i = 1, 2$ , т.е. когда тросовая группировка полностью развёрнута и длины двух тросов фиксированы, причём система вращается с постоянной угловой скоростью, в  $N$  раз большей орбитальной скорости центра масс системы ( $\Omega$ )

$$\ddot{\theta}_i - 2 \frac{\dot{l}_i}{l_d} (N\Omega - \dot{\theta}_i + \Omega) + \frac{r_c}{l_d} (N^2 + 2N) \Omega^2 \sin \theta_i + d_{\theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.1)$$

где  $d_{\theta_i} = -3\Omega^2 \left[ \cos(\alpha_i - \theta_i) \sin(\alpha_i - \theta_i) + r_c \cos \alpha_i \sin(\alpha_i - \theta_i) / l_d \right]$  представляют собой периодические гравитационные возмущения, вызванные вращением центрального КА вокруг центра масс. Отметим, что при построении уравнения (4.1) учитывалось, что правая часть уравнения (2.28) обращается в ноль в случае, когда внешние и управляющие силы отсутствуют.

Для удобства анализа используется безразмерное время  $\tau = \Omega t$

$$\theta_i'' - 2 \frac{l_i'}{l_d} (N - \theta_i' + 1) + \frac{r_C}{l_d} (N^2 + 2N) \sin \theta_i + \tilde{d}_{\theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.2)$$

где  $(\quad)' = d(\quad)/d\tau$ , при этом безразмерные периодические возмущения имеют вид  $\tilde{d}_{\theta_i} = -3 \left[ \cos(\alpha_i - \theta_i) \sin(\alpha_i - \theta_i) + r_C \cos \alpha_i \sin(\alpha_i - \theta_i) / l_d \right]$ .

Если  $l_i' = 0$ , и не рассматривается влияние периодических возмущений  $\tilde{d}_{\theta_i}$ , то уравнение (4.2) принимает простой вид

$$\theta_i'' + C_N \sin \theta_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.3)$$

где  $C_N = \frac{r_C}{l_d} (N^2 + 2N)$ .

Уравнение (4.3) является нелинейным и описывает движение классического маятника, который имеет устойчивые и неустойчивые положения равновесия:  $\pm 2k\pi$  и  $\pm(2k+1)\pi$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . В качестве примера на рисунке 4.1 приводится фазовый портрет  $(\theta, \theta')$  при  $r_C = 1\text{м}$ ,  $l_d = 100\text{м}$ ,  $N = 50$ , которая характеризуется тем, что в окрестности центров  $(\pm 2k\pi)$  существуют либрационные движения системы (замкнутые траектории). С увеличением энергии траектории системы приближаются к сепаратрисам, проходящим через точки неустойчивого равновесия, и существует риск запутывания тросов. С учётом того, что величина угла  $\theta$  не должна превышать  $\pi/2$ , единственное устойчивое равновесие для движения ТГКА «ступица-спицы» – это центр  $(0, 0)$ .

Безразмерный гамильтониан системы (4.3) определяется как

$$H = \frac{1}{2} \theta'^2 - C_N \cos \theta. \quad (4.4)$$

В уравнении (4.4) индекс  $i$  опущен для краткости. Поскольку в системе (4.3) отсутствует возмущение, связанное с вращением центрального КА, то значение гамильтониана (4.4) сохраняется. В противном случае ( $\tilde{d}_{\theta_i} \neq 0$ ) гамильтониан будет меняться периодически, что следует из выражения

$$H = \frac{1}{2}\theta'^2 - C_N \cos \theta + \frac{3}{4} \cos(2\alpha - 2\theta) + C_r \cos \alpha \cos(\alpha - \theta), \quad (4.5)$$

где  $C_r = r_c/l_d$ .

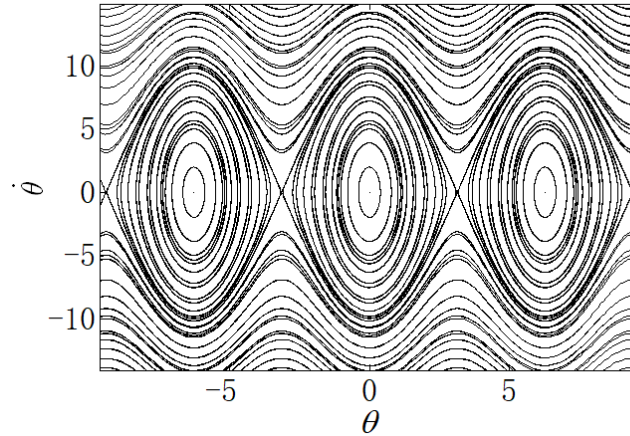


Рисунок 4.1 – Фазовый портрет системы при отсутствии периодических возмущений

Если по окончании развёртывания тросов имеется  $l'_i \neq 0$ , то произойдёт качественное изменение фазового портрета системы. Рисунок 4.2 иллюстрирует такое изменение, когда параметр  $l'_i$  задаётся как 1, 5, 10, 20, соответственно. Из рисунка 4.2 следует, что при увеличении параметра  $l'_i$  область существования периодических решений системы постепенно уменьшается, пока не исчезнет, а это означает, что существует критическое значение параметра  $l'_i$ , являющееся точкой бифуркации, при которой система становится структурно неустойчивой.

В общем случае (при  $l'_i \neq 0$  и  $\tilde{d}_{\theta_i} \neq 0$ ) из-за совместного действия указанных возмущений устойчивое движение системы с точки зрения сохранения её геометрической конфигурации не гарантируется. Поэтому необходимо разработать закон активного управления движением системы, обеспечивающий её устойчивое движение.

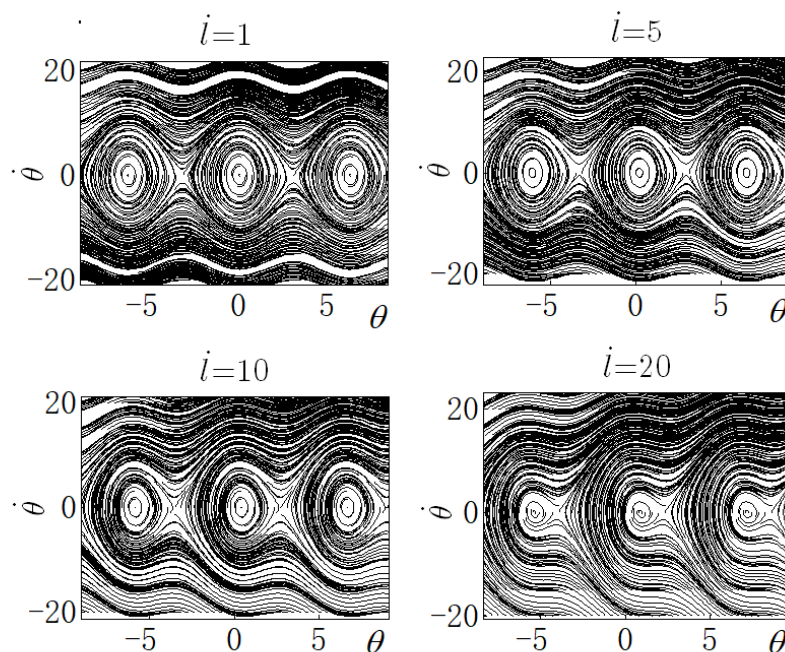


Рисунок 4.2 – Фазовые портреты системы при  $l'_i \neq 0$

## 4.2 Оптимальное управление развёртыванием ТГКА «ступица-спицы»

В этом разделе разрабатывается управление, обеспечивающее развёртывание вращающейся ТГКА «ступица-спицы», схема которой представлена на рисунке 2.5.

### 4.2.1 Постановка задачи

Предполагается, что развёртывание ТГКА конфигурации «ступица-спицы» начинается из начального симметричного состояния, когда два спутники жёстко связаны с центральном КА, и вся система вращается в плоскости орбиты вокруг своей оси симметрии с некоторой начальной угловой скоростью. При выпуске тросов необходимо стабилизировать вращательное движение ТГКА, размер которой растёт по мере её развёртывания. Это может быть достигнуто с помощью управляющего крутящего момента  $M_c$ , приложенного к центральному КА. Кроме того, при развёртывании тросов необходимо исключить их касание друг с другом и наматывание тросов на



центральное тело. Для этого в качестве управлений используются силы натяжения тросов  $\mathbf{T}_i, i=1,2$  и реактивные силы  $\mathbf{F}_i, i=1,2$ , приложенные к концевым КА и направленные ортогонально тросам.

Таким образом, управление движением рассматриваемой системы будет осуществляться исходя из следующих принципов: 1) стабилизация угловой скорости центрального КА, при этом движение тросов рассматривается как возмущение; 2) разработка оптимального управления с использованием сил натяжения и реактивных сил малой тяги, при этом предполагается, что вращение центрального КА осуществляется с постоянной угловой скоростью. После построения алгоритмов управления реализуемость предлагаемой схемы развёртывания системы будет проверена с помощью системы нелинейных уравнений (2.27-2.29), учитывающей взаимосвязь между вращением центрального КА и движением тросов.

Прежде чем разрабатывать закон управления для обеспечения успешного формирования желаемой конфигурации ТГКА на орбите, сначала надо уточнить состояния системы в конечной момент времени  $t_d$ . Другими словами, по окончании развёртывания тросов движение рассматриваемой ТГКА должно удовлетворить следующим условиям

$$\ddot{\alpha}(t_d) = 0, \dot{\alpha}(t_d) = \dot{\alpha}(t_0) = \omega_\alpha = \text{const},$$

$$\dot{\theta}_i(t_d) = 0, |\theta_i(t_d)| = \theta_d = \text{const} < \pi/2, \ddot{l}_i(t_d) = \dot{l}_i(t_d) = 0 \text{ и } l_i(t_d) = l_d,$$

где  $i=1,2$ ;  $\omega_\alpha$  – заданная угловая скорость вращения системы,  $\theta_d, l_d$  – конечные значения угла наклона и длины тросов.

#### 4.2.2 Определение оптимального управления с использованием принципа динамического программирования Беллмана

Управляющий крутящий момент, приложенный к центральному КА, задаётся в соответствии с принципом обратной связи [76]\*

$$M_c = r_c k_\omega (\dot{\alpha} - \omega_\alpha) + k_\alpha (\alpha - \omega_\alpha \cdot t), \quad (4.6)$$

где  $k_\omega$  и  $k_\alpha$  – коэффициенты обратной связи,  $t$  – время.

Как показывает проведённый ранее анализ, влияние периодических возмущений на движение системы вблизи устойчивого положения равновесия  $(0,0)$  незначительно, поэтому при определении оптимального управления они не учитываются.

Подставляя конечные условия движения (в момент времени  $t_d$ ) в уравнения (2.27-2.29), получим номинальные значения силы натяжения и реактивной силы в конечный момент времени

$$F_{\text{ном}} = 0, T_{\text{ном}} = m_i(l_d + r_c)(\omega_\alpha^2 + 2\Omega\omega_\alpha), i = 1, 2. \quad (4.7)$$

Реализуемый ниже метод управления, основанный на принципе Беллмана, фактически является терминальным, то есть управление осуществляется по конечному состоянию системы (4.7).

Так как уравнения (2.28-2.29), описывающие движение тросов при формировании конфигурации, имеют одинаковый вид для каждого троса, то индекс  $i$  далее для краткости опускается. Введём обозначение  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\theta, \dot{\theta}, l, \dot{l}]^T$  для вектора состояния системы. Тогда уравнения (2.28-2.29) перепишутся как

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= 2\frac{x_4}{x_3}(\omega_\alpha - x_2 + \Omega) - \frac{r_c}{x_3} \sin x_1 (\omega_\alpha^2 + 2\Omega\omega_\alpha) - \frac{F}{mx_3}, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= x_3 \left[ (\omega_\alpha - x_2 + \Omega)^2 - \Omega^2 \right] + r_c \cos x_1 (\omega_\alpha^2 + 2\Omega\omega_\alpha) - \frac{T}{m}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Уравнения (4.8) могут быть записаны в общем виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)), \quad (4.9)$$

где  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = [F, T]^T$  – функция управления.

Проведём линеаризацию системы относительно конечного состояния

$\mathbf{x}_d = [0, 0, l_d, 0]^T$ , тогда

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}, \quad (4.10)$$

где  $\mathbf{y} = \Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$  – отклонение вектора состояния системы,  $\Delta\mathbf{u} = [\Delta F, \Delta T]^T$  – приращение управления относительно номинальных значений. Матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/(my_3) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1/m \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

где компоненты матрицы  $\mathbf{A}$  определяются выражениями  $A_{2j} = \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{x})}{\partial x_j}$  и

$$A_{4j} = \frac{\partial \mathbf{f}_4(\mathbf{x})}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, 4}.$$

Задача оптимального управления линеаризованной системой может быть решена с использованием принципа динамического программирования Беллмана [92]. Критерий оптимальности задаётся квадратичным

$$K = \int_0^{t_d} (y^T \chi y + \varepsilon \Delta\mathbf{u}^2), \quad (4.12)$$

где квадратная матрица  $\chi$  является положительно определённой, а весовой коэффициент  $\varepsilon$  – некоторая положительная константа.

Для решения задачи используется принцип Беллмана, который для линейной системы (4.10) и критерия (4.12) сводится к условию

$$\min_u \left[ y^T \chi y + \varepsilon \Delta\mathbf{u}^2 + \frac{\partial v(y)}{\partial y} (\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}) \right] = 0, \quad (4.13)$$

где  $v(y) = y^T \mathbf{P}y$  – функция Беллмана. Здесь матрица  $\mathbf{P}$  должна быть положительно определённой.

Оптимальное управление определяется в виде

$$\Delta \mathbf{u} = -\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{y} = -\mathbf{K} \mathbf{y}, \quad (4.14)$$

где  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{bmatrix}$  – матрица коэффициентов оптимального регулятора.

Подставляя выражение  $\Delta \mathbf{u}$  в условие Беллмана (4.13), получим

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \chi = 0. \quad (4.15)$$

В этом случае определение оптимального управления для линейной системы (4.10) осуществляется следующим образом: 1) из уравнения (4.15) (по сути, матричного уравнения Риккати) находится положительно определённая матрица  $\mathbf{P}$ ; 2) матрица  $\mathbf{P}$  подставляется в выражение (4.14) и определяется оптимальное управление  $\Delta \mathbf{u}$ . Таким образом, полная функция управления имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{ном}} + \Delta \mathbf{u}, \quad (4.16)$$

где  $\mathbf{u}_{\text{ном}} = [F_{\text{ном}}, T_{\text{ном}}]^T$ , тогда

$$\begin{aligned} F &= F_{\text{ном}} + k_{11}(\theta - \theta_d) + k_{12}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) + k_{13}(l - l_d) + k_{14}(\dot{l} - \dot{l}_d); \\ T &= T_{\text{ном}} + k_{21}(\theta - \theta_d) + k_{22}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) + k_{23}(l - l_d) + k_{24}(\dot{l} - \dot{l}_d). \end{aligned}$$

Кроме того, учитывая ограничения на силу натяжения троса, имеем

$$T = \begin{cases} T_{\text{ном}} + \Delta T^*, & \text{если } T_{\text{ном}} + \Delta T^* > T_{\text{мин}} \\ T_{\text{мин}} & , \text{ если } T_{\text{ном}} + \Delta T^* \leq T_{\text{мин}} \end{cases}, \quad (4.17)$$

где  $T_{\text{мин}}$  – минимальное значение силы натяжения троса.

#### 4.2.3 Численное моделирование и его анализ

С использованием математической модели рассматриваемой трёх-тельной системы «ступица-спицы» (рисунок 2.5) с применением подученного

выше оптимального управления проводится численное моделирование и анализируются полученные результаты. Исходные данные для моделирования представлены в таблице 4.1. Начальные условия движения системы задаются как:  $\alpha_1(0) = 0$ ,  $\alpha_2(0) = \pi$ ,  $\dot{\alpha}_i(0) = 50 \cdot \Omega$ ,  $\theta_i(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}_i(0) = 0$ ,  $l_i(0) = 1\text{м}$ ,  $\dot{l}_i(0) = 0.1\text{м/с}$ . Характеристики конечного состояния системы:  $\dot{\alpha}_i(t_d) = 50 \cdot \Omega$ ,  $\theta_i(t_d) = \dot{\theta}_i(t_d) = 0$ ,  $l_i(t_d) = 100\text{м}$ ,  $\dot{l}_i(t_d) = 0$ .

Таблица 4.1 – Исходные данные для моделирования

Параметры	Значение
Высота орбиты центра масс системы, км	500
Масса центрального КА, кг	1000
Радиус центрального КА $r_c$ , м	1
Длина центрального КА $h_c$ , м	1
Масса двух микроспутников $m_i, i = 1, 2$ , кг	10

Крутящий момент, приложенный к центральному КА, задаётся при  $k_\omega = 2500$  и  $k_\alpha = 1$ . Матрица  $\chi$  в критерии оптимальности –  $\chi = \text{diag}(100, 100, 0.1, 10)$ , весовой коэффициент –  $\varepsilon = \text{diag}(1, 0.25)$ . В соответствии с принципом Беллмана матрица коэффициентов оптимального управления  $\mathbf{K}$  вычисляется как

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -9.5900 & -146.6457 & 0.0862 & 0.1270 \\ -5.4480 & 50.8030 & -0.6412 & -7.1841 \end{bmatrix}.$$

Зависимости, характеризующие изменение состояния системы от времени в процессе формирования рассматриваемой тросовой группировки, показаны на рисунках 4.3-4.4. Поскольку начальная конфигурация ТГКА перед её развёртыванием симметрична как с точки зрения массовых характеристик, так и с геометрической точки зрения, изменение переменных для тросов 1 и 2 практически совпадают, поэтому на рисунках 4.3-4.4 приводятся зависимости только для одного троса. Из приведённых

результатов следует, что имеет место стабилизация вращательного движения центрального КА, описываемого углом  $\alpha$ . Угловая скорость  $\dot{\alpha}$  в самом начале уменьшается за счёт влияния выпуска тросов, а в конце развёртывания системы постепенно приближается к заданному значению, равному её начальной величине ( $\omega_\alpha = 50 \cdot \Omega \approx 0.055 \text{ рад/с}$ ). По окончании развёртывания системы угол либрации троса и его длина соответствуют желаемым конечным условиям:  $\theta_d = \dot{\theta}_d = 0$ ,  $l_d = 100 \text{ м}$  и  $\dot{l}_d = 0$ . В процессе формирования ТГКА скорость выпуска троса всегда больше нуля, что соответствует характеристикам управляющих механизмов, которые работают только на торможение тросов. Кроме того, максимальное значение угла либрации троса при развёртывании составляет  $0.65 \text{ рад} < \pi/2$ , что позволяет избежать наматывания тросов на корпус центрального КА и обеспечивает безопасность процесса развёртывания.

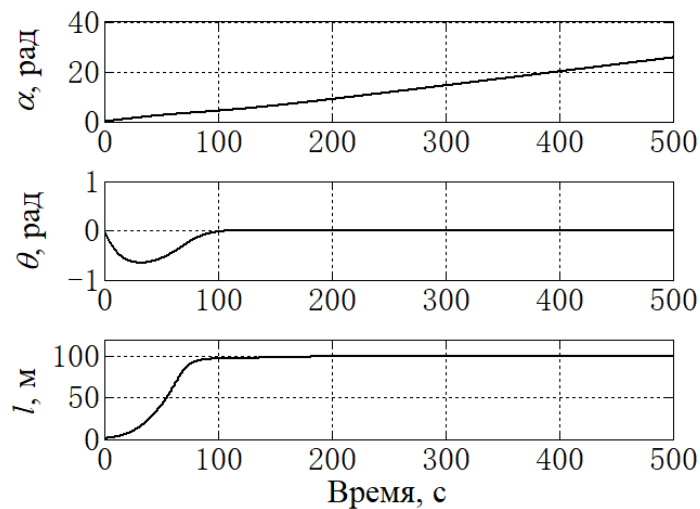


Рисунок 4.3 – Изменение переменных состояния системы от времени

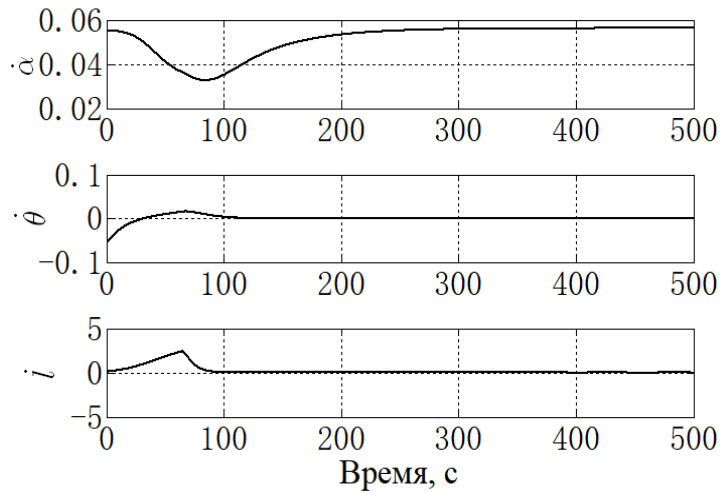


Рисунок 4.4 – Изменение скоростей изменения переменных системы от времени

Управляющий момент, действующий на центральный КА, и управляющие силы (реактивная сила и сила натяжения) показаны на рисунке 4.5. Управляющий момент и реактивная сила в конечный момент времени приближаются к нулю, в то время как сила натяжения троса стремится к постоянной величине (3.3Н), которая равна её номинальному значению  $T_{\text{ном}}$ . Здесь стоит отметить, что функции, соответствующие управляющему моменту и управляющим силам немного колеблются после окончания развёртывания системы, что связано с действиями периодических возмущений в модели (2.27-2.29).

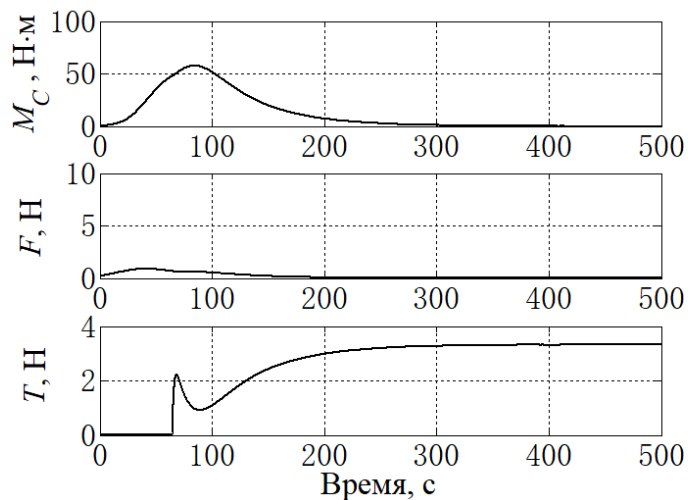


Рисунок 4.5 – Изменение управляющих воздействий от времени

### 4.3 Разработка метода робастного управления движением ТГКА «ступица-спицы» при её формировании

В этом разделе рассматривается более сложный случай управления при развёртывании ТГКА «ступица-спицы». Этот случай отличается тем, что на этапе построения управления учитывается влияние на движение системы внешних периодических возмущений. Учёт возмущений, связанных с массово-инерционной асимметрией системы и вызванных ошибками в начальном состоянии системы, естественно, усложняют решение задачи управления движением рассматриваемой ТГКА. Как показывает анализ, при наличии возмущений построенное выше линейное оптимальное управление не всегда справляется с поставленной задачей. Поэтому для более общего случая актуальной является разработка надёжного регулятора или контроллера, нечувствительного к действию различных помех.

#### 4.3.1 Программа управления выпуском тросов и анализ устойчивости работы системы управления

Предполагается, что закон изменения управляющего момента  $M_C$  задаётся такой же, как ранее (4.6), что обеспечивает вращение центрального КА с почти постоянной угловой скоростью  $\dot{\alpha} \approx \omega_\alpha = \text{const}$ ,  $\ddot{\alpha} \approx 0$ . Тогда уравнения (2.28-2.29), описывающие процесс развёртывания тросов, принимают вид

$$\ddot{\theta}_i - 2\dot{l}_i(\omega_\alpha - \dot{\theta}_i + \Omega)/l_i + r_c \sin \theta_i (\omega_\alpha^2 + 2\Omega\omega_\alpha)/l_i + d_{\theta_i} = -F_i/m_i l_i, \quad (4.18)$$

$$\ddot{l}_i - l_i \left[ (\omega_\alpha - \dot{\theta}_i + \Omega)^2 - \Omega^2 \right] - r_c \cos \theta_i (\omega_\alpha^2 + 2\Omega\omega_\alpha) + d_{l_i} = -T_i/m_i, \quad (4.19)$$

где

$$d_{\theta_i} = -d_0 \left[ \cos(\omega_\alpha t - \theta_i) \sin(\omega_\alpha t - \theta_i) + r_c \cos \alpha_i \sin(\omega_\alpha t - \theta_i)/l_i \right],$$

$$d_{l_i} = -d_0 \left[ l_i \cos^2(\omega_\alpha t - \theta_i) + r_c \cos(\omega_\alpha t) \cos(\omega_\alpha t - \theta_i) \right].$$



Здесь  $d_0 = 3\Omega^2$ .

Программа управления выпуском тросов использует режим управления по поверхности скольжения и принцип робастного управления. При разработке программы управления применяются упрощённые уравнения (4.18-4.19), а для проверки эффективности всей схемы управления, структура которой представлена на рисунке 4.6, используется полная модель, т.е. система уравнений (2.27-2.29).

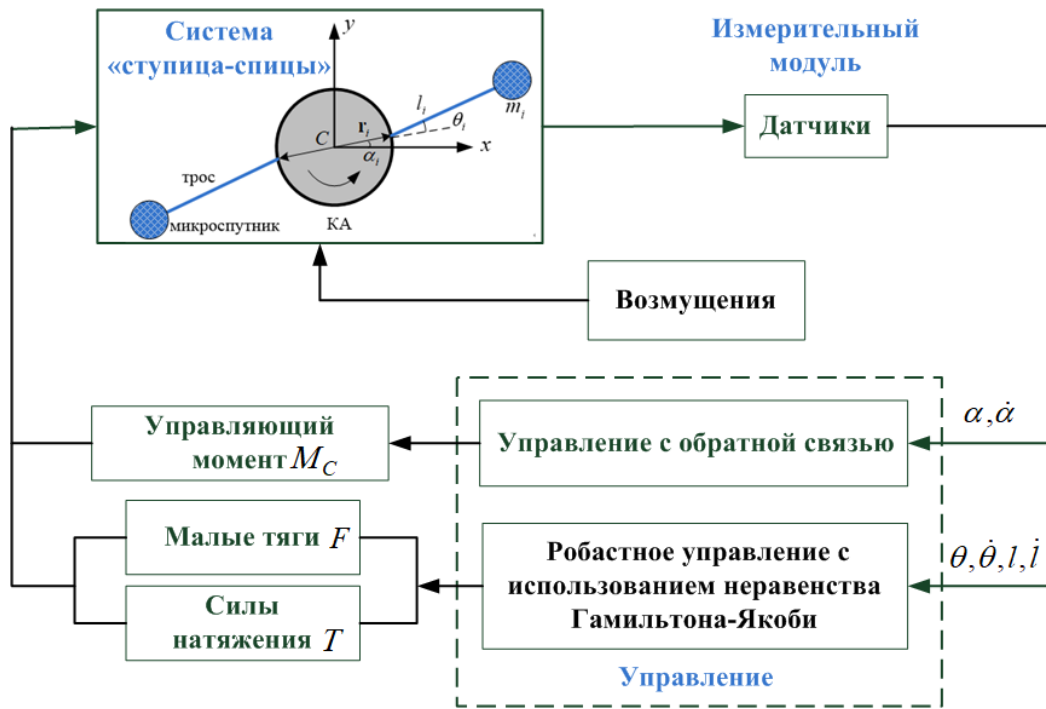


Рисунок 4.6 – Принципиальная схема системы управления

Опуская индекс  $i$  в уравнениях (4.18-4.19) (поскольку эти уравнения одинаковы для двух тросов), введём вектор состояний системы  $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]^T = [\theta \quad l]^T$ , тогда уравнения (4.18-4.19) переписутся в виде

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{V}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathbf{d}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}(\mathbf{x})\mathbf{U}, \quad (4.20)$$

$$\text{где } \mathbf{V}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 2\dot{l}/l & -2(\omega_\alpha + \Omega)/l \\ -l(\dot{\theta} - 2\omega_\alpha - 2\Omega) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} r_c \sin \theta (\omega_\alpha^2 + 2\Omega\omega_\alpha)/l \\ -(l + r_c \cos \theta)(\omega_\alpha^2 + 2\Omega\omega_\alpha) \end{bmatrix},$$

$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = [d_\theta + \Delta_\theta \quad d_l + \Delta_l]^T$ , здесь  $\Delta = [\Delta_\theta \quad \Delta_l]^T$  – вектор внешних возмущений,

$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \text{diag}(-1/ml, -1/m)$ ,  $\mathbf{U} = [F \quad T]^T$  – вектор управляющих сил.

Пусть вектор состояния системы в конечный момент времени  $\mathbf{x}_d = [x_{1d} \ x_{2d}]^T = [\theta_d \ l_d]^T$ , и вектор отклонений состояния системы от конечного  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d = [e_1 \ e_2]^T$ . Предлагается следующая программа управления

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}(\mathbf{x})^{-1} [\Delta \mathbf{u} + \ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{V}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{G}(\mathbf{x})], \quad (4.21)$$

где  $\Delta \mathbf{u}$  – функция, которая будет определена ниже. Учтём, что  $\ddot{\mathbf{x}}_d = \dot{\mathbf{x}}_d = 0$ , поэтому форма закона (4.21) может быть записана в более простом виде:  $\mathbf{U} = \mathbf{M}(\mathbf{x})^{-1} [\Delta \mathbf{u} + \mathbf{G}(\mathbf{x})]$ .

Подставляя выражение  $\mathbf{U}$  в уравнение (4.20), получим

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{V}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{d}(\mathbf{x}) = \Delta \mathbf{u}. \quad (4.22)$$

Далее для упрощения обозначений используется выражение  $\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{V} \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{d} = \Delta \mathbf{u}$ .

Для построения робастного управления используется режим скольжения по заданной поверхности. Поверхность скольжения задаётся следующим образом

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{c}\mathbf{e}, \quad (4.23)$$

где  $\mathbf{c} = \text{diag}(c_1, c_2)$  – матрица коэффициентов поверхности скольжения, причём  $c_1, c_2$  – положительные действительные числа.

Дифференцируя выражение (4.23), получим

$$\dot{\mathbf{s}} = \ddot{\mathbf{e}} + \dot{\mathbf{c}}\mathbf{e}. \quad (4.24)$$

Подставляя (4.22) и (4.23) в (4.24), найдём

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} = \ddot{\mathbf{e}} + \dot{\mathbf{c}}\mathbf{e} &= -\mathbf{V}\dot{\mathbf{e}} - \mathbf{d} + \Delta \mathbf{u} + \dot{\mathbf{c}}\mathbf{e} \\ &= -\mathbf{V}(\mathbf{s} - \mathbf{c}\mathbf{e}) - \mathbf{d} + \Delta \mathbf{u} + \dot{\mathbf{c}}\mathbf{e} \\ &= -\mathbf{V}\mathbf{s} + (\mathbf{V}\mathbf{c}\mathbf{e} + \dot{\mathbf{c}}\mathbf{e}) - \mathbf{d} + \Delta \mathbf{u} \\ &= -\mathbf{V}\mathbf{s} + \mathbf{W} - \mathbf{d} + \Delta \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где  $\mathbf{W} = \mathbf{V}\mathbf{c}\mathbf{e} + \mathbf{c}\mathbf{e}$ .

Далее пусть  $\mathbf{y} = [\mathbf{e} \ \mathbf{s}]^T$ , тогда система уравнений (4.23) и (4.25) преобразуется к следующему виду

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y})\mathbf{d} \\ \mathbf{z} = h(\mathbf{y}) \end{cases}, \quad (4.26)$$

где  $f(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \mathbf{s} - \mathbf{c}\mathbf{e} \\ -\mathbf{V}\mathbf{s} + \mathbf{W} + \Delta\mathbf{u} \end{bmatrix}$ ,  $g(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{z} = d_0\mathbf{s}$ .

Перед определением робастного управления сначала необходимо задать показатель робастности системы. Для этого используется определение, представленное в [93].

*Определение.* Дана нелинейная система с множеством входов и выходов, аналогичная системе (4.26), где  $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ ,  $f(\mathbf{y})$  и  $g(\mathbf{y})$  являются непрерывными функциями,  $\mathbf{d}$  – вектор возмущения,  $\mathbf{z}$  – введённая функция оценки, например, функция отклонения переменных от заданных значений. Для количественной оценки робастности системы определяется следующий показатель

$$J = \sup_{\|\mathbf{d}\|_{L_2} \neq 0} \frac{\|\mathbf{z}\|_{L_2}}{\|\mathbf{d}\|_{L_2}}, \quad (4.27)$$

где  $\|\mathbf{z}\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^\infty \mathbf{z}^T \mathbf{z} dt}$ ,  $\|\mathbf{d}\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^\infty \mathbf{d}^T \mathbf{d} dt}$  – нормы векторов  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{d}$  в пространстве  $L_2$  (т.е. в гильбертовом пространстве), знак  $\sup$  обозначает точную верхнюю границу функции. Здесь, показатель  $J$  принято называть « $L_2$ -усиление» ( $L_2$ -gain). Этот показатель характеризует нечувствительность и устойчивость системы при действии возмущений, и в общем случае нелинейная система (4.26) будет обладать свойством высокой надёжности при малом значении показателя  $J$ , что может быть достигнуто путём разработки соответствующего управления  $\Delta\mathbf{u}$ . Для этого используется теорема о

неравенстве Гамильтона-Якоби (в английской интерпретации НЯИ – Hamilton-Jacobi Inequality), которая изложена ниже.

*Теорема.* Пусть  $\gamma > 0$  – некоторая положительная константа. Если для системы, аналогичной (4.26), удастся найти положительно определённую дифференцируемую функцию  $L(\mathbf{y})$ , производная которой удовлетворяет следующему неравенству

$$\dot{L}(\mathbf{y}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} [f(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y})\mathbf{d}] \leq \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \|\mathbf{d}\|^2 - \|\mathbf{z}\|^2 \}, \forall \mathbf{d}, \quad (4.28)$$

То показатель робастности системы (4.26) удовлетворяет неравенству с константой  $\gamma$ :  $J \leq \gamma$  [93].

Для того, чтобы показатель робастности системы с разработанным контроллером удовлетворял неравенству  $J \leq \gamma$ , управление  $\Delta \mathbf{u}$  для системы (4.26) задаётся в следующем виде

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{V}\mathbf{s} - \mathbf{W} - \frac{1}{2\gamma^2} \mathbf{s} - \frac{d_0^2}{2} \mathbf{s}. \quad (4.29)$$

Анализ устойчивости системы (4.26) с управлением (4.29) заключается в следующем. Функция  $L(\mathbf{y})$  задаётся следующим образом

$$L(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}, \quad (4.30)$$

производная которой имеет вид

$$\dot{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^T (-\mathbf{V}\mathbf{s} + \mathbf{W} - \mathbf{d} + \Delta \mathbf{u}) = \mathbf{s}^T \left( -\mathbf{d} - \frac{1}{2\gamma^2} \mathbf{s} - \frac{d_0^2}{2} \mathbf{s} \right). \quad (4.31)$$

Пусть

$$H = \dot{L}(\mathbf{y}) - \frac{1}{2} \gamma^2 \|\mathbf{d}\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{z}\|^2. \quad (4.32)$$

Подставляя (4.31) в (4.32), получим

$$\begin{aligned}
H &= -\mathbf{s}^T \mathbf{d} - \frac{1}{2\gamma^2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} - \frac{d_0^2}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} - \frac{1}{2} \gamma^2 \|\mathbf{d}\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{z}\|^2 \\
&= \left( -\mathbf{s}^T \mathbf{d} - \frac{1}{2\gamma^2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} - \frac{1}{2} \gamma^2 \|\mathbf{d}\|^2 \right) - \frac{d_0^2}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} + \frac{1}{2} \|\mathbf{z}\|^2 \\
&= -\frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\gamma} \mathbf{s} + \gamma \mathbf{d} \right\|^2 - \frac{d_0^2}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} + \frac{1}{2} \|d_0 \mathbf{s}\|^2 \\
&= -\frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\gamma} \mathbf{s} + \gamma \mathbf{d} \right\|^2 \leq 0.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Из  $H \leq 0$  следует, что  $\dot{L}(\mathbf{y}) \leq \frac{1}{2} \gamma^2 \|\mathbf{d}\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{z}\|^2$ . Таким образом, можно сделать вывод, что система (4.26) асимптотически устойчива. Кроме того, по теореме о неравенстве Гамильтона-Якоби система (4.26) совместно с управлением, представленным в (4.29), обладает робастностью, количественный показатель которой меньше  $\gamma$ .

#### 4.3.2 Численное моделирование и его анализ

Проводится численное моделирование процесса развёртывания ТГКА «ступица-спицы», которая представлена на рисунке 2.5 и включает в себя центральный КА и два микроспутника  $i = 1, 2$ . Для проверки эффективности предлагаемого метода управления, включающего в себя закон для управляющего момента (4.6) и нелинейную программу управления (4.21), используется достаточно сложный случай действия возмущений. Учитывается массовая асимметрия: были приняты разные массы для микроспутников  $m_1 = 10\text{кг}$ ,  $m_2 = 12\text{кг}$ . А также возмущения в начальных условиях движения системы:  $l_1(0) = 0.5\text{м}$ ,  $l_2(0) = 1\text{м}$ ,  $\dot{l}_i(0) = 0.5\text{м/с}$ ,  $\theta_i(0) = 0.1\text{рад}$ ,  $\dot{\theta}_i(0) = 0$ . Остальные исходные данные для моделирования и конечные условия движения системы принимаются те же, что и в разделе 4.2.3.

В большинстве случаев при анализе движения космических систем на низких околоземных орбитах учитывается влияние следующих возмущений: гравитационные аномалии, аэродинамические силы, давление солнечного

излучения и др. Суммарная величина перечисленных возмущений, как отмечалось выше, не превышает  $1 \times 10^{-5}$  [91]. Чтобы продемонстрировать робастность системы с предлагаемой схемой управления при численном моделировании в качестве внешних возмущений используется сочетание гармонических составляющих с разными частотами, в том числе с низкой частотой, соответствующей периоду орбитального движения ТГКА, и с высокой частотой, примерно равной периоду вращения конфигурации «ступица-спицы» вокруг её центра масс. Таким образом, суммарные внешние возмущения имеют вид  $|\Delta| = 1 \times 10^{-4} [\sin(\Omega t) + \sin(\omega_\alpha t)]$ , где амплитуда возмущений задаётся большей, чем известная оценка  $1 \times 10^{-5}$ .

Коэффициенты обратной связи закона для управляющего момента, приложенному к центральному КА, и коэффициенты программы управления для силы натяжения и реактивной силы приводятся в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Коэффициенты схемы управления

Параметры	Значение
Коэффициент обратной связи $k_\omega$	25
Коэффициент обратной связи $k_\alpha$	0.01
Матрица коэффициентов поверхности скольжения $\mathbf{c} = \text{diag}(c_1, c_2)$	$\mathbf{c} = \text{diag}(0.06, 0.02)$
Параметр $\gamma$	1

Рисунки 4.7-4.9 иллюстрируют зависимости, характеризующие изменения от времени переменных состояния системы «ступица-спицы» при её формировании. Из рисунка 4.7 следует, что вращения центрального КА характеризуется почти постоянной угловой скоростью  $\omega_\alpha = 50 \Omega \approx 0.055 \text{ рад/с}$ . По окончании процесса развёртывания системы угловая скорость  $\dot{\alpha}$  стремится к заданному значению  $\omega_\alpha$ , однако её значение не является постоянным, а периодически изменяется, причём период изменения близок к

периоду изменения возмущения  $d_\alpha$ , равному  $T_{d_\alpha} \approx \pi/\omega_\alpha$  в соответствии с выражением (2.30). Помимо колебаний угла  $\alpha$ , вызванных вращением центрального КА, наблюдаются также и колебания с более высокой частотой, обусловленные взаимодействием движений центрального тела и тросов с концевыми спутниками разной массы.

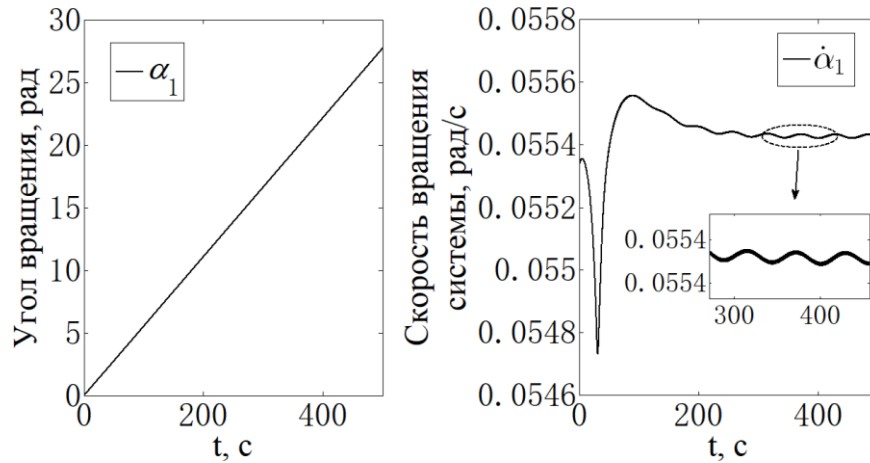


Рисунок 4.7 – Изменение угла и соответствующей угловой скорости вращения центрального КА

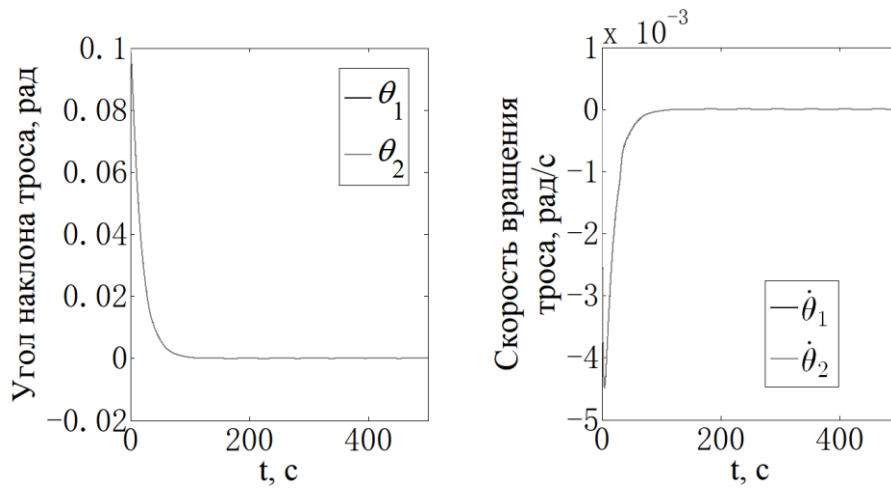


Рисунок 4.8 – Изменение углов наклона тросов и их угловых скоростей

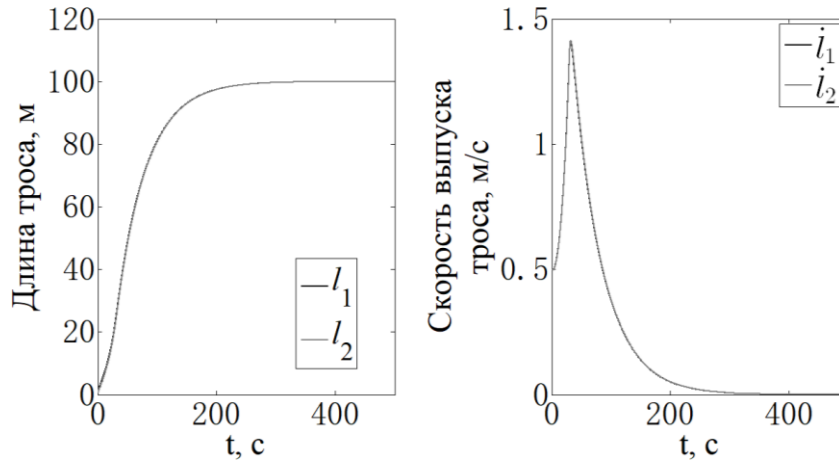


Рисунок 4.9 – Изменение длин тросов и скоростей их выпуска

Результаты численного моделирования показывают, что углы наклона тросов к корпусу центрального КА и их производные имеют одинаковые зависимости, представленные на рисунка 4.8: например, значения углов  $\theta_1, \theta_2$  уменьшаются от начальных значений до желаемой величины ( $\theta_d = 0$ ) в конечный момент времени. Рисунок 4.9 иллюстрирует изменение длин  $l_1, l_2$  и скорости выпуска тросов от времени. Как следует из приведённых результатов, длины двух тросов приближаются к заданному конечному значению ( $l_d = 100\text{м}$ ) по завершении процесса развёртывания, хотя их начальные длины отличаются. Здесь стоит отметить, что колебания длин тросов  $l_i$  и углов их наклона  $\theta_i$  незначительны по сравнению с амплитудами колебаний угла вращения центрального КА  $\alpha$ , что наглядно демонстрирует эффективность разработанного робастного контроллера при наличии периодических возмущений.

Стоит отметить, что здесь рисунки 4.7-4.9 построены при использовании вращающего момента, определённого с использованием принципа управления с обратной связью (4.6). Если при определении управляющего момента не используется принцип обратной связи, а применяется закон (4.21), то кривая изменения  $\dot{\alpha}$  также будет плавной, что иллюстрируется на рисунке 4.10.



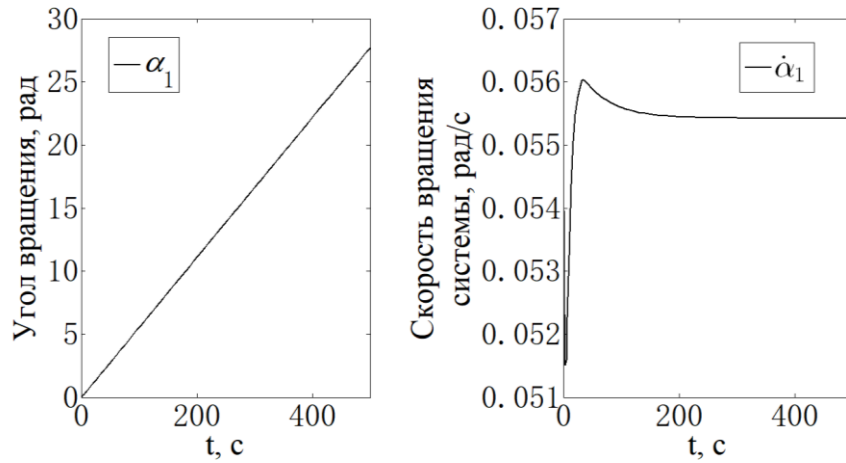


Рисунок 4.10 – Изменение угла и угловой скорости вращения центрального КА с использованием для него робастного управления

На рисунках 4.11 и 4.12 показано как изменяются управляющие воздействия от времени. Из-за того, что массы двух микроспутников не равны, максимальные значения реактивных сил и конечные значения сил натяжения отличаются (рисунок 4.12).

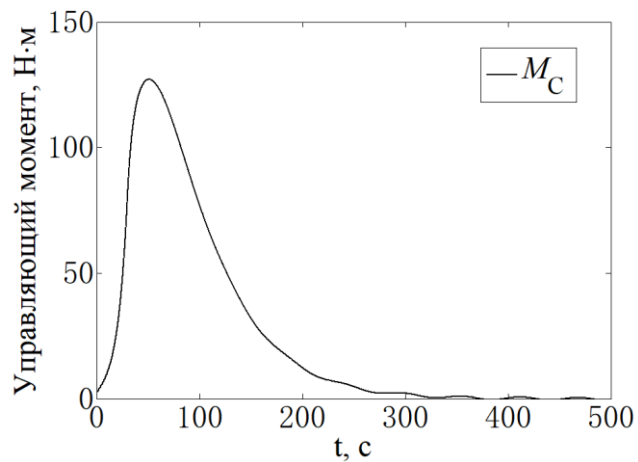


Рисунок 4.11 – Изменение управляющего момента  $M_C$  от времени

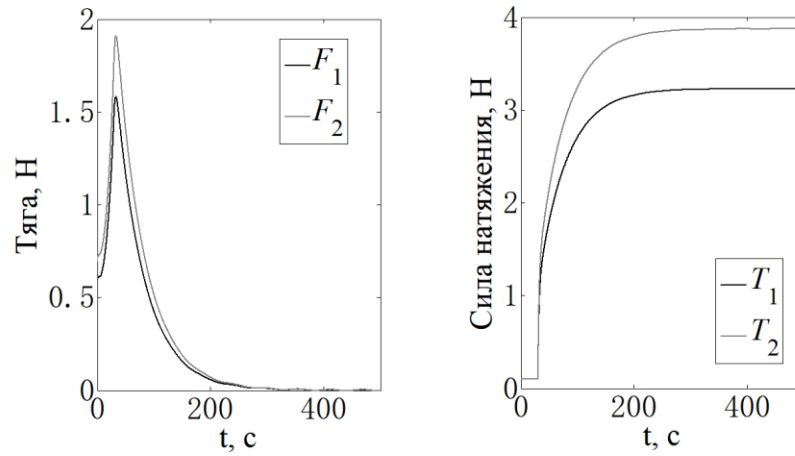


Рисунок 4.12 – Изменение управляющих сил от времени

Рисунок 4.13 иллюстрирует изменение количественного показателя робастности системы  $J$ . Видно, что в процессе развёртывания системы «ступица-спицы» всегда выполняется неравенство  $J < \gamma = 1$ . На рисунке 4.14 приводятся изменения поверхностей скольжения от времени, откуда следует, что значения всех компонентов вектора  $\mathbf{s}$  приближаются к нулю, что подтверждает асимптотическую устойчивость движения системы при применении предлагаемой программы управления.

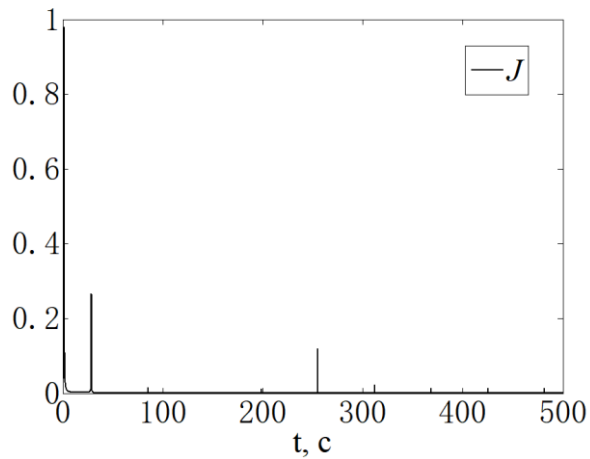


Рисунок 4.13 – Изменение показателя робастности  $J$

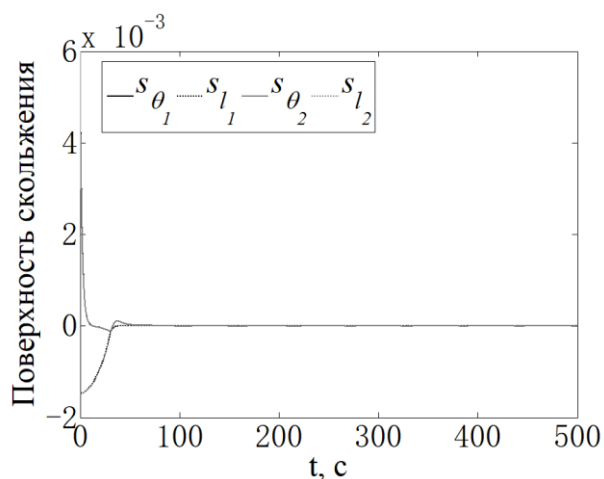


Рисунок 4.14 – Изменение поверхностей скольжения

#### 4.4 Основные результаты и выводы по четвёртой главе

1. С помощью принципа динамического программирования Беллмана и с использованием линеаризованной системы разработана оптимальная программа управления развёртыванием ТГКА «ступица-спицы», реализующая принцип терминального управления по конечному состоянию системы. Эффективной разработанной программы управления подтверждается результатами моделирования по исходной нелинейной модели движения ТГКА.

2. С использованием режима управления по поверхностям скольжения и с применением неравенства Гамильтона-Якоби разработана робастная программа управления движением ТГКА «ступица-спицы». Доказана асимптотическая устойчивость рассматриваемого процесса управления при ограниченных по модулю возмущениях. Возможность применения разработанной программы управления подтверждается результатами моделирования процесса развёртывания ТГКА при действии ограниченных внешних возмущениях и при наличии ошибок в начальном состоянии системы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы:

1. Проведён подробный анализ известных работ, посвящённых методам формирования ТГКА конфигураций «треугольник» и «ступица-спица», по которому можно сделать вывод о недостаточной изученности динамики и методов управления движением таких ТГКА. Особенно это относится к вопросам, связанным с движением КА относительно своих центров масс в составе рассматриваемых ТГКА, в частности, в процессе их развёртывания.

2. С помощью уравнений Лагранжа построена математическая модель движения треугольной ТГКА, предназначенная для построения номинальных программ управления при её формировании и для получения соответствующих аналитических оценок.

3. С помощью уравнений Лагранжа построена математическая модель движения ТГКА конфигурации «ступица-спица», учитывающая движение центрального КА относительно своего центра масс.

4. Получены аналитические выражения для необходимой (критической) угловой скорости вращения системы для сохранения её геометрической конфигурации для двух случаев: 1) направление вращения системы совпадает с направлением орбитального движения её центра масс; 2) направление вращения системы противоположно направлению орбитального движения.

5. Разработана номинальная программа управления для формирования треугольной ТГКА, отличительной особенностью которой является простой релейный закон изменения сил двигателей малой тяги.

6. Найдено аналитическое решение уравнений движения треугольной ТГКА при её развёртывании при использовании номинальной программы, когда ТГКА представляет собой правильный треугольник, после выключения реактивных двигателей. Показано, что в этом случае при соответствующим выборе коэффициентов номинальной программы решение

системы уравнений асимптотически приближается к своему конечному состоянию, когда вся система вращается с некоторой постоянной угловой скорости. Конечная угловая скорость вращения ТГКА регулируется с помощью изменения момента выключения двигателей.

7. Проведена проверка реализуемости разработанной релейной номинальной программы управления при формировании ТГКА в виде правильного треугольника с помощью модели движения ТГКА, записанной в геоцентрической неподвижной системе координат. Показано, что несмотря на действие сложной совокупности возмущений, система стабилизации движения ТГКА, основанная только на контроле длины и скорости выпуска тросов, успешно обеспечивает приемлемое качество регулирования, то есть переводит систему в заданное состояние. Учитываются следующие возмущения: растяжимость тросов, односторонность механических связей (тросы не воспринимают сжимающих усилий и провисают), ошибки в момент разделения КА, статическая и динамическая асимметрии КА как твёрдых тел, угловое движение КА относительно своих центров масс, влияющее на направления действия реактивных сил и др.

8. На основе скользящего режима построена терминальная программа развёртывания треугольной ТГКА (одновременное регулирование сил натяжения тросов и реактивных сил), которая уже на этапе проектирования процесса формирования системы позволяет учесть заданные ограничения на управления и возможные действующие возмущения. Показано, что использование в контуре управления так называемой вспомогательной динамической системы позволяет избежать выхода управлений на свои предельные значения. Предложенный метод управления обосновывается с помощью второго метода Ляпунова.

9. С помощью принципа динамического программирования Беллмана и с использованием линеаризованной системы разработана оптимальная программа управления развёртыванием ТГКА «ступица-спицы», реализующая принцип терминального управления по конечному состоянию

системы. Эффективной разработанной программы управления подтверждается результатами моделирования по исходной нелинейной модели движения ТГКА.

10. С использованием режима управления по поверхностям скольжения и с применением неравенства Гамильтона-Якоби разработана робастная программа управления движением ТГКА «ступица-спицы». Доказана асимптотическая устойчивость рассматриваемого процесса управления при ограниченных по модулю возмущениях. Возможность применения разработанной программы управления подтверждается результатами моделирования процесса развёртывания ТГКА при действии ограниченных внешних возмущениях и при наличии ошибок в начальном состоянии системы.

11. Показано, что замкнутая ТГКА в виде треугольника с точки зрения устойчивости угловых движения КА относительно направлений тросов имеет несомненное преимущество по сравнению с открытой ТГКА «ступица-спицы», так как не требует наличия дополнительных систем стабилизации угловых движения КА.

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

- КТС – космическая тросовая система;
- КА – космический аппарат;
- ЭКТС – электродинамическая космическая тросовая система;
- ТГКА – тросовая группировка космических аппаратов;
- ВТГКА – вращающаяся тросовая группировка космических аппаратов;
- ЦКА – центральный космический аппарат;
- МС – микроспутник;
- НОО – низкая околоземная орбита;
- МКС – международная космическая станция;
- $Ox_e Y_e Z_e$  – геоцентрическая неподвижная система координат (ГСК);
- $OXYZ$  – геоцентрическая орбитальная система координат;
- $Ox_o y_o z_o$  – геоцентрическая подвижная орбитальная система координат;
- $Sxyz$  – подвижная орбитальная система координат ( $S$  – центр масс системы);
- $c_k x_k y_k z_k$  – система координат, связанная с центром масс  $k$ -го спутника;
- $\mathbf{R}_C$  – радиус-вектор центра масс системы;
- $\mu_e$  – гравитационный параметр Земли;
- $T_C$  – кинетическая энергия системы;
- $\Pi$  – потенциальная энергия системы;
- $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{Q}$  – вектор обобщённых координат, скоростей и обобщённых непотенциальных сил;
- $l_{1,2,3}$  – длины тросов ТГКА конфигурации «треугольник»;
- $\theta_{1,2,3}$  – углы наклона тросов длиной  $l_{1,2,3}$  к местной вертикали;
- $m_k, k = \overline{1,3}$  – масса  $k$ -го спутника в конфигурации «треугольник»;
- $m$  – общая масса ТГКА конфигурации «треугольник»;
- $\mu_k, k = \overline{1,3}$  – безразмерная масса  $k$ -го спутника;

$\mathbf{T}_k, k = \overline{1,3}$  – вектор силы натяжения троса, действующей от  $k$ -го спутника к спутнику  $k + 1$ ;

$\mathbf{F}_k, k = \overline{1,3}$  – вектор реактивной силы, действующей на  $k$ -й спутник;

$\varphi_{1,2,3}$  – углы, определяющие линии действия реактивных сил относительно направлений тросов длиной  $l_{1,2,3}$ ;

$T_k^0, k = \overline{1,3}$  – величина сил натяжения в идеальном случае;

$L_k$  – недеформированная длина троса между спутниками  $k$  и  $k + 1$ .

$L_d$  – конечная длина тросов;

$p_{1,2,3}, w_{1,2,3}$  – коэффициенты обратной связи;

$T_{\min}$  – минимальное значение силы натяжения троса;

$F_{\max}$  – максимум силы малой тяги;

$t_e$  – момент выключения двигателей малой тяги;

$\tau$  – безразмерное время;

$m_e$  – инерционность механизмов выпуска тросов;

$p_g, w_g$  – коэффициенты обратной связи;

$ES$  – жёсткость материала троса;

$\varepsilon_k$  – коэффициент удлинения  $k$ -го троса;

$\Delta \mathbf{r}_k, k = \overline{1,3}$  – радиус-вектор, направленный от  $k$ -го спутника к спутнику  $k + 1$ ;

$\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{21}, \mathbf{r}_{23}, \mathbf{r}_{32}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{31}$  – радиусы-векторы, определяющие положение точек крепления тросов в системах координат  $c_k x_k y_k z_k$ ;

$\boldsymbol{\omega}_k$  – вектор угловой скорости  $k$ -го спутника;

$J_k$  – тензор инерции  $k$ -го спутника в связанной системе координат;

$\mathbf{e}_{xk}, \mathbf{e}_{yk}, \mathbf{e}_{zk}, k = \overline{1,3}$  – орты связанных систем координат  $c_k x_k y_k z_k$ ;

$\mathbf{V}_{r1}, \mathbf{V}_{r3}$  – относительные начальные скорости отделения спутников 1 и 3 от спутника 2 при формировании конфигурации «треугольник»;

$\mathbf{V}_{1,2,3}$  – векторы скоростей центров масс спутников после их разделения;



$\Delta \mathbf{K}_{1,2,3}$  – приращение кинетических моментов спутников;

$\mathbf{S}_{1,3}$  – ударные импульсы, действующие на спутники 1 и 3 в момент отделения от спутника 2;

$\alpha_k (k = \overline{1,3}), \alpha_1^{(3)}, \alpha_k^{(k-1)} (k = 2,3)$  – углы между направлениями тросов  $\Delta \mathbf{r}_k$  и характерными осями  $\mathbf{e}_{xk}$  спутников;

$m_c, r_c, h_c$  – масса, радиус и длина центрального КА (цилиндрического) в системе «ступица-спицы»;

$J_c$  – момент инерции центрального КА;

$m_i, i = 1,2$  – масса  $i$ -го микроспутника в системе «ступица-спицы»;

$\mathbf{r}_i, i = 1,2$  – радиус-вектор, определяющий положение точки крепления  $i$ -го троса на корпусе центрального КА;

$\alpha$  – угол поворота центрального КА;

$l_i, \theta_i, i = 1,2$  – длина  $i$ -го троса и угол отклонения  $i$ -го троса от направления радиуса-вектора  $\mathbf{r}_i$ ;

$\mathbf{M}_c$  – крутящий момент, приложенный к центральному КА;

$\mathbf{T}_i, i = 1,2$  – вектор силы натяжения троса, действующей на  $i$ -й микроспутник;

$\mathbf{F}_i, i = 1,2$  – вектор реактивной силы, приложенный на  $i$ -й микроспутник;

СРУ – скользящий режим управления;

ВДС – вспомогательная динамическая система;

$v(y)$  – функция Беллмана;

$K$  – критерий оптимальности;

$s$  – поверхность скольжения;

$V$  – функция Ляпунова;

sign – знаковая функция;

$J$  – показатель робастности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Циолковский, К. Э. Путь к звёздам [Текст] / К. Э. Циолковский – М.: Издательство АН СССР, 1960. – 153 с.
2. Арцутановый, Ю. Н. В космос – на электровозе [Текст] / Ю. Н. Арцутановый // Комсомольская правда. – 1960.
3. Aslanov, V. S. Dynamics of tethered satellite systems [Текст] / V. S. Aslanov, A. S. Ledkov – Beijing: National Defense Industry Press, 2015. – 179 pp.
4. Zabolotnov, Yu. M. Introduction to the dynamics and control of the motion of space tether systems [Текст] / Yu. M. Zabolotnov – Beijing: Science Press, 2013. – 140 pp.
5. Белецкий, В. В. Динамика космических тросовых систем [Текст] / В. В. Белецкий, Е.М. Левин. – М.: Наука, 1990. – 336 с.
6. Levin, E. M. Dynamic analysis of space tether missions [Текст] / E. M. Levin. – San Diego, CA: Univelt, 2007. – 454 pp.
7. Ишков, С. А. Моделирование процессов управления развёртыванием орбитальной тросовой системы с ограничениями на скорость выпуска троса [Текст] / С. А. Ишков, Г. А. Филиппов, С. Сүй // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2016. – Т. 15. – № 1. – С. 64-72.
8. Kang, J. Analytical and experimental investigation of stabilizing rotating uncooperative target by tethered space tug [Текст] / J. Kang, Z. H. Zhu, L. F. Santaguida // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. – 2021. – Vol. 57. – No. 4. – PP. 2426-2437.
9. Lu, H. Stability Analysis and motion control of spinning electrodynamic tether system during transition into spin [Текст] / H. Lu, A. Li, C. Wang, Yu. M. Zabolotnov // Acta Astronautica. – 2020. – Vol. 177. – PP. 871-881.
10. Осипов, В. Г. Космические тросовые системы: история и перспективы. [Текст] / В. Г. Осипов, Н. Л. Шошунов // Земля и Вселенная. – 1998. – Т. 4. – С. 19.
11. Закржевский, А. Е. Метод развёртывания космической тросовой системы с приведением к местной вертикали [Текст] / А. Е. Закржевский // Прикладная механика. – 2015. – Т. 51. – № 6. – С. 80-93.

12. Дон, Ч. Анализ динамики и управление движением низкоорбитальной космической тросовой системы [Текст] / Ч. Дон // Вестник Московского авиационного института. – 2018. – Т. 25. – № 1. – С. 84-91.
13. \*Chen, S. Adaptive sliding mode control for deployment of electro-dynamic tether via limited tension and current [Текст] / S. Chen, A. Li, C. Wang, C. Liu // Acta Astronautica. – 2020. – Vol. 177. – PP. 842-852.
14. Воеводин, П. С. Анализ динамики и выбор параметров электродинамической космической тросовой системы, работающей в режиме генерации тяги [Текст] / П. С. Воеводин, Ю. М. Заболотнов // Космические исследования. – 2020. – Т. 58. – № 1. – С. 61-72.
15. Liu, J. Automatic orbital maneuver for mega-constellations maintenance with electrodynamic tethers [Текст] / J. Liu, G. Li, Z. H. Zhu, M. Liu, X. Zhan // Aerospace Science and Technology. – 2020. – Vol. 105. – PP. 105910.
16. Ismail, N. A. Three dimensional dynamics of a flexible Motorised Momentum Exchange Tether [Текст] / N. A. Ismail, M. P. Cartmell // Acta Astronautica. – 2016. – Vol. 120 – PP. 87-102.
17. Nizhnik, O. The space mission design example using LEO bolos [Текст] / O. Nizhnik // Aerospace. – 2013. – Vol. 1 – No. 1. – PP. 31-51.
18. Williams, P. Optimal deployment/retrieval of tethered satellites [Текст] / P. Williams // Journal of Spacecraft and Rockets. – 2008. – Vol. 45. – No. 2. – PP. 324-343.
19. Lang, D. D. Operations with tethered space vehicles [Текст] / D. D. Lang, R. K. Nolting // NASA Special Publication. – 1967. – Vol. 138. – PP. 55-64.
20. Cosmo, M.L. Tethers in Space Handbook. Third edition [Текст] / M. L. Cosmo, E.C. Lorenzini. – Smithsonian Astrophysical Observatory, 1997. – 234 pp.
21. Purdy, W. TiPS: results of a tethered satellite experiment [Текст] / W. Purdy // Proceedings of 1997 AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. – 1997.
22. Kruijff, M. Data analysis of a tethered SpaceMail experiment [Текст] / M. Kruijff, E. J. Van Der Heide, W. J. Ockels // Journal of Spacecraft and Rockets – 2009. – Vol. 46. – No. 6. – PP. 1272-1287.
23. Masahiro, N. Past results and future missions of STARS series satellite [Текст] / N. Masahiro // AIAC18: 18th Australian International Aerospace Congress (2019). – 2019. – PP. 935-940.

24. Yamagiwa, Y. Space experimental results of STARS-C CubeSat to verify tether deployment in orbit [Текст] / Y. Yamagiwa, T. Fujii, K. Nakashima, H. Oshimori, T. Okino, S. Komua, S. Arita, M. Nohmi, Y. Ishikawa // *Acta astronautica*. – 2020. – Vol. 177. – PP. 759-770.
25. Sasaki, S. Results from a series of tethered rocket experiments [Текст] / S. Sasaki, K. I. Oyama, N. Kawashima, Y. Watanabe, T. Obayashi, W. J. Raitt, A. B. White, P. M. Banks, P. R. Williamson, W. F. Sharp, T. Yokota, K. Hirao // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 1987. – Vol. 24. – No. 5. – PP. 444-453.
26. James, H. G. Wave results from OEDIPUS A [Текст] / H. G. James // *Advances in Space Research*. – 1993. – Vol. 13. – No.10. – PP. 5-13.
27. Stone, N. H. The TSS-1R electrodynamic tether experiment: Scientific and technological results [Текст] / N. H. Stone, W. J. Raitt, K. H. Wright Jr. // *Advances in Space Research*. – 1999. – Vol. 24. – No. 8. – PP. 1037-1045.
28. Johnson, L. Electrodynamic propulsion system tether experiment (T-REX) [Текст] / L. Johnson, H. A. Fujii, J. R. Sanmartin // *57th JANNAF Joint Propulsion Meeting*. – 2010.
29. Nohmi, M. Initial orbital performance result of nano-satellite stars-ii [Текст] / M. Nohmi // *Proceedings of the 2014 International Symposium on Artificial Intelligence, Robots and Automation in Space*. – 2014.
30. Ohkawa, Y. Review of KITE–Electrodynamic tether experiment on the H-II Transfer Vehicle [Текст] / Y. Ohkawa, S. Kawamoto, T. Okumura, K. Iki, H. Okamoto, K. Inoue, T. Uchiyama, D. Tsujita // *Acta Astronautica*. – 2020. – Vol. 177. – PP. 750-758.
31. Di Mauro, G. Survey on guidance navigation and control requirements for spacecraft formation-flying missions [Текст] / G. Di Mauro, M. Lawn, R. Bevilacqua // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2018. – Vol. 41. – No. 3. – PP. 581-602.
32. Leitner, J. From monolithics to tethers to freeflyers: the spectrum of large-aperture sensing from space [Текст] / J. Leitner, D. Quinn, M. M. Matsumura // *Proceedings of SPIE, Interferometry in Space*. – 2003. – Vol. 4852. – No. 2. – PP. 492-499.

33. Cai, Z. Nonlinear dynamics of a rotating triangular tethered satellite formation near libration points [Текст] / Z. Cai, X. Li, H. Zhou // *Aerospace Science and Technology*. – 2015. – Vol. 42 – PP. 384-391.
34. Bainum, P. Tethered satellite constellations in auroral observation missions [Текст] / P. Bainum, Z. Tan // *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*. – 2002. – PP. 4640.
35. Lorenzini, E. C. A three-mass tethered system for micro-g/variable-g applications [Текст] / E. C. Lorenzini // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 1987. – Vol. 10. – No. 3. – PP. 242-249.
36. Du, C. Dynamic characterization and sail angle control of electric solar wind sail by high-fidelity tether dynamics [Текст] / C. Du, Z. H. Zhu // *Acta Astronautica*. – 2021. – Vol. 189. – PP. 504-513.
37. Quinn, D. A. A tethered formation flying concept for the specs mission [Текст] / D. A. Quinn, D. C. Folta // *Guidance and Control Conference*. – 2000.
38. Farley, R. E. Tethered formation configurations: Meeting the scientific objectives of large aperture and interferometric science [Текст] / R. E. Farley, D. A. Quinn // *New Concepts for Far-Infrared and Submillimeter Space Astronomy*. – 2004.
39. Quadrelli, M. B. Precision tethered formations for LEO and space interferometry applications [Текст] / M.B. Quadrelli, F. Y. Hadaegh, E. C. Lorenzini, C. Bombardelli // *16th International Symposium of Spaceflight Dynamics*, Pasadena, CA. – 2001.
40. Hoyt, R. The multi-application survivable tether (MAST) experiment [Текст] / R. Hoyt, J. Slostad // *39th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*. – 2003. – PP. 5219.
41. Nakaya, K. On formation deployment for spinning tethered formation flying and experimental demonstration [Текст] / K. Nakaya, M. Iai, O. Mori, S. Matunaga // *18th International Symposium on Space Flight Dynamics*. – 2004. – PP. 11-15.
42. Yu, B. S. Stability and ground experiments of a spinning triangular tethered satellite formation on a low earth orbit [Текст] / B. S. Yu, Z. Huang, L. L. Geng, D. P. Jin // *Aerospace Science and Technology*. – 2019. – Vol. 92. – PP. 595-604.

43. Chung, S. J. Nonlinear control and synchronization of multiple Lagrangian systems with application to tethered formation flight spacecraft / S. J. Chung – Massachusetts Institute of Technology, 2007. – 228 pp.
44. Rajkumar, A. A three-body spacecraft as a testbed for artificially-induced gravity research in Low Earth Orbit [Текст] / A. Rajkumar, O. K. Bannova // ASCEND 2020. – 2020. – PP. 4110.
45. Ma, Y. Design concept of a tethered satellite cluster system [Текст] / Y. Ma, R. Ge, M. Xu // Aerospace Science and Technology. – 2020. – Vol. 106. – PP. 106159.
46. Janhunen, P. Invited Article: Electric solar wind sail: Toward test missions [Текст] / P. Janhunen, P. K. Toivanen, J. Polkko, S. Merikallio, P. Salminen, E. Haeggström, et al // Review of Scientific Instruments. – 2010. – Vol. 81. – No. 11. – PP. 111301.
47. Bassetto, M. A comprehensive review of Electric Solar Wind Sail concept and its applications [Текст] / M. Bassetto, L. Niccolai, A. A. Quarta, G. Mengali // Progress in Aerospace Sciences. – 2022. – Vol. 128. – PP. 100768.
48. Liu, F. C. On dynamical formulations of a tethered satellite system with mass transport [Текст] / F. C. Liu // 23rd Aerospace Sciences Meeting. – 1985. – PP. 117.
49. Misra, A. K. Attitude dynamics of three-body tethered systems [Текст] / A. K. Misra, Z. Amier, V. J. Modi // Acta Astronautica. – 1988. – Vol. 17. – No. 10. – PP. 1059-1068.
50. DeCou, A. B. Orbital dynamics of the hanging tether interferometer [Текст] / A. B. DeCou // Journal of guidance, control, and dynamics. – 1991. – Vol. 14. – No. 6. – PP. 1309-1311.
51. Sarychev, V. A. Equilibria of a double pendulum in a circular orbit [Текст] / V. A. Sarychev // Acta astronautica. – 1999. – Vol. 44. – No.1. – PP. 63-65.
52. Kojima, H. Nonlinear control of librational motion of tethered satellites in elliptic orbits [Текст] / H. Kojima, M. Iwasaki, H. A. Fujii, C. Blanksby, P. Trivailo // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2004. – Vol. 27. – No. 2. – PP. 229-239.
53. Kojima, H. Nonlinear control of a double pendulum electrodynamic tether system [Текст] / H. Kojima, T. Sugimoto // Journal of Spacecraft and Rockets. – 2007. – Vol. 44. – No.1. – PP. 280-284.

54. Jung, W. Nonlinear dynamic analysis of a three-body tethered satellite system with deployment/retrieval [Текст] / W. Jung, A. P. Mazzoleni, J. Chung // *Nonlinear Dynamics*. – 2015. – Vol. 82. – No. 3. – PP. 1127-1144.
55. Ван, Ч. Моделирование и анализ процесса формирования вертикальной тросовой группировки наноспутников [Текст] / Ч. Ван, Ю. М. Заболотнов // *Информационные технологии и нанотехнологии*. – 2018. – С. 1902-1910.
56. Kumar, K. D. Dynamics and control of multi-connected satellites aligned along local horizontal [Текст] / K. D. Kumar, T. R. Patel // *Acta mechanica*. – 2009. – Vol. 204. – No. 3. – PP. 175-191.
57. Yu, B. S. Chaotic behaviors of an in-plane tethered satellite system with elasticity [Текст] / B. S. Yu, Y. N. Tang, K. Ji // *Acta Astronautica*. – 2022. – Vol. 193 – PP. 395-405.
58. \*Chen, S. Attitude dynamic analysis of the end-bodies of space tether system in deployment [Текст] / S. Chen, C. Wang, A. Li, Yu. M. Zabolotnov // *Journal of National University of Defense Technology (Guofang Keji Daxue Xuebao)*. – 2020. – Vol. 42. – No. 2. – PP. 98-106.
59. Ван, Ч. Анализ динамики формирования тросовой группировки из трех наноспутников с учетом их движения вокруг центров масс [Текст] / Ч. Ван, Ю. М. Заболотнов // *Прикладная математика и механика*. – 2021. – Т. 85. – № 1. – С. 21-43.
60. Chang, I. Nonlinear attitude control of a tether-connected multi-satellite in three-dimensional space [Текст] / I. Chang, S. Y. Park, K. H. Choi // *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. – 2010. – Vol. 46. – No. 4. – PP. 1950-1968.
61. Luo, C. Retargeting control of a multi-tethered satellite formation at sun-earth libration point [Текст] / C. Luo, H. Wen, D. Jin, J. Sun // *Advances in Space Research*. – 2022. – Vol. 70. – PP. 268-285.
62. Luo, C. Dynamics of a tethered satellite formation for space exploration modeled via ANCF [Текст] / C. Luo, J. Sun, H. Wen, D. Jin // *Acta Astronautica*. – 2020. – Vol. 177. – PP. 882-890.
63. Decou, A. B. Tether static shape for rotating multimass, multitether, spacecraft for 'triangle' Michelson interferometer [Текст] / A. B. Decou // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 1989. – Vol. 12. – No. 2. – PP. 273-275.

64. Topal, E. Dynamics of a triangular tethered satellite system on a low Earth orbit [Текст] / E. Topal, U. Daybelge // Proceedings of 2nd International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST 2005). IEEE, 2005. – PP. 218-222.
65. \*Чэнь Ш. Анализ вращения орбитальной тросовой группировки из трех наноспутников [Текст] / Ш. Чэнь, Ю. М. Заболотнов, А. Ли, Ч. Ван // сб. тр. XXIV Всерос. семинара по упр. движением и навигации летат. аппаратов. Самара, 2021. – С. 65-71.
66. Kumar, K. D. Rotation formation flying of three satellites using tethers [Текст] / K. D. Kumar, T. Yasaka // Journal of Spacecraft and Rockets. – 2004. – Vol. 41. – No. 6. – PP. 973-985.
67. Williams, P. Optimal deployment/retrieval of a tethered formation spinning in the orbital plane [Текст] / P. Williams // Journal of spacecraft and rockets. – 2006. – Vol. 43. – No. 3. – PP. 638-650.
68. Cai, Z. Nonlinear dynamics of a rotating triangular tethered satellite formation near libration points [Текст] / Z. Cai, X. Li, H. Zhou // Aerospace Science and Technology. – 2015. – Vol. 42. – PP. 384-391.
69. Huang, B. Stable spinning deployment of space triangle tethered formation system using event-triggered sliding mode control [Текст] / B. Huang, F. Zhang, P. Huang // Advances in Space Research. – 2022. – Vol. 70. – PP. 1222-1233.
70. \*Chen, S. Analysis of the deployment of a three-mass tethered satellite formation [Текст] / S. Chen, A. Li, C. Wang // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 984. – No. 1. – PP. 012-028.
71. Pizarro-Chong, A. Dynamics of a multi-tethered satellite formation [Текст] / A. Pizarro-Chong, A. Misra // AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, 2004. – PP. 5308.
72. Pizarro-Chong, A. Dynamics of multi-tethered satellite formations containing a parent body [Текст] / A. Pizarro-Chong, A. Misra // Acta Astronautica. – 2008. – Vol. 63. – PP. 1188-1202.
73. Zhao, J. Nonlinear dynamics and simulation of multi-tethered satellite formations in Halo orbits [Текст] / J. Zhao, Z. Cai // Acta Astronautica. – 2008. – Vol. 63. – PP. 673-681.



74. Zhao, J. Dynamics of variable-length tethered formations near libration points [Текст] / J. Zhao, Z. Cai, Z. Qi // Journal of guidance, control, and dynamics. – 2010. – Vol. 33. – No. 4. – PP. 1172-1183.
75. Zhai, G. Optimal deployment of spin-stabilized tethered formations with continuous thrusters / G. Zhai, X. Bi, B. Liang // Nonlinear Dynamics. – 2019. – Vol. 95. – No. 3. – PP. 2143-2162.
76. \*Chen, S. Stable deployment control of a multi-tethered formation system considering the spinning motion of parent satellite [Текст] / S. Chen, C. Liu, Yu. M. Zabolotnov, A. Li // The Proceedings of the 2021 Asia-Pacific International Symposium on Aerospace Technology (APISAT 2021), Volume 2. – Singapore: Springer Nature Singapore, 2022. – PP. 771-782.
77. Ma, Z. Adaptive hierarchical sliding mode control with input saturation for attitude regulation of multi-satellite tethered system [Текст] / Z. Ma, G. Sun // The Journal of the Astronautical Sciences. – 2017. – Vol. 64. – No. 2. – PP. 207-230.
78. Kim, M. Control of a rotating variable-length tethered system [Текст] / M. Kim, C. D. Hall // Journal of guidance, control, and dynamics. – 2004. – Vol. 27. – No. 5. – PP. 849-858.
79. Mori, O. Formation and attitude control for rotational tethered satellite clusters [Текст] / O. Mori, S. Matunaga // Journal of Spacecraft and Rockets. – 2007. – Vol. 44. – No. 1. – PP. 211-220.
80. Huang, P. Configuration maintaining control of three-body ring tethered system based on thrust compensation [Текст] / P. Huang, B. Liu, F. Zhang // Acta Astronautica. – 2016. – Vol. 123. – PP. 37-50.
81. Razzaghi, P.  $H_2$ - $H_\infty$  Model reference adaptive control of tethered satellite system [Текст] / P. Razzaghi, E. Al Khatib, K. S. Alluhydan, Y. Hurmuzlu // 2020 IEEE Aerospace Conference. – 2020. – PP. 1-8.
82. Zhang, F. Stable spinning deployment control of a triangle tethered formation system [Текст] / F. Zhang, H. Zhou, P. Huang, J. Guo // IEEE Transactions on Cybernetics. – 2022. – Vol. 52. – No. 11. – PP. 11442-11452.
83. \*Чэнь, Ш. Формирование вращающейся кольцеобразной тросовой группировки из трёх наноспутников с ограничением на управление [Текст] / Ш. Чэнь, Ю. М. Заболотнов // Вестник Самарского

- университета. *Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*. – 2022. – Т. 21. – № 3. – С. 69-84.
84. Заболотнов, Ю. М. Метод формирования тросовой группировки микроспутников в виде правильного треугольника с учетом их движения относительно центров масс [Текст] / Ю. М. Заболотнов, \*Ш. Чэнь // *Известия РАН. Теория системы и управления*. – 2023. – № 2. – С. 44-59.
85. \*Чэнь, Ш. Робастное управление при формировании вращающейся тросовой группировки микроспутников конфигурации «ступица-спицы» с использованием неравенства Гамильтона-Якоби [Текст] / Ш. Чэнь, Ю. М. Заболотнов // *Космические аппараты и технологии*. – 2022. – Т. 6. – № 4. – С. 235-245.
86. Liu, C. Robust adaptive control for rotational deployment of an underactuated tethered satellite system [Текст] / C. Liu, \*S. Chen, Y. Guo, W. Wei // *Acta Astronautica*. – 2023. – Vol. 203. – PP. 65-77.
87. Zabolotnov, Yu. M. Control of the Deployment of an Orbital Tether System that Consists of Two Small Spacecraft [Текст] / Yu. M. Zabolotnov // *Cosmic Research*. – 2017. – Vol. 55. – No. 3. – PP. 224–233.
88. Шилов, А. А. Оптимальная коррекция матрицы направляющих косинусов при расчетах вращения твердого тела [Текст] / А. А. Шилов // *Учен. зап. ЦАГИ*. – 1977. – Т. 8. – № 5. – С. 137–139.
89. Рыжков, В. В. Двигательные установки и ракетные двигатели малой тяги на различных физических принципах для систем управления малых и сверхмалых космических аппаратов [Текст] / В. В. Рыжков, А. В. Сулинов // *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*. – 2018. – Т. 17. – № 4. – С. 115-128.
90. Уткин, В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления [Текст] / В.И. Уткин – М: Наука, 1981. – 367 с.
91. Ma, Z. Dynamic adaptive saturated sliding mode control for deployment of tethered satellite system [Текст] / Z. Ma, G. Sun, Z. Li // *Aerospace Science and Technology*. – 2017. – Vol. 66. – PP. 355-365.
92. Bellman, R. E. Applied dynamic programming [Текст] / R. E. Bellman, S. E. Dreyfus – Princeton university press, 1962. – 390 pp.
93. Khalil, H. K. Nonlinear control [Текст] / H. K. Khalil – New York, Pearson, 2015. – 394 pp.