

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи

**Бакри Ибрагим**

**СИНТЕЗ ЗАКОНОВ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО  
ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С МАЛОЙ  
АСИММЕТРИЕЙ В АТМОСФЕРЕ МАРСА**

**2.5.16. Динамика, баллистика, управление движением  
летательных аппаратов**

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
Любимов Владислав Васильевич,  
доктор технических наук, доцент

Самара – 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1	МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В АТМОСФЕРЕ МАРСА .....	11
1.1	Описание систем координат, матриц перехода и силовых факторов, действующих на космический аппарат в атмосфере .....	11
1.2	Системы дифференциальных уравнений движения космического аппарата в атмосфере.....	16
1.2.1	Исходные дифференциальные уравнения движения космического аппарата в атмосфере в векторной форме .....	16
1.2.2	Нелинейные уравнения вращательного движения космического аппарата с малой асимметрией в атмосфере относительно центра масс.....	18
1.2.3	Приближённая нелинейная низкочастотная система уравнений движения асимметричного КА относительно центра масс в атмосфере.....	20
1.2.4	Квазилинейная система уравнения движения асимметричного космического аппарата относительно центра масс.....	23
1.2.5	Уравнения движения центра масс космического аппарата в атмосфере.....	30
1.3	Массово-геометрические и аэродинамические характеристики спускаемого космического аппарата в атмосфере Марса .....	31
2	СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕКТОРА СКОРОСТИ.....	39
2.1	Принцип динамического программирования .....	39
2.2	Приближенное оптимальное управление движением космического аппарата с малыми аэродинамической и массово-инерционной асимметриями в атмосфере Марса.....	40

2.2.1	Синтез приближенного оптимального управления движением космического аппарата с малыми аэродинамической и массово-инерционной асимметриями в атмосфере Марса.....	40
2.2.2	Проверка приближенного оптимального управления посредством использования исходной нелинейной системы уравнений движения асимметричного КА с аэродинамическим демпфированием.....	51
2.2.3	Выражения для приближенного оптимального управления в связанной системе координат.....	54
2.2.4	Дискретные аналоги непрерывных законов управления для учёта влияния дискретности работы двигателей на стабилизацию космического аппарата.....	57
2.3	Приближенное оптимальное управление движением космического аппарата с малой аэродинамической асимметрией и с аэродинамическим демпфированием.....	63
2.3.1	Синтез приближенного оптимального закона управления движением космического аппарата с малой аэродинамической асимметрией.....	63
2.3.2	Проверка приближенного оптимального управления посредством исходной нелинейной системы уравнений вращательного движения асимметричного КА.....	73
2.4	Синтез оптимальной стабилизации космического зонда в разрежённых слоях атмосферы с малыми смещениями центра масс.....	75
3	МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ОБЛАСТИ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ АСИММЕТРИИ.....	87
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	96
	ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ.....	97
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	101

## ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованию управляемого вращательного движения стабилизированных космических аппаратов с малой асимметрией при спуске в атмосфере Марса. При этом в работе осуществляется синтез нескольких законов оптимального одновременного управления угловой скоростью и пространственным углом атаки, обеспечивающих стабилизацию космических аппаратов относительно вектора скорости при спуске в атмосфере Марса.

**Актуальность темы исследования.** Задача спуска космического аппарата (КА) в разрежённой атмосфере Марса является одной из наиболее технически сложных и аварийно-опасных задач современной космонавтики. Известно, что плотность атмосферы Марса существенно меньше плотности атмосферы Земли на аналогичных высотах. При этом физические характеристики атмосферы Марса изменяются в течение времени года в зависимости от расположения планеты относительно Солнца [1,2]. Кроме того, на состояние атмосферы Марса существенное влияние оказывают различные возмущающие погодные факторы [3-5].

В диссертационной работе рассматривается разработка оптимальных непрерывных законов управления угловой скоростью и пространственным углом атаки КА с различными сочетаниями асимметрий на участке спуска в атмосфере Марса, начиная с высоты 100 км до высоты раскрытия парашюта, равной 10 км [6-10]. При этом применяются известные математические модели, описывающие возмущённое движение КА как твёрдого тела с малыми асимметриями относительно центра масс в атмосфере Марса [11].

Основополагающие результаты в теории оптимального управления динамических систем получены в работах Понтрягина Л.С. [12], Беллмана Р. [13], Болтянского В.Г. [14,15], Гамкрелидзе Р.В. [16], Гурмана В.И. [17,18], Моисеева Н.Н. [19,20], Черноусько Ф.Л. [21], Кротова В.Ф. [22], Летова А.М. [23], Калмана Р.Е. [24], Красовского Н.Н. [25], Заболотнова Ю.М. [26], Робертс Ф.С. [27], Росс И.М. [28], Бейтс Д.Т. [29], и в работах других учёных. Следует отметить, что применение метода усреднения [30-32] в сочетании с известными

методами оптимального управления, такими как метод динамического программирования или принцип максимума [33-38], позволяет существенно упростить решение задачи синтеза управления.

В работах Любимова В.В. и Куркиной Е.В. [39-42] ранее были получены непрерывные законы оптимальной стабилизации асимметричного КА, совершающего управляемый спуск в атмосфере Марса. Однако, управление по угловой скорости и пространственному углу атаки в данных законах рассматривалось как решение несвязанных между собой задач.

Известно, что присутствие малых асимметрий на борту неуправляемого КА может привести к реализации длительного резонанса [43,44]. В результате может произойти значительное увеличение пространственного угла атаки или угловой скорости спускаемого КА, что может быть причиной аварийной ситуации при вводе в действие тормозной парашютной системы [45].

Резонансы при неуправляемом спуске КА в атмосфере Земли были подробно рассмотрены в научных трудах Ярошевского В.А. [46,47], Шилова А.А., Гомана М.Г. [48,49], Корьянова В.В. и Казаковцева В.П. [50], Асланова В.С. [51-62], Заболотнова Ю.М. [63-73], Белоконова И.В., Тимбая И.А. и Бариновой Е.В. [74], Дмитриевского А.А. и Лысенко Л.Н. [75], Платуса Д. [76], Найфэ А. [77], и других специалистов. В частности, в работе Белоконова В.М., Белоконова И.В. и Заболотнова Ю.М. [78,79] была получена нелинейная низкочастотная система уравнений движения космического аппарата с малой асимметрией в атмосфере, которая описывает движение космического аппарата с учётом возмущения от главного резонанса. В более поздних работах Заболотновым Ю.М. произведено теоретическое обоснование низкочастотной системы уравнений движения космического аппарата методом интегральных многообразий [80]. Данная система уравнений применяется в рассматриваемой работе при моделировании управляемого движения КА относительно центра масс в атмосфере Марса [10]. В работе [81] рассмотрено решение задачи квазиоптимальной стабилизации малых колебаний механических систем со многими степенями свободы с медленно изменяющимися параметрами и

малыми возмущениями. При этом синтез приближенно оптимальных регуляторов производится на основе применения принципа динамического программирования в сочетании с методом усреднения.

Задача проектирования КА, совершающего спуск в марсианской атмосфере, начинается с этапа определения его формы, в качестве которой часто выбирается сегментально-коническая форма. В частности, в работах Асланова В.С. и Ледкова А.С. [82,83], Телицына В.А. и Журавлева Е.И. [84] обсуждается выбор формы и параметров КА, спроектированных для спуска в марсианской атмосфере. После выбора внешней формы неуправляемого КА, выбираются соответствующие проектные параметры. Отметим, что алгоритмы определения допустимых величин малой асимметрии рассматривался в работах Любимова В.В. [85], Куркиной Е.В. [86] и Лашина В.С. [87]. В частности, в работе Куркиной Е.В. была разработана методика оценки допустимых значений малой массово-инерционной и малой аэродинамической асимметрий неуправляемого КА при спуске в атмосфере Марса.

В представленной диссертации рассматривается новая методика и новый алгоритм оценки допустимых значений параметров асимметрий КА, обеспечивающие нерезонансное движение при неуправляемом спуске КА в атмосфере Марса [88]. Применяемое в данной методике основное ограничение является более слабым, по сравнению с известными ограничениями, что позволяет несколько расширить интервалы допустимых значений асимметрии. Данная методика может применяться, например, при моделировании движения КА при отказе штатной системы обеспечения заданной ориентации, использующей двигателя малой тяги.

Известно, что следующие марсианские КА «Марс-1» (1962), «Фобос-1 (1988)», «Mars Observer (1992)», «Mars Polar Lander (1999)», «Deep Space-2 (1999)», «Beagle-2 (2003)», «Schiaparelli (2016)» были потеряны или разбились о поверхность Марса или о поверхности естественных спутников Марса по причине сбоя в навигационной системе или неправильной ориентации [11,89-92].

Таким образом, обеспечение заданной ориентации асимметричного КА при спуске в атмосфере Марса представляет собой **актуальную** задачу современной космонавтики. Выбор законов оптимального управления возмущённым движением КА относительно центра масс является определяющим для поддержания заданной ориентации КА.

В отличие от известных работ, в данной диссертации разработаны законы одновременного оптимального управления угловой скоростью и пространственным углом атаки, позволяющие стабилизировать КА с малой асимметрией относительно вектора скорости в атмосфере Марса, а также в диссертации описана новая методика построения области допустимых значений асимметрии, позволяющая исключить влияние главного резонанса при неуправляемом движении КА в марсианской атмосфере.

**Объект исследования:** космический аппарат с малой асимметрией, осуществляющий спуск в атмосфере Марса.

**Предмет исследования:** законы оптимальной стабилизации по угловой скорости и пространственному углу атаки КА с малой асимметрией в атмосфере Марса.

**Цель исследования:** разработка оптимальных законов управления угловым движением спускаемых аппаратов с малой асимметрией в атмосфере Марса, стабилизирующих их относительно вектора скорости с целью обеспечения заданных условий движения в момент ввода парашютной системы.

### **Методы решения**

В процессе выполнения работы были использованы: классический метод оптимального управления (метод динамического программирования), метод асимптотического анализа (метод усреднения), методы теоретической механики, высшей и вычислительной математики.

### **Научная новизна результатов**

1. Получены непрерывные оптимальные законы управления по угловой скорости и пространственному углу атаки, обеспечивающие стабилизацию КА относительно вектора скорости в атмосфере Марса, учитывающие

возмущающее влияние малой аэродинамической и малой массово-инерционной асимметрий на движение КА относительно центра масс.

2. Разработаны дискретные аналоги полученных непрерывных оптимальных законов управления, обеспечивающие стабилизацию КА относительно вектора скорости в атмосфере Марса, позволяющие учесть влияние дискретного характера работы двигателей системы управления.

3. Предложена методика и алгоритм построения области допустимых значения асимметрий спускаемого КА (более широкой по сравнению с известными результатами), позволяющая исключить влияние главного резонанса при его неуправляемом движении в атмосфере Марса.

### **Практическая значимость**

Полученные в диссертационной работе оптимальные законы управления могут быть использованы при проектировании системы управления ориентацией КА в атмосфере Марса. Разработанная методика оценки допустимых значений асимметрий позволяет избежать влияния главного резонанса при неуправляемом спуске КА в марсианской атмосфере.

### **Результаты, выносимые на защиту**

1. Непрерывные оптимальные законы управления по угловой скорости и пространственному углу атаки, обеспечивающие стабилизацию спускаемых КА относительно вектора скорости в атмосфере Марса, учитывающие возмущающее влияние малой асимметрии на движение КА относительно центра масс.

2. Дискретные аналоги непрерывных оптимальных законов управления, обеспечивающих заданную ориентацию КА в атмосфере Марса, позволяющие учесть влияние дискретного характера работы двигателей на процесс стабилизации КА.

3. Методика и алгоритм оценки расширенной области допустимых значений параметров асимметрий, позволяющие исключить влияние главного резонанса на вращательное движение неуправляемых КА в атмосфере Марса.



4. Результаты численного моделирования управляемого и неуправляемого движения КА с малой асимметрией в атмосфере Марса, подтверждающие положения, выносимые на защиту.

**Достоверность результатов** базируется на использовании классического метода теории оптимального управления (метода динамического программирования), обеспечивается корректным применением асимптотического метода анализа возмущённых динамических систем (метода усреднения), а также подтверждается результатами численного моделирования. Основные результаты работы не противоречат известным результатам и являются обобщением некоторых из них.

#### **Апробация результатов**

Результаты исследования, полученные в диссертационной работе, докладывались на различных всероссийских и международных научных конференциях: Международной научно-технической конференции «Перспективные информационные технологии» (Самара, 2021г.); International Conference on Aerospace System Science and Engineering ICASSE (Москва, 2021г.); V Международной научно-технической конференции «Проблемы машиноведения» (Омск, 2022г.); XXIV Всероссийском семинаре по управлению движением и навигации летательных аппаратов (Самара, 2021г.); IX Международной конференции и молодёжной школе «Информационные технологии и нанотехнологии» (Самара, 2022г.); XXV Всероссийском семинаре по управлению движением и навигации летательных аппаратов (Самара, 2022г.). XXX Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам (Санкт-Петербург, 2023г.).

#### **Публикации**

Содержание диссертации отражено в 10 работах, из них 4 статьи опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК Минобрнауки России [6,7,88,93], 2 статьи опубликованы в изданиях, индексируемых в Scopus [8,95], 4 научных работы опубликованы в материалах конференций [9,10,11,96].

### **Личный вклад автора**

Все результаты диссертации, выносимые на защиту, получены автором либо лично, либо при его определяющем личном участии. Автором диссертации проведены все численные эксперименты, подтверждающие основные результаты работы.

### **Соответствие паспорту специальности**

Тема и содержание диссертации соответствует п.1 «Разработка и совершенствование математических моделей, используемых для описания движения и управления летательным аппаратом на различных режимах полёта», п.8 «Синтез терминального управления движением ЛА», п.10 «Исследование и разработка методов синтеза законов управления движением ЛА в условиях разнообразных неопределённостей...» направлений исследований паспорта научной специальности 2.5.16. Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов, отрасль наук – технические науки.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертационная работа включает: введение, три главы, заключение, основные условные обозначения, список литературы из 119 наименований. Общий объем диссертации составляет 113 страниц машинописного текста.

# 1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В АТМОСФЕРЕ МАРСА

В этой главе рассматриваются системы координат и матрицы перехода между ними, а также приводятся системы дифференциальных уравнений неуправляемого движения КА при спуске в атмосфере Марса. Здесь также описываются допущения, позволяющие упростить исходную нелинейную систему уравнений движения КА относительно центра масс, выполняемое с целью исследования поведения решений данной системы. Кроме того, также приводятся сведения о методе динамического программирования, применяемом в данной диссертации.

## 1.1 Описание систем координат, матриц перехода и силовых факторов, действующих на космический аппарат в атмосфере

Рассматриваются следующие прямоугольные системы координат для описания движения КА в атмосфере: связанная с КА система координат  $OXYZ$ , связанная с пространственным углом атаки система координат  $OX_nY_nZ_n$ , траекторная система координат  $OX_kY_kZ_k$ , скоростная система координат  $OX_aY_aZ_a$  и две вспомогательные системы координат с центрами приведения аэродинамических моментов и сил  $OX_1Y_1Z_1, OX_2Y_2Z_2$  [97,98].

Связанная система координат обозначается  $OXYZ$ . Начало координат этой системы располагается в центре масс космического аппарата. Оси  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  являются главными центральными осями КА. При отсутствии массово-инерционной и аэродинамической асимметрии ось  $OX$  является осью симметрии КА. Оси  $OY$ ,  $OZ$  перпендикулярны оси  $OX$  и дополняют систему координат  $OXYZ$  до правой тройки единичных векторов.

Система координат  $OX_nY_nZ_n$ , связанная с пространственным углом атаки, имеет начало координат в центре масс космического аппарата. Ось  $OX_n$  совпадает с осью  $OX$ . Ось  $OY_n$  находится в плоскости пространственного угла

атаки  $\alpha_n$ . Ось  $OZ_n$  является перпендикулярной осям  $OX_n$  и  $OY_n$ . Она дополняет единичные векторы первых двух осей до правой тройки единичных векторов, образующих систему координат  $OX_nY_nZ_n$ .

Траекторная система координат  $OX_kY_kZ_k$  имеет начало координат в центре масс космического аппарата. Ось  $OX_k$  направлена в противоположную сторону от вектора скорости КА. Ось  $OY_k$  направлена в противоположную сторону от радиуса-вектора положения КА на орбите планеты. Ось  $OZ_k$  является перпендикулярной осям  $OX_k$ ,  $OY_k$  и дополняет систему координат  $OX_kY_kZ_k$  до правой тройки единичных векторов.

Скоростная система координат  $OX_aY_aZ_a$  имеет начало координат в центре масс космического аппарата. Она получается из траекторной системы координат при повороте последней вокруг оси  $OX_k$  на угол крена  $\gamma$ . На рисунке 1.1 показаны данные системы координат.

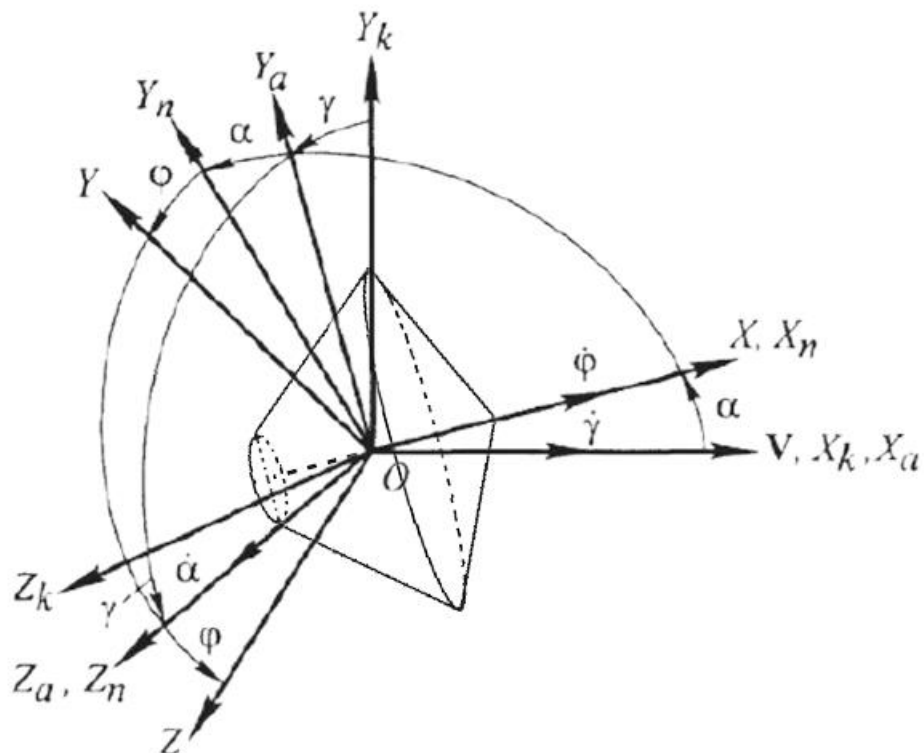


Рисунок 1.1 – Расположение связанной  $OXYZ$ , траекторной  $OX_kY_kZ_k$ , скоростной  $OX_aY_aZ_a$  и связанной с углом атаки  $OX_nY_nZ_n$  систем координат

Переход от траекторной системы координат  $OX_k Y_k Z_k$  к скоростной системе координат  $OX_a Y_a Z_a$  осуществляется поворотом траекторной системы координат  $OX_k Y_k Z_k$  на угол  $\gamma$  вокруг оси  $OX_k$ . Он выполняется по формуле:  $\vec{x}_a = [L_{ka}] \vec{x}_k$ , где  $[L_{ka}]$  - матрица перехода к скоростной системе координат  $OX_a Y_a Z_a$ . Здесь  $\vec{x}_a$  и  $\vec{x}_k$  - векторы координат, заданные в системах координат  $OX_a Y_a Z_a$  и  $OX_k Y_k Z_k$  последовательно. При этом выполняется равенство:

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ 0 & -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}.$$

Переход от скоростной системы координат  $OX_a Y_a Z_a$  к связанной с пространственным углом атаки  $OX_n Y_n Z_n$  осуществляется за счет поворота скоростной системы координат  $OX_a Y_a Z_a$  на угол  $\alpha_n = \alpha$  вокруг оси  $OZ_a$ . Он выполняется по формуле:  $\vec{x}_n = [L_{an}] \vec{x}_a$ , где  $[L_{an}]$  - матрица перехода от системы координат  $OX_a Y_a Z_a$  к связанной с углом атаки  $OX_n Y_n Z_n$ , определяемая из равенства:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix}.$$

Переход от траекторной системы координат  $OX_k Y_k Z_k$  к системе координат с пространственным углом атаки  $OX_n Y_n Z_n$  осуществляется по следующей формуле:  $\vec{x}_n = [L_{kn}] \vec{x}_k$ , где матрица перехода  $[L_{kn}]$  имеет вид:

$$[L_{kn}] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha)\cos(\gamma) & \sin(\alpha)\sin(\gamma) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\gamma) & \cos(\alpha)\sin(\gamma) \\ 0 & -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}.$$

Переход от системы координат, связанной с углом атаки  $OX_n Y_n Z_n$ , к системе координат, связанной с космическим аппаратом  $OXYZ$ , осуществляется посредством поворота  $OX_n Y_n Z_n$  на угол аэродинамического крена  $\varphi$  по формуле  $\vec{x} = [L_n] \vec{x}_n$ . В координатной форме это уравнение имеет вид:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}.$$

В конечном итоге, переход от траекторной системы  $OX_k Y_k Z_k$  к связанной с космическим аппаратом системе координат  $OXYZ$  осуществляется по формуле  $\vec{x} = [L]\vec{x}_k$ , где матрица  $[L]$  имеет вид:

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\gamma) & -\sin(\alpha)\sin(\gamma) \\ -\cos(\varphi)\sin(\alpha) & \cos(\varphi)\cos(\alpha)\cos(\gamma) - \sin(\varphi)\sin(\gamma) & \cos(\varphi)\cos(\alpha)\sin(\gamma) + \sin(\varphi)\cos(\gamma) \\ \sin(\varphi)\sin(\alpha) & -\sin(\varphi)\cos(\alpha)\cos(\gamma) - \cos(\varphi)\sin(\gamma) & -\sin(\varphi)\cos(\alpha)\sin(\gamma) + \cos(\varphi)\cos(\gamma) \end{bmatrix}.$$

Системы координат  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$  и  $O_1 X_2 Y_2 Z_2$  имеют начало координат в центре приведения аэродинамических сил и моментов  $O_1$ . Эти системы координат (СК) представлены на рисунке 1.2. Аэродинамические силы и моменты образуются при движении КА как твёрдого тела в набегающем потоке. Все аэродинамические силы приводятся к равнодействующей силе  $\vec{R}_A$ , приложенной к КА в центре давления  $O_1$ . Точка  $O_1$  является неподвижной относительно космического аппарата и не совпадает с его центром масс  $O$ , поэтому моменты аэродинамических сил в центре масс КА определяются из выражения:

$$\vec{M}_0 = \vec{M} - \Delta\vec{r}_n \times \vec{R}_A, \quad (1.1)$$

где  $\Delta\vec{r}_n$  - вектор, определяющий положение центра масс космического аппарата  $O$  в аэродинамической системе координат  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ .

Компоненты вектора аэродинамического момента  $\vec{M}_0$ , разложенного относительно осей системы координат  $OX_n Y_n Z_n$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} M_x &= m_{x1} q S l + (C_{y1} \Delta z_n - C_{z1} \Delta y_n) S q, \\ M_y &= m_{y1} q S l + (C_{z1} \Delta x_n - C_{x1} \Delta z_n) S q, \\ M_{z_n} &= m_{z1} q S l + (C_{x1} \Delta y_n - C_{y1} \Delta x_n) S q, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $C_{x1}, C_{y1}, C_{z1}$  - коэффициенты аэродинамических сил в СК  $O_1X_1Y_1Z_1$ ;  $m_{x1}, m_{y1}, m_{z1}$  - коэффициенты аэродинамических моментов в СК  $O_1X_1Y_1Z_1$ ;  $S$  и  $l$  - характерные площадь и размер КА;  $q$  - скоростной напор.

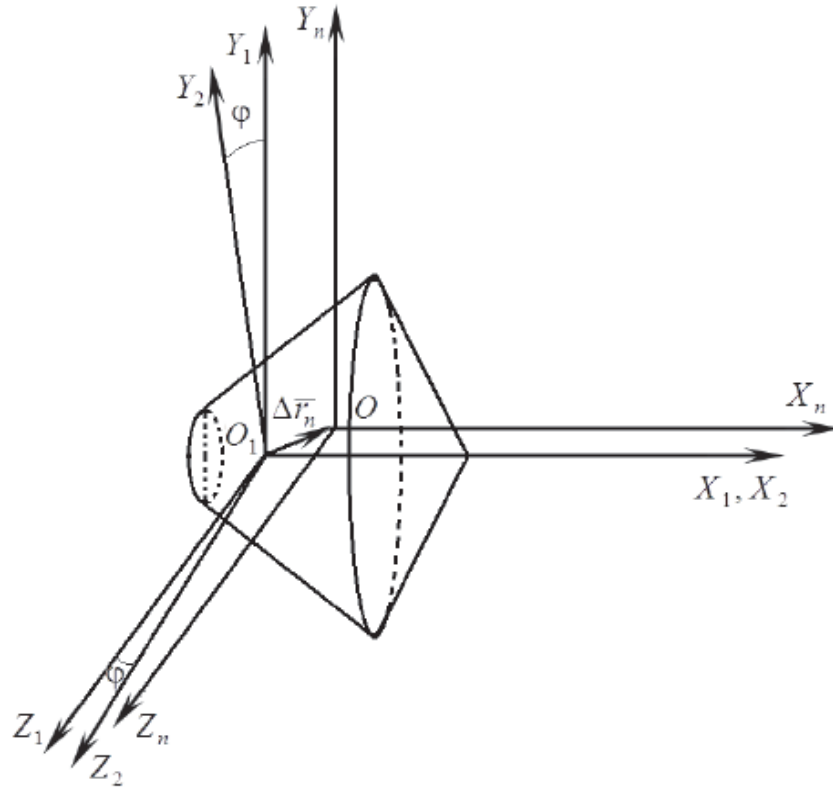


Рисунок 1.2 – Системы координат  $OX_1Y_1Z_1, OX_2Y_2Z_2$

Ось  $O_1X_2$  совпадает с осью  $O_1X_1$ , а оси  $O_1Y_2$  и  $O_1Z_2$  повернуты на угол  $\varphi$  (аэродинамический угол крена) относительно осей  $O_1Y_1$  и  $O_1Z_1$  последовательно.

При движении КА в атмосфере Марса, коэффициенты аэродинамических моментов  $m_{x1}$  и  $m_{y1}$  являются малыми, также как и аэродинамический коэффициент  $C_{z1}$ . Пренебрегая соответствующими этим коэффициентам аэродинамическими моментами, запишем систему (1.2) в упрощенном виде [24]:

$$\begin{aligned} M_x &= C_{y1} \Delta z_n S q, \\ M_y &= -C_{x1} \Delta z_n S q, \\ M_{zn} &= m_{zn} q S l + C_{x1} \Delta y_n S q, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $m_{zn} = m_{z1} - C_{y1}\Delta x$ ,  $\Delta x_n = \Delta x$ ,  $\Delta z_n = \Delta z \cos\varphi_n + \Delta y \sin\varphi_n$ ,  
 $\Delta y_n = \Delta y \cos\varphi_n + \Delta z \sin\varphi_n$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  - смещение центра масс КА в связанной системе координат,  $\varphi_n$  - аэродинамический угол крена.

Пусть форма КА близка к телу вращения, но не является строго осесимметричной. В этом случае в выражениях (1.3) добавляются малые возмущающие моменты от асимметричности формы. При этом компоненты аэродинамического момента в осях системы координат  $OX_n Y_n Z_n$  принимают следующий вид [64]:

$$\begin{aligned} M_x &= C_{y1}\Delta z_n Sq + m_x^f qSl + m_x^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_x qSl + m_x^{\bar{\omega}_{yn}} \bar{\omega}_{yn} qSl, \\ M_{yn} &= -C_{x1}\Delta z_n Sq + (m_y^f \cos\varphi_n - m_z^f \sin\varphi_n) qSl + m_{yn}^{\bar{\omega}_{yn}} \bar{\omega}_{yn} qSl + m_{yn}^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_x qSl, \\ M_{zn} &= m_{zn} qSl + C_{x1}\Delta y_n Sq + (m_z^f \cos\varphi_n + m_y^f \sin\varphi_n) qSl + m_{zn}^{\bar{\omega}_{zn}} \bar{\omega}_{zn} qSl, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $m_x^f, m_y^f, m_z^f$  - коэффициенты малых аэродинамических моментов, возникающих от асимметричности формы космического аппарата, заданные о связанной СК  $OXYZ$ ;  $m_x^{\bar{\omega}_x}, m_x^{\bar{\omega}_{yn}}, m_{yn}^{\bar{\omega}_{yn}}, m_{yn}^{\bar{\omega}_x}, m_{zn}^{\bar{\omega}_{zn}}$  - коэффициенты демпфирующих аэродинамических моментов;  $m_{zn}$  - коэффициент восстанавливающего аэродинамического момента, действующий в плоскости пространственного угла атаки;  $\bar{\omega}_x = \omega_x l / V$ ,  $\bar{\omega}_{yn} = \omega_{yn} l / V$ ,  $\bar{\omega}_{zn} = \omega_{zn} l / V$  - безразмерные угловые скорости [82,96].

## 1.2 Системы дифференциальных уравнений движения космического аппарата в атмосфере

### 1.2.1 Исходные дифференциальные уравнения движения космического аппарата в атмосфере в векторной форме

В этом разделе рассматриваются: исходные дифференциальные уравнения движения космического аппарата в векторной форме, нелинейные



уравнения вращательного движения КА с малой асимметрией относительно центра масс в атмосфере, приближённая нелинейная низкочастотная система уравнений движения асимметричного КА относительно центра масс, квазилинейная система уравнения движения асимметричного космического аппарата относительно центра масс.

Исходные дифференциальные уравнения КА, совершающего неуправляемый спуск в атмосфере, можно представить в векторной форме [65]:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{V}}{dt} &= \vec{R}_A/m + \vec{g}, \\ \frac{d\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K} &= \vec{M}_0,\end{aligned}\tag{1.5}$$

где  $\vec{V}$  - вектор скорости центра масс КА,  $\vec{g}$  - вектор гравитационного ускорения,  $\vec{K} = \|I\|\vec{\omega}$  - вектор кинетического момента КА,  $\vec{\omega}$  - вектор угловой скорости КА,  $\vec{R}_A$  - равнодействующая аэродинамических сил,  $\vec{M}_0$  - момент аэродинамических сил относительно центра масс КА;  $\vec{M}_0 = \vec{M} - \Delta\vec{r}_n \times \vec{R}_A$ ,  $\Delta\vec{r}_n$  - радиус-вектор, определяющий смещение центра масс космического аппарата  $O$  в системе координат  $O_1X_1Y_1Z_1$ ,  $\vec{M}$  - главный вектор момента равнодействующей аэродинамических сил,  $I$  - тензор инерции КА:

$$\|I\| = \begin{vmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{vmatrix}.\tag{1.6}$$

Здесь  $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$  - моменты инерции КА, заданные в связанной системе координат  $OXYZ$ .

При известных значениях всех элементов тензора инерции (1.6) и при известных значениях матрицы перехода  $[L]$  можно вычислить тензор инерции в любой другой подвижной СК [105], например, тензор инерции в траекторной СК находится по формуле:  $\|I\|_k = [L]\|I\|[L]^T$ . Здесь  $[L]$  - матрица перехода от связанной СК к траекторной СК.

## 1.2.2 Нелинейные уравнения вращательного движения космического аппарата с малой асимметрией в атмосфере относительно центра масс

Уравнения движения космического аппарата при наличии возмущений от малых массово-инерционной и аэродинамической асимметрий имеют вид [46,85,99]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dK_x}{dt} &= M_x^A + \Delta M_x, \\
 \frac{dK_{xk}}{dt} &= M_{xk}^A + \frac{C_{ya} q S (K_x - K_{xk} \cos \alpha_n)}{mV \sin \alpha_n} + \Delta M_{xk}, \\
 \frac{d\omega_{zn}}{dt} &= \frac{m_{zn} q S l}{I} + \frac{(K_x - K_{xk} \cos \alpha_n)(K_x \cos \alpha_n - K_{xk})}{I^2 \sin^3 \alpha_n} + \frac{M_{zn}^A}{I} + \frac{\Delta M_{zn}}{I}, \\
 \frac{d\alpha_n}{dt} &= \omega_{zn} - \frac{C_{ya} q S}{mV}, \\
 \frac{d\varphi_n}{dt} &= \frac{K_x}{I_x} + \frac{K_x \cos \alpha_n - K_{xk}}{I \sin^2 \alpha_n} \cos \alpha_n + \Delta \omega_\varphi, \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{K_{xk} - K_x}{I \sin^2 \alpha_n} + \Delta \omega_\gamma,
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

где  $M_x^A, M_{xk}^A, M_{zn}^A$  - проекция аэродинамических моментов, обусловленных массово-инерционной и аэродинамической асимметрией КА на соответствующие оси;  $\Delta M_x, \Delta M_{xk}, \Delta M_{zn}$  - проекции демпфирующих моментов на соответствующие оси;  $\Delta \omega_\varphi, \Delta \omega_\gamma$  - малые добавки к производным  $\dot{\varphi}_n$  и  $\dot{\gamma}$ , обусловленные асимметрией и неинерциальностью СК  $Ox_n Y_n Z_n$ .

Моменты  $M_x^A, M_{xk}^A, M_{zn}^A$ , связанные с массово-инерционной и аэродинамической асимметриями КА, определяются из следующих выражений [85,99]:

$$M_x^A = C_{y1} \Delta z_n qSl + I_{xzn} \frac{K_x^2 \cos \alpha_n}{I_x I \sin \alpha_n} - I_{xyn} \frac{K_x}{I_x} \omega_{zn} + m_x^\Phi qSl +$$

$$+ \frac{\Delta I}{I} \left\{ \omega_{zn} \frac{K_{xk} - K_x \cos \alpha_n}{\sin \alpha_n} \cos(2\varphi_n) + \frac{I \sin(2\varphi_n)}{2} \left[ \left( \frac{-K_{xk} + K_x \cos \alpha_n}{I \sin \alpha_n} \right)^2 - \omega_{zn}^2 \right] \right\} +$$

$$+ \frac{I_{yz}}{I} \left\{ 2\omega_{zn} \frac{-K_{xk} + K_x \cos \alpha_n}{\sin \alpha_n} \sin(2\varphi_n) + I \cos(2\varphi_n) \left[ \left( \frac{-K_{xk} + K_x \cos \alpha_n}{I \sin \alpha_n} \right)^2 - \omega_{zn}^2 \right] \right\},$$

$$M_{xk}^A = (C_{y1} \cos \alpha_n + C_{x1} \sin \alpha_n) \Delta z_n S q + (m_y^f \cos \varphi_n - m_z^f \sin \varphi_n) qSl + m_x^f qSl \cos \alpha_n,$$

$$M_{zn}^A = C_{x1} \Delta y_n qS + m_x^\Phi (\cos \varphi_n + \sin \varphi_n) qSl +$$

$$+ I_{xyn} \frac{K_x}{I_x} \left[ \frac{K_x}{I_x} + \frac{K_x (1 + \cos^2 \alpha_n) - 2K_{xk} \cos \alpha_n}{I \sin \alpha_n} \right] +$$

$$+ \Delta I \cos 2\varphi_n \left[ \left( \frac{K_x}{I_x} + \frac{K_x \cos \alpha_n - K_{xk} \cos \alpha_n}{I \sin^2 \alpha_n} \right) \left( \omega_{zn} \operatorname{tg} 2\varphi_n + \frac{K_x \cos \alpha_n - K_{xk}}{I \sin \alpha_n} \right) - \frac{m_{zn} qSl}{2I} \right] -$$

$$- I_{yz} \cos 2\varphi_n \left[ 2 \left( \frac{K_x}{I_x} + \frac{K_x \cos \alpha_n - K_{xk} \cos \alpha_n}{I \sin^2 \alpha_n} \right) \left( \frac{K_x \cos \alpha_n - K_{xk}}{I \sin \alpha_n} \operatorname{tg} 2\varphi_n - \omega_{zn} - \frac{m_{zn} qSl}{I} \right) \right].$$

де  $I_{xyn} = I_{xy} \cos \varphi_n - I_{xz} \sin \varphi_n$ ,  $I_{xzn} = I_{xz} \cos \varphi_n + I_{xy} \sin \varphi_n$ .

Проекции демпфирующих моментов  $\Delta M_x, \Delta M_{xk}, \Delta M_{zn}$  вычисляются по формулам:

$$\Delta M_x = (m_x^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_x + m_x^{\bar{\omega}_{yn}} \bar{\omega}_{yn}) qSl,$$

$$\Delta M_{xk} = \left[ (m_x^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_x + m_x^{\bar{\omega}_{yn}} \bar{\omega}_{yn}) \cos \alpha_n - (m_{yn}^{\bar{\omega}_{yn}} \bar{\omega}_{yn} + m_{yn}^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_x) \sin \alpha_n \right] qSl,$$

$$\Delta M_{zn} = m_{zn}^{\bar{\omega}_{zn}} \bar{\omega}_{zn} qSl,$$

где  $\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_{yn}, \bar{\omega}_{zn}$  - угловые скорости в безразмерном виде.

Малые добавки  $\Delta \omega_\varphi, \Delta \omega_\gamma$  к производным  $\varphi_n'$  и  $\gamma'$ , обусловленные неинерциальностью и асимметрией СК  $Ox_n Y_n Z_n$ , имеют вид:

$$\Delta \omega_\varphi = \frac{I_{xzn}}{I_x} \frac{d\alpha_n}{dt} + \frac{I_{xyn}}{I_x} \frac{2K_x \cos \alpha_n - K_{xk}}{I \sin \alpha_n} + \frac{d\alpha_n}{dt} \operatorname{ctg} \alpha_n \left( \frac{I_{yz} \sin 2\varphi_n}{I} + \frac{\Delta I \sin 2\varphi_n}{2I} \right) -$$

$$- \frac{K_x \cos \alpha_n - K_{xk}}{I^2 \sin^2 \alpha_n} (I_{yz} \sin 2\varphi_n + \Delta I \cos^2 \varphi_n),$$

$$\Delta\omega_\gamma = \frac{I_{xyn}}{I_x \sin \alpha_n} \frac{K_x}{I} - \frac{d\alpha_n}{dt} \left( I_{yz} \cos 2\varphi_n + \Delta I \sin 2\varphi_n / 2 \right) \frac{1}{I \sin \alpha_n} +$$

$$+ \frac{K_x \cos \alpha_n - K_{xk}}{I^2 \sin^2 \alpha_n} \left( I_{yz} \sin 2\varphi_n - \Delta I \cos^2 \varphi_n \right) + \frac{C_{ya} qS}{mV} \operatorname{tg} \varphi_n \sin \gamma.$$

### 1.2.3 Приближённая нелинейная низкочастотная система уравнений движения асимметричного КА относительно центра масс в атмосфере

Приближенная нелинейная низкочастотная система уравнения движения неуправляемого КА относительно центра масс в атмосфере получена в работе [79]. В дальнейшем, она была повторно получена Заболотновым Ю.М. методом интегральных многообразий в работе [80]. Данная система уравнений имеет вид:

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} = \mu M_x - \mu \omega_\gamma^2 \sin \alpha \left[ I_{xzn} \cos \alpha - I_{yzn} \sin \alpha \right],$$

$$\frac{d\alpha}{dt} \left[ \frac{M_{zn}^\alpha}{I} - \omega_\gamma^2 - (\bar{I}_x \omega_x - \omega_\gamma \cos \alpha) (\bar{I}_x \omega_x - 2\omega_\gamma \cos \alpha) \right] =$$

$$= -\mu \frac{M_{zn}}{Iq} \frac{dq}{dt} - \mu \frac{M_{zn}}{I} \frac{d\varphi}{dt} - \mu \frac{M_{yn}}{I} (\bar{I}_x \omega_x - 2\omega_\gamma \cos \alpha) + \mu \frac{M_x}{I} \omega_\gamma \sin \alpha$$

$$+ \mu \frac{C_{yk} qS}{mV} (\bar{I}_x \omega_x - \omega_\gamma \cos \alpha) (\bar{I}_x \omega_x - 2\omega_\gamma \cos \alpha) - \mu \frac{I_{xzn}}{I} \left[ \omega_\gamma^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \right] + \quad (1.8)$$

$$+ \mu \frac{I_{xzn}}{I} \left[ \frac{d\varphi}{dt} (\omega_x^2 - \omega_\gamma^2 \sin^2 \alpha) + \omega_x^2 (\bar{I}_x \omega_x - 2\omega_\gamma \cos \alpha) \right] + \mu \frac{I_{yzn}}{I} \left[ \omega_\gamma^3 \sin^3 \alpha \right] -$$

$$- \mu \frac{I_{yzn}}{I} \omega_\gamma \sin \alpha \left[ \left( \frac{d\varphi}{dt} + \omega_x \right) \left( 2 \frac{d\varphi}{dt} + \bar{I}_x \omega_x - 2\omega_\gamma \cos \alpha \right) \right],$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_x - \omega_\gamma \cos \alpha,$$

где  $\omega_\gamma = \frac{d\gamma}{dt}$ ,  $M_{zn} = m_{zn} qSl$ ,  $M_{zn}^\alpha = m_{zn}^\alpha qSl$ ,

Система уравнений (1.8) преобразуется к форме, удобной для асимптотического анализа, с выделением обобщенных параметров асимметрии [64-66]:

$$\begin{aligned}
\bar{I}_x \frac{d\omega_x}{dt} &= -\varepsilon m_x^A \sin(\theta + \theta_2) + \varepsilon m^A \omega_{1,2}^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \cos(2\theta + 2\theta_3) + \varepsilon m_{x0}^f \frac{qSl}{I}, \\
\frac{F_a}{4\omega_a^2} \frac{d\alpha}{dt} &= -\varepsilon \frac{dq}{dt} \frac{\omega \operatorname{tg} \alpha}{4q\omega_a^2} - \varepsilon \frac{m_{x0}^f qSl \omega_{1,2} \operatorname{tg} \alpha}{4\omega_a^2 I} \mp \varepsilon \frac{m^A}{2\omega_a} \cos(\theta + \theta_1) - \\
&- \varepsilon \frac{\omega_x \omega_{1,2}^2 \operatorname{tg} \alpha}{4\omega_a^2 / m^A} \left[ (10 + \bar{I}_x) - \frac{2\omega_x (2 + \bar{I}_x)}{\omega_{1,2}} - \frac{\omega_{1,2} (\operatorname{tg}^2 \alpha - 4)}{\omega_x} \right] \cos(2\theta + 2\theta_3) - \\
&- \varepsilon \frac{C_{yk} qS}{4\omega_a^2 mV} (\bar{I}_x \omega_x - \omega_{1,2}) (\bar{I}_x \omega_x - 2\omega_{1,2}), \\
\frac{d\theta}{dt} &= \omega_x - \omega_{1,2}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь  $F_a, m^A, m_x^A, \theta_1, \theta_2$  – известные функции, имеющие следующие значения:

$$\begin{aligned}
F_a &= -\frac{M_{zn}^\alpha}{I} + \frac{\omega_{1,2}^2}{\cos^2 \alpha} + (\bar{I}_x \omega_x - \omega_{1,2}) (\bar{I}_x \omega_x - 2\omega_{1,2}), \\
m^A &= \sqrt{(m_1^A)^2 + (m_2^A)^2}, m_x^A = \sqrt{(m_{x1}^A)^2 + (m_{x2}^A)^2}, \\
m_1^A &= -\frac{(1 + \bar{I}_x) \omega_x - 3\omega_{1,2}}{2\omega_a m_{zn} / \omega^2} (m_y^f - C_x \bar{\Delta z}) \operatorname{tg} \alpha - \frac{\omega_{1,2} \omega^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2\omega_a m_{zn}} (m_{xc}^f + C_{yn} \bar{\Delta z}) \mp \\
&\mp \frac{\bar{I}_{xz}}{2\omega_a} \left[ \omega_x \omega_{1,2} (\omega_x + \omega_{1,2} \operatorname{tg}^2 \alpha) - \omega_x^2 (\omega_x \mp 2\omega_a) \right], \\
m_2^A &= -\frac{(1 + \bar{I}_x) \omega_x - 3\omega_{1,2}}{2\omega_a m_{zn} / \omega^2} (m_z^f + C_x \bar{\Delta y}) \operatorname{tg} \alpha + \frac{\omega_{1,2} \omega^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2\omega_a m_{zn}} (m_{xs}^f + C_{yn} \bar{\Delta y}) \pm \\
&\pm \frac{\bar{I}_{xy}}{2\omega_a} \left[ \omega_x \omega_{1,2} (\omega_x + \omega_{1,2} \operatorname{tg}^2 \alpha) - \omega_x^2 (\omega_x \mp 2\omega_a) \right], \\
\sin \theta_1 &= m_1^A / m^A, \cos \theta_1 = -m_2^A / m^A, \\
m_{x1}^A &= -\frac{\omega^2}{m_{zn}} (m_{xs}^f + C_{yn} \bar{\Delta y}) \operatorname{tg} \alpha - \bar{I}_{xy} \omega_{1,2}^2 \operatorname{tg} \alpha, \\
m_{x2}^A &= -\frac{\omega^2}{m_{zn}} (m_{xc}^f + C_{yn} \bar{\Delta z}) \operatorname{tg} \alpha - \bar{I}_{xz} \omega_{1,2}^2 \operatorname{tg} \alpha,
\end{aligned}$$

$$\sin \theta_2 = -m_{x1}^A / m_x^A, \cos \theta_2 = m_{x2}^A / m_x^A,$$

где  $\omega_\alpha = \sqrt{\bar{I}_x^2 \omega_x^2 / 4 + \omega^2}$ ,  $m^A = \sqrt{(\bar{I}_{yz})^2 + (\bar{\Delta I})^2}$ ,  $\sin 2\theta_3 = \bar{\Delta I} / m^A$ ,  $\cos 2\theta_3 = -\bar{I}_{yz} / m^A$ ,  
 $I_y = I_z = I$ ,  $\bar{I}_{xy} = I_{xy} / I$ ,  $\bar{I}_{xz} = I_{xz} / I$ ,  $\bar{I}_{yz} = I_{yz} / I$ ,  $\bar{\Delta I} = \Delta I / I$ ,  $\Delta I = (I_z - I_y) / 2$ ,  
 $\omega_{1,2} = \bar{I}_x \omega_x / 2 \pm \omega_\alpha$ ,  $\bar{m}_A = m_A / \omega^2$ ,  $\bar{m}_x^A = m_x^A / \omega^2$ ,  $\omega = \sqrt{-m_{zn0} q S l / I}$ ,  $\varepsilon$  – малый параметр, характеризующий величину функций асимметрии  $\bar{m}_A, \bar{m}_x^A$ ;  $\theta$  – быстрая фаза,  $\theta = \varphi - \pi / 2$ ;  $\varphi$  – аэродинамический угол крена;  $\bar{m}_A, \bar{m}_x^A$  – функции медленных переменных  $\omega_x$  и  $\alpha$ , характеризующие величину массово-инерционной асимметрий и аэродинамической асимметрий;  $m_{y0}^f, m_{z0}^f$  – малые безразмерные коэффициенты аэродинамической асимметрий КА;  $C_{yn}, C_{xn}, m_{zn}$  – коэффициенты, характеризующие аэродинамические характеристики КА;  $I_x, I_y, I_z$  – моменты инерции КА относительно осей связанной системы координат OXYZ;  $\omega$  – частота прецессии при угловой скорости  $\omega_x = 0$ ;  $\omega_{1,2}$  – частоты «прямой» и «обратной» прецессии;  $\omega_x - \omega_{1,2}$  – резонансное соотношение частот;  $q$  – скоростной напор;  $S$  – площадь миделевого сечения;  $l$  – длина КА;  $m_{zn0}$  – коэффициент восстанавливающего аэродинамического момента;  $\theta_1$  – параметр, который определяет взаимное расположение массово-инерционной асимметрий и аэродинамической асимметрий;  $\theta_2$  – параметр определяет расположение асимметрий от смещений центра масс в связанной СК;  $\bar{\Delta y}, \bar{\Delta z}$  – малые безразмерные смещения центра масс КА в связанной системе координат,  $\bar{\Delta y} = \Delta y / l, \bar{\Delta z} = \Delta z / l$ ,  $\Delta y, \Delta z$  – малые смещения центра масс КА в связанной системе координат. В рассмотренных уравнениях верхний знак « $\pm$ » выбирается при  $\omega_x > 0$ , а нижний при  $\omega_x < 0$ .

Система уравнений (1.9) содержит три искоемые переменные: две медленные переменные  $\alpha$ ,  $\omega_x$  и одну быструю фазу  $\theta$ . Система уравнений (1.9) применяется при моделировании движения КА с величинами

пространственного угла атаки  $\alpha \in (0, \pi/2)$  и при быстрой фазе  $\theta \in [0, 2\pi]$ . При получении системы уравнений (1.9) были сделаны следующие предположения:

1. коэффициент аэродинамического момента асимметрии был аппроксимирован в ряде Фурье по аэродинамическому углу крена  $\varphi$ :

$$m_x^f \approx m_{x_0}^f + m_{x_s}^f \sin \varphi + m_{x_c}^f \cos \varphi,$$

2. не были учтены аэродинамические демпфирующие моменты.

В системе уравнений (1.9) главный резонанс возможен при  $d\theta/dt = \omega_x - \omega_{1,2} = 0$ . Из решения этого уравнения находим значение угловой скорости, соответствующее главному резонансу:  $\omega_x^r = \omega / \sqrt{1 - \bar{I}_x}$ .

#### 1.2.4 Квазилинейная система уравнения движения асимметричного космического аппарата относительно центра масс

Квазилинейная система уравнений движения [85,99] космического аппарата с малой массово-инерционной и аэродинамической асимметриями в атмосфере, получена в работах Заболотнова Ю.М. [63-66] и может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = F^{(0)}(x) + \varepsilon F^{(1)}(x) + \varepsilon^2 \dots \quad (1.10)$$

Здесь  $\varepsilon$  - малый параметр;  $x$  - вектор переменных,  $x = (\alpha_1, \alpha_2, \omega_x, \gamma_1, \gamma_2, \Phi, r)$ ,

$F^{(0)}, F^{(1)}$  - векторы соответствующих функций, содержащихся в правых частях уравнений (1.10);  $F^{(0)} = (F_1^{(0)}, F_2^{(0)}, \dots, F_7^{(0)})$ ,  $F^{(1)} = (F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, \dots, F_7^{(1)})$ ,

$F_1^{(0)} = F_2^{(0)} = F_3^{(0)} = F_7^{(0)} = 0$ ,  $F_4^{(0)} = \omega_1$ ,  $F_5^{(0)} = \omega_2$ ,  $F_6^{(0)} = \omega_x$ ;  $\omega_x$  - угловая скорость

космического аппарата;  $F_1^{(1)} = -[a_1 \dot{\omega}_1 + a_2 \dot{\omega}_2 \cos(\gamma_2 - \gamma_1) - \text{Im}(We^{-i\gamma_1})] / 2\omega_a$ ,

$F_2^{(1)} = [a_2 \dot{\omega}_2 + a_1 \dot{\omega}_1 \cos(\gamma_2 - \gamma_1) - \text{Im}(We^{-i\gamma_2})] / 2\omega_a$ ,  $F_3^{(1)} = R(r, \omega_x, a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2, \Phi) / \bar{I}_x$ ,

$F_4^{(1)} = -[a_2 \dot{\omega}_2 \sin(\gamma_2 - \gamma_1) + \text{Re}(We^{-i\gamma_1})] / 2a_1 \omega_a$ ,  $F_6^{(1)} = \psi(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2)$ ,

$F_5^{(1)} = -[a_1 \dot{\omega}_1 \sin(\gamma_2 - \gamma_1) - \text{Re}(We^{-\gamma_2})] / 2a_2 \omega_a$ ,  $\omega_a = \left( \bar{I}_x \omega_x^2 / 4 + \omega^2 \right)^{1/2}$ ;  $\bar{I}_x = I_x / I$ ,  $I_x = I_y = I_z = I$ ,  $I = (I_y + I_z) / 2$  - моменты инерции космического аппарата в связанной системе координат OXYZ;  $\omega$  - частота прецессии при  $\omega_x = 0$ ;  $\omega = \sqrt{-m_{zn0} qSL / I}$ ; Функции  $W$ ,  $R$ ,  $\psi$  представлены в работе [63].

Следует отметить, что квазилинейная система определяет движение космического аппарата при малых значениях пространственного угла атаки, что ограничивает использование этой системы для анализа движения космического аппарата относительно центра масс. Следует отметить, что квазилинейные уравнения учитывают резонансное соотношение частот  $\omega_x - \omega_1$ , где  $\omega_1 = \bar{I}_x \omega_x + \left( \bar{I}_x \omega_x^2 / 4 + \omega^2 \right)^{1/2}$ . Если это соотношение частот близко к нулю  $\omega_x - \omega_1 \approx 0$ , то в системе уравнений может наблюдаться резонанс, который называется главным резонансом.

Предположим, что космический аппарат содержит малые аэродинамические и массовые асимметрии. Более того, в дальнейшем исследовании предполагается, что величины угловой скорости  $\omega_x$  и пространственного угла атаки космического аппарата в атмосфере Марса являются управляемыми. Управление заданными характеристиками движения космического аппарата относительно центра масс осуществляется с помощью реактивных двигателей малой тяги [11].

Согласно статье [65], квазилинейная частично усреднённая система, записанная с учётом только линейных членов по амплитудам пространственного угла атаки, имеет вид:



$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_1}{dt} &= -\frac{\omega}{2\omega_a^2}\alpha_1\frac{d\omega}{dt} - \frac{m^A}{2\omega_a}\cos(\theta + \theta_1), \\
\bar{I}_x\frac{d\omega_x}{dt} &= -\alpha_1 m_x^A \sin(\theta + \theta_2), \\
\frac{d\theta}{dt} &= \omega_x - \omega_1 + m^A \sin(\theta + \theta_1) / 2\alpha_1\omega_a, \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\omega}{2q}\frac{dq}{dt},
\end{aligned} \tag{1.11}$$

где  $m^A, m_x^A, \theta_1, \theta_2$  – задаются следующими формулами;

$$m^A = \sqrt{(m_1^A)^2 + (m_2^A)^2}, m_x^A = \sqrt{(m_{x1}^A)^2 + (m_{x2}^A)^2},$$

$$m_1^A = -\frac{\omega^2}{m_{z1}}m_{y0}^f + \frac{\omega^2}{m_{z1}}C_{x0}\bar{\Delta z} - \omega_x^2\bar{I}_{xz}, m_2^A = -\frac{\omega^2}{m_{z1}}m_{z0}^f - \frac{\omega^2}{m_{z1}}C_{x0}\bar{\Delta y} + \omega_x^2\bar{I}_{xy},$$

$$m_{x1}^A = -\frac{\omega^2}{m_{z1}}C_{y1}\bar{\Delta y} - \omega_1^2\bar{I}_{xy}, m_{x2}^A = -\frac{\omega^2}{m_{z1}}C_{y1}\bar{\Delta z} - \omega_1^2\bar{I}_{xz},$$

$$\sin\theta_1 = m_1^A/m^A, \cos\theta_1 = -m_2^A/m^A, \sin\theta_2 = -m_{x1}^A/m_x^A, \cos\theta_2 = m_{x2}^A/m_x^A,$$

$$\omega_a = \sqrt{\bar{I}_x^2\omega_x^2/4 + \omega^2}, I_y = I_z = I, \bar{I}_{xy} = I_{xy}/I, \bar{I}_{xz} = I_{xz}/I, \omega_1 = \bar{I}_x\omega_x/2 + \omega_a,$$

$$\bar{m}_A = m_A/\omega^2, \bar{m}_x^A = m_x^A/\omega^2, \omega = \sqrt{-m_{zn0}qSl/I}, \bar{\Delta y} = \Delta y/l, \bar{\Delta z} = \Delta z/l, \theta - \text{быстрая}$$

фаза,  $\theta = \varphi - \pi/2$ ;  $\varphi$  – аэродинамический угол крена;  $\bar{m}_A, \bar{m}_x^A$  – функции

медленных переменных  $\omega_x$  и  $\alpha$ , характеризующие величину массово-

инерционной и аэродинамической асимметрий;  $m_{y0}^f, m_{z0}^f$  – малые безразмерные

коэффициенты величин аэродинамической асимметрий КА;  $C_{y1}, C_{x0}, m_{z1}$  –

коэффициенты, характеризующие аэродинамические характеристики КА;

$I_x, I_y, I_z$  – моменты инерции КА относительно осей связанной системы

координат;  $\omega$  – частота прецессии при угловой скорости  $\omega_x = 0$ ;  $\omega_1$  – частота

прямой прецессии;  $q$  – скоростной напор;  $S$  – площадь миделевого сечения;  $l$  –

длина КА;  $m_{zn0}$  – коэффициент восстанавливающего аэродинамического

момента;  $\theta_1$  – параметр, который определяет взаимное расположение массово-

инерционной и аэродинамической асимметрий;  $\theta_2$  – параметр определяет

взаимное расположение асимметрии от смещения центра масс в связанной СК;  $\overline{\Delta y}, \overline{\Delta z}$  – малые безразмерные коэффициенты смещений центра масс КА в связанной системе координат.

Следует отметить, что непосредственное применение рассмотренных выше систем уравнений движения КА для синтеза одновременного оптимального управления угловой скоростью и пространственным углом атаки практически невозможно. По этой причине будем рассматривать следующие три системы уравнений движения КА, полученные при линеаризации системы уравнений (1.11) по угловой скорости. Первая система учитывает малую аэродинамическую асимметрию и малый аэродинамический демпфирующий момент. Вторая система учитывает малую аэродинамическую асимметрию и малое смещение центра масс. Третья система учитывает только малое смещение центра масс.

Первая и вторая системы используются при моделировании спуска КА в атмосфере Марса, а третья система используется при моделировании низкоорбитального движения малых космических аппаратов, исследующих поверхность Марса.

#### **1.2.4.1 Квазилинейная система уравнения движения космического аппарата с малой аэродинамической асимметрией и малым аэродинамическим демпфирующим моментом относительно центра масс в атмосфере**

В результате разложения правых частей квазилинейных уравнений неуправляемого движения космического аппарата в атмосфере Марса в ряд Маклорена по угловой скорости  $\omega_x$  без учёта нелинейных членов второго порядка малости и при малых положительных угловых скоростях, при малых значениях пространственного угла атаки, при малой аэродинамической асимметрии и с учётом малого демпфирующего момента, получаем

линеаризованную систему уравнений движения КА относительно центра масс при  $\omega_x > 0$  [100]:

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_x}{dt} &= \varepsilon \frac{m_x^\omega q S^2 L}{I_x V} \omega_x, \\ \frac{d\alpha}{dt} &= -\varepsilon \frac{\bar{m}_A}{\bar{I}_x} \omega_x \cos(\theta + \theta_3), \\ \frac{d\theta}{dt} &= (1 - \bar{I}_x) \omega_x,\end{aligned}\tag{1.12}$$

где  $\bar{m}_A = m_A \omega^{-2}$  - функция медленных переменных  $\omega_x$  и  $\alpha$ , характеризующая малые значения аэродинамической асимметрии;  $m_A = \sqrt{(m_1^A)^2 + (m_2^A)^2}$ ,  $m_1^A = -\frac{\omega^2}{m_{z1}} m_{y0}^f$ ,  $m_2^A = -\frac{\omega^2}{m_{z1}} m_{z0}^f$ ;  $\sin \theta_3 = m_1^A / m_A$ ;  $\cos \theta_3 = -m_2^A / m_A$ ;  $\theta_3$  - угол, который определяет положение аэродинамической асимметрии в связанной системе координат;  $m_{y0}^f, m_{z0}^f$  - коэффициенты малой аэродинамической асимметрии КА;  $m_x^\omega$  - параметр, характеризующий малый аэродинамический демпфирующий момент.

#### 1.2.4.2 Квазилинейная система уравнения движения космического аппарата с малой аэродинамической асимметрией и при малом смещении центра масс относительно центра масс в атмосфере

В результате разложения правых частей квазилинейных уравнений (1.11) неуправляемого движения космического аппарата в атмосфере Марса в ряд Маклорена по угловой скорости  $\omega_x$  без учёта нелинейных членов второго порядка малости, при малых положительных значениях угловой скорости  $\omega_x$ , при малых значениях пространственного угла атаки, при малой аэродинамической асимметрией и при малом смещении центра масс, получаем линеаризованную систему уравнений движения КА относительно центра масс при  $\omega_x > 0$  [8]:

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_x}{dt} &= -\varepsilon \bar{m}_x^A \omega^2 \bar{I}_x^{-1} \sin(\theta + \theta_2), \\
\frac{d\alpha}{dt} &= -\varepsilon \frac{\bar{m}_A}{2} \omega \cos(\theta + \theta_1), \\
\frac{d\theta}{dt} &= (1 - \bar{I}_x) \omega_x.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Здесь  $\varepsilon$  – малый параметр, характеризующий величину асимметрии  $\bar{m}_A, \bar{m}_x^A$ ;  $\bar{m}_A, \bar{m}_x^A$  – безразмерные функции медленных переменных  $\omega_x$  и  $\alpha$ , характеризующие малую массовую и аэродинамическую асимметрию;

$$\bar{m}_A = m_A \omega^{-2}; \quad \bar{m}_x^A = m_x^A \omega^{-2}; \quad m_A = \sqrt{(m_1^A)^2 + (m_2^A)^2}; \quad m_1^A = -\frac{\omega^2}{m_{z1}} m_{y0}^f + \frac{\omega^2}{m_{z1}} C_{x1} \bar{\Delta z};$$

$$m_2^A = -\frac{\omega^2}{m_{z1}} m_{z0}^f - \frac{\omega^2}{m_{z1}} C_{x1} \bar{\Delta y}; \quad \sin \theta_1 = m_1^A / m_A; \quad \cos \theta_1 = -m_2^A / m_A; \quad m_x^A = \sqrt{(m_{x1}^A)^2 + (m_{x2}^A)^2};$$

$$m_{x1}^A = -\frac{\omega^2}{m_{z1}} C_{y1} \bar{\Delta y}; \quad m_{x2}^A = -\frac{\omega^2}{m_{z1}} C_{y1} \bar{\Delta z}; \quad \sin \theta_2 = -m_{x1}^A / m_x^A; \quad \cos \theta_2 = m_{x2}^A / m_x^A;$$

$\omega_\alpha = \sqrt{\bar{I}_x^2 \omega_x^2 / 4 + \omega^2}$ ;  $m_{y0}^f, m_{z0}^f$  – малые безразмерные коэффициенты величин аэродинамической асимметрий КА;  $\bar{\Delta y}, \bar{\Delta z}$  – малые безразмерные коэффициенты смещения центра масс КА;  $C_{y1}, C_{x1}, m_{z1}$  – аэродинамические коэффициенты КА;  $\omega$  – частота прецессии при угловой скорости  $\omega_x = 0$ ,  $\omega = \sqrt{-m_{zn}^\alpha qSL / I}$ .

### 1.2.4.3 Квазилинейная система уравнения движения космического аппарата при малом смещении центра масс относительно центра масс

Применим квазилинейные уравнения движения асимметричного космического аппарата при моделировании движения космического аппарата в атмосфере Марса относительно центра масс при малых значениях пространственного угла атаки и при малом смещении центра масс. Кроме того, угловая скорость и пространственный угол атаки космического аппарата являются управляемыми при движении в атмосфере Марса.

Предполагается, что космический аппарат летит по низкой круговой орбите вокруг Марса. Потери скорости космического аппарата, вызванные аэродинамическим трением, компенсируются работой основных реактивных двигателей космического аппарата. Управление вращением асимметричного КА относительно вектора скорости с заданными характеристиками осуществляется с помощью реактивных двигателей малой тяги.

После разложения правых частей квазилинейных уравнений управляемого движения космического аппарата в ряд Маклорена для угловой скорости, без учета нелинейных членов второго порядка малости, мы получаем линеаризованную систему уравнений движения космического аппарата относительно центра масс:

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_x}{dt} &= -\varepsilon\bar{m}\omega^2\bar{I}_x^{-1}\sin(\theta + \theta_1), \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \varepsilon\frac{\bar{m}C_{y1}\omega}{2C_{x1}}\cos(\theta + \theta_1), \\ \frac{d\theta}{dt} &= (1 - \bar{I}_x)\omega_x.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Здесь  $\omega_x$  – угловая скорость,  $\theta$  – быстрая фаза,  $\alpha$  – пространственный угол атаки,  $\varepsilon$  – малый параметр характеризует параметры асимметрии  $\bar{m}$ ,  $\bar{m}$  – безразмерный параметр, характеризующий величину малых смещений центра

$$\text{масс; } \bar{m} = \sqrt{(m_1)^2 + (m_2)^2}, \quad m_1 = -\frac{C_{y1}\bar{\Delta y}}{m_{z1}}, \quad m_2 = -\frac{C_{y1}\bar{\Delta z}}{m_{z1}}; \quad \sin\theta_1 = -m_1 / \bar{m};$$

$\cos\theta_1 = m_{x2}^A / m_x^A$ ;  $\bar{\Delta y}, \bar{\Delta z}$  – малые безразмерные смещения центра масс космического аппарата,  $C_{y1}, C_{x1}, m_{z1}$  – коэффициенты аэродинамических

характеристик космического аппарата.  $\bar{I}_x = I_x / I$ ,  $I_x, I_y, I_z$  – моменты инерции космического аппарата в связанной системе координат,  $I_y = I_z = I$ ;  $\omega$  – частота

прецессии при угловой скорости  $\omega_x = 0$ ,  $\omega = \sqrt{-m_{z1}qSl / I}$ ,  $q$  – скоростной напор,  $S$  – площадь миделевого сечения космического аппарата,  $l$  – длина

космического аппарата,  $m_{z1}$  – коэффициент восстанавливающего аэродинамического момента.

Следует отметить, что случай отрицательного значения угловой скорости  $\omega_x < 0$  может быть рассмотрен аналогичным образом. Таким образом, при наличии малой асимметрии смещений центра масс в рассматриваемой системе (1.14) и при отсутствии функций управления наблюдаются возмущения угловой скорости  $\omega_x$  и пространственного угла атаки  $\alpha$ .

### 1.2.5 Уравнения движения центра масс космического аппарата в атмосфере

Система уравнений движения центра масс КА, близкого по форме к осесимметричной, полученная без учёта вращения атмосферы, с учётом центральности поля притяжения и без учёта ветровых возмущений имеет вид [46,98]:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{m}(-C_{xa}qS - mg \sin \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{1}{mV} \left[ (C_{ya} \cos \gamma)qs - mg \left(1 - \frac{V^2}{r}\right) \cos \vartheta \right], \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x \cos(\alpha) + tg(\vartheta) \left[ \frac{C_{ya}qs}{mV} \sin(\gamma) \right], \\ \frac{dH}{dt} &= V \sin \vartheta, \end{aligned} \tag{1.15}$$

где  $C_{xa}(\alpha)$  - коэффициент лобового сопротивления КА;  $C_{xa}(\alpha) = C_{x0} \cos(\alpha)$ ,  $C_{ya}(\alpha)$  - коэффициент подъёмной силы КА;  $C_{ya}(\alpha) = C_{y0} \sin(\alpha)$ ,  $M_{zn}(\alpha) = -qsl\delta(C_1 \sin(\alpha) + C_2 \sin(2\alpha))$  - бигармонический аэродинамический момент,  $C_{x0}, C_{y0}$  - известные постоянные коэффициенты,  $C_1, C_2$  - коэффициенты бигармонического момента,  $\gamma$  - угол крена, определяемый как двугранный угол между плоскостью симметрии КА и местной вертикальной

плоскостью, содержащей вектор скорости,  $\vartheta$  - угол наклона траектории,  $r$  - расстояние от центра Марса до центра масс КА,  $r = R + H$ ,  $m$  - масса КА,  $g(h)$  - гравитационное ускорение;  $g(h) = g_0 \left( \frac{R}{R + H} \right)^2$ ,  $V$  - модуль скорости КА,  $H$  - высота КА,  $g_0$  - гравитационное ускорение на поверхности Марса  $H = 0$ ,  $R$  - радиус Марса.

### 1.3 Массово-геометрические и аэродинамические характеристики спускаемого космического аппарата в атмосфере Марса

Исходные массово-геометрические и аэродинамические характеристики космических аппаратов, рассматриваемых в диссертации, соответствуют следующим спускаемым КА: Spirit, Insight, Schiaparelli, Mars Polar Lander, Mars3. Эти характеристики размещены в таблице 1.1 [89-92,99,102].

Космический аппарат (КА) состоит из следующих частей: нижняя часть (теплозащитных щит), внутренняя часть (посадочный аппарат), верхняя оболочка и другое вспомогательное оборудование. На рисунке 1.3 изображён КА «Mars Polar Lander».

Таблица 1.1 – Массово-геометрические параметры спускаемых космических аппаратов: Insight, Mars Polar Lander, Марс-3

Спускаемый зонда	Масса $m, кг$	Радиус основания конуса $r, м$	Длина конуса $L, м$	Моменты инерции	
				$I_x, кг.м^2$	$I_y = I_z, кг.м^2$
«Insight»	366	1,30	1,8	135	186
«Mars Polar Lander»	576	1,25	2,0	300	443
«Марс-3»	800	1,60	1,8	506	768

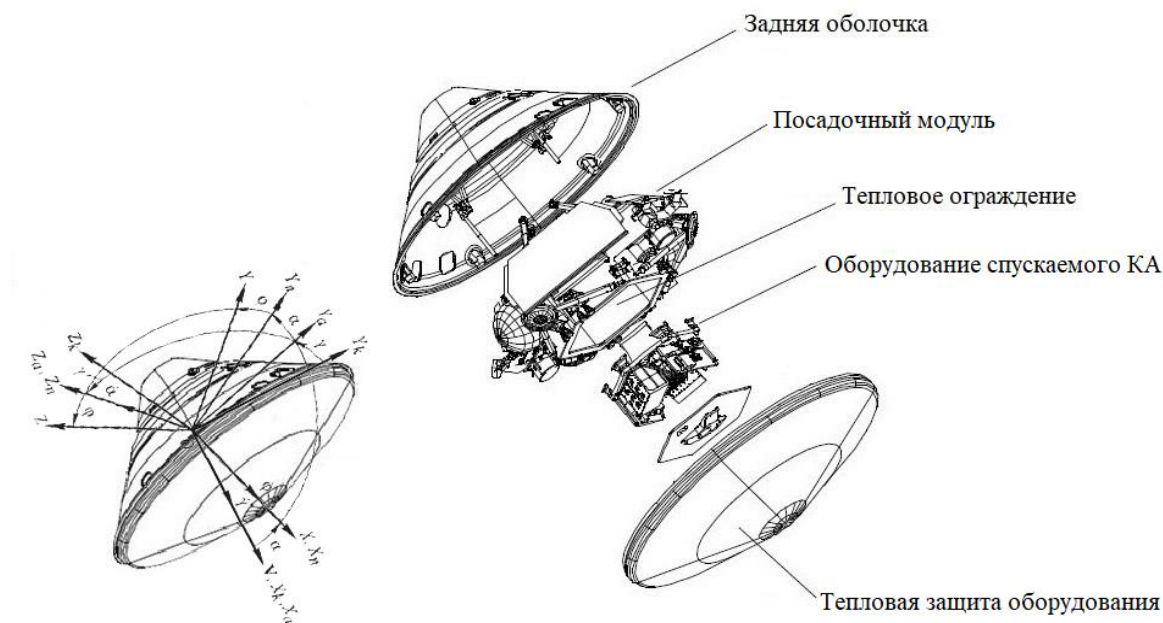


Рисунок 1.3 – Конструкция спускаемого на Марс аппарата на примере КА «Mars Polar Lander»

Величины аэродинамических коэффициентов в связанной системе координат для сегментально-конической лобовой поверхности космического аппарата при значениях пространственного угла атаки до 20 градусов в атмосфере Марса, показаны на рисунке 1.4 [102].

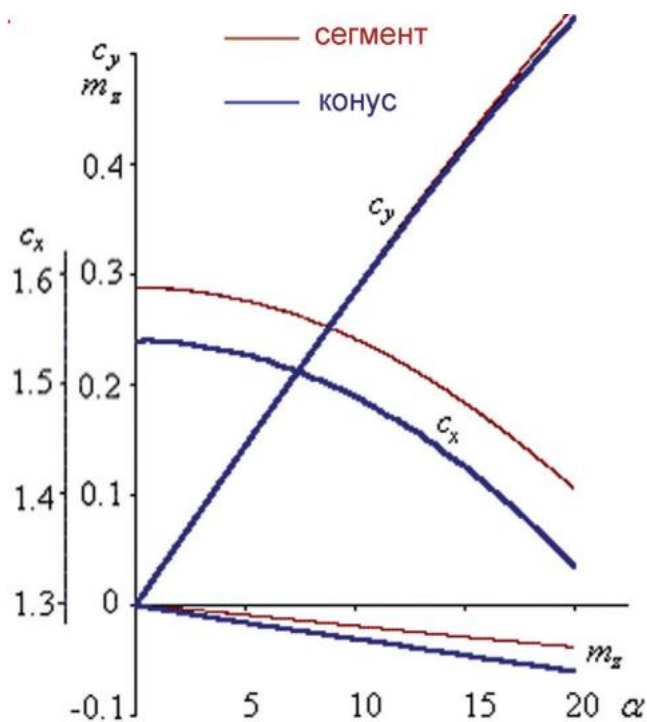


Рисунок 1.4 – Аэродинамические характеристики  $C_x, C_y, m_z$  для сегментальной и конической лобовой поверхности космического аппарата [102]



При численном моделировании предполагалось, что число Маха изменяется от 2 до 3.

На рисунке 1.5 показаны значения числа Рейнольдса  $Re$ , числа Кнудсена  $Kn$ , значения высоты  $H$  для космического аппарата «ЭкзоМарс» в процессе спуска в атмосфере Марса ( $H = H(t)$ ;  $t$  – время,  $c$ ) (с начальными условиями входа аппарата в атмосферу Марса: высота  $H_0 = 110$  км, масса КА  $m_0 = 2150$  кг, угол входа  $\theta_0 = -11^\circ$ , скорость  $V_0 = 6.1$  км/с) [102]. При этом высоте больше 94 км реализуется режим свободно-молекулярного обтекания космического аппарата ( $Kn > 0.1$ ). Начиная с высоты 94 км до высоты 80 км наблюдается переходный режим ( $0.1 > Kn > 0.01$ ). Начиная с высоты 80 км и до высоты 10 км обтекание среды становится сплошным относительно поверхности космического аппарата ( $Kn < 0.01$ ).

Плотность слоев атмосферы Марса существенно меньше слоев атмосферы Земли, расположенных на аналогичных высотах. При этом физические характеристики атмосферы Марса изменяются в течение времени года в зависимости от расположения планеты относительно Солнца. Кроме того, на состояние атмосферы Марса существенное влияние оказывают различные возмущающие погодные факторы (высокая разница температуры ночью и днём, частый ураганный ветер, и др.) [1-3]. Более того, атмосфера Марса насыщена пылевыми аэрозолями [4], и её плотность изменяется в зависимости от времени года [5].

Значения плотности, вязкости, температуры и давления в атмосфере Марса, применяемые при расчётах числа Маха и скорости КА, показаны на рисунках 1.6 [98,99].

Изменение скорости звука с высотой на экваторе Марса показано на рисунке 1.7. При этом минимальная скорость звука равна 190 м/с, а максимальная 230 м/с.

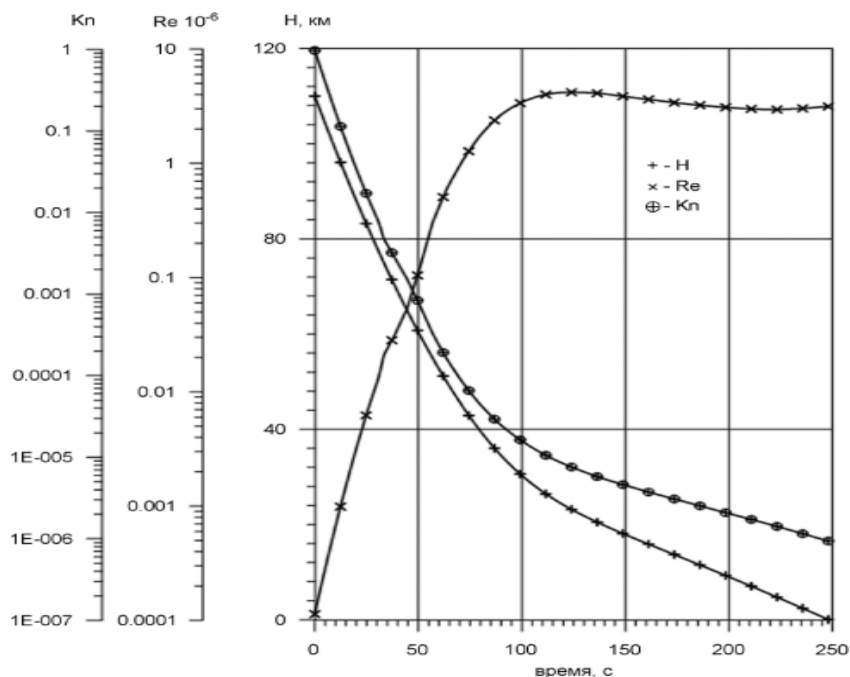


Рисунок 1.5 – Значение числа Рейнольдса  $Re$ , числа Кнудсена  $Kn$  и значения высоты  $H$  при спуске космического аппарата «ЭкзоМарс» [102].

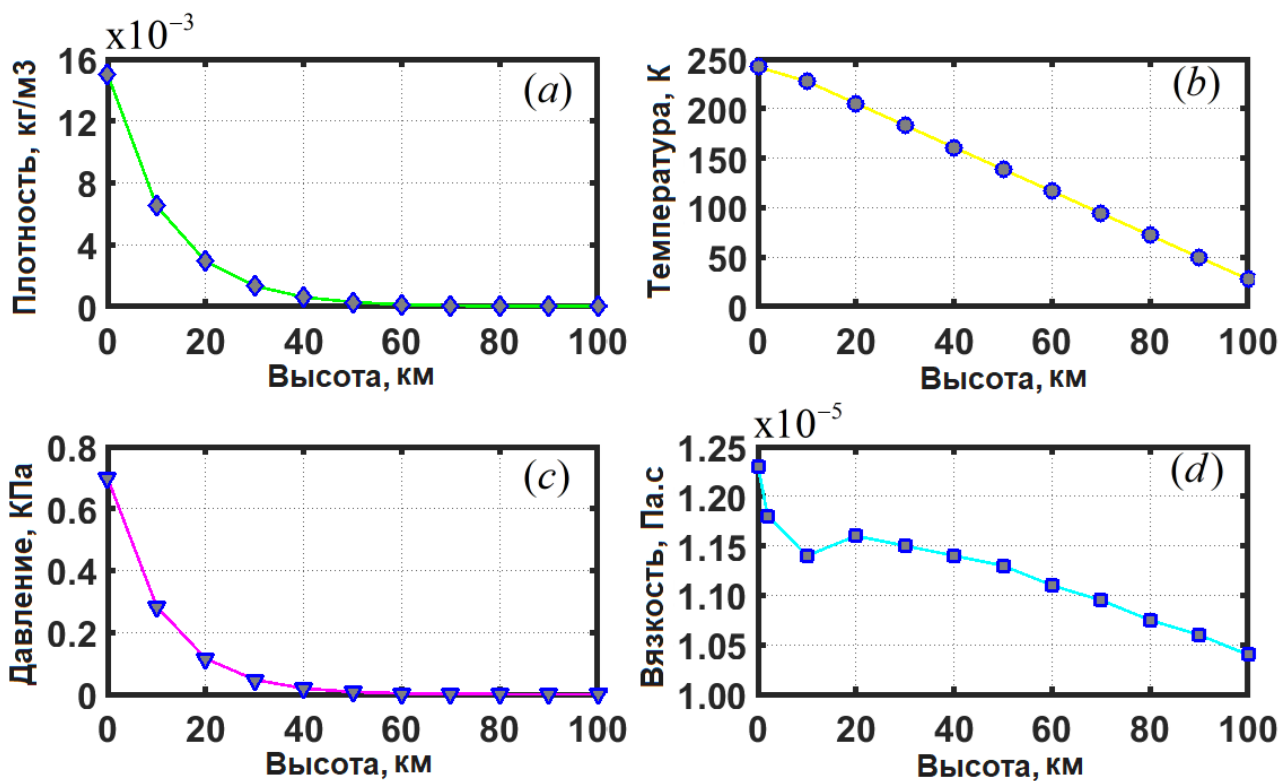


Рисунок 1.6 – Изменение характеристик атмосферы Марса с изменением высоты: (а) изменение плотности, (б) изменение температуры, (с) изменение давления, (д) изменение вязкости

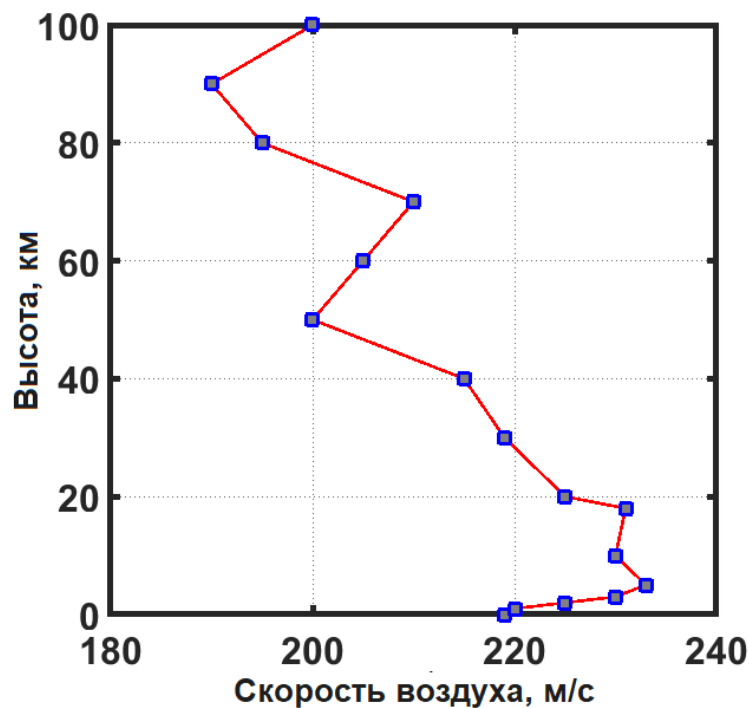


Рисунок 1.7 - Изменение скорости звука от высоты на экваторе Марса

В работе рассматривается следующая схема спуска КА в атмосфере Марса с высоты 100 км до высоты 10 км, показанная на рисунке 1.8.



Рисунок 1.8 – Схема спуска в атмосфере Марса

Следует отметить, что в диссертационной работе при моделировании и синтезе законов управления приняты некоторые допущения, позволяющие упростить системы уравнений и получить приближенные оптимальные законы управления. В работе не учитывается влияние возмущений от погоды на поверхности Марса на движение космического аппарата. При этом основное внимание в работе уделено стабилизации космического аппарата относительно набегающего потока при спуске с высоты 100км (высота входа в атмосфере) до 10км (высота раскрытия парашютной системы). Выбранная траектория движения КА считается номинальной. При спуске в атмосфере подробно не исследуется тепловой нагрев. Управление траекторией спуска не производится, а рассматривается исключительно управление движением относительно центра масс. В таблице 1.2 перечислены все ограничения, что приняты для значений переменных, функций управления, инерционных характеристик КА и величин его асимметрии.

Таблица 1.2 – Ограничения на параметры полёта и управления.

Параметр	Ограничение	Единица измерения
$\alpha$ - пространственный угол атаки	[0,0.21]	рад
$\omega_x$ - угловая скорость	[0,0.14]	рад/с
$\theta$ - быстрая фаза	[0,2 $\pi$ ]	рад
$H$ - высота полёта КА	[100,10]	км
$a_\alpha, b_\alpha, a_\omega, b_\omega$ - безразмерные коэффициенты критерия оптимальности	[10 <sup>-4</sup> ,1)	-
$m_x^f, m_y^f, m_z^f$ - коэффициенты аэродинамических моментов асимметрии	[0,0.1]	-
$\bar{I}_{xz} = \frac{I_{xz}}{I}, \bar{I}_{yz} = \frac{I_{yz}}{I}, \bar{I}_{xy} = \frac{I_{xy}}{I}$ - безразмерные моменты инерции асимметрии * <sup>1</sup>	[0,0.1]	-
$\bar{\Delta y} = \frac{\Delta y}{L}, \bar{\Delta z} = \frac{\Delta z}{L}$ - безразмерные смещения центра масс КА	[0,0.1]	-
* <sup>2</sup> $u_\alpha = -M_{ys} / 2\omega I, u_y = \sin(\phi)u_\alpha, u_z = \sin(\phi)u_\alpha$ - функция управления пространственным углом атаки, функция управления по оси $OY$ , функция управления вдоль поперечной оси $OZ$ , соответственно	[-0.1,0]	$c^{-1}$
* <sup>2</sup> $u_\omega = M_{xs} / I_x, u_x = u_\omega$ - функция управления угловой скоростью, функция управления вдоль продольной оси $OX$ , соответственно		$c^{-2}$

\*<sup>1</sup>  $I = (I_y + I_z)/2$ .

\*<sup>2</sup>  $M_{xs}, M_{ys}$  - Механические моменты от реактивных двигателей управления.

### **Вывод по первой главе.**

В этой главе описаны системы координат и матрицы перехода между ними. Приведены системы нелинейных уравнений неуправляемого движения КА относительно центра масс КА. Приведена приближённая нелинейная низкочастотная система уравнений движения асимметричного КА относительно центра масс в атмосфере. Рассмотрены квазилинейные системы уравнений движения асимметричного космического аппарата относительно центра масс с различными асимметриями: с малой аэродинамической и массово-инерционной асимметрией, с малой аэродинамической асимметрией, и с малым смещением центра масс. Приведена система уравнения движения центра масс КА. Приведены массовые и аэродинамические характеристики рассмотренных спускаемых космических аппаратов, совершающих спуск в атмосфере Марса.

## 2 СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕКТОРА СКОРОСТИ

### 2.1 Принцип динамического программирования

Пусть система уравнений вращательного движения КА записана в векторном виде [13,100]:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, \vec{u}), \quad \vec{x}, f \in R^n, \quad \vec{u} \in U \subset R^m. \quad (2.1)$$

Здесь  $\vec{x}$  - вектор фазовых координат системы,  $\vec{u}$  - вектор управляющих воздействия.

Целью оптимального управления является минимизация следующего функционала:

$$J = \int_0^{t_f} f_0(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) dt, \quad (2.2)$$

где  $f_0$  - скалярная функция переменных  $\vec{x}$  и  $\vec{u}$ . В данной работе эта функция  $f_0(\vec{x}, \vec{u})$  имеет вид квадратичной формы:

$$f_0(\vec{x}, \vec{u}) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 + b_1 u_1^2 + b_2 u_2^2 + \dots + b_m u_m^2. \quad (2.3)$$

Здесь  $a_i, b_j$  - заданные положительные коэффициенты критерия оптимальности.

Задача оптимальности по принципу Беллмана состоит в определении законов управления  $\vec{u}$ , которые переводят начальные значения вектора фазовых координат системы  $\vec{x}_0$  к заданным малым значениям за заданный интервал времени.

Согласно уравнению Беллмана для системы уравнения вращательного движения (2.1) критерий оптимальности имеет следующий вид:

$$\min_{u \in U} \left( f_0(x, u) + \sum_{i=0}^n \frac{\partial S(x)}{\partial x_i} f_i(\vec{x}, \vec{u}) \right) = 0. \quad (2.4)$$

Здесь  $S(x)$  - функция Беллмана.

## 2.2 Приближенное оптимальное управление движением космического аппарата с малыми аэродинамической и массово-инерционной асимметриями в атмосфере Марса

### 2.2.1 Синтез приближенного оптимального управления движением космического аппарата с малыми аэродинамической и массово-инерционной асимметриями в атмосфере Марса

В этом подразделе рассматривается динамическая модель, описывающая движение космического аппарата относительно центра масс в разреженной атмосфере Марса, имеющего малую аэродинамическую асимметрию и малое смещение центра масс. При этом требуется получить непрерывный оптимальный закон управления ориентацией космического аппарата. Синтезируется непрерывный оптимальный закон одновременного управления угловой скоростью и пространственным углом атаки космического аппарата на участке его спуска в атмосфере Марса. При этом применяются линеаризованные квазилинейные уравнения управляемого движения КА относительно центра масс. При синтезе закона управления использовался метод динамического программирования (принцип Беллмана) [13,27-29,103-109] и метод усреднения [30-32]. Предполагается, что управление пространственным углом атаки и угловой скоростью производится посредством реактивных двигателей малой тяги.

Линеаризованная система уравнений движения КА относительно центра масс в безразмерном виде при  $\omega_x > 0$  записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\omega}_x}{d\tau} &= -\varepsilon \bar{m}_x^A k_1 \omega^2 \bar{I}_x^{-1} \sin(\bar{\theta} + \bar{\theta}_2) + \varepsilon \bar{u}_\omega, \\ \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} &= -\varepsilon \frac{\bar{m}_A}{2} k_2 \omega \cos(\bar{\theta} + \bar{\theta}_1) + \varepsilon \bar{u}_\alpha, \\ \frac{d\bar{\theta}}{d\tau} &= (1 - \bar{I}_x) k_3 \bar{\omega}_x.\end{aligned}\tag{2.5}$$



Здесь  $\bar{\omega}_x$  – безразмерная угловая скорость;  $\bar{\omega}_x = \omega_x / \omega_{x0}$ ,  $\tau$  – безразмерное время;  $\tau = t / t_0$ ,  $\bar{u}_\omega$  – безразмерное управление значением угловой скорости  $\omega_x$ ;  $\bar{u}_\omega = k_1 u_\omega$ ,  $\bar{u}_\alpha$  – безразмерное управление величиной пространственного угла атаки  $\alpha$ ;  $\bar{u}_\alpha = k_2 u_\alpha$ ,  $k_1 = t_0 \omega_{x0}^{-1}$ ,  $k_2 = t_0$ ,  $k_3 = t_0 \omega_{x0}$  – постоянные коэффициенты, выраженные через начальные значения соответствующих переменных,  $\omega_{x0}$  – начальное значение угловой скорости,  $t_0$  – начальное значение времени ( $t_0 \neq 0$ ).

Рассматриваемая задача синтеза управления состоит в том, чтобы найти приближенные оптимальные законы, обеспечивающие стабилизацию угловой скорости  $\bar{\omega}_x$  и угла атаки  $\bar{\alpha}$ . При этом требуется определить приближенные малые функции управления  $\bar{u}_\alpha \in \bar{U}_\alpha$ ,  $\bar{u}_\omega \in \bar{U}_\omega$ , которые переводят начальный угол атаки  $\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}(t_0)$  и начальную угловую скорость  $\bar{\omega}_{x0} = \bar{\omega}_x(t_0)$  к заданным малым или нулевым величинам  $\bar{\alpha}_T = \bar{\alpha}(T) = 0$  и  $\bar{\omega}_{xT} = \bar{\omega}_x(T)$  в течение интервала времени  $T$ .

Вводится следующий квадратичный критерий оптимальности:

$$I = \varepsilon \int_0^T (a_\omega \bar{\omega}_x^2 + a_\alpha \bar{\alpha}^2 + b_\omega \bar{u}_\omega^2 + b_\alpha \bar{u}_\alpha^2) dt, \quad (2.6)$$

где  $a_\omega, a_\alpha, b_\omega, b_\alpha$  – заданные положительные коэффициенты критерия оптимальности.

Здесь функция  $V(\bar{\omega}_x, \bar{\alpha}, \bar{u}_\omega, \bar{u}_\alpha) = a_\omega \bar{\omega}_x^2 + a_\alpha \bar{\alpha}^2 + b_\omega \bar{u}_\omega^2 + b_\alpha \bar{u}_\alpha^2$  является положительно определённой.

Для решения задачи оптимизации применяется принцип Беллмана [13,27-29], который для системы (2.5) и критерия (2.6) приводит к соотношению:

$$\min_{\bar{u}_\omega, \bar{u}_\alpha} \left( a_\omega \bar{\omega}_x^2 + a_\alpha \bar{\alpha}^2 + b_\omega \bar{u}_\omega^2 + b_\alpha \bar{u}_\alpha^2 + \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} \frac{d\bar{\omega}_x}{d\tau} + \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} + \frac{\partial v}{\partial \bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{d\tau} \right) = 0, \quad (2.7)$$

где  $v(\bar{\omega}_x, \bar{\alpha}, \bar{\theta})$  – функция Беллмана.

Подставив в равенство (2.7) производные  $\frac{d\bar{\omega}_x}{d\tau}$ ,  $\frac{d\bar{\alpha}}{d\tau}$ ,  $\frac{d\bar{\theta}}{d\tau}$  из системы (2.5),

получим:

$$\begin{aligned} \min_{u_\omega, u_\alpha} & \left( \varepsilon a_\omega \bar{\omega}_x^2 + \varepsilon a_\alpha \bar{\alpha}^2 + \varepsilon b_\omega \bar{u}_\omega^2 + \varepsilon b_\alpha \bar{u}_\alpha^2 + \right. \\ & + \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} \left( -\varepsilon \bar{m}_x^A k_1 \omega^2 \bar{I}_x^{-1} \sin(\bar{\theta} + \bar{\theta}_2) + \varepsilon \bar{u}_\omega \right) + \\ & \left. + \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} \left( -\varepsilon \frac{\bar{m}_A}{2} k_2 \omega \cos(\bar{\theta} + \bar{\theta}_1) + \varepsilon \bar{u}_\alpha \right) + \frac{\partial v}{\partial \bar{\theta}} (1 - \bar{I}_x) k_3 \bar{\omega}_x \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Выделяя в уравнении (2.8) отдельно слагаемые, зависящие от управлений  $\bar{u}_\omega, \bar{u}_\alpha$ , в результате получим следующее выражение:

$$F(\bar{u}_\omega, \bar{u}_\alpha) = b_\omega \bar{u}_\omega^2 + b_\alpha \bar{u}_\alpha^2 + \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} \bar{u}_\omega + \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} \bar{u}_\alpha. \quad (2.9)$$

Необходимые условия минимума функции  $F(\bar{u}_\omega, \bar{u}_\alpha)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \bar{u}_\omega} &= 2b_\omega \bar{u}_\omega + \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \bar{u}_\alpha} &= 2b_\alpha \bar{u}_\alpha + \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из решения системы уравнений (2.10) находим выражения для оптимальных управлений:

$$\begin{aligned} \bar{u}_\omega &= -\frac{1}{2b_\omega} \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x}, \\ \bar{u}_\alpha &= -\frac{1}{2b_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Составим матрицу Гессе:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{u}_\omega^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{u}_\alpha \partial \bar{u}_\omega} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{u}_\omega \partial \bar{u}_\alpha} & \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{u}_\alpha^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_\omega & 0 \\ 0 & 2b_\alpha \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

При этом в стационарных точках (2.11) выполняется критерий Сильвестра:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{u}_\omega^2} = 2b_\omega > 0, \det H = 4b_\omega b_\alpha > 0. \quad (2.13)$$

Таким образом, выполнение условий (2.13) для положительно определённой матрицы Гессе обеспечивает минимум стационарных точек (2.11).

Подставляя управление (2.11) в уравнение (2.8) после упрощения, получаем уравнение Беллмана:

$$\begin{aligned} & a_\omega \bar{\omega}_x^2 + a_\alpha \bar{\alpha}^2 + \frac{1}{4b_\omega} \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} \right)^2 + \frac{1}{4b_\alpha} \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} \right)^2 - \frac{1}{2b_\alpha} \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} \right)^2 - \\ & - \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} (\alpha \bar{m}_x^A k_1 \omega^2 \bar{I}_x^{-1} \sin(\bar{\theta} + \bar{\theta}_2)) - \frac{1}{2b_\omega} \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} \right)^2 - \\ & - \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} \frac{\bar{m}_A}{2} k_2 \omega \cos(\bar{\theta} + \bar{\theta}_1) + \frac{\partial v}{\partial \bar{\theta}} (1 - \bar{I}_x) k_3 \bar{\omega}_x = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

При усреднении уравнений (2.5) применяются следующие разложения [30-32]:

$$\begin{cases} \bar{\omega}_x = \bar{\omega}_x^0 + \varepsilon f_{1\omega}(\bar{\omega}_x^0, \bar{\alpha}^0, \bar{\theta}^0) + \dots \\ \bar{\alpha} = \bar{\alpha}^0 + \varepsilon f_{1\alpha}(\bar{\omega}_x^0, \bar{\alpha}^0, \bar{\theta}^0) + \dots \\ \bar{\theta} = \bar{\theta}^0 + \varepsilon f_{1\theta}(\bar{\omega}_x^0, \bar{\alpha}^0, \bar{\theta}^0) + \dots \\ v = v^0(\bar{\alpha}^0) + \varepsilon v_1(\bar{\alpha}^0, \bar{\theta}^0) + \dots \end{cases} \quad (2.15)$$

Здесь  $\bar{\omega}_x^0, \bar{\alpha}^0, \bar{\theta}^0$  - новые переменные системы (2.5), а функции  $f_{j\omega}(\bar{\omega}_x^0, \bar{\alpha}^0, \bar{\theta}^0)$ ,  $f_{j\alpha}(\bar{\omega}_x^0, \bar{\alpha}^0, \bar{\theta}^0)$ ,  $f_{j\theta}(\bar{\omega}_x^0, \bar{\alpha}^0, \bar{\theta}^0)$ ,  $v^0(\bar{\alpha}^0)$ ,  $v_j(\bar{\alpha}^0, \bar{\theta}^0)$ , ( $j=1, 2, \dots$ ) подлежат определению.

Подставляя ряды (2.15) в уравнение (2.14) в первом приближении метода усреднения, опуская в новых переменных  $\bar{\omega}_x^0, \bar{\alpha}^0, \bar{\theta}^0$  индекс «0», получим [11]:

$$a_{\omega} \bar{\omega}_x^2 + a_{\alpha} \bar{\alpha}^2 + \frac{1}{4b_{\omega}} \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} \right)^2 - \frac{1}{4b_{\alpha}} \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} \right)^2 = 0. \quad (2.16)$$

Решение уравнения (2.16) будем искать методом неопределённых коэффициентов в виде:

$$v = A \bar{\omega}_x^2 + B \bar{\alpha}^2. \quad (2.17)$$

Здесь  $A, B$  – искомые коэффициенты. С целью определения коэффициентов  $A, B$  выполним подстановку выражения (2.17) в уравнение (2.16):

$$\bar{\omega}_x^2 \left( a_{\omega} - \frac{A^2}{b_{\omega}} \right) + \bar{\alpha}^2 \left( a_{\alpha} - \frac{B^2}{b_{\alpha}} \right) = 0. \quad (2.18)$$

Уравнение (2.18), при одновременном равенстве нулю угловой скорости и угла атаки, принимает вид следующей системы:

$$\frac{A^2}{b_{\omega}} - a_{\omega} = 0. \quad (2.19)$$

$$\frac{B^2}{b_{\alpha}} - a_{\alpha} = 0. \quad (2.20)$$

Среди корней уравнений системы (2.19)-(2.20) практический интерес представляют только положительные величины

$$A_1 = \sqrt{a_{\omega} b_{\omega}}, \quad (2.21)$$

$$B_1 = \sqrt{a_{\alpha} b_{\alpha}}. \quad (2.22)$$

Действительно, отрицательные величины  $A_1 = -\sqrt{a_{\omega} b_{\omega}}$ ,  $B_2 = -\sqrt{a_{\alpha} b_{\alpha}}$  должны быть отброшены, так как они не позволяют обеспечить положительную определённую функцию Беллмана (2.17).

Учитывая коэффициенты (2.21) и (2.22) в функции Беллмана (2.17) и находим выражения для оптимальных управлений (2.11). Подставляя полученные выражения в систему (2.5) и усредняя её по быстрой фазе в первом приближении, получаем:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} \right\rangle &= -\varepsilon K_{\alpha p} \bar{\alpha}, \\ \left\langle \frac{d\bar{\omega}_x}{d\tau} \right\rangle &= -\varepsilon K_{\omega p} \bar{\omega}_x.\end{aligned}\quad (2.23)$$

Коэффициенты в системе (2.23) записываются так следующим образом:

$$K_{\omega p} = \sqrt{a_{\omega} b_{\omega}}, K_{\alpha p} = \sqrt{a_{\alpha} b_{\alpha}}.$$

Следовательно, решения уравнений (2.23), полученные с учётом найденных управлений, обеспечивают асимптотическую устойчивость точек покоя  $\bar{\omega}_x = 0$ ,  $\bar{\alpha} = 0$  в первом приближении метода усреднения.

Перепишем функции управления после замена всех производных в (2.11) следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{u}_{\omega} &= -\sqrt{a_{\omega} b_{\omega}^{-1}} \bar{\omega}_x, \\ \bar{u}_{\alpha} &= -\sqrt{a_{\alpha} b_{\alpha}^{-1}} \bar{\alpha}.\end{aligned}\quad (2.24)$$

После замены функции управлений  $\bar{u}_{\omega}$ ,  $\bar{u}_{\alpha}$  выражениями (2.24) система уравнений (2.5) принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\omega}_x}{d\tau} &= -\varepsilon \bar{m}_x^A k_1 \omega^2 \bar{I}_x^{-1} \sin(\bar{\theta} + \bar{\theta}_2) - \varepsilon \sqrt{a_{\omega} b_{\omega}^{-1}} \bar{\omega}_x, \\ \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} &= -\varepsilon \frac{\bar{m}_A}{2} k_2 \omega \cos(\bar{\theta} + \bar{\theta}_1) - \varepsilon \sqrt{a_{\alpha} b_{\alpha}^{-1}} \bar{\alpha}.\end{aligned}\quad (2.25)$$

Предположим, что космический аппарат имеет массово-инерционные характеристики, аналогичные спускаемым КА, рассмотренным в таблице 1.1. Пусть начальные условия входа КА в атмосферу Марса принимают следующие значения: скорость центра масс КА составляет  $V(0) = 5500 \text{ мс}^{-1}$ ; высота КА от поверхности планеты  $H(0) = 100 \text{ км}$ ; угол входа  $\vartheta(0) = -0,245 \text{ рад}$ ; аэродинамический угол крена  $\varphi(0) = 0,0345 \text{ рад}$ ; пространственный угол атаки равен амплитуде  $a_1(0) = 0,21 \text{ рад}$ ; вторая амплитуда равна нулю  $a_2(0) = 0$ ; быстрая фаза равна  $\theta(0) = 0$ ; угловая скорость равна  $\omega_x(0) = 0,14 \text{ с}^{-1}$ . Результаты численного расчёта системы уравнений методом Рунге-Кутты [110-113]

представлены на рисунках 2.1, 2.2, 2.3 и 2.4 для разных рассмотренных космических аппаратов: Insight, Mars Polar Lander, Марс-3.

На рисунке 2.1 показаны значения пространственного угла атаки  $\alpha_{\Pi}$  и угловой скорости  $\omega_x$ , полученные без учёта управления, для рассмотренных КА. Для безаварийного раскрытия парашютных систем значения угловой скорости и пространственного угла атаки должны иметь стабильные значения, близкие к значению погрешности датчиков ДУС  $[-0,002, 0,002]$  1/с и ДАУ-Ф  $[0.0001, 0.004]$  рад. На рисунке 2.1 значения пространственного угла атаки и угловой скорости не приближаются к значениям погрешности датчиков, а совершают колебания при входе КА в атмосферу. Следовательно, для стабилизации КА относительно вектора скорости требуется ввести управления, обеспечивающее одновременное стабилизацию пространственного угла атаки и угловой скорости.

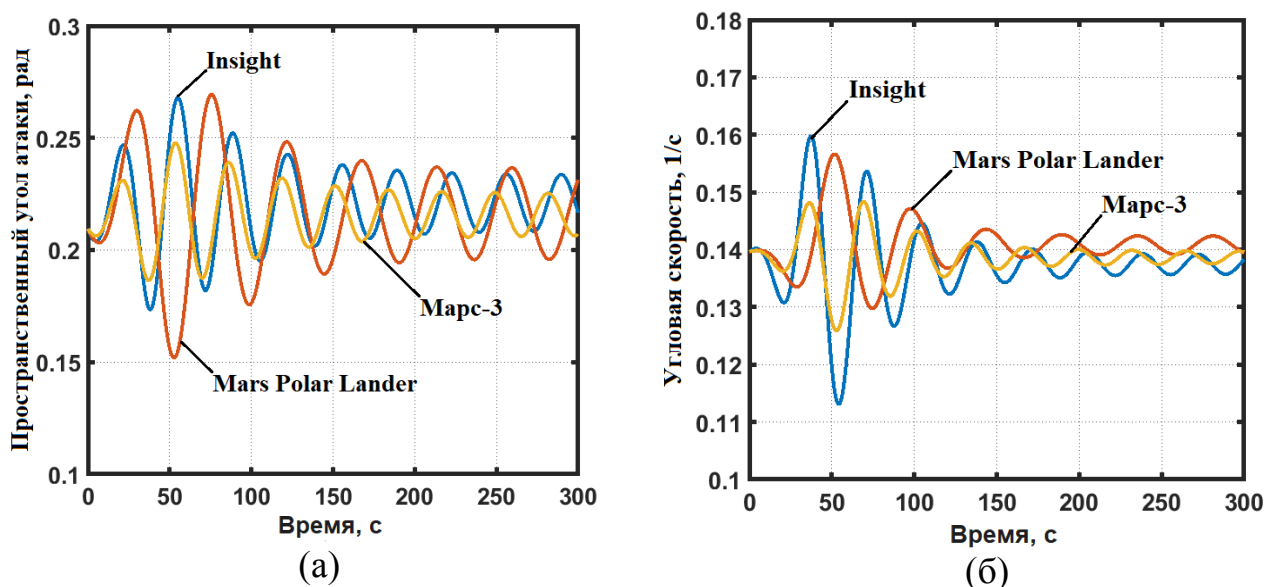


Рисунок 2.1 – Значения пространственного угла атаки (а) и значения угловой скорости (б) в зависимости от времени без управления для рассмотренных КА

На рисунке 2.2 показано изменение высоты КА от поверхности Марса в зависимости от скорости спуска, а также показано значение замедления  $dV/dt$  на разных высотах для рассмотренных КА с учётом управления в рассматриваемой линеаризованной системе. Из рис. 2.2 следует, что не

наблюдается значительных отличий, рассчитываемых на этом рисунке значений, для выбранных КА.

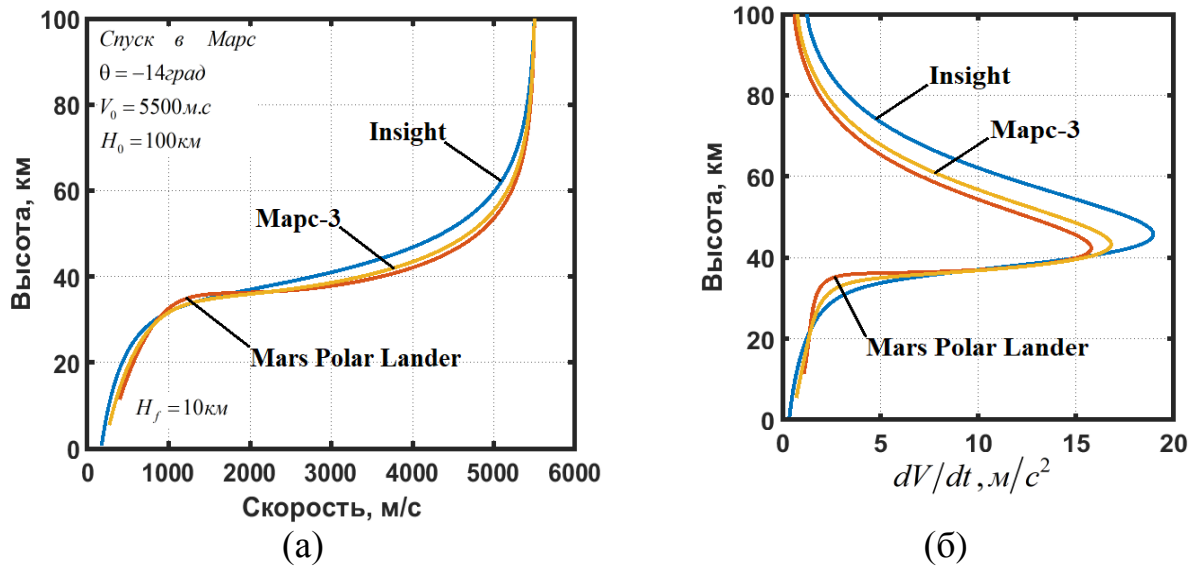
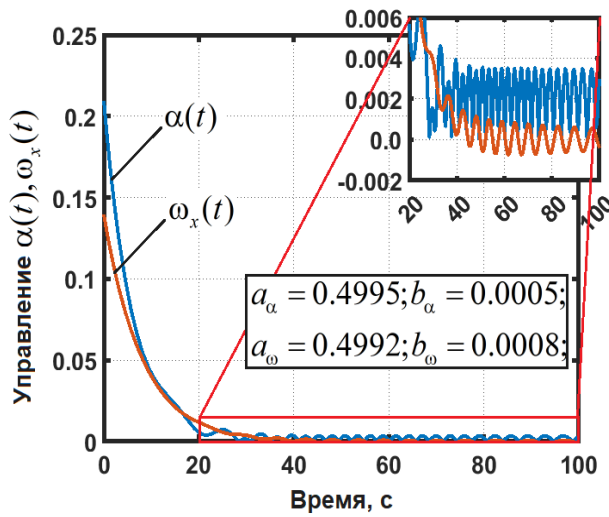


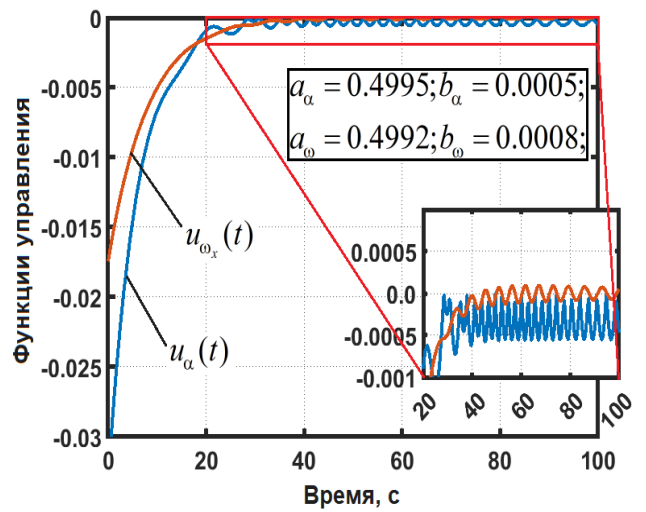
Рисунок 2.2 – Изменение высоты КА от поверхности Марса в зависимости от скорости спуска (а), значение замедления на разных высотах (б) для рассмотренных КА с учетом управления в линеаризованной системе

На рисунке 2.3 показаны значения угловой скорости, пространственного угла атаки и их функции управления, полученные при решении системы (2.5). На этих рисунках также представлены безразмерные значения коэффициентов критерия оптимальности  $a_\alpha = 0.4995$ ,  $b_\alpha = 0.0005$ ,  $a_\omega = 0.4992$ ,  $b_\omega = 0.0008$ , обеспечивающие уменьшение  $\alpha_{II}$  и  $\omega_x$  за одинаковое время 40 с. после начала спуска до значений  $[0.0001, 0.004]$  рад для угла атаки  $\alpha_{II}$  и до  $[-0.002, 0.002]$  1/с для угловой скорости  $\omega_x$ .

На рисунке 2.4 показаны значений пространственного угла атаки и угловой скорости с учётом управления в линеаризованной системе (2.5) для разных рассмотренных КА (Insight, Mars Polar Lander, Марс-3). Заметим, что значения, управляемых величин  $\alpha_{II}$  и  $\omega_x$  для разных спускаемых аппаратов незначительно отличаются друг от друга.

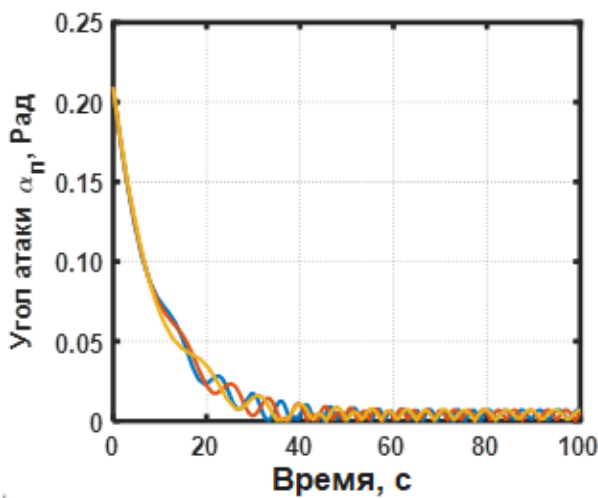


(а)

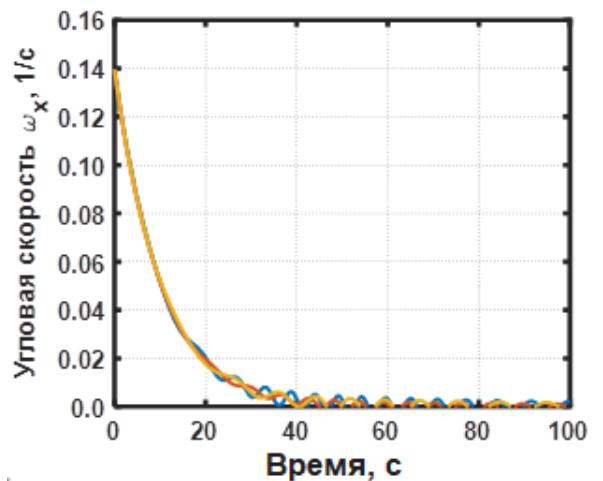


(б)

Рисунок 2.3 –Значения угловой скорости и пространственного угла атаки с учётом управления (а) в линеаризованной системе (2.5), значения функции управления (б)



(а)



(б)

Рисунок 2.4 –Значение пространственного угла атаки (а), значение угловой скорости (б), полученные с учётом управления в линеаризованной системе (2.5) для рассмотренных КА

На рисунке 2.5 представлено изменение функций управления пространственным углом атаки  $u_{\alpha_{\Pi}}$  и угловой скоростью  $u_{\omega_x}$  для разных КА с учётом управления в линеаризованной системе (2.5). Эти функции управления



принимают малые отрицательные значения, позволявшие величинам  $\alpha_{II}$  и  $\omega_x$  одновременно достичь значений из интервалов погрешности указанных датчиков через 40с. после начала спуска.

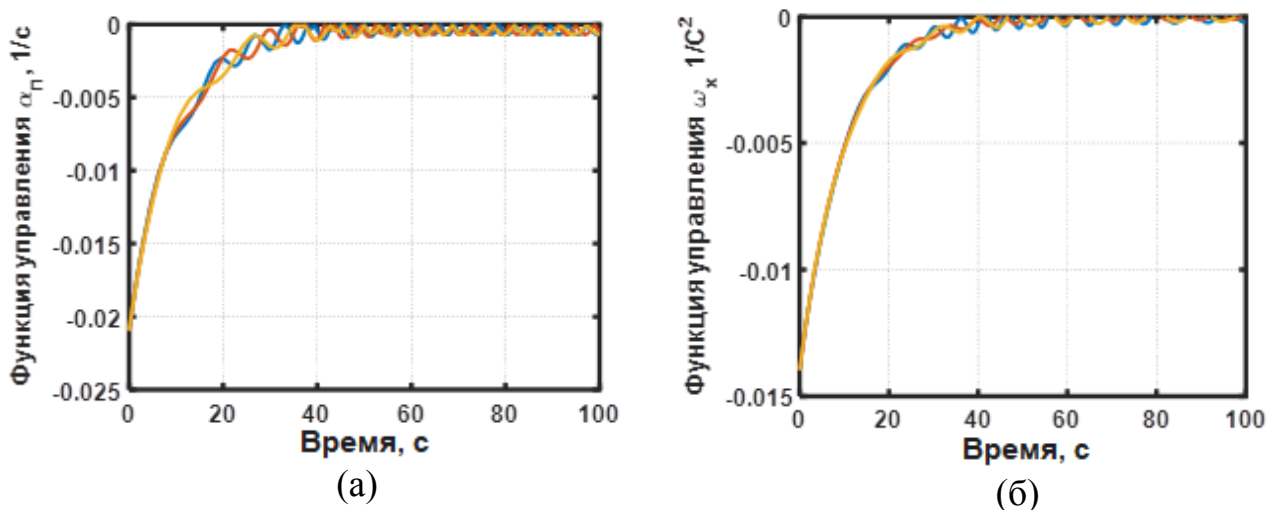


Рисунок 2.5 –Значение функции управления пространственным углом атаки (а), значение функции управления угловой скоростью (б) для рассмотренных КА

На рисунке 2.6 показаны значения угловой скорости и пространственного угла атаки с учётом управления в линеаризованной системе (2.5) при заданных различных значениях весовых коэффициентов критерия оптимальности.

В полученных законах управления (2.24) весовые коэффициенты критерия оптимальности имеют вид следующих соотношений  $a_\alpha/b_\alpha$  и  $a_\omega/b_\omega$ . При моделировании одновременного управления угловой скоростью и пространственным углом атаки задаются следующие значения этих коэффициентов:  $a/b=0$  (управление отсутствует), 10, 100, 1000, 10000. При этом численно исследуется влияние значений коэффициентов критерия оптимальности на одновременный характер стабилизации угловой скорости и пространственного угла атаки.

Из рисунка 2.6 видно, что значения угловой скорости и пространственного угла атаки уменьшаются быстрее к малым значениям из

интервалов погрешности датчиков при увеличении значений соотношений  $a_\alpha/b_\alpha$  и  $a_\omega/b_\omega$ .

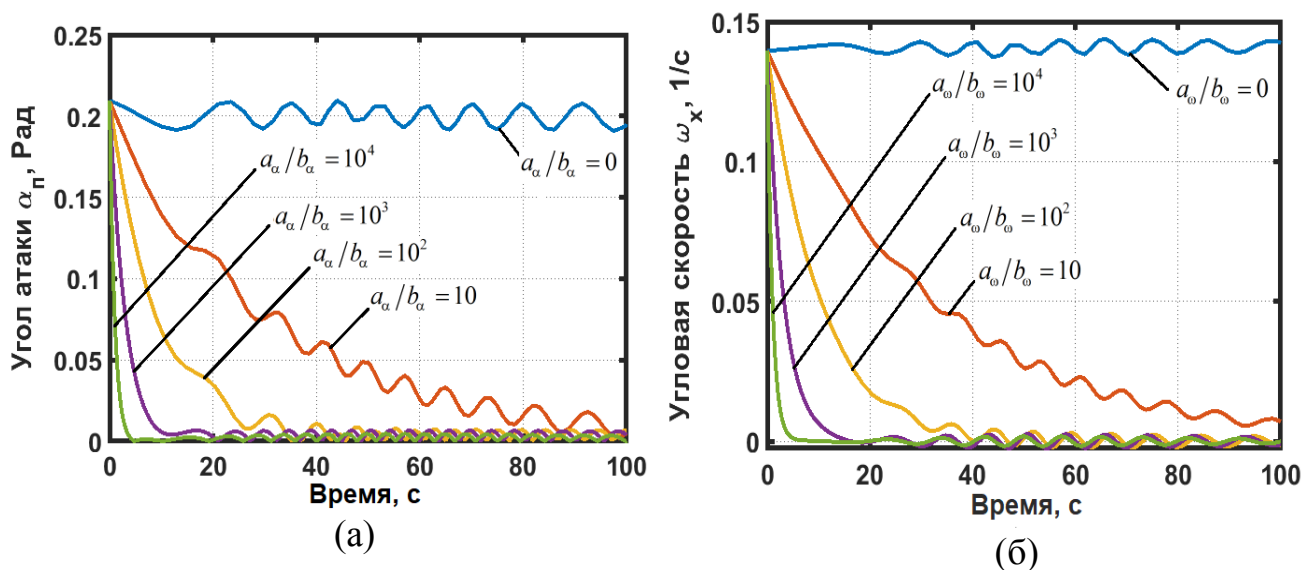
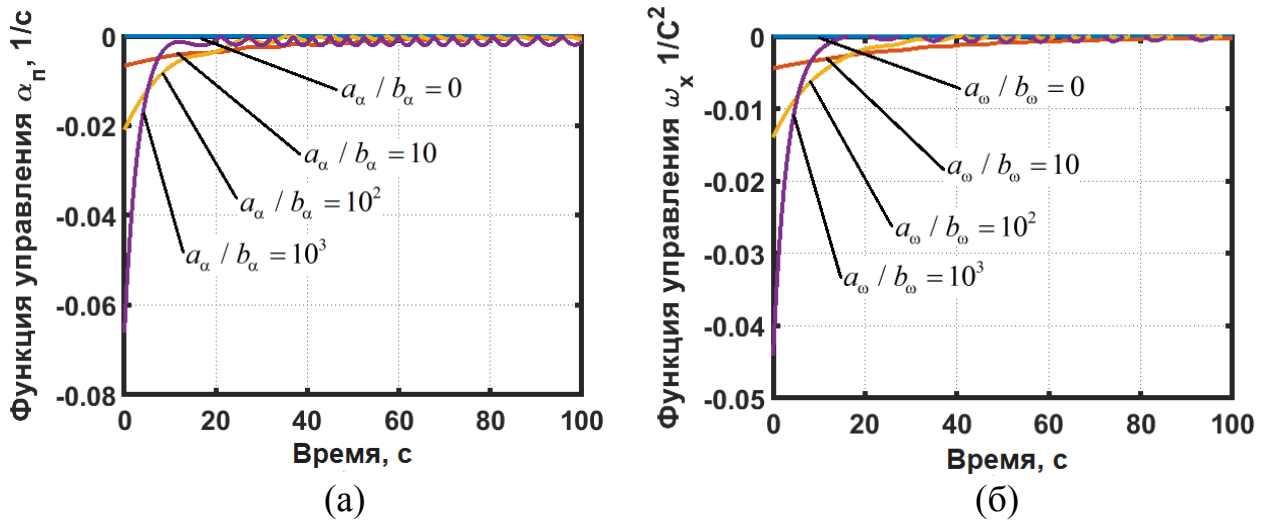


Рисунок 2.6 – Значение пространственного угла атаки (а) и значения угловой скорости с учётом управления (б) в линеаризованной системе (2.5) при заданных значениях коэффициентов критерия оптимальности

На рисунке 2.7 показано изменение функций управления пространственным углом атаки и угловой скоростью при заданных значениях соотношения весовых коэффициентов критерия оптимальности. Из рисунка 2.7 следует, что эти функции принимают малые отрицательные значения. Кроме того, увеличение значений этих коэффициентов критерия оптимальности приводит к тому, что функции управления угловой скоростью и пространственным углом атаки быстрее уменьшаются к малым значениям, а величины  $\alpha_n$  и  $\omega_x$  быстрее одновременно достигают значений из интервалов погрешности датчиков.



На рисунке 2.7 –Значение функции управления пространственным углом атаки (а), значение функции управления угловой скоростью (б) при заданных разных значениях отношений коэффициентов критерия оптимальности

### 2.2.2 Проверка приближенного оптимального управления посредством использования исходной нелинейной системы уравнений движения асимметричного КА с аэродинамическим демпфированием

Рассмотрим моделирование полученных законов управления с аэродинамическим демпфированием в исходной нелинейной системе уравнений движения КА с малой асимметрией относительно центра масс в атмосфере Марса (1.7).

В исходной системе уравнение пространственного угла атаки является уравнением второго порядка. Следовательно, полученный П-регулятор (2.24) в общем случае движения КА, описываемым исходными уравнениями, не обеспечивает стабилизации КА по данному углу. По этой причине, в общем случае для стабилизации КА требует применять ПД-регулятор следующего вида:

$$\begin{aligned} \bar{u}_\omega &= -K_\omega \bar{\omega}_x, \\ \bar{u}_\alpha &= -K_\alpha \bar{\alpha} - K_{2\alpha} \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Здесь  $K_\omega$  и  $K_\alpha$  - коэффициенты пропорционального регулятора угловой скорости и пространственного угла атаки,  $K_{2\alpha}$  - положительный коэффициент дифференциального регулятора пространственного угла атаки.

По результатам моделирования в исходной нелинейной системе уравнений, получены значения пространственного угла атаки  $\alpha_{II}$  и угловой скорости  $\omega_x$  в зависимости от времени спуска КА, показанные на рисунке 2.8.

Следует отметить, что пространственный угол атаки и угловая скорость уменьшаются при наличии управления до малых значений, как при учёте аэродинамического демпфирования, так и без его учёта.

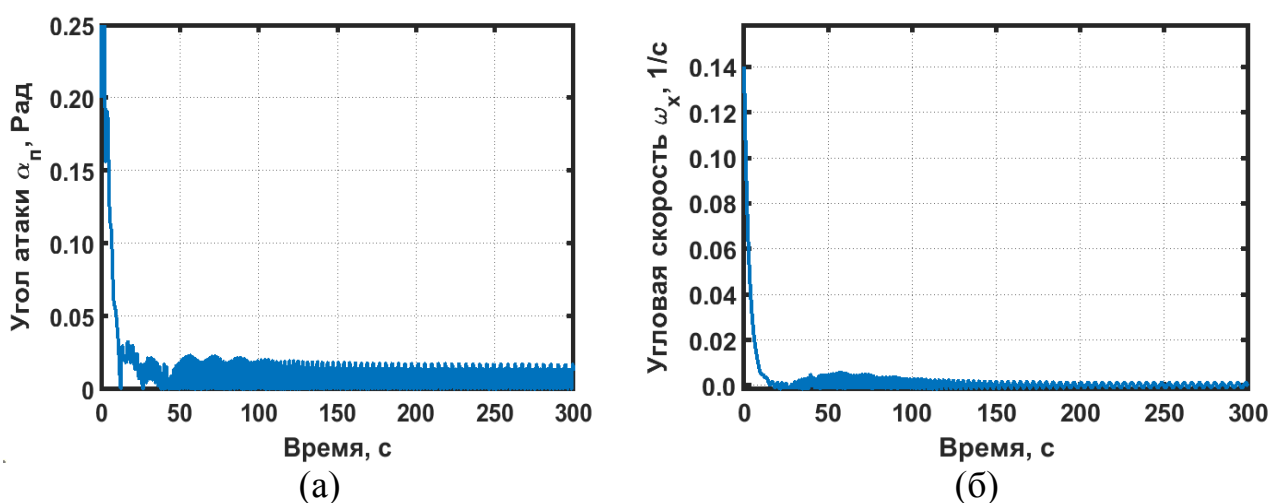
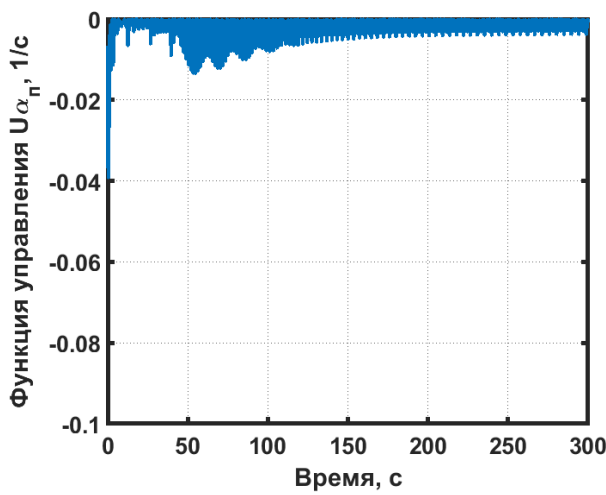


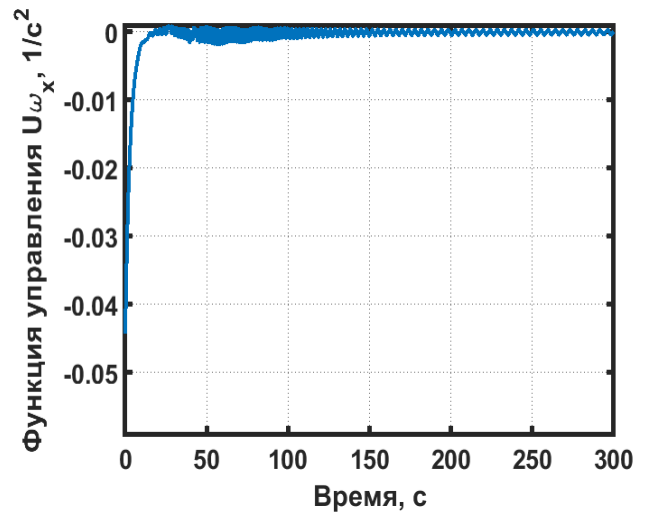
Рисунок 2.8 – Значения пространственного угла атаки (а) и угловой скорости (б) в зависимости от времени с учётом управления и аэродинамического демпфирования в исходной нелинейной системе уравнения

На рисунке 2.9 показано значение функций управления пространственным углом атаки  $u_\alpha$  и угловой скоростью  $u_{\omega_x}$  в зависимости от времени с учётом управления и аэродинамического демпфирования в исходной нелинейной системе. Эти функции принимают отрицательные значения и уменьшаются по абсолютной величине до малых значений близких к нулю в процессе уменьшения пространственного угла атаки и угловой скорости.

На рисунке 2.10 показаны значения проекции угловой скорости на

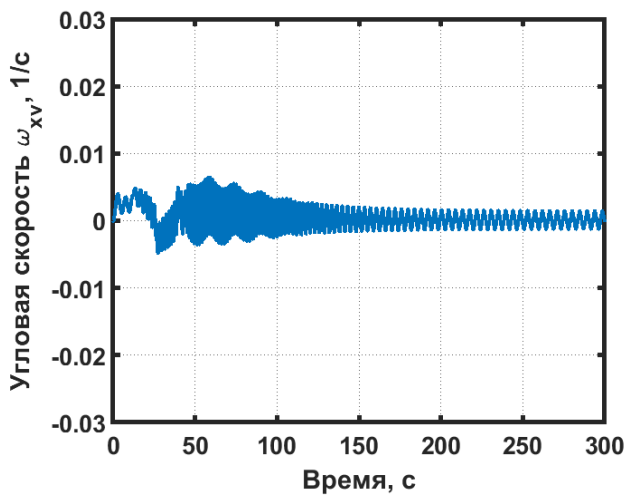


(a)

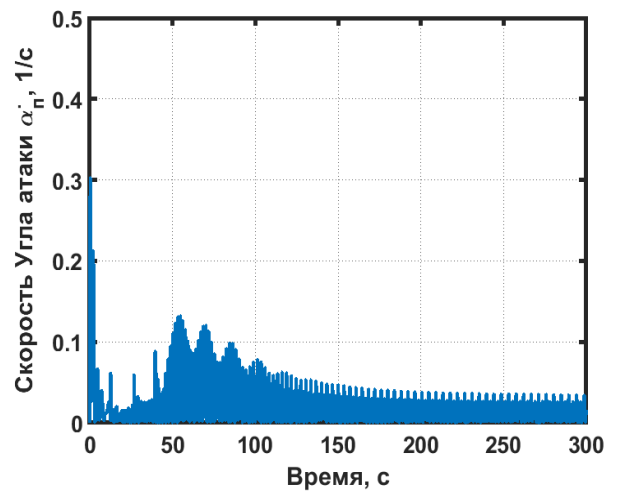


(б)

Рисунок 2.9 – Значения функции управления пространственным углом атаки (а) и угловой скоростью (б) в зависимости от времени с учётом управления и аэродинамического демпфирования в исходной нелинейной системе



(a)



(б)

Рисунок 2.10 – Значение проекции угловой скорости на направление воздушной скорости  $\omega_{xv}$  (а) и скорости изменения пространственного угла атаки  $\alpha_n'$  (б) в зависимости от времени с учётом управления и аэродинамического демпфирования в исходной нелинейной системе

направление воздушной скорости  $\omega_{xv}$  и значение скорости изменения пространственного угла атаки  $\alpha_n'$  в зависимости от времени с учётом управления и аэродинамического демпфирования в исходной нелинейной

системе. Эти величины также принимают малых значения, которые уменьшаются по абсолютной величине.

### 2.2.3 Выражения для приближенного оптимального управления в связанной системе координат

При моделировании движения КА относительно центра масс предполагается, что реактивные двигатели малой тяги КА зафиксированы жестким образом в связанной системе координат  $OXYZ$  так, как показано на рисунке 2.11. Полученный вектор функции управления угловой скорости  $\vec{u}_\omega$  направлен вдоль оси  $OX$ . Вектор функции управления пространственного угла атаки  $\vec{u}_\alpha$  направлен по оси  $OZ_n$ . Этот вектор можно спроецировать на оси  $OY$  и  $OZ$  связанной системы координат посредством умножения  $u_\alpha$  на  $\sin\varphi$  и  $\cos\varphi$ , соответственно. При этом вектор управления  $\vec{u}_\alpha$  на ось  $OX$  не проецируется. В результате получаем, что одновременное управление по угловой скорости и пространственному углу атаки обеспечивается независимыми управляющими воздействиями относительно трёх осей связанной системы координат, представленными в следующей системе уравнений

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_\omega \\ 0 \\ u_\alpha \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Значения функций управления в связанной системе координат  $u_x, u_y, u_z$  изображены на рисунке 2.12. Отметим, что значения этих функций приближаются к нулю в течение 20-40 секунд. Следует также отметить, что функция  $u_y$  принимает меньшие значения, чем функции  $u_x, u_z$ , при малых значениях аэродинамического угла крена. При этом управляющий момент относительно оси  $OY$  будет меньше моментов относительно осей  $OX$  и  $OZ$ . В общем случае (при произвольных значениях аэродинамического угла крена)

получаем, что значения функций управления  $u_x, u_y, u_z$  для рассмотренных КА, как правило, принимают близкие значения.

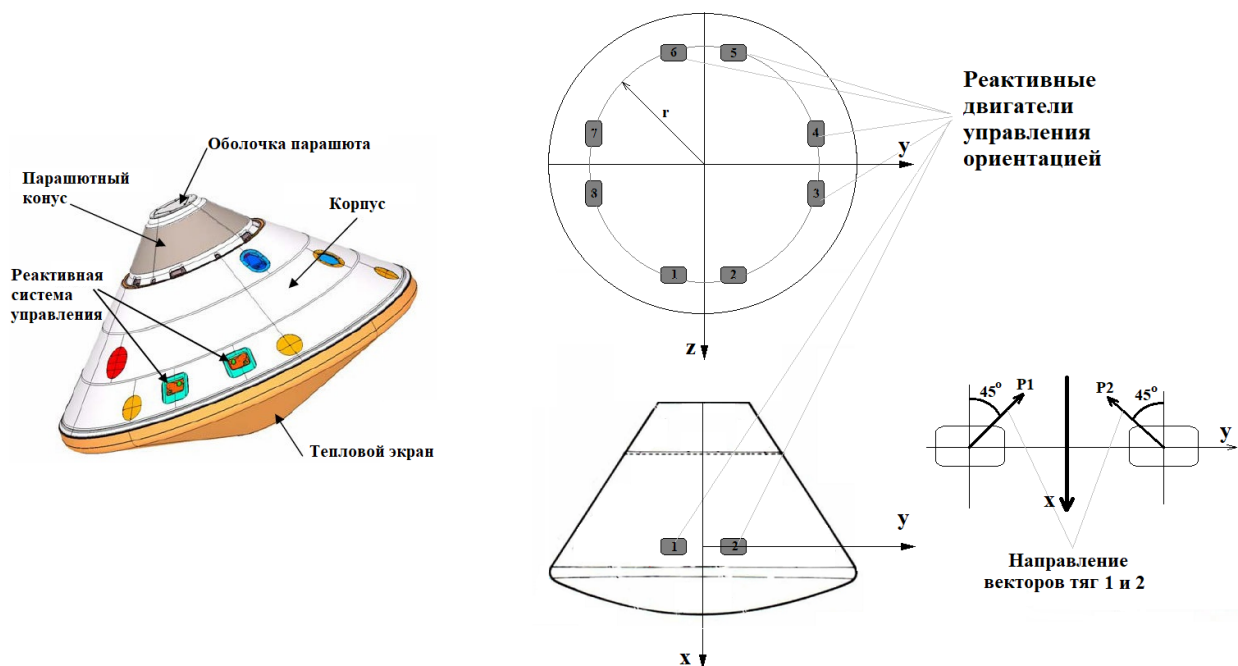


Рисунок 2.11 – Расположение восьми реактивных двигателей управления ориентацией КА в связанной системе координат

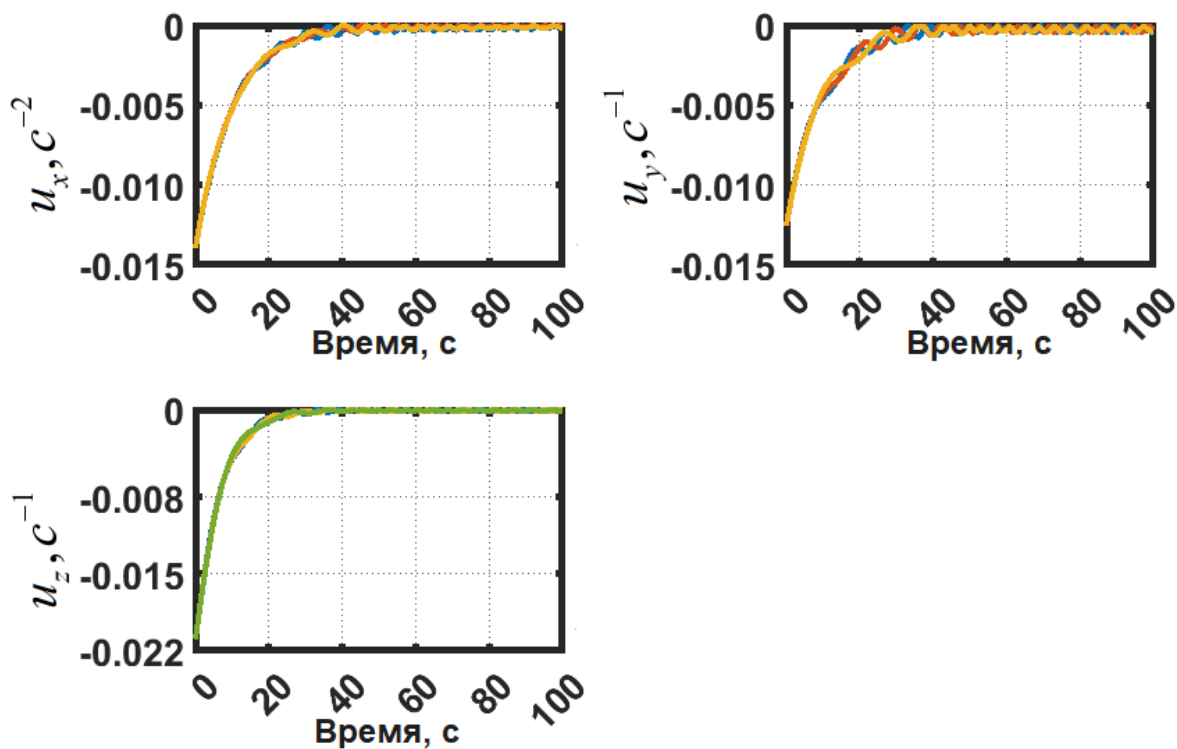


Рисунок 2.12 - Значения функций управления в связанной СК  $u_x, u_y, u_z$  для рассмотренных космических аппаратов

На рисунке 2.13 показаны значения функций управления в связанной системе координат  $u_x, u_y, u_z$ , полученные при разных величинах соотношений весовых коэффициентов  $a_\alpha/b_\alpha$  и  $a_\omega/b_\omega$ . Показано, что увеличение значений соотношений весовых коэффициентов приводит к более быстрому достижению требуемых малых значений угловой скорости и пространственного угла атаки, что также способствует увеличению расход топлива.

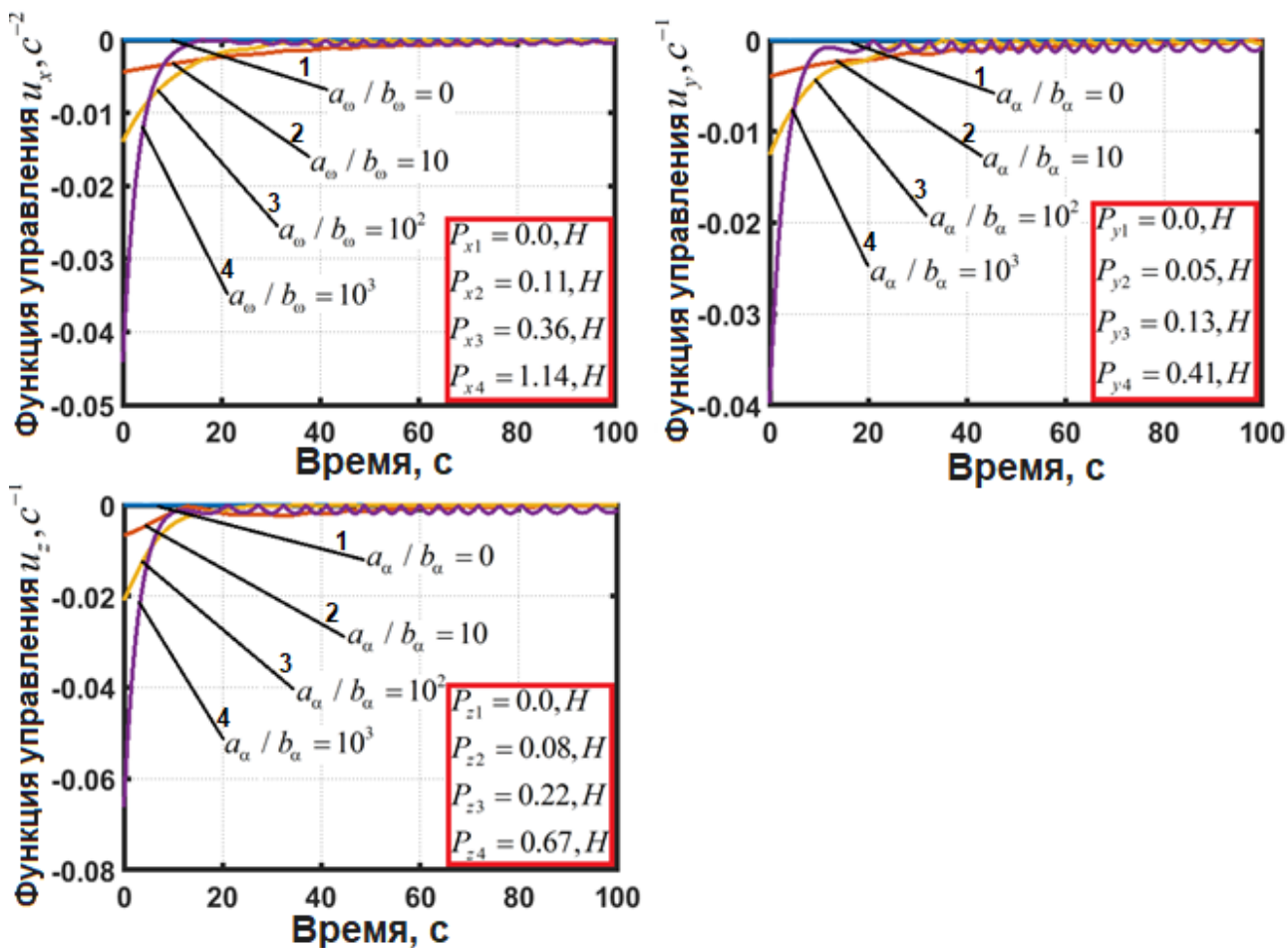


Рисунок 2.13 – Значения функций управления в связанной СК  $u_x, u_y, u_z$  для разных значений соотношений коэффициентов  $a_\alpha/b_\alpha$  и  $a_\omega/b_\omega$  с соответствующими силами тяги реактивных двигателей

Функции управлений пропорциональны моментам реактивных двигателей малой тяги:  $u_\omega = M_{xs} / I_x, u_\alpha = -M_{ys} / 2\omega I$ ;  $M_{xs}, M_{ys}$  - механические моменты от реактивных двигателей управления,  $\omega = \sqrt{-m_{zn0} qSL / I}$ ,



$I = (I_y + I_z) / 2$ . При этом функции управлений в связанной системе координат (2.27) записываются в виде:  $u_x = -M_{ys} / 2\omega I, u_y = M_{xs} \sin \varphi / I_x, u_z = M_{xs} \cos \varphi / I_x$ .

Значения сил тяги реактивных двигателей малой тяги, применяемые при использовании найденных законов оптимального управления, полученных в связанной системе координат, указаны на рисунке 2.11. Эти численные результаты получены при разных значениях коэффициентов критерия оптимальности.

На практике для обеспечения заданной ориентации применяются различные двигательные установки (ДУ) и ракетные двигатели малой тяги (РДМТ) [114]. Например, ДУ на сжатом газе (азот, гелий) или ДУ с РДМТ на газообразных водороде и кислороде дают максимальную тягу, равную 1 Н. В результате численного моделирования максимальное требуемое значение силы тяги двигателей было близко к одному 1 Н. В этом случае для решения задачи оптимального управления можно использовать двигатель, работающий на одном из перечисленных видах топлива.

#### **2.2.4 Дискретные аналоги непрерывных законов управления для учёта влияния дискретности работы двигателей на стабилизацию космического аппарата**

Рассматриваются приближенные дискретные оптимальные аналоги оптимальных непрерывных законов для управляемой стабилизации космического аппарата с асимметрии относительно центра масс.

В результате решения задачи нелинейного управления получены оптимальные непрерывные функции (2.24), обеспечивающие одновременную стабилизацию угловой скорости  $u_{\omega}$  и пространственного угла атаки  $u_{\alpha}$ .

Для получения значений угловой скорости и пространственного угла атаки посредством системы уравнений (2.5) в дискретном виде осуществляется опрос датчика угловой скорости (ДУС) и датчика аэродинамических углов

флюгерного типа (ДАУ-Ф), производимый с заданной дискретностью  $n$ . С такой же дискретностью обновляются управления  $u_{\omega}(n)$  и  $u_{\alpha}(n)$ . Моделирование дискретных величин  $u_{\omega}(n)$  и  $u_{\alpha}(n)$  производится на основе формул (2.24). При этом система уравнений (2.5) интегрируется с малым шагом  $h$ . Значения шага интегрирования меньше значений шага дискретизации функций управления (2.24).

Принципиальная схема управления спускаемого аппарата показана на рисунке 2.14.

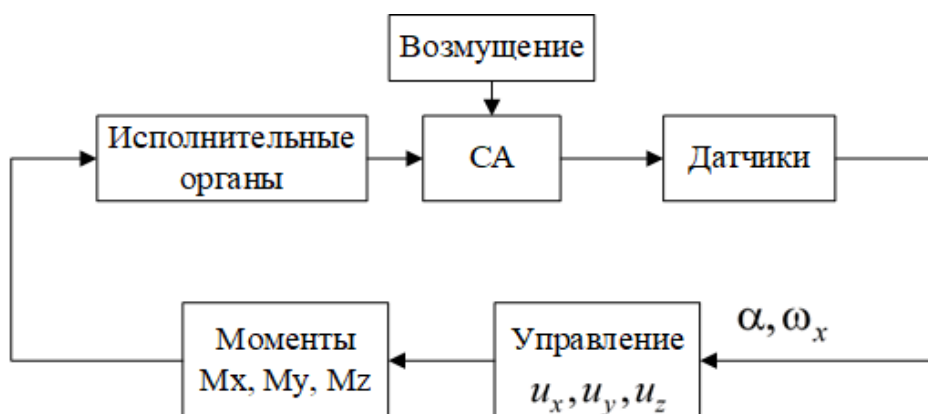


Рисунок 2.14 - Принципиальная схема управления спускаемого аппарата в связанной системе координат

Предполагается, что угловая скорость измеряется датчиком угловой скорости, а пространственный угол атаки измеряется датчиком аэродинамических углов флюгерного типа. Исполнительные органы – реактивные двигатели.

Предположим, что космический аппарат имеет массово-инерционные характеристики, аналогичные спускаемым КА, рассмотренным в таблице 1.1. Результаты дискретного одновременного управления в рассмотренной системе представлены на рисунке 2.15 для пространственного угла атаки и угловой скорости. Они получены с учётом влияния разных значений отношений коэффициентов критерия оптимальности при шаге дискретного функционирования двигателей, равном 4 с. и при постоянном шаге интегрирования, равном 1 с.

Таким образом, из численных результатов интегрирования рассмотренной системы уравнений было установлено, что пространственный угол атаки и угловая скорость, в соответствии с уравнениями (2.5), уменьшаются практически до значений близких к значениям из интервалов погрешностей датчиков в течении 20 с. при значения коэффициентов  $a_\alpha/b_\alpha = 1000$ ,  $a_\omega/b_\omega = 1000$  или в течении 40 с. при значения коэффициентов  $a_\alpha/b_\alpha = 100$ ,  $a_\omega/b_\omega = 100$ .

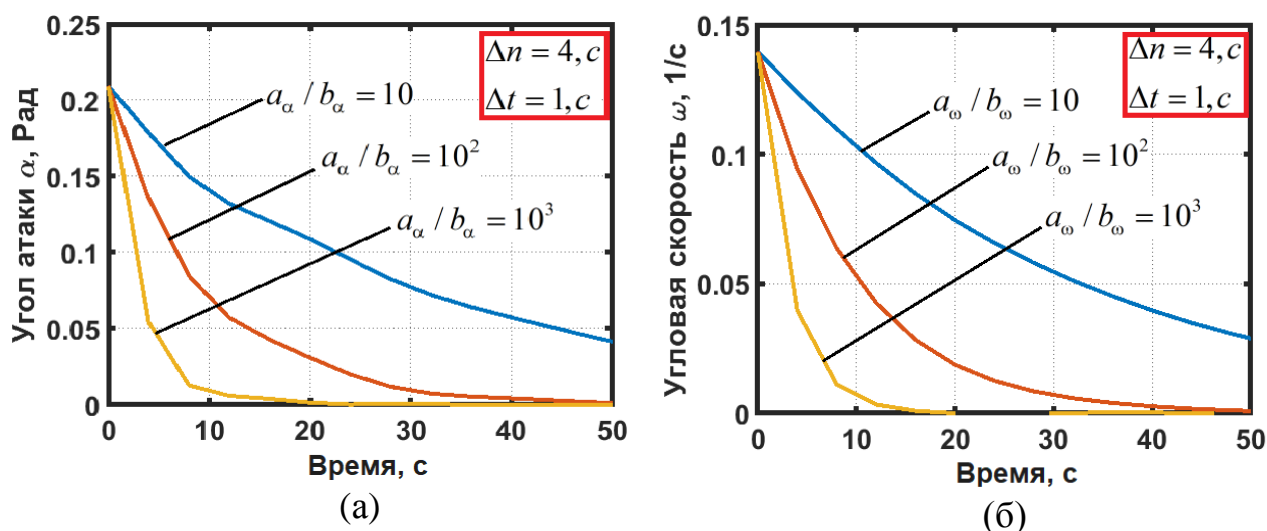


Рисунок 2.15 – Влияние дискретизации на стабилизацию пространственного угла атаки (а) и угловой скорости (б) при различных значениях отношений коэффициентов критерия оптимальности при шаге дискретизации и шаге интегрирования, равных 4с. и 1 с., соответственно

На рисунке 2.16 показаны одновременные изменения дискретных значений функций управления  $u_\omega$  и  $u_\alpha$  в процессе управляемого уменьшения угловой скорости и пространственного угла атаки при разных отношениях коэффициентов критерия оптимальности при шаге дискретности работы двигателей, равном 4 с. и при шаге интегрирования, равном 1 с. Значения этих управляющих функций имеют отрицательные значения. В конечном итоге, значения модулей этих функций уменьшаются до близких к нулю значений.

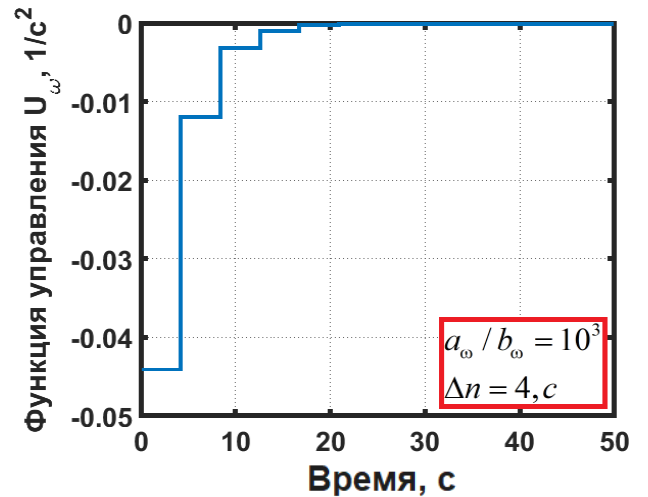
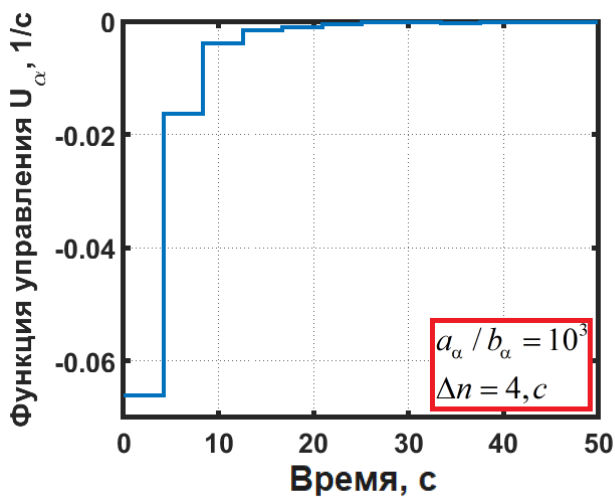
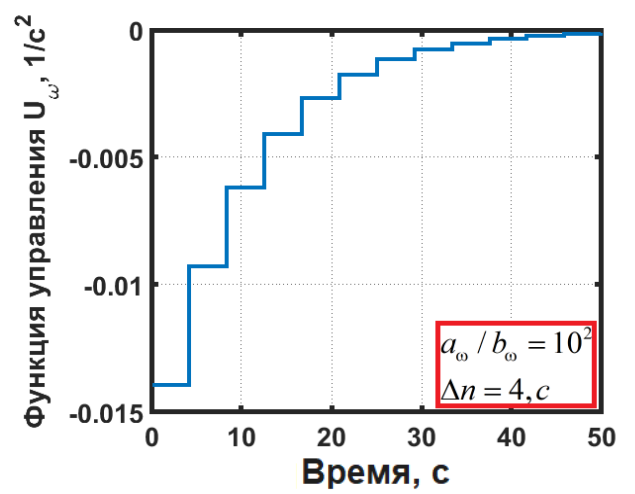
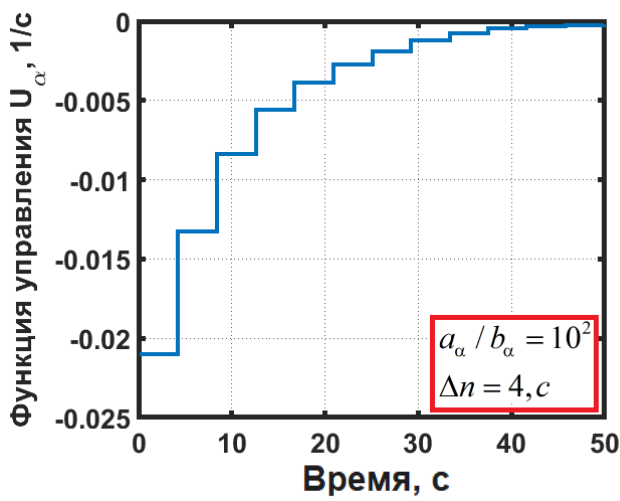
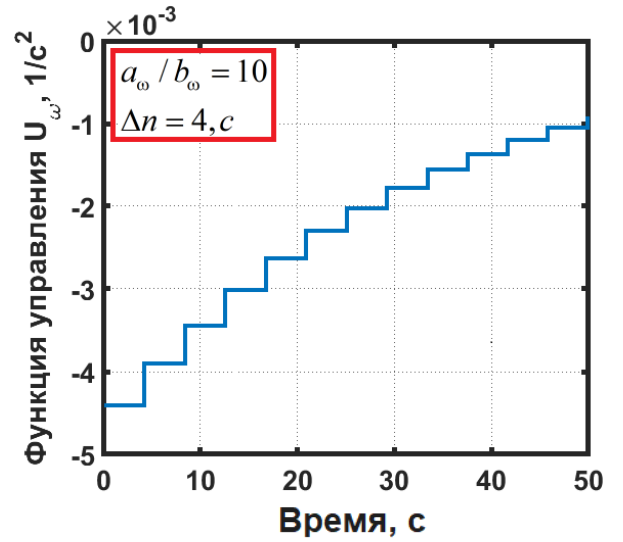
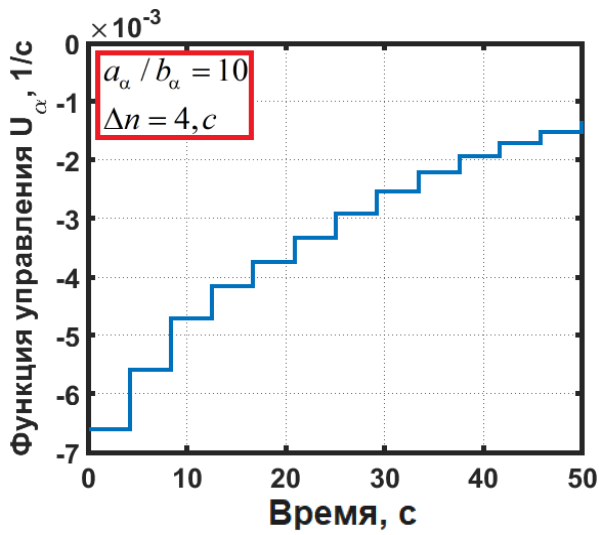


Рисунок 2.16 – Дискретные значения функций управления, стабилизирующих угловую скорость и пространственный угол атаки при разных отношениях коэффициентов критерия оптимальности и при шаге дискретизации, равном 4 с.

На рисунке 2.17 показаны изменения дискретных значений функций управления  $u_\alpha$ ,  $u_\omega$ , и соответствующих значений пространственного угла атаки и угловой скорости.

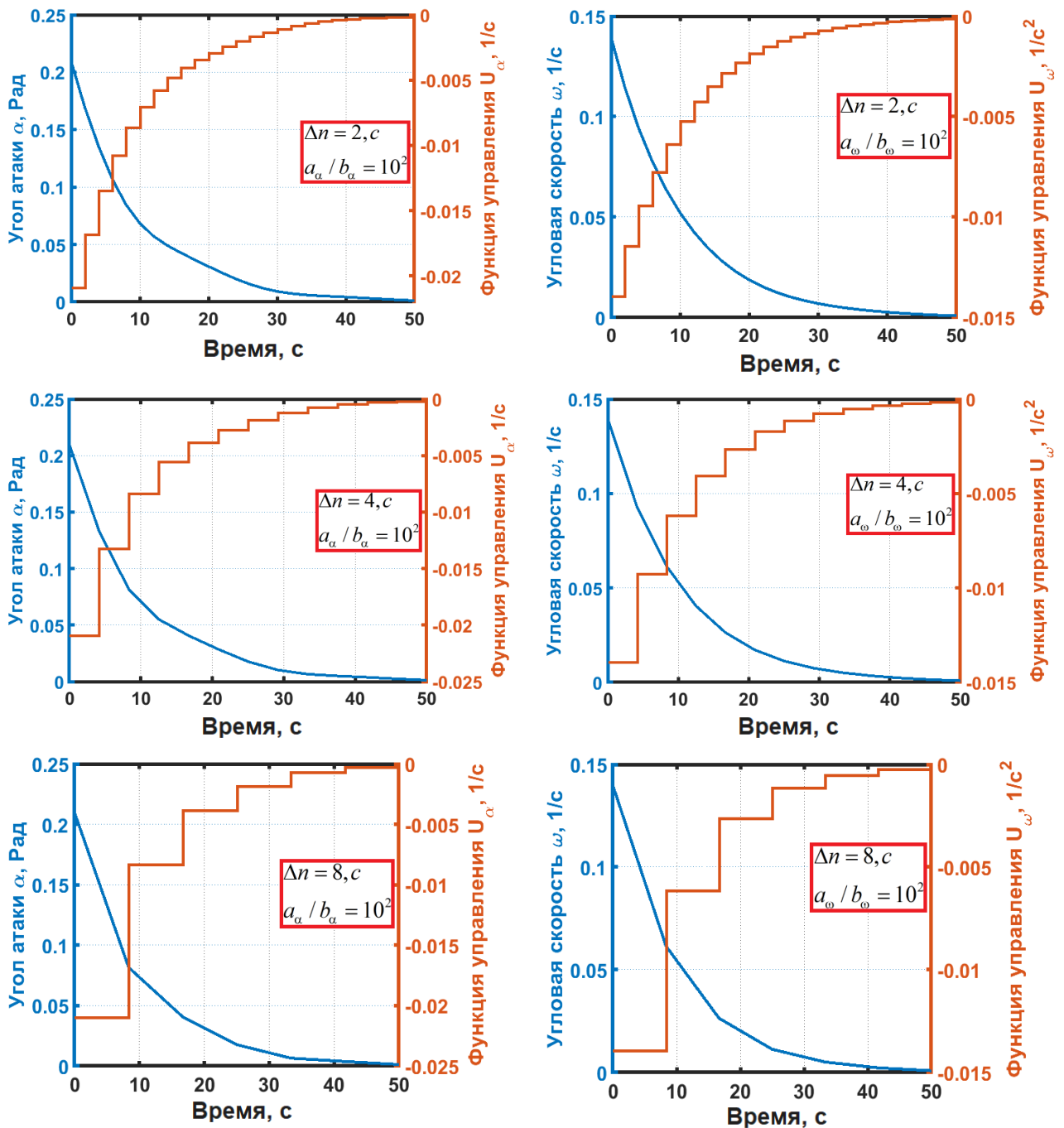


Рисунок 2.17 - Влияние изменения шага дискретизации на значения функций управления  $u_\alpha$ ,  $u_\omega$ , и значения  $\alpha_D$ ,  $\omega_x$  при разных шагах дискретизации: 2, 4, 8 секунд, при шаге интегрирования, равном 1 с., при отношении коэффициентов критерия оптимальности, равном  $10^2$

На рисунке 2.17 представлено одновременное управляемое уменьшение угловой скорости и пространственного угла атаки при разных шагах дискретизации: 2 секунды, 4 секунды, 8 секунд, при шаге интегрирования, равном 1 секунде, и при отношении коэффициентов критерия оптимальности равном  $10^2$ .

Дискретные значения функций управления в связанной системе координат  $u_x, u_y, u_z$  при различных значениях коэффициентов управления и различных силах тяги двигателей показаны на рисунке 2.18.

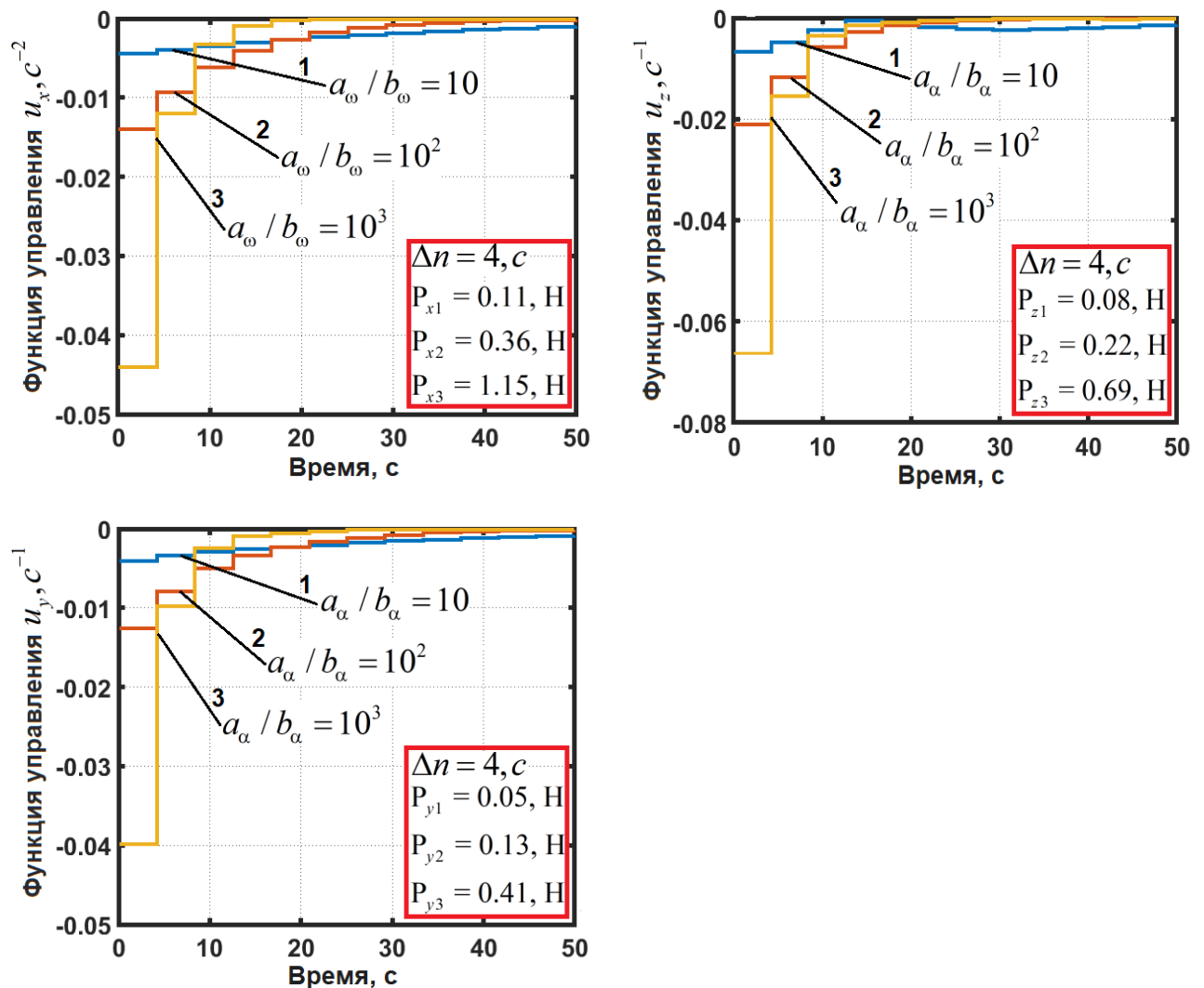


Рисунок 2.18 – Дискретные значения функций управления в связанной СК при различных значениях отношения коэффициентов критерия оптимальности при шаге дискретизации, равном 4 с., и при соответствующих значениях сил тяги двигателей

## **2.3 Приближенное оптимальное управление движением космического аппарата с малой аэродинамической асимметрией и с аэродинамическим демпфированием**

### **2.3.1 Синтез приближенного оптимального закона управления движением космического аппарата с малой аэродинамической асимметрией**

В этом подразделе рассматривается приближенный непрерывный оптимальный закон стабилизации космического аппарата с малой аэродинамической асимметрией и с аэродинамическим демпфированием относительно вектора скорости. Кроме того, в данном подразделе представлен дискретный аналог непрерывного оптимального закона стабилизации КА с малой аэродинамической асимметрией. При синтезе приближенного непрерывного закона управления ориентацией КА применялся метод динамического программирования Беллмана и метод усреднения. Предполагается, что одновременное управление пространственным углом атаки и угловой скоростью производится посредством реактивных двигателей малой тяги. При этом приближенный оптимальный непрерывный закон управления угловой скоростью и пространственным углом атаки, как и его дискретный аналог, применяют на участке спуска КА в атмосфере Марса с высоты 100км до высоты раскрытия парашютной системы на высоте 10км. При этом применяется математическая модель, описывающая возмущенное движение космического аппарата как твёрдого тела с малой аэродинамической асимметрией относительно центра масс при учете малого демпфирующего момента в разрежённой атмосфере Марса.

При синтезе оптимального управления применяются квазилинейные уравнения движения космического аппарата с малой аэродинамической асимметрией относительно центра масс в атмосфере Марса (1.12). При этом в данных уравнениях предполагается, что космический аппарат имеет малые

значения угла атаки  $\alpha$  и малые значения аэродинамической асимметрии. Кроме того, величины угловой скорости и пространственного угла атаки космического аппарата являются управляемыми на этапе спуска КА в атмосфере Марса.

Линеаризованная система уравнений движения КА с учетом малых управлений и малой аэродинамической асимметрий имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\omega}_x(\tau)}{d\tau} &= \varepsilon \frac{m_x^\omega k_1 q s^2 L}{\bar{I}_x V} \bar{\omega}_x(\tau) + \varepsilon \bar{u}_\omega(\tau), \\ \frac{d\bar{\alpha}(\tau)}{d\tau} &= -\varepsilon \frac{k_2 \bar{m}_A}{\bar{I}_x} \cos(\bar{\theta}(\tau) + \bar{\theta}_3) \bar{\omega}_x(\tau) + \varepsilon \bar{u}_\alpha(\tau), \\ \frac{d\bar{\theta}(\tau)}{d\tau} &= (1 - \bar{I}_x) k_3 \bar{\omega}_x(\tau).\end{aligned}\quad (2.28)$$

Здесь  $\bar{\omega}_x$  – безразмерная угловая скорость;  $\bar{\omega}_x = \omega_x / \omega_{x0}$ ,  $\tau$  – безразмерное время;  $\tau = t / t_0$ ,  $\bar{u}_\omega$  – безразмерное управление значением угловой скорости  $\bar{\omega}_x$ ;  $\bar{u}_\omega = k_1 u_\omega$ ,  $\bar{u}_\alpha$  – безразмерное управление величиной пространственного угла атаки  $\bar{\alpha}$ ;  $\bar{u}_\alpha = k_2 u_\alpha$ ,  $k_1 = t_0 \omega_{x0}^{-1}$ ,  $k_2 = t_0$ ,  $k_3 = t_0 \omega_{x0}$  – постоянные коэффициенты, выраженные через начальные значения соответствующих переменных,  $\omega_{x0}$  – начальное значение угловой скорости,  $t_0$  – начальное значение времени ( $t_0 \neq 0$ ).

Задача синтеза оптимального управления состоит в том, чтобы найти приближенные оптимальные законы, обеспечивающие стабилизацию угловой скорости  $\bar{\omega}_x$  и угла атаки  $\bar{\alpha}$ . При этом требуется определить приближенные малые функции управления  $\bar{u}_\alpha \in \bar{U}_\alpha$ ,  $\bar{u}_\omega \in \bar{U}_\omega$ , которые приводят начальный угол атаки  $\alpha_0$  и угловую скорость  $\omega_{x0}$  к заданным малым значениям за время  $T$ .

Вводим следующий квадратичный критерий оптимальности  $I$ :

$$I = \varepsilon \int_0^T (a_\omega \bar{\omega}_x^2 + a_\alpha \bar{\alpha}^2 + b_\omega \bar{u}_\omega^2 + b_\alpha \bar{u}_\alpha^2) dt, \quad (2.29)$$

где  $a_\omega, a_\alpha, b_\omega, b_\alpha$  – заданные положительные коэффициенты критерия оптимальности. Здесь функция  $V(\bar{\omega}_x, \bar{\alpha}, \bar{u}_\omega, \bar{u}_\alpha) = a_\omega \bar{\omega}_x^2 + a_\alpha \bar{\alpha}^2 + b_\omega \bar{u}_\omega^2 + b_\alpha \bar{u}_\alpha^2$  является положительно определённой.



При решении задачи оптимизации, аналогично рассмотренному ранее исследованию, применяем принцип Беллмана [69]:

$$\begin{aligned} \min_{u_\omega, u_\alpha} (\varepsilon a_\omega \bar{\omega}_x^2 + \varepsilon a_\alpha \bar{\alpha}^2 + \varepsilon b_\omega \bar{u}_\omega^2 + \varepsilon b_\alpha \bar{u}_\alpha^2 + \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} \left( \varepsilon \frac{m_x^\omega k_1 q s^2 L}{\bar{I}_x V} \bar{\omega}_x + \varepsilon \bar{u}_\omega \right) + \\ + \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} \left( \varepsilon \bar{u}_\alpha - \varepsilon \frac{\bar{m}_A}{\bar{I}_x} k_2 \bar{\omega}_x \cos(\bar{\theta} + \bar{\theta}_*) \right) + \frac{\partial v}{\partial \bar{\theta}} \varepsilon (1 - \bar{I}_x) k_3 \bar{\omega}_x) = 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Здесь  $v(\bar{\omega}_x, \bar{\alpha}, \bar{\theta})$  - функция Беллмана.

В результате выделения отдельных слагаемых в уравнении (2.30), зависящих только от управлений  $\bar{u}_\omega, \bar{u}_\alpha$ , получим функцию:

$$F(\bar{u}_\omega, \bar{u}_\alpha) = b_\omega \bar{u}_\omega^2 + b_\alpha \bar{u}_\alpha^2 + \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} \bar{u}_\omega + \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} \bar{u}_\alpha. \quad (2.31)$$

При этом условия оптимальности имеют следующий вид:  $\partial F / \partial \bar{u}_\omega = 0$  и  $\partial F / \partial \bar{u}_\alpha = 0$ . Из решения данных уравнений найдем выражения для оптимальных управлений:

$$\begin{aligned} \bar{u}_\omega &= -\frac{1}{2b_\omega} \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x}, \\ \bar{u}_\alpha &= -\frac{1}{2b_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Следует отметить, что критерий Сильвестра для  $F(\bar{u}_\omega, \bar{u}_\alpha)$  выполняется в стационарной точке (2.32) при выполнении следующих условий:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{u}_\omega^2} = 2b_\omega > 0, \det H = 4b_\omega b_\alpha > 0. \text{ Здесь } H \text{ – матрица Гессе.}$$

Подставляя управления (2.32) в уравнение (2.31) после упрощения и применения метода усреднения [30,32], получаем упрощенное уравнение Беллмана:

$$a_\omega \bar{\omega}_x^2 + a_\alpha \bar{\alpha}^2 + \frac{1}{4b_\omega} \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} \right)^2 - \frac{1}{4b_\alpha} \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} \frac{m_x^\omega k_1 q s^2 L}{\bar{I}_x V} \bar{\omega}_x - \frac{1}{2b_\omega} \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} \right)^2 = 0. \quad (2.33)$$

Далее требуется найти решение уравнения (2.33) методом неопределенных коэффициентов, выбрав следующую функцию Беллмана:

$v = A\bar{\omega}_x^2 + B\bar{\alpha}^2$ . Здесь  $A, B$  - искомые коэффициенты. Для определения коэффициентов  $A, B$  выполним подстановку выражения  $v(\bar{\omega}_x, \bar{\alpha})$  в уравнение (2.33). В результате получаем:

$$\bar{\omega}_x^2 \left( a_\omega - \frac{A^2}{b_\omega} + 2Af_\omega \right) + \bar{\alpha}^2 \left( a_\alpha - \frac{B^2}{b_\alpha} \right) = 0. \quad (2.34)$$

Здесь  $f_\omega = \frac{m_x^\omega k_1 q s^2 L}{\bar{I}_x V}$ .

В случае, если угловая скорость  $\bar{\omega}_x$  и угол атаки  $\bar{\alpha}$  одновременно не равны нулю, то уравнение (2.34) принимает вид системы из двух уравнений. Из решения этой системы определяются выражения для величин  $A$  и  $B$ . Подставляя эти выражения в функцию  $v(\bar{\omega}_x, \bar{\alpha})$  после её дифференцирования находим искомые оптимальные управления, которые при антидемпфировании ( $f_\omega > 0$ ) и при демпфировании ( $f_\omega < 0$ ) принимают вид (2.35) и (2.36), соответственно:

$$\begin{aligned} \bar{u}_\omega(\tau) &= - \left( f_\omega + \sqrt{f_\omega^2 - a_\omega b_\omega^{-1}} \right) \bar{\omega}_x(\tau); \\ \bar{u}_\alpha(\tau) &= - \sqrt{\frac{a_\alpha}{b_\alpha}} \bar{\alpha}(\tau). \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_\omega(\tau) &= - \left( f_\omega + \sqrt{f_\omega^2 + a_\omega b_\omega^{-1}} \right) \bar{\omega}_x(\tau); \\ \bar{u}_\alpha(\tau) &= - \sqrt{\frac{a_\alpha}{b_\alpha}} \bar{\alpha}(\tau). \end{aligned} \quad (2.36)$$

При этом в первом приближении метода усреднения первые два уравнения (2.28) имеют вид:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\bar{\alpha}(\tau)}{d\tau} \right\rangle &= -\varepsilon K_\alpha \bar{\alpha}(\tau), \\ \left\langle \frac{d\bar{\omega}_x(\tau)}{d\tau} \right\rangle &= -\varepsilon K_\omega \bar{\omega}_x(\tau). \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\text{Здесь } K_\alpha = \sqrt{a_\alpha b_\alpha^{-1}}, \quad K_\omega = \begin{cases} \sqrt{f_\omega^2 + a_\omega b_\omega^{-1}}; & f_\omega < 0 \\ \sqrt{f_\omega^2 - a_\omega b_\omega^{-1}}; & f_\omega > 0 \end{cases}.$$

Подставляя функции управления  $\bar{u}_\alpha$  и  $\bar{u}_\omega$  из (2.35) в систему (2.28), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\omega}_x(\tau)}{d\tau} &= \varepsilon \frac{m_x^\omega k_1 q s^2 L}{\bar{I}_x V} \bar{\omega}_x(\tau) - \varepsilon \left( f_\omega + \sqrt{f_\omega^2 - a_\omega b_\omega^{-1}} \right) \bar{\omega}_x(\tau), \\ \frac{d\bar{\alpha}(\tau)}{d\tau} &= -\varepsilon \frac{k_2 \bar{m}_A}{\bar{I}_x} \cos(\bar{\theta}(\tau) + \bar{\theta}_3) \bar{\omega}_x(\tau) - \varepsilon \sqrt{a_\alpha b_\alpha} \bar{\alpha}(\tau) / b_\alpha. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Предположим, что космический аппарат имеет массово-инерционные характеристики, аналогичные спускаемым КА, рассмотренным в таблице 1.1.

На рисунках 2.19-2.22 представлены некоторые численные результаты моделирования движения КА с малой аэродинамической асимметрией и с аэродинамическим демпфированием.

На рисунке 2.19 показаны значения угловой скорости и пространственного угла атаки и их функции управлений при функционировании управления в линеаризованной системе уравнения (2.28). На этих рисунках показаны безразмерные значения коэффициентов критерия оптимальности  $a_\alpha = 0.495$ ,  $b_\alpha = 0.005$ ,  $a_\omega = 0.492$ ,  $b_\omega = 0.008$ , при которых получаем одновременное уменьшение величин  $\alpha_{II}$  и  $\omega_x$ , происходящее через 40 с. после начала спуска, до значений из интервалов погрешности датчиков: интервал  $[0.0001, 0.004]$  рад для датчика  $\alpha_{II}$  и интервал  $[-0.002 \ 0.002]$  1/с для датчика  $\omega_x$ .

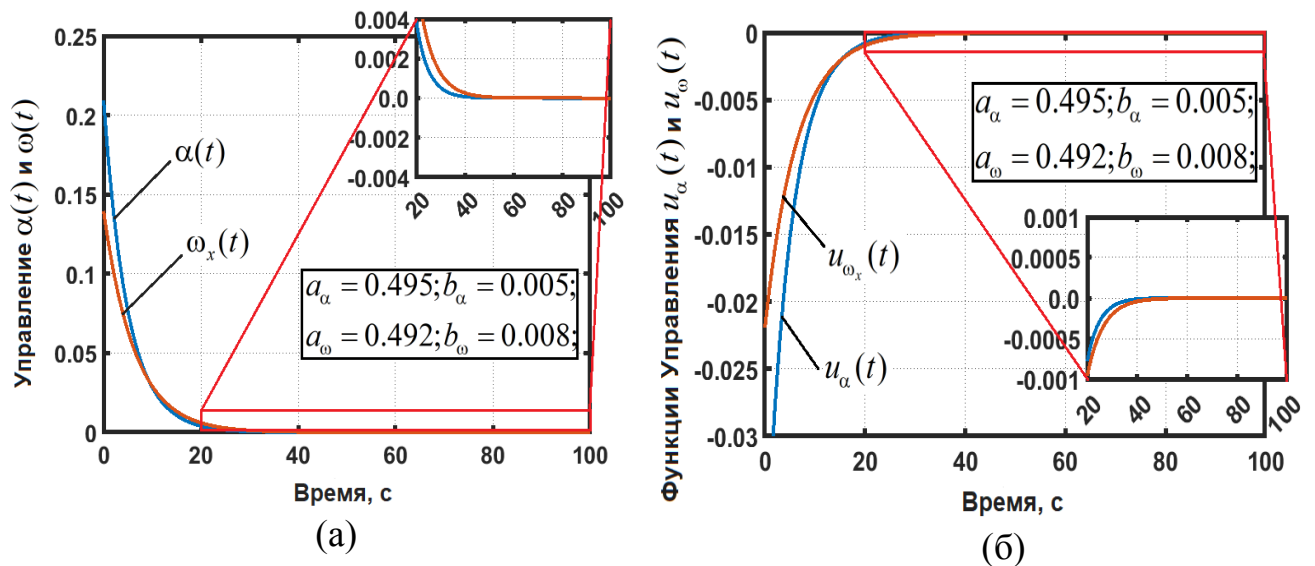


Рисунок 2.19 – Значения угловой скорости и пространственного угла атаки (а) при функционировании управления в линеаризованной системе (2.28), значения функции управления, с указанными значениями коэффициентов критерия оптимальности (б)

На рисунке 2.20 показаны значения угловой скорости и пространственного угла атаки при заданных различных значениях коэффициентов критерия оптимальности  $a_\alpha/b_\alpha$  и  $a_\omega/b_\omega$ : 0 (нет управления), 10, 100, 1000, 10000.

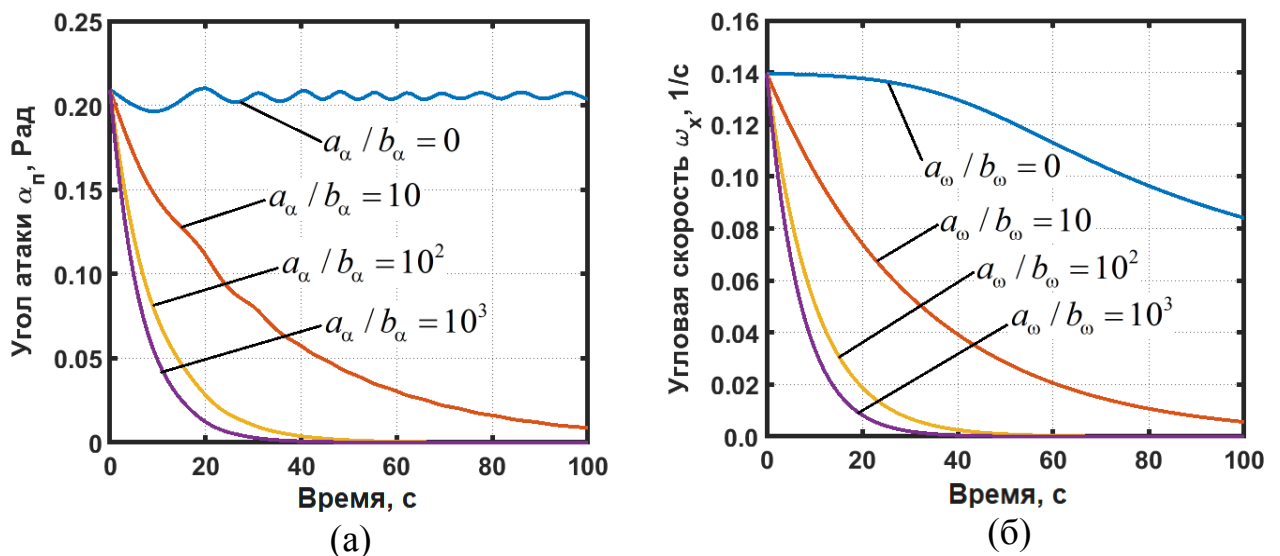
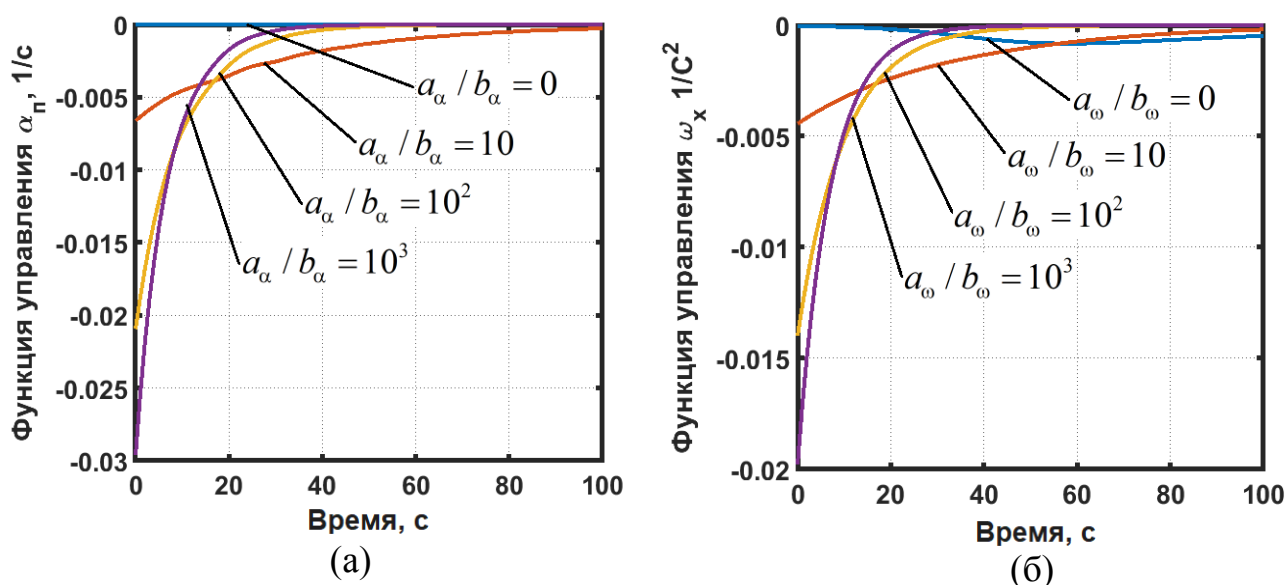


Рисунок 2.20 – Значение пространственного угла атаки (а) и значение угловой скорости (б) с учётом управления (2.28) в линеаризованной системе при различных значениях коэффициентов критерия оптимальности

Значения  $a_\alpha/b_\alpha$  и  $a_\omega/b_\omega$ : 0 (нет управления), 10, 100, 1000, 10000, рассматривались при исследовании влияния коэффициентов критерия оптимальности на процесс одновременной стабилизации угловой скорости и пространственного угла атаки в линеаризованной системе уравнения (2.28).

Заметим, что значения угловой скорости и пространственного угла атаки уменьшаются быстрее к малым значениям погрешности датчиков при увеличении значения соотношения  $a_\alpha/b_\alpha$  и  $a_\omega/b_\omega$ .

На рисунке 2.21а показано изменение функций управления пространственным углом атаки и угловой скоростью при заданных значениях отношения коэффициентов критерия оптимальности.



На рисунке 2.21а – Значение функции управления пространственным углом атаки (а) и значение функции управления угловой скоростью (б) при заданных значениях соотношения критерия оптимальности

Таким образом, эти функции управления имеют малые отрицательные значения. Следует отметить, что при увеличении значений отношений коэффициентов критерия оптимальности, данные функции управления приводят к более быстрому уменьшению значений угловой скорости и пространственного угла атаки до малых значений, позволяющих величинам  $\alpha_n$

и  $\omega_x$  одновременно попасть в интервалы погрешности соответствующих датчиков.

На рисунке 2.21б показано влияние дискретности работы двигателей на значения пространственного угла атаки и угловой скорости при заданных значениях отношений критерия оптимальности, при моделировании движения КА с использованием дискретных аналогов управления с шагом дискретизации, равным 4 с., при шаге интегрирования, равным 1 с.

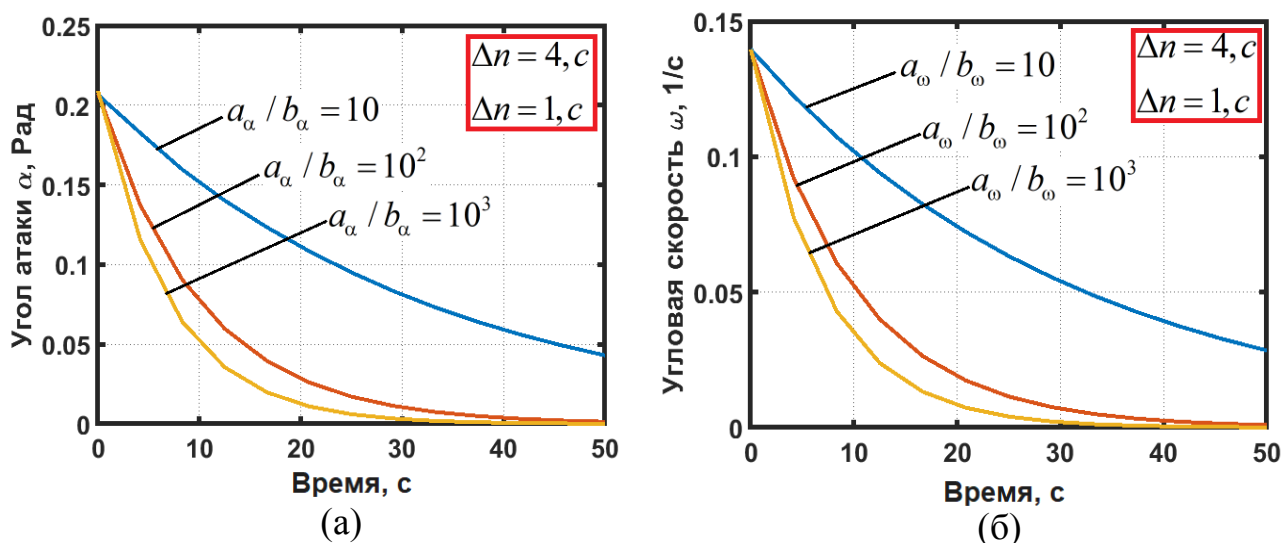


Рисунок 2.21б – Влияние дискретности на пространственный угол атаки и угловую скорость в зависимости от времени при шаге дискретизации 4 с. и при различных значениях отношений коэффициентов критерия оптимальности

На рисунке 2.22б показаны значения дискретных аналогов функций управления пространственным углом атаки и угловой скоростью при шаге дискретизации, равном 4 с. и при шаге интегрирования, равном 1 с., при различных значениях отношений коэффициентов критерия оптимальности  $a_\alpha/b_\alpha$  и  $a_\omega/b_\omega$ , равных 10, 100, 1000.

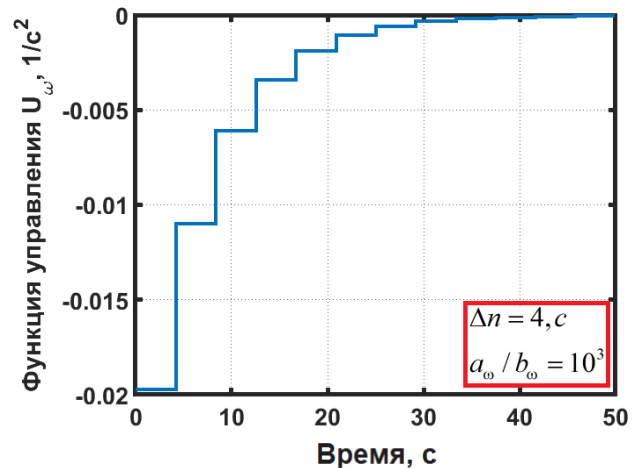
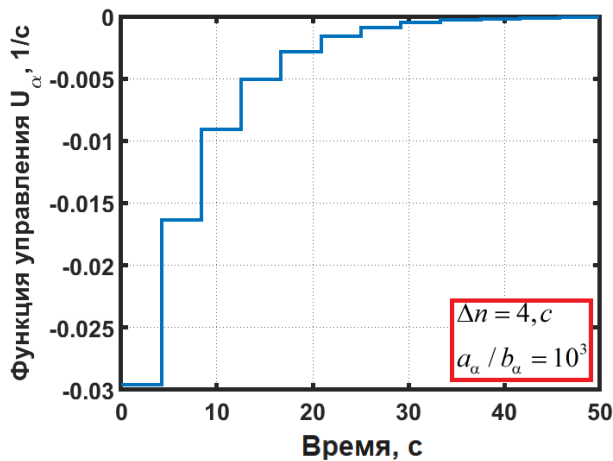
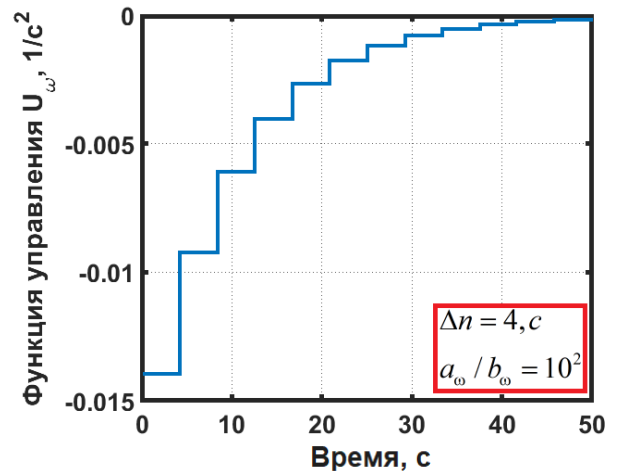
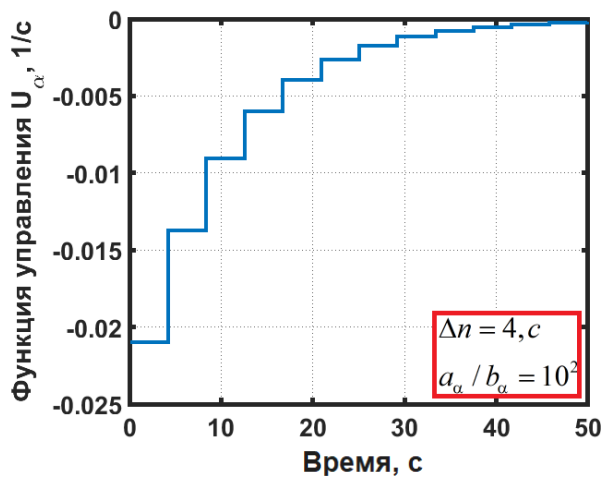
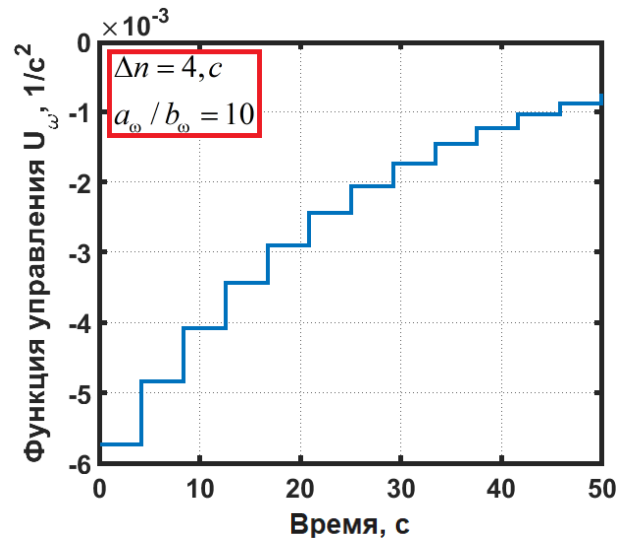
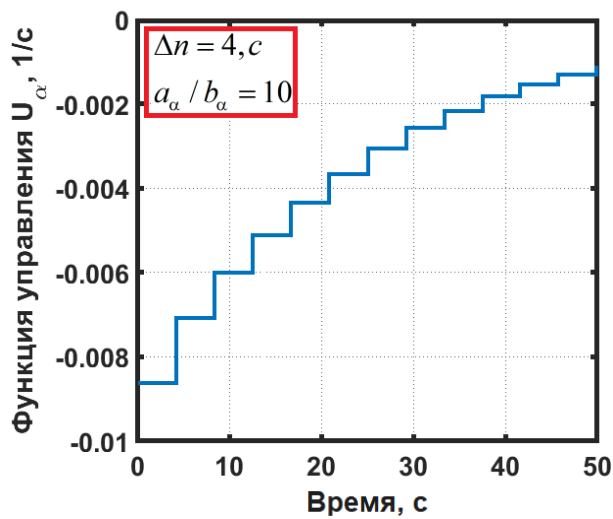


Рисунок 2.22 – Дискретные аналоги функций управления пространственным углом атаки и угловой скоростью с шагом дискретизации 4 с. и при различных значениях отношений коэффициентов критерия оптимальности

На рисунке 2.23 показано изменение дискретных значений функций управления  $u_\alpha$ ,  $u_\omega$  и соответствующих им значений пространственного угла атаки  $\alpha_{II}$  и угловой скорости  $\omega_x$ .

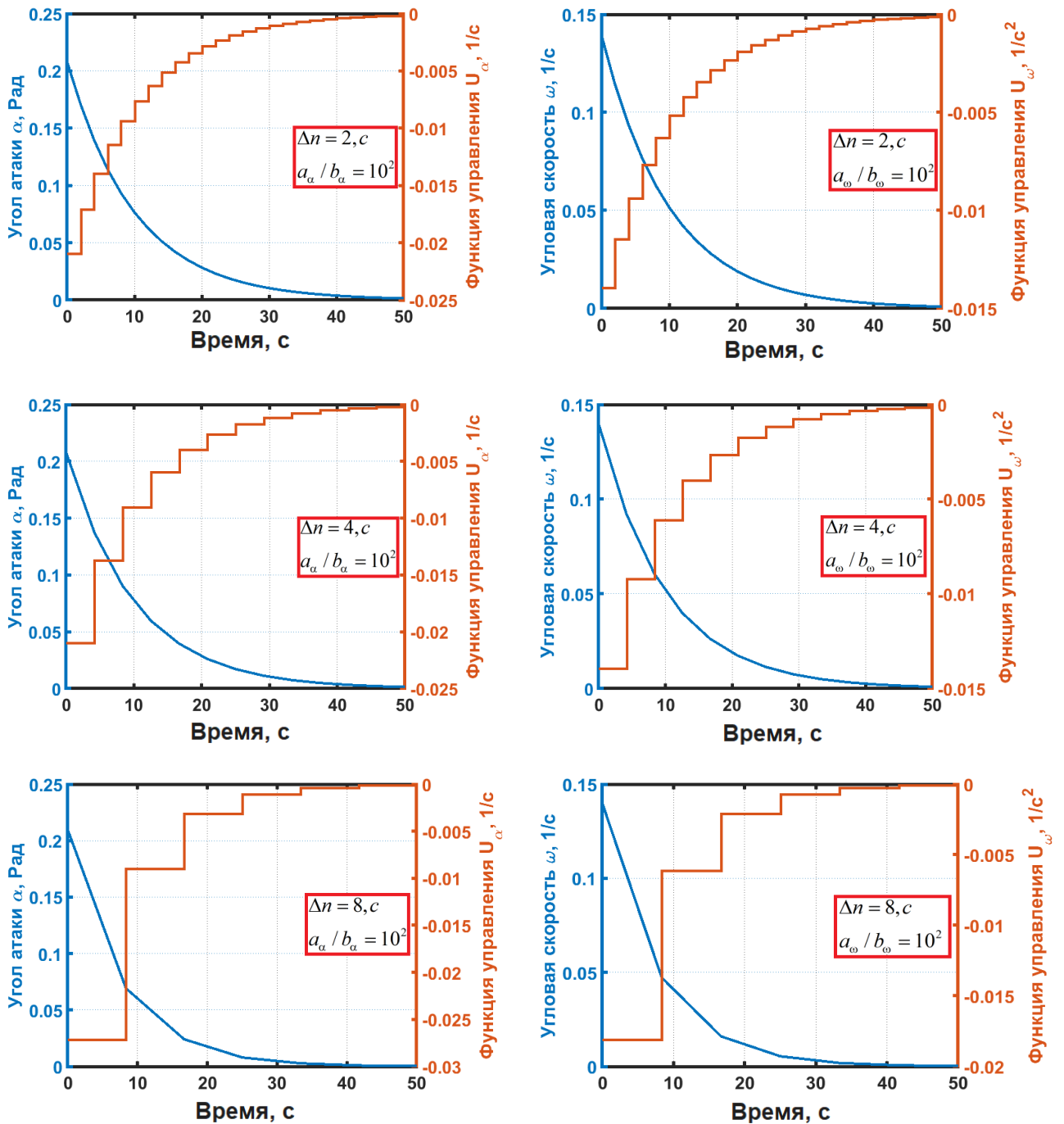


Рисунок 2.23 – Изменение дискретных значений функций управления  $u_\alpha$ ,  $u_\omega$ , и соответствующих им значений пространственного угла атаки  $\alpha_{II}$  и угловой скорости  $\omega_x$  при разных шагах дискретизации: 2 с., 4 с., 8 с. и при отношениях коэффициентов критерия оптимальности, равных  $10^2$



На рисунке 2.23 значения угловой скорости, пространственного угла атаки и соответствующих им функции управления получены при разных шагах дискретизации: 2 с., 4 с., 8 с., при шаге интегрирования, равном 1 с., и при отношениях весовых коэффициентов, равных  $10^2$ .

Результаты показывают, что увеличение значений отношений коэффициентов критерия оптимальности  $a_\alpha/b_\alpha$  и  $a_\omega/b_\omega$  способствует одновременному уменьшению пространственного угла атаки и угловой скорости до величин погрешности датчиков, фиксирующих данные величины. Анализ численных результатов показывает, что значений этих отношений порядка  $10^3$  и более достаточно для обеспечения достижения пространственным углом атаки и угловой скоростью значений погрешности датчиков ДУС и ДАУ-Ф, которое происходит в течении 40 с. При этом увеличение шага дискретности позволяет производить меньшее количество включений реактивных двигателей, что приводит к экономии топлива. Однако, при увеличении величины шага включения двигателей может быть потеряна точностью управления.

### **2.3.2 Проверка приближенного оптимального управления посредством исходной нелинейной системы уравнений вращательного движения асимметричного КА**

Рассмотрим проверку полученных законов управления, осуществляемая на основе использования исходной нелинейной системы уравнений движения КА (1.7). Здесь приводятся результаты проверки на примере закона управления (2.35).

Известно, что в исходной системе уравнение для определения пространного угла атаки является дифференциальным уравнением второго порядка. Упрощённые дифференциальные уравнения для этого угла, применяемые в данной работе при получении приближенных законов

управления, имеют первый порядок. Следовательно, полученный на основе упрощённых уравнений П-регулятор вида (2.35) в исходной системе (без учёта применяемых упрощающих предположений) не обеспечит стабилизацию по данному углу атаки. В этом случае следует использовать ПД-регулятор:

$$\begin{aligned}\bar{u}_\omega(\tau) &= -\left(f_\omega + \sqrt{f_\omega^2 - a_\omega b_\omega^{-1}}\right)\bar{\omega}_x(\tau), \\ \bar{u}_\alpha(\tau) &= -\sqrt{\frac{a_\alpha}{b_\alpha}}\bar{\alpha}(\tau) - K_{2\alpha}\frac{d\bar{\alpha}}{d\tau}.\end{aligned}\tag{2.39}$$

Здесь  $K_\omega, K_\alpha$  - коэффициенты пропорционального регулятора для угловой скорости и пространственного угла атаки, соответственно,  $K_{2\alpha}$  - положительный коэффициент дифференциального регулятора для пространственного угла атаки.

В результате численного моделирования, выполненного посредством применения исходной нелинейной системы уравнений (1.7) с учётом синтезированного непрерывного управления, получены закономерности изменения пространственного угла атаки  $\alpha$  и угловой скорости  $\omega_x$ , представленные на рисунке 2.24. При этом пространственный угол атаки и угловая скорость достигают близких к нулю значений, обеспечивающих требуемую стабилизацию КА относительно вектора скорости.

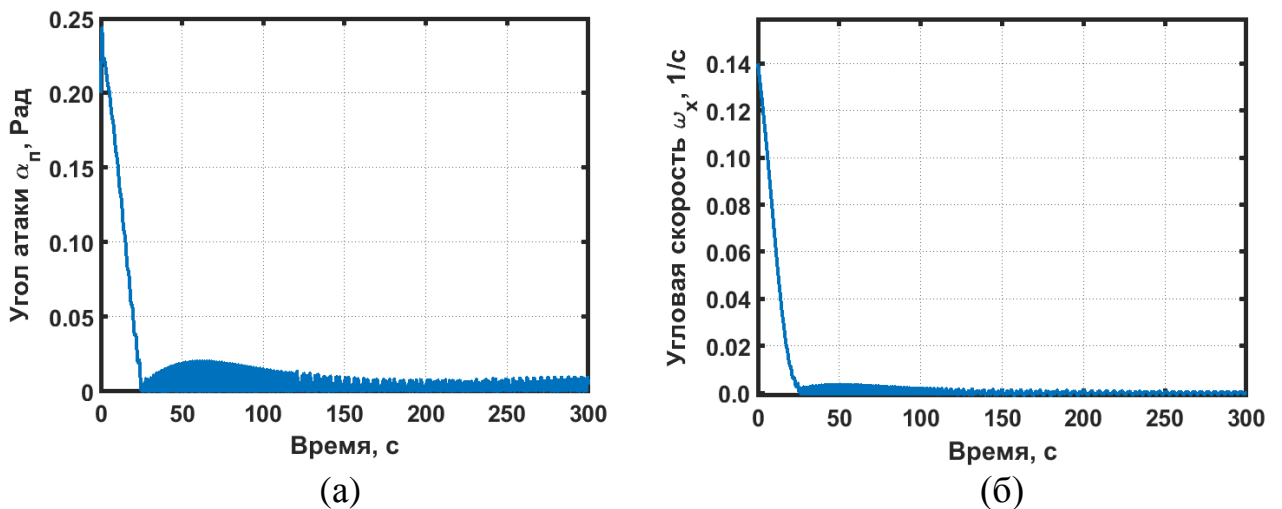


Рисунок 2.24 – Значение пространственного угла атаки (а) и угловой скорости (б) в зависимости от времени с учётом управления в исходной нелинейной системе

На рисунке 2.25 показаны значения функции управления пространственным углом атаки и угловой скоростью в зависимости от времени с учётом непрерывного оптимального управления в исходной нелинейной системе. Эти функции принимают отрицательные значения и их модули приближаются к нулевым значениям.

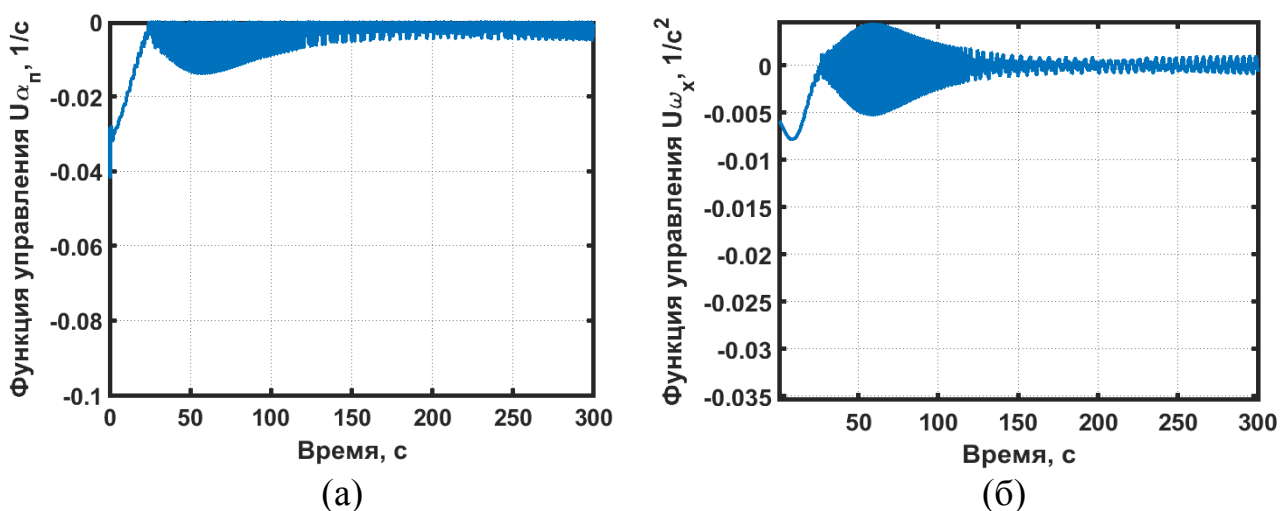


Рисунок 2.25 – Зависимости функции управления пространственным углом атаки (а) и угловой скоростью (б) от времени с учётом управления в исходной нелинейной системе

Представленные в этом подразделе численные результаты показывают, что они качественно соответствуют аналогичным численным результатам, полученным на основе квазилинейных уравнений оптимального управляемого движения КА, линеаризованных по угловой скорости.

#### 2.4 Синтез оптимальной стабилизации космического зонда в разрежённых слоях атмосферы с малыми смещениями центра масс

В разделе 2.2 было рассмотрено оптимальное управление движением КА с учётом малой аэродинамической и малым смещением центра масс при спуске в атмосфере Марса. В разделе 2.3 рассмотрено оптимальное управление

движением КА относительно центра масс с учётом малой аэродинамической асимметрий при спуске в атмосфере Марса. В этом разделе рассматривается оптимальная стабилизация движения КА относительно вектора скорости с учётом только малого смещения центра масс при моделировании низкоорбитального движения малых космических аппаратов, исследующих поверхность и атмосферу Марса [115]. В этих трёх подразделах с целью получения разных законов стабилизации КА относительно вектора скорости используются три различные упрощённые квазилинейные системы уравнений движения.

В этом подразделе рассматривается управляемое движение космического зонда с малым смещением центра масс в верхних слоях атмосферы Марса. Применением метода динамического программирования и метода усреднения позволяет синтезировать приближенный оптимальный закон управления движением данного космического зонда.

Рассматривается динамическая система, описывающая движение малого космического аппарата с малым смещением центра масс в верхних слоях атмосферы Марса. Искомый синтезируемый непрерывный приближенный оптимальный закон управления обеспечивает стабилизацию пространственного угла атаки и угловой скорости космического зонда.

Предполагается, что управление пространственным углом атаки и угловой скоростью осуществляется с помощью реактивных двигателей малой тяги.

Линеаризованная система уравнений движения КА относительно центра масс [7] при малом смещении центра масс и при  $\omega_x > 0$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\omega}_x}{d\tau} &= -\varepsilon \bar{m} k_1 \omega^2 \bar{I}_x^{-1} \sin(\bar{\theta} + \bar{\theta}_1) + \varepsilon \bar{u}_\omega, \\ \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} &= \varepsilon \frac{\bar{m} k_2 C_{y1} \omega}{2C_{x1}} \cos(\bar{\theta} + \bar{\theta}_1) + \varepsilon \bar{u}_\alpha, \\ \frac{d\bar{\theta}}{d\tau} &= (1 - \bar{I}_x) k_3 \bar{\omega}_x. \end{aligned} \quad (2.40)$$

где  $\bar{\omega}_x$  – безразмерная угловая скорость;  $\bar{\omega}_x = \omega_x / \omega_{x0}$ ,  $\tau$  – безразмерное время;  $\tau = t / t_0$ ,  $\bar{u}_\omega$  – безразмерное управление значением угловой скорости  $\omega_x$ ;  $\bar{u}_\omega = k_1 u_\omega$ ,  $\bar{u}_\alpha$  – безразмерное управление величиной пространственного угла атаки  $\alpha$  [11];  $\bar{u}_\alpha = k_2 u_\alpha$ ,  $k_1 = t_0 \omega_{x0}^{-1}$ ,  $k_2 = t_0$ ,  $k_3 = t_0 \omega_{x0}$  – постоянные коэффициенты, выраженные через начальные значения соответствующих переменных,  $\omega_{x0}$  – начальное значение угловой скорости,  $t_0$  – начальное значение времени ( $t_0 \neq 0$ ).

Рассмотрим задачу синтеза непрерывного приближенного оптимального закона управления, обеспечивающего стабилизацию угловой скорости и пространственного угла атаки в исследуемой динамической системе (2.40). В этом случае требуется определить приблизительные малые функции управления  $\bar{u}_\alpha \in \bar{U}_\alpha$  и  $\bar{u}_\omega \in \bar{U}_\omega$ , которые приводят начальный пространственный угол атаки  $\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}(\tau_0)$  и начальную угловую скорость  $\bar{\omega}_{x0} = \bar{\omega}_x(\tau_0)$  к заданным малым значениям  $\bar{\alpha}_T = \bar{\alpha}(T)$  и  $\bar{\omega}_{xT} = \bar{\omega}_x(T)$  в течение заданного интервала времени полёта  $T$  [11].

Для решения поставленной задачи вводится квадратичный критерий оптимальности  $I$ :

$$I = \varepsilon \int_0^T (a_\omega \bar{\omega}_x^2 + a_\alpha \bar{\alpha}^2 + b_\omega \bar{u}_\omega^2 + b_\alpha \bar{u}_\alpha^2) dt, \quad (2.41)$$

где  $a_\omega, a_\alpha, b_\omega, b_\alpha$  – заданные положительные безразмерные коэффициенты критерия оптимальности, где подынтегральная функция:  $V(\bar{\omega}_x, \bar{\alpha}, \bar{u}_\omega, \bar{u}_\alpha) = a_\omega \bar{\omega}_x^2 + a_\alpha \bar{\alpha}^2 + b_\omega \bar{u}_\omega^2 + b_\alpha \bar{u}_\alpha^2$  является положительно определенной.

Для решения задачи оптимизации применяется принцип Беллмана [13], который для системы (2.40) и критерия (2.41) приводит к соотношению [10]:

$$\min_{u_\omega, u_\alpha} \left( a_\omega \bar{\omega}_x^2 + a_\alpha \bar{\alpha}^2 + b_\omega \bar{u}_\omega^2 + b_\alpha \bar{u}_\alpha^2 + \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} \frac{d\bar{\omega}_x}{d\tau} + \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} + \frac{\partial v}{\partial \bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{d\tau} \right) = 0, \quad (2.42)$$

где  $v(\bar{\omega}_x, \bar{\alpha}, \bar{\theta})$  - функция Беллмана.

Подставляя производные  $\frac{d\bar{\omega}_x}{d\tau}, \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau}, \frac{d\bar{\theta}}{d\tau}$  из системы (2.40) в равенство

(2.42), получаем:

$$\begin{aligned} \min_{u_\omega, u_\alpha} & \left( \varepsilon a_\omega \bar{\omega}_x^2 + \varepsilon a_\alpha \bar{\alpha}^2 + \varepsilon b_\omega \bar{u}_\omega^2 + \varepsilon b_\alpha \bar{u}_\alpha^2 + \right. \\ & + \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} (-\varepsilon \bar{m} k_1 \omega^2 \bar{I}_x^{-1} \sin(\bar{\theta} + \bar{\theta}_1) + \varepsilon \bar{u}_\omega) + \\ & \left. + \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} \left( \varepsilon \frac{\bar{m} k_2 C_{y1} \omega}{2C_{x1}} \cos(\bar{\theta} + \bar{\theta}_1) + \varepsilon \bar{u}_\alpha \right) + \frac{\partial v}{\partial \bar{\theta}} (1 - \bar{I}_x) k_3 \bar{\omega}_x \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Выделив в уравнении (2.43) отдельно члены, зависящие от элементов управления  $\bar{u}_\omega, \bar{u}_\alpha$ , мы получаем следующее выражение:

$$F(\bar{u}_\omega, \bar{u}_\alpha) = b_\omega \bar{u}_\omega^2 + b_\alpha \bar{u}_\alpha^2 + \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} \bar{u}_\omega + \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} \bar{u}_\alpha \quad (2.44)$$

Необходимые условия минимума функции  $F(\bar{u}_\omega, \bar{u}_\alpha)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \bar{u}_\omega} &= 2b_\omega \bar{u}_\omega + \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \bar{u}_\alpha} &= 2b_\alpha \bar{u}_\alpha + \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} = 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Из решения системы уравнений (2.45) мы находим выражения для оптимального управления:

$$\begin{aligned} \bar{u}_\omega &= -\frac{1}{2b_\omega} \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x}, \\ \bar{u}_\alpha &= -\frac{1}{2b_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

В данных стационарных точках выполняется критерий Сильвестра:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{u}_\omega^2} = 2b_\omega > 0, \det H = 4b_\omega b_\alpha > 0. \quad (2.47)$$

Здесь  $H$  – матрица Гессе.

Таким образом, выполнение условий (2.47) обеспечивает минимум функции  $F(\bar{u}_\omega, \bar{u}_\alpha)$  в стационарных точках (2.46). Подставляя управления (2.46) в уравнение (2.43) (после упрощения), получаем уравнение Беллмана [10]:

$$\begin{aligned}
& a_\omega \bar{\omega}_x^2 + a_\alpha \bar{\alpha}^2 + \frac{1}{4b_\omega} \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} \right)^2 + \frac{1}{4b_\alpha} \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} \right)^2 - \frac{1}{2b_\alpha} \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} \right)^2 - \\
& - \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} (\alpha \bar{m} \omega^2 k_1 \bar{I}_x^{-1} \sin(\bar{\theta} + \bar{\theta}_1)) - \frac{1}{2b_\omega} \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} \right)^2 - \\
& + \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} \frac{\bar{m} C_{y1}}{2C_{x1}} k_2 \omega \cos(\bar{\theta} + \bar{\theta}_1) + \frac{\partial v}{\partial \bar{\theta}} (1 - \bar{I}_x) k_3 \bar{\omega}_x = 0.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

В результате усреднения левой части уравнения (2.48) по быстрой фазе, учитывая только первое приближение метода усреднения, получаем следующее уравнение:

$$a_\omega \bar{\omega}_x^2 + a_\alpha \bar{\alpha}^2 - \frac{1}{4b_\omega} \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}_x} \right)^2 - \frac{1}{4b_\alpha} \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}} \right)^2 = 0. \tag{2.49}$$

Далее найдём решение уравнения (2.49) посредством применения метода неопределённых коэффициентов. Искомое решение имеет вид:

$$v = A \bar{\omega}_x^2 + B \bar{\alpha}^2. \tag{2.50}$$

Здесь  $A, B$  являются искомыми постоянными коэффициентами, принимающими следующие значения:

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{a_\omega b_\omega} \\
B &= \sqrt{a_\alpha b_\alpha}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Подставляя коэффициенты (2.51) в функцию Беллмана (2.50), определяем выражения для оптимального управления (2.46):

$$\begin{aligned}
\bar{u}_\omega(\tau) &= -\frac{1}{b_\omega} \sqrt{a_\omega b_\omega} \bar{\omega}(\tau), \\
\bar{u}_\alpha(\tau) &= -\frac{1}{b_\alpha} \sqrt{a_\alpha b_\alpha} \bar{\alpha}(\tau).
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Подставляя полученные выражения в систему (2.40) после её усреднения по быстрой фазе с учётом только первого приближения, получаем:

$$\left\langle \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} \right\rangle = -\varepsilon K_{\alpha} \bar{\alpha},$$

$$\left\langle \frac{d\bar{\omega}_x}{d\tau} \right\rangle = -\varepsilon K_{\omega} \bar{\omega}_x.$$
(2.53)

Здесь  $K_{\omega} = \sqrt{a_{\omega} b_{\omega}^{-1}}$ ,  $K_{\alpha} = \sqrt{a_{\alpha} b_{\alpha}^{-1}}$ .

Таким образом, решение уравнений (2.53), полученное с учётом найденных приближенных оптимальных непрерывных управлений, обеспечивает асимптотическую устойчивость пространственного угла атаки и угловой скорости в первых приближениях метода усреднения.

Предположим, что космический зонд имеет массово-инерционные характеристики, аналогичные спускаемым КА [10], рассмотренным в таблице 1.1.

На рисунке 2.26 показаны зависимости угловой скорости и пространственного угла атаки от времени при движении КА с малым смещением центра масс на заданной высоте 100 км без учета управления.

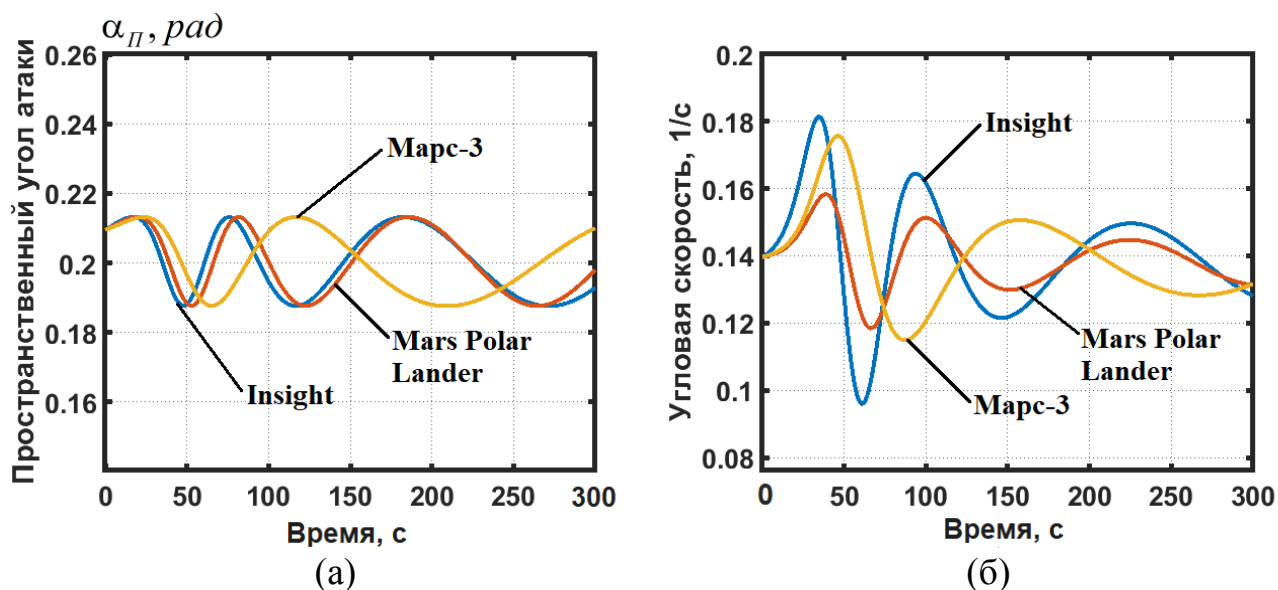


Рисунок 2.26 – Зависимости пространственного угла атаки и угловой скорости от времени без учета управления

На рисунке 2.27 показаны значения угловой скорости и пространственного угла атаки и их функции управления с учётом управления в линеаризованной системе (2.40). На этих рисунках показаны безразмерные



значения коэффициентов критерия оптимальности  $a_\alpha = 0.49, b_\alpha = 0.01, a_\omega = 0.492, b_\omega = 0.008$ , позволяющие величинам  $\alpha_\Pi$  и  $\omega_x$  в течение 40 с. полёта на высоте 100 км. одновременно достичь значений из интервалов погрешности датчиков, равных:  $[0.0001, 0.004]$  рад. для датчика  $\alpha_\Pi$  и  $[-0.002, 0.002]$  1/с. для датчика  $\omega_x$ .

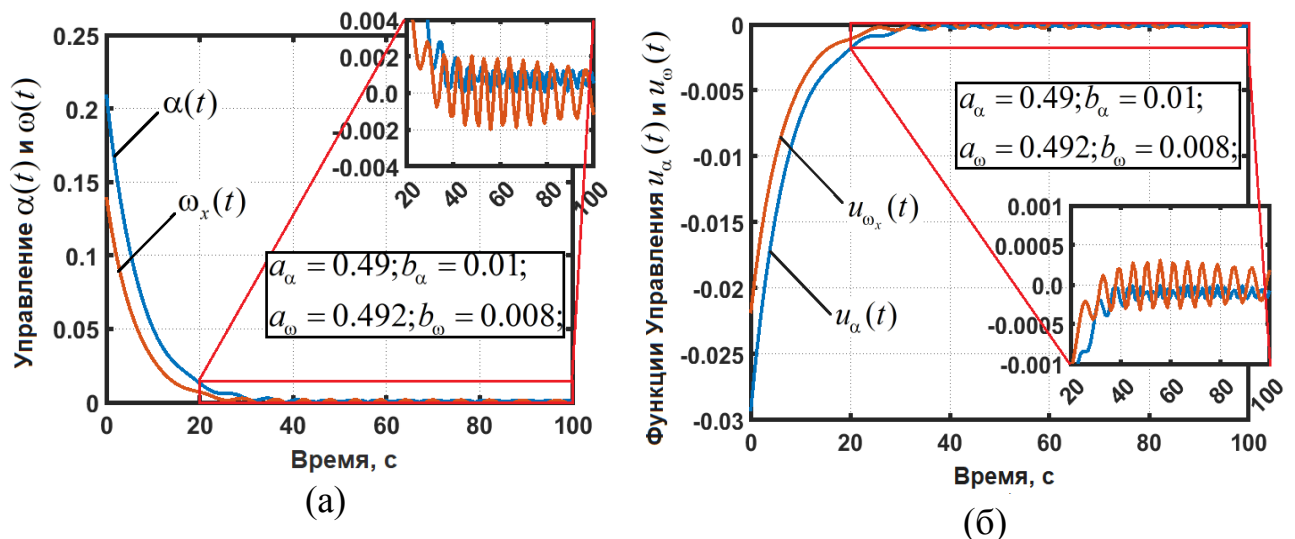


Рисунок 2.27 – Значения пространственного угла атаки (а) и угловой скорости (б) с учётом управления в линеаризованной системе (2.40) с указанными значениями коэффициентов критерия оптимальности, позволяющие величинам  $\alpha_\Pi$  и  $\omega_x$  одновременно достичь значений из интервалов погрешности датчиков через 40 с. после начала управляемого полёта на высоте 100 км.

Численные результаты оптимального управления углом атаки и угловой скоростью КА с малыми смещениями центра масс при начальной высоте 100 км., выполненные посредством применения линеаризованной системы уравнений (2.40) при различных значениях отношений коэффициентов критерия оптимальности  $a_\alpha / b_\alpha$  и  $a_\omega / b_\omega$ , показаны на рисунке 2.28.

Из рисунков 2.27-2.28 следует, что синтезированный закон управления (2.52) способствует уменьшению угловой скорости и пространственного угла атаки до значений, близких к погрешности регистрирующих эти величины датчиков за время спуска, равное 20 с. (при величинах  $a_\alpha / b_\alpha = a_\omega / b_\omega = 10^3$ ) или

за время 40 с. (при величинах  $a_\alpha / b_\alpha = a_\omega / b_\omega = 10^2$ ). При этом обеспечивается требуемая стабилизация КА относительно вектора скорости.

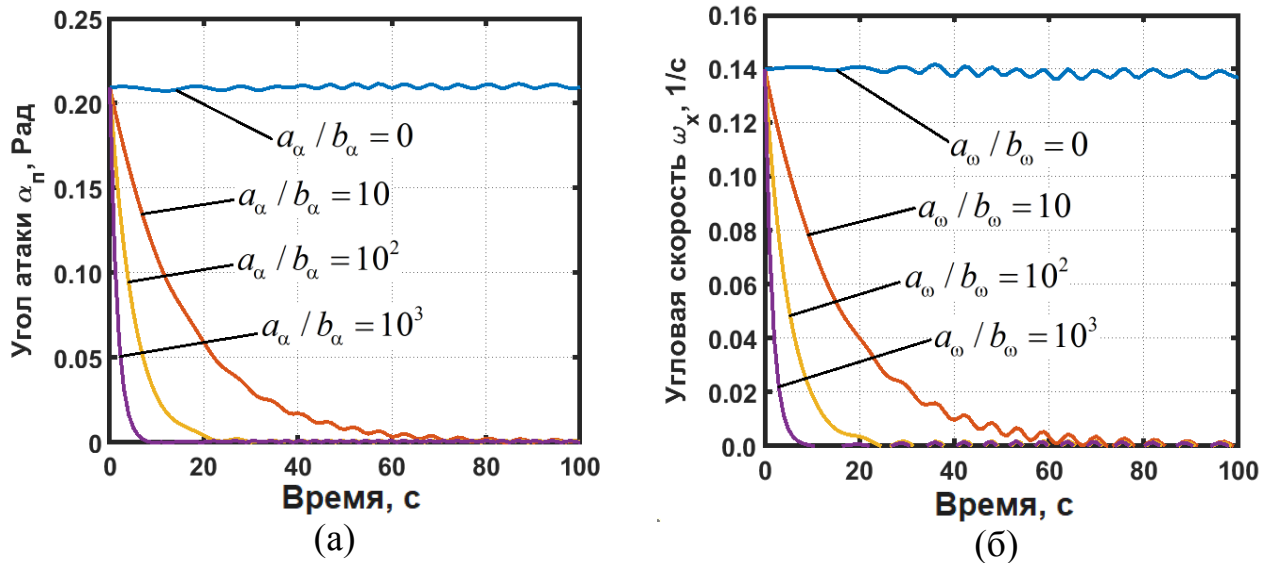


Рисунок 2.28 – Зависимость пространственного угла атаки (а) и угловой скорости (б) от времени при разных значениях отношений коэффициентов критерия оптимальности  $a_\alpha / b_\alpha$  и  $a_\omega / b_\omega$

На рисунке 2.29 показано изменение значений функций управления  $u_\omega(t)$  и  $u_\alpha(t)$  в процессе управляемого уменьшения угловой скорости и пространственного угла атаки, соответственно. Значения этих управляющих функций имеют малые отрицательные значения, модули которых уменьшаются до близких к нулю значений.

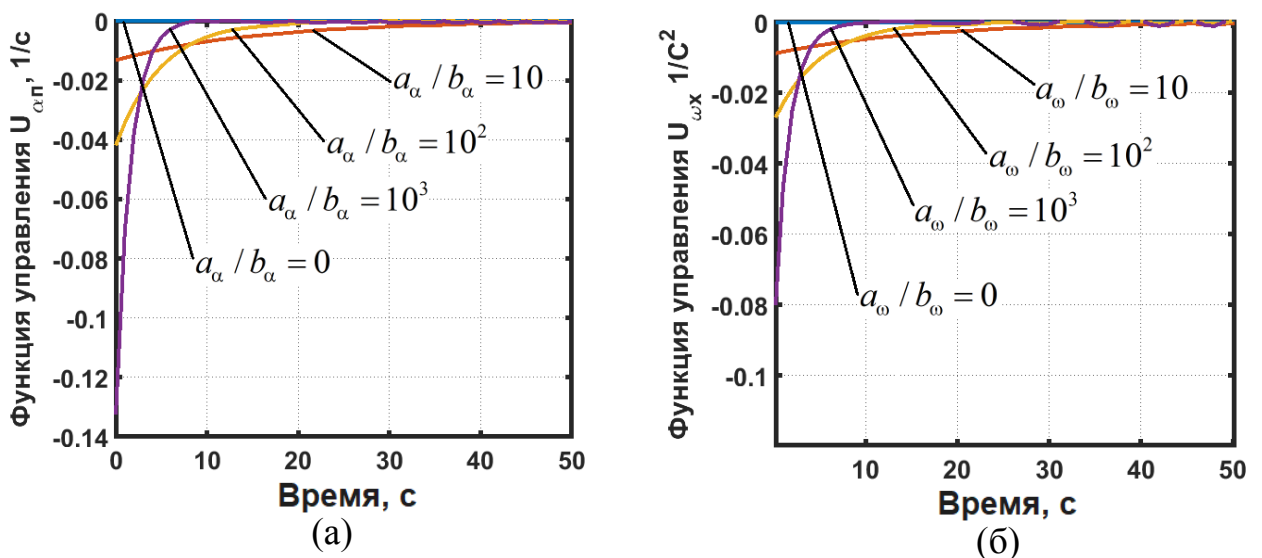


Рисунок 2.29 – Зависимость функций управления пространственным углом атаки (а) и угловой скорости (б) от времени при разных значениях отношений коэффициентов критерия оптимальности  $a_\alpha / b_\alpha$  и  $a_\omega / b_\omega$

Для сравнения полученных в работе законов управления, строится таблица 2.1, содержащая коэффициенты всех функций управления  $K_\alpha$  и  $K_\omega$ .

Таблица 2.1 – Сравнение коэффициентов полученных законов управления

	Первый закон (при малой аэродинамической асимметрии и при малых смещениях центра масс)	Второй закон (при малой аэродинамической асимметрии и с аэродинамическим демпфированием)	Третий закон (при малых смещениях центра масс)
$K_\alpha$	$\sqrt{a_\alpha b_\alpha^{-1}}$	$\sqrt{a_\alpha b_\alpha^{-1}}$	$\sqrt{a_\alpha b_\alpha^{-1}}$
$K_\omega$	$\sqrt{a_\omega b_\omega^{-1}}$	$f_\omega + \sqrt{f_\omega^2 - a_\omega b_\omega^{-1}}$	$\sqrt{a_\omega b_\omega^{-1}}$

Напомним, что первый закон получен при малой аэродинамической асимметрии и при малых смещениях центра масс, второй закон получен при малой аэродинамической асимметрии, а третий закон получен при малых смещениях центра масс.

Таким образом, коэффициент  $K_\alpha$  описывается одной формулой во всех трёх законах управления, а коэффициент  $K_\omega$  одинаковы лишь в первом и третьем законах. В качестве примера, зададим следующие величины  $a_\alpha = a_\omega = 0.495$ ,  $b_\alpha = b_\omega = 0.01$  и путём моделирования движения КА «Mars Polar Lander» получим, что коэффициенты во втором законе принимают значения не меньшие, чем коэффициенты в первом и третьем законах управления.

Численные результаты работы подтверждают, что полученные приближенные непрерывные выражения для оптимизированного управления обеспечивают [10] требуемую стабилизацию космического аппарата относительно вектора скорости [99]. Действительно, они могут обеспечить уменьшение угловой скорости и пространственного угла атаки до значений погрешности ДУС и ДАУ-Ф за время, равное 40 и менее секундам. Следует отметить, что эти малые значения угловой скорости и угла атаки были

получены при начальных значениях этих характеристик движения асимметричного КА, равных 0,14 рад/с. и 0,21 рад., соответственно.

В таблице 2.2 представлено сравнение результатов работ других авторов с результатами данной диссертации.

В таблице 2.3 представлено сравнение неуправляемого спуска с управляемым спуском по угловой скорости  $\omega_x$  и управляемым спуском по угловой скорости  $\omega_x$  и пространственному углу атаки  $\alpha_{П}$ .

### **Вывод по второй главе.**

Использование метода динамического программирования Беллмана в сочетании с методом усреднения позволило решить задачу синтеза законов оптимальных непрерывных управлений, обеспечивающих заданную ориентацию космического аппарата с различными сочетаниями малой аэродинамической асимметрией и малым смещением центра масс при спуске в атмосфере Марса. В конечном результате были получены новые выражения для непрерывного оптимального управления (а также их дискретные аналоги) с учётом малых величин аэродинамической асимметрии и малого смещения центра масс. Оптимальное управление осуществлялось по двум каналам одновременно: по угловой скорости и пространственному углу атаки.

Численные результаты работы подтверждают, что полученные приближенные непрерывные выражения для оптимального управления обеспечивают уменьшение угловой скорости и пространственного угла атаки до требуемых малых значений за время, соизмеримое со временем от начала движения спускаемого космического аппарата в атмосфере до момента ввода в действие тормозной парашютной системы. Практическая значимость полученных дискретных законов управления подтверждается использованием при численном моделировании малых реактивных двигателей, работающих в дискретном режиме.

Таблица 2.2 - Сравнение результатов работ других авторов с результатами диссертации

Сделано ранее в других работах	Сделано в данной диссертации
<p>Закон оптимального управления спускаемым КА по угловой скорости <math>\omega_x</math> при спуске в атмосфере Марса с учётом возмущений от малой асимметрии, полученное в работах Любимова В. В. и Куркиной Е. В. [33-36,39,40,41,100].</p>	<p>Законы одновременного оптимального управления спускаемым КА по угловой скорости <math>\omega_x</math> и по пространственному углу атаки <math>\alpha_D</math> при спуске в атмосфере Марса с учётом различных возмущений от малых аэродинамической и массово-инерционной асимметрий, рассмотренные в работах [8,10,11].</p> <p>Исследовано влияние дискретности работы двигателей на процесс стабилизации КА с малой асимметрией относительно вектора скорости в атмосфере Марса, описанное в работах [6,7].</p>
<p>В работах [85-87], [99] были найдены диапазоны допустимых значения величин асимметрии спускаемого КА. При этом в работе Любимова В. В. [85] был выбран следующий критерий, ограничивающий величины асимметрий:</p> $ \Omega  =  \bar{m}_x^A \bar{m}^A \cos(\theta_1 - \theta_2)  \leq  \Omega_p ,$ <p>в работах Куркиной Е. В. [86,99] выбран следующий критерий:</p> $ \Omega  =  \sqrt{\bar{m}_x^A} \bar{m}^A \cos(\theta_2 - \theta_1)  \leq  \Omega_p ,$ <p>в работе Лашина В.С. [87] выбран следующий критерий:</p> $ \Omega  =  (\bar{m}_x^A)^2 \bar{m}^A \cos(2\theta_2 - 2\theta_3)  \leq  \Omega_p .$	<p>Предложена методика и алгоритм построения диапазона допустимых значения параметров малых асимметрий спускаемого КА при его неуправляемом вращательном движении в атмосфере Марса. В работе [91] выбран следующий критерий, ограничивающий величины аэродинамической и инерционной асимметрий:</p> $ \Omega  =  \bar{m}^A  \leq  \Omega_p .$ <p>Применение этого критерия позволило расширить интервал допустимых величин смещения центра масс.</p>

Таблица 2.3 – Сравнение характерных особенностей при неуправляемом спуске, при спуске с управлением угловой скоростью  $\omega_x$ , при спуске с одновременным управлением угловой скоростью  $\omega_x$  и углом атаки  $\alpha_{II}$

<p><b>Неуправляемый спуск</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Возможность появления резонанса при наличии малой асимметрии для малых КА.</li> <li>2. Возможность аварийной ситуации при раскрытии парашютных систем при нарушении требований по стабилизации КА относительно вектора скорости.</li> <li>3. *Не требуется расход топлива.</li> </ol>
<p><b>Управляемый спуск (управление только угловой скоростью)</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Обеспечивается стабилизация угловой скорости и спуск КА происходит без реализации главного резонанса.</li> <li>2. Управление осуществляется исключительно по одной составляющей угловой скорости. При этом пространственный угол атаки может достигь значений не допустимых при раскрытии парашютной системы.</li> <li>3. *Требуется расход топлива (для обеспечения стабилизации КА по угловой скорости).</li> </ol>
<p><b>Управляемый спуск (управление угловой скоростью и углом атаки)</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Обеспечивается заданная пространственная стабилизация движения КА по трём осям.</li> <li>2. Обеспечивается спуск КА без реализации главного резонанса.</li> <li>3. Обеспечивается безаварийное функционирование парашютной системы, которое реализуется после стабилизации КА относительно вектора скорости.</li> <li>4. *Расход топлива больше чем в случае управления спуском только по угловой скорости <math>\omega_x</math>, что повышает стоимость миссии, но обеспечивает безаварийное функционирование тормозной системы.</li> </ol>

\* детальное исследование величин расхода топлива не рассматривалось в данной диссертационной работе.

### 3 МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ОБЛАСТИ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ АСИММЕТРИИ

В третьей главе рассматривается новая методика оценки допустимых значений параметров аэродинамической и инерционной асимметрии неуправляемого КА, совершающего спуск в атмосфере Марса. Предполагается, что пространственный угол атаки, а также аэродинамическая и массовая асимметрии принимают малые значения. Применение этой методики позволяет исключить возможность реализации длительного резонанса при неуправляемом спуске КА с малой инерционной и аэродинамической асимметриями на этапе проектирования КА. При этом определяется область значений параметров малой инерционной и аэродинамической асимметрий КА [88], получаемая из условия устранения возможности реализации главного резонанса при спуске в атмосфере Марса. С этой целью определяются максимальные значения данных асимметрий КА, при которых угловая скорость  $\omega_x$  не достигает своих значений, при которых реализуется главный резонанс  $\omega_x^p$ .

Алгоритмы определения допустимых значений аэродинамической и массово-инерционной асимметрий рассматривались в работах Любимова В.В. [85], Куркиной Е.В. [86] и Лашина В.С. [87]. В частности, в работе Куркиной Е.В. [86] была получена методика оценки сочетаний параметров малой массово-инерционной и аэродинамической асимметрий неуправляемого КА, спускаемого в атмосфере Марса. В представленной диссертации рассматривается новая методика и новый алгоритм оценки допустимых значений параметров малой аэродинамической и инерционной асимметрий КА, обеспечивающие нерезонансное движение при спуске КА при неуправляемом спуске в атмосфере Марса [88]. Применяемое в данной методике основное ограничение является более слабым, по сравнению с известными ограничениями, что позволяет несколько расширить интервал определяемых значений асимметрии. Данная методика может применяться, например, при

моделировании отказа штатной системы обеспечения заданной ориентации, использующей реактивные двигатели малой тяги.

Практическая значимость получения оценок допустимых значений параметров асимметрии заключается в том, что разные виды асимметрии могут привести к реализации различных резонансов или эволюционных резонансных эффектов, которые могут явиться причиной нештатного увеличения угловой скорости или пространственного угла атаки [69,81], т.е. они могут вызвать аварийную ситуацию при развёртывании тормозной парашютной системы.

Постановка задачи проектирования предполагает определение наибольших величин массово-инерционной и аэродинамической асимметрий [99], при недостижении угловой скоростью  $\omega_x$  своих максимальных значений [85], при которых реализуется главный резонанс:

$$0 < \omega_x < \max \omega_x = \omega_x^r. \quad (3.1)$$

Здесь  $\omega_x^r = \omega_x / \sqrt{1 - \bar{I}_x}$ . С этой целью на обобщённый параметр асимметрии накладываем следующее ограничение:

$$|\Omega| = |\bar{m}_A| < |\Omega_p|, \quad (3.2)$$

где  $\bar{m}_A = m_A \omega^{-2}$ ,  $m_A = \sqrt{(m_1^A)^2 + (m_2^A)^2}$ ,  $m_1^A = -\frac{\omega^2}{m_{z1}} m_{y0}^f - \bar{I}_{xz} \omega_x^2$ ,  $m_2^A = -\frac{\omega^2}{m_{z1}} m_{z0}^f + \bar{I}_{xy} \omega_x^2$ ;  $\Omega_p$  -

максимальное значение параметра  $\Omega$ , при котором угловая скорость  $\omega_x$  достигает своего значения, при котором реализуется главный резонанс;

$m_{y0}^f, m_{z0}^f$  - безразмерные параметры, характеризующие величину аэродинамической асимметрии КА.  $\bar{I}_{xz}, \bar{I}_{xy}$  - безразмерные параметры, характеризующие величину массово-инерционной асимметрии КА.

В этих выражениях отсутствуют параметры, характеризующие смещение центра масс КА  $\bar{\Delta}_y, \bar{\Delta}_z$ , так как рассмотренная модель спускаемого движения КА (1.12) их не учитывает.



В результате замены параметра  $\bar{m}_A$  выражениями, определяющими массовую и аэродинамическую асимметрии в системе (1.13) ( $\bar{m}_A = m_A \omega^{-2}$ ,

$$m_A = \sqrt{(m_1^A)^2 + (m_2^A)^2}, \quad m_1^A = -\frac{\omega^2}{m_{z1}} m_{y0}^f - \bar{I}_{xz} \omega_x^2, \quad m_2^A = -\frac{\omega^2}{m_{z1}} m_{z0}^f + \bar{I}_{xy} \omega_x^2), \quad \text{условие} \quad (3.2)$$

записывается в следующем виде:

$$|\Omega| = \left| \left( \left( \frac{m_{y0}^f}{m_{z1}} + \bar{I}_{xz} \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \right)^2 + \left( \frac{m_{z0}^f}{m_{z1}} - \bar{I}_{xy} \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \right)^2 \right)^{0.5} \right| < |\Omega_p|, \quad (3.3)$$

В случае главного резонанса получаем:  $\omega_x^p = \omega / \sqrt{1 - \bar{I}_x}$ .

Для определения максимального значения обобщённого параметра асимметрии  $\Omega$ , запишем необходимое условие существования экстремума и определим значения безразмерных параметров, характеризующих аэродинамическую и массовую асимметрию космического аппарата:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial m_{y0}^f} &= \frac{1}{m_{z1} \Omega} \left( \frac{m_{y0}^f}{m_{z1}} + \frac{\bar{I}_{xz}}{1 - \bar{I}_x} \right) = 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial m_{z0}^f} &= \frac{1}{m_{z1} \Omega} \left( \frac{m_{z0}^f}{m_{z1}} - \frac{\bar{I}_{xy}}{1 - \bar{I}_x} \right) = 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{I}_{xz}} &= \frac{1}{\Omega(1 - \bar{I}_x)} \left( \frac{\bar{I}_{xz}}{1 - \bar{I}_x} + \frac{m_{y0}^f}{m_{z1}} \right) = 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{I}_{xy}} &= \frac{1}{\Omega(1 - \bar{I}_x)} \left( \frac{\bar{I}_{xy}}{1 - \bar{I}_x} - \frac{m_{z0}^f}{m_{z1}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Система уравнения (3.4) имеет следующее тривиальное решение  $m_{y0}^f = m_{z0}^f = 0, \bar{I}_{xz} = \bar{I}_{xy} = 0$ . Следовательно, система уравнений (3.4) не имеет стационарных точек кроме значений  $m_{y0}^f = m_{z0}^f = 0, \bar{I}_{xz} = \bar{I}_{xy} = 0$ . По этой причине эти параметры асимметрии достигают своих максимальных границ только на границе рассматриваемой области.

В неравенстве (3.3) имеется 4 неизвестных, следовательно, оно имеет бесконечное множество решений. Однозначное определение допустимых

областей значений  $m_{y0}^f, m_{z0}^f, \bar{I}_{xz}, \bar{I}_{xy}$  требует задания весовых соотношений между этими величинами [87]. Запишем параметры асимметрии в виде весового соотношения [85,88]:

$$m_{y0}^f = \frac{-m_{z1}}{P_1} U, m_{z0}^f = \frac{-m_{z1}}{P_2} U, \bar{I}_{xy} = \frac{(1-\bar{I}_x)}{P_3} U, \bar{I}_{xz} = \frac{(1-\bar{I}_x)}{P_4} U. \quad (3.5)$$

$$U = P_1 \frac{m_{y0}^f}{-m_{z1}} = P_2 \frac{m_{z0}^f}{-m_{z1}} = P_3 \frac{\bar{I}_{xy}}{(1-\bar{I}_x)} = P_4 \frac{\bar{I}_{xz}}{(1-\bar{I}_x)} \quad (3.6)$$

где  $P_i$  - положительные веса, которые соответствуют равенству:  $\sum_{i=1}^4 P_i = 4$ .

Значения весов  $P_i$  в уравнении (3.6) выбираются так, чтобы при достижении максимальных значений угловой скорости  $\Omega$ , выполнялось неравенство (3.3). С целью получения диапазона безразмерных параметров асимметрии, перепишем условия (3.3) с учётом формул (3.5) и (3.6) в виде:

$$|\Omega_p| > \left( \frac{U^2}{P_1^2} + \frac{U^2}{P_2^2} + \frac{U^2}{P_3^2} + \frac{U^2}{P_4^2} + 2 \frac{U^2}{P_2 P_3} + 2 \frac{U^2}{P_1 P_4} \right)^{0.5} \quad (3.7)$$

Условие (3.7) можно переписать в более компактном виде:  $|\Omega_p| > U \sqrt{C}$ ,

$$\text{где } C = \left( \frac{P_1 + P_4}{P_1 P_4} \right)^2 + \left( \frac{P_2 + P_3}{P_2 P_3} \right)^2.$$

Учитывая неравенство (3.3) и решая его с учётом неравенства (3.7), найдём искомую область допустимых значений параметров асимметрий [85] в следующем виде:

$$U < \frac{\Omega_p}{\sqrt{C}}. \quad (3.8)$$

С учетом формулы (3.5) получаем искомый диапазон безразмерных параметров асимметрий  $m_{y0}^f, m_{z0}^f, \bar{I}_{xz}, \bar{I}_{xy}$ :

$$\begin{aligned}
0 < m_{y0}^f &< -\left(\frac{\Omega_p^2}{C}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{m_{z1}}{P_1}, \\
0 < m_{z0}^f &< -\left(\frac{\Omega_p^2}{C}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{m_{z1}}{P_2}, \\
0 < \bar{I}_{xy} &< \left(\frac{\Omega_p^2}{C}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(1-\bar{I}_x)}{P_3}, \\
0 < \bar{I}_{xz} &< \left(\frac{\Omega_p^2}{C}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(1-\bar{I}_x)}{P_4},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Следовательно, выбирая значения параметров асимметрий из найденных интервалов (3.9) получаем значения угловой скорости, при которых реализация главного резонанса не достигается. На рисунке 3.1 представлен алгоритм определения допустимых значений малых аэродинамической и инерционной асимметрий.

В этом алгоритме численное решение задачи определения допустимых значений параметров асимметрий начинается с ввода исходных начальных и геометрических данных КА. Далее, при сохранении равенства (3.6) и равенства  $\sum_{i=1}^4 P_i = 4$ , задаются значения весов  $P_i$ . Следующим шагом на основе с помощью неравенства (3.7) производится расчёт обобщённого параметра асимметрии  $\Omega_p$ . В дальнейшем, исходя из выполнения неравенств (3.9), рассчитывается область параметров асимметрий и проверяется выполнение условия  $\Omega < \Omega_p$  (с помощью неравенства (3.2)). После выполнения проверочного расчёта по нелинейным исходным уравнениям, полученные области асимметрий сохраняются, а алгоритм завершает работу.

Использование данного алгоритма позволяет определить диапазон значений параметров асимметрий, обеспечивающий спуск КА в атмосфере без возможности реализации главного резонанса.

Рассматривается применение предлагаемого алгоритма определения допустимых значений параметров асимметрий на примере КА «Mars Polar Lander» [90], осуществляющего спуск в атмосфере Марса, показанного на рисунке 1.1. Космический аппарат «Mars Polar Lander» имеет следующие геометрические и массово-инерционные характеристики: длина КА  $l = 2\text{м}$ , наибольший радиус основания аппарата  $r = 1,25\text{м}$ , масса КА:  $m = 576\text{кг}$ , главные моменты инерции аппарата  $I_x = 270\text{кгм}^2$ ,  $I_y = I_z = 443\text{кгм}^2$ . При расчетах применяются следующие начальные условия спуска космического аппарата: начальная высота полёта  $H(0) = 100\text{км}$ , начальная скорость  $V(0) = 3400\text{м/с}$ , начальный угол наклона траектории  $\vartheta(0) = -0,017\text{рад}$ . Веса  $P_i$  в уравнении (3.6) имеют следующие значения:  $P_1 = 1,5$ ,  $P_2 = 1,5$ ,  $P_3 = 0,5$ ,  $P_4 = 0,5$ . Для приведенных начальных данных при  $\Omega_r = 0,47$ , искомый диапазон допустимых значений параметров аэродинамической и инерционной асимметрий [85,99], рассматриваемого космического аппарата принимает следующие значения:

$$m_{y0}^f, m_{z0}^f \in (0; 0,0183); \quad \bar{I}_{xy}, \bar{I}_{xz} \in (0; 0,044). \quad (3.10)$$

Отметим, что применяемое в данной методике основное ограничение является более слабым, по сравнению с известными ограничениями в [86,87], что позволяет несколько расширить интервал определяемых значений асимметрии. По сравнению с работой Куркиной Е.В. [86], полученный интервал параметров аэродинамической асимметрии больше на 25-28%.

На рисунке 3.1 изображено сравнение области допустимых значений параметров асимметрий, полученных в этой данной работе с численными результатами допустимых значений аналогичных асимметрий, полученными в работе Куркиной Е. В.

На рисунке 3.2 предложен алгоритм оценки допустимых значений параметров асимметрии. На рисунке 3.3 показана угловая скорость и её резонансное значение при спуске КА в атмосфере Марса.

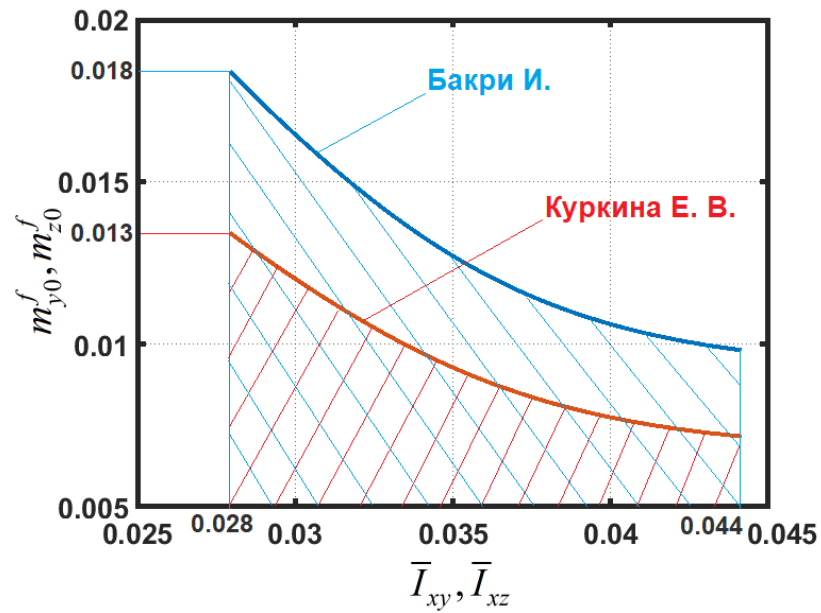


Рисунок 3.1 – Сравнение областей допустимых значений параметров в диссертации Баكري И. и в работе Куркиной Е. В.

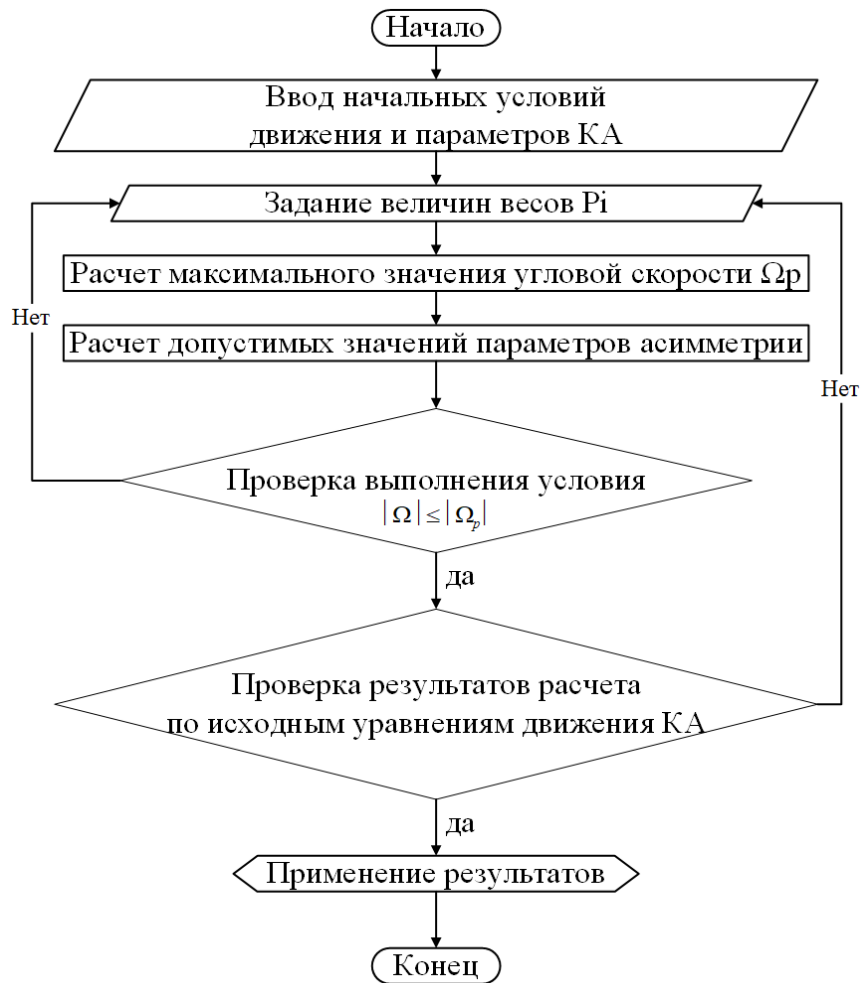


Рисунок 3.2 – Алгоритм оценки допустимых значений параметров асимметрии

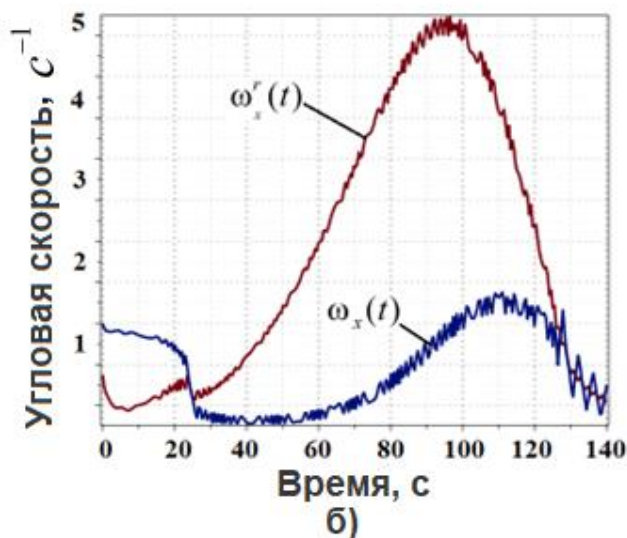
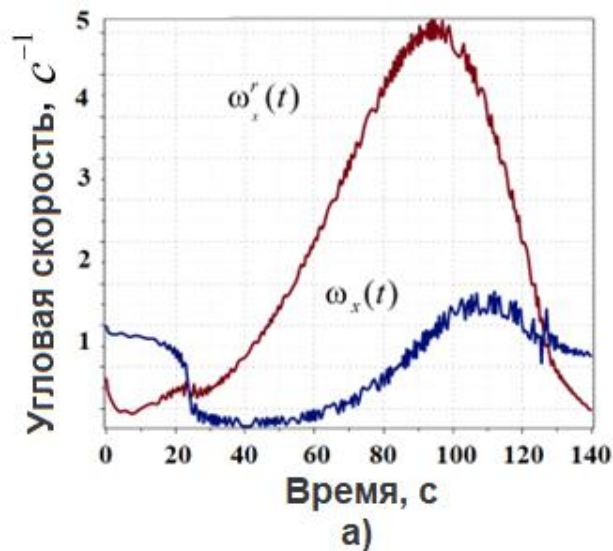


Рисунок 3.3 – Угловая скорость  $\omega_x$  и её резонансное значение угловой  $\omega_x^p$  при спуске КА в атмосфере Марса. а) при выборе максимальных допустимых значений асимметрии, б) при увеличении максимальных допустимых значений асимметрии на 20%

Следует отметить, что на рисунке ба угловая скорость  $\omega_x$  проходит через резонансное значение без реализации главного резонанса. На рисунке бб показана угловая скорость  $\omega_x$  и её резонансное значение  $\omega_x^p$ , полученные при выборе значений параметров асимметрии больше максимально допустимых (соответствующих рисунку ба) на 20%. При этом на рисунке бб наблюдается реализация главного резонанса.

### **Вывод по третьей главе.**

В этой главе рассмотрена методика оценки допустимых значений параметров инерционной и аэродинамической асимметрий КА, совершающего неуправляемый спуск в атмосфере Марса. Использование представленной методики при проектировании КА с указанной асимметрией позволяет исключить возможность реализации длительного главного резонанса, приводящего к нештатному увеличению пространственного угла атаки. Кроме того, в данной главе описан алгоритм оценки допустимых значений параметров асимметрии КА. Этот алгоритм гарантирует спуск аппарата в атмосфере Марса без реализации главного резонанса. Результаты численного моделирования подтверждают обоснованность результатов применения предложенного алгоритма. Результаты данной главы могут применяться на практике при нештатной ситуации, вызванной выходом из строя системы управления КА.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе получены приближенные законы оптимального непрерывного одновременного управления пространственным углом атаки и угловой скорости в задаче стабилизации движения асимметричного спускаемого космического аппарата с малой асимметрией относительно вектора скорости в атмосфере Марса. Синтезированные в работе законы управления подтверждаются численным моделированием в различных программных приложениях. Эти законы управления могут быть использованы при разработке системы управления движения космического аппарата с малой асимметрией относительно центра масс при спуске в атмосфере Марса. Выбор коэффициентов в критерии оптимальности обеспечивают уменьшение угловой скорости и пространственного угла атаки до значений, близких к нулю.

В работе также предложена методика оценки допустимых значений параметров аэродинамической и инерционной асимметрий при неуправляемом спуске космического аппарата в атмосфере Марса. При этом получена область параметров данных асимметрий КА, обеспечивающая нерезонансный неуправляемый спуск в атмосфере Марса. Данная методика может быть применена на практике с целью устранения возможности реализации резонансных возмущений угловой скорости и пространственного угла атаки, возникающих при отказе системы управления, основанной на работе реактивных двигателей.



## ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$OX_k Y_k Z_k$  – траекторная система координат;

$OX_a Y_a Z_a$  – скоростная система координат;

$OX_1 Y_1 Z_1, OX_2 Y_2 Z_2$  – вспомогательные системы координат, связанные с центрами приведения аэродинамических сил и моментов;

$OXYZ$  – связанная с космическим аппаратом система координат;

$OX_n Y_n Z_n$  – связанная с пространственным углом атаки система координат;

$\vec{R}_A$  – равнодействующая аэродинамических сил;

$\Delta \vec{r}_n$  – радиус-вектор, определяющий смещение центра масс космического аппарата  $O$  в системе координат  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ ;

$\vec{M}$  – главный вектор момента равнодействующей аэродинамических сил;

$\alpha_n$  – пространственный угол атаки;

$\varphi$  – аэродинамический угол крена;

$\vec{M}_0, M_x, M_{y_n}, M_{z_n}$  – главный вектор аэродинамических сил относительно центра масс  $O$  и его проекции на оси системы координат  $OX_n Y_n Z_n$ ;

$q$  – скоростной напор;

$S$  – характерная площадь космического аппарата;

$l$  – характерный размер космического аппарата;

$C_{x1}, C_{y1}, C_{z1}$  – коэффициенты аэродинамических сил в системе координат  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$

$m_{x1}, m_{y1}, m_{z1}$  – коэффициенты аэродинамического момента в системе координат  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ ;

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$  – смещения центра масс космического аппарата в связанной системе координат  $OXYZ$ ;

$m_x^f, m_y^f, m_z^f$  – коэффициенты малых аэродинамических моментов от асимметрии формы космического аппарата, заданные в связанной системе координат  $OXYZ$ ;

$m_x^{\bar{\omega}_x}, m_x^{\bar{\omega}_y}, m_{yn}^{\bar{\omega}_y}, m_{yn}^{\bar{\omega}_x}, m_{zn}^{\bar{\omega}_x}, m_{zn}^{\bar{\omega}_y}$  – коэффициенты демпфирующих аэродинамических моментов;

$m_{zn}$  – коэффициент восстанавливающего аэродинамического момента, который действует в плоскости пространственного угла атаки;

$\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_{yn}, \bar{\omega}_{zn}$  – безразмерные угловые скорости.

$КА$  – космический аппарат;

$КЗ$  – космический зонд;

$СК$  – система координат;

$\vec{V}$  – вектор скорости центра масс космического аппарата;

$\vec{g}$  – вектор гравитационного ускорения;

$\vec{K}$  – вектор кинетического момента КА;

$\vec{\omega}, \omega_x, \omega_{yn}, \omega_{zn}$  – вектор угловой скорости космического аппарата и её проекции на оси системы координат  $OX_n Y_n Z_n$ ;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекции угловой скорости КА в связанной системе координат  $OXYZ$

$I$  – тензор инерции космического аппарата;

$I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$  – моменты инерции космического аппарата, заданные в связанной системе координат  $OXYZ$ .

$Re$  – число Рейнольдса,

$M$  – число Маха;

$h$  – высота космический аппарат от поверхности планеты;

$M_x^A, M_{xk}^A, M_{zn}^A$  – проекции аэродинамических моментов, обусловленных массово-инерционной и аэродинамической асимметрией КА на соответствующие оси;

$\Delta M_x, \Delta M_{xk}, \Delta M_{zn}$  – проекции демпфирующих моментов на оси  $OX, OX_k, OZ_n$  [96];

$\Delta \omega_\varphi, \Delta \omega_\gamma$  – малые значения, добавляемые к производным  $\varphi'_n$  и  $\gamma'_n$ , обусловленные неинерциальностью и асимметрией системы координат  $OX_n Y_n Z_n$  [96];

$\varepsilon$  – малый параметр;  
 $\theta$  – быстрая фаза;  
 $\bar{m}_A, \bar{m}_x^A$  – функции медленных переменных  $\omega_x$  и  $\alpha$ , характеризующие величину массово-инерционной и аэродинамической асимметрий;  
 $\omega_{1,2}$  – частоты «прямой» и «обратной» прецессий;  
 $\omega_x - \omega_{1,2}$  – резонансное соотношение частот;  
 $\theta_1$  – параметр, который определяет взаимное расположение массово-инерционной и аэродинамической асимметрий [82,96];  
 $\theta_2$  – параметр, который определяет расположение смещение центра масс в связанной системе координат [82,96];  
 $\vartheta$  – угол входа в атмосферу;  
 $r$  – расстояние от притягивающего центра до центра масс космического аппарата;  
 $m$  – масса космического аппарата;  
 $\vec{x}$  – вектор фазовых координат системы уравнений движения;  
 $\vec{u}$  – вектор управляющих воздействий;  
 $f_0$  – скалярная функция переменных  $\vec{x}$  и  $\vec{u}$ ;  
 $S(x)$  – функция Беллмана;  
 $Kn$  – число Кнудсена;  
 $T$  – температура атмосферы;  
 $P$  – давление атмосферы;  
 $\nu$  – вязкость атмосферы;  
 $\rho$  – плотность атмосферы;  
 $a$  – скорость звука;  
 $a_\omega, a_\alpha, b_\omega, b_\alpha$  – заданные положительные коэффициенты критерия оптимальности;  
 $v(\omega_x, \alpha, \theta)$  – функция Беллмана;  
 $a_1, a_2$  – амплитуды прямой и обратной прецессии космического аппарата;

$\gamma_1, \gamma_2$  – фазы, соответствующие прямой и обратной прецессии космического аппарата;

$\omega_x^p$  – резонансное значение угловой скорости  $\omega_x$ ;

$H$  – матрица Гамильтона;

$[L]$  – матрица перехода между системами координат;

ЦМ – центр масс;

$u_\alpha$  – функция управления пространственным углом атаки;

$u_\omega$  – функция управления угловой скоростью;

$u_x$  – проекция вектора управления  $\vec{u}$  на ось  $OX$ ;

$u_y$  – проекция вектора управления  $\vec{u}$  на ось  $OY$ ;

$u_z$  – проекция вектора управления  $\vec{u}$  на ось  $OZ$ ;

ДУ – двигательная установка;

РДМТ – ракетный двигатель малой тяги;

СА – спускаемый аппарат;

ИО – исполнительный орган.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skiff, A. Structure of the atmosphere of Mars in summer at mid-latitudes / A. Skiff, D. B. Kirk // *Journal of Geophysical Research*. – 1977. – Vol. 82. – № 28. – P. 4364-4378.
2. Keating, G. M. The structure of the upper atmosphere of Mars: In situ accelerometer measurements from Mars Global Surveyor / G. M. Keating // *Science*. – Vol. 279. – № 5357. – P. 1672-1676.
3. Иванов, Н. М. Движение космических летательных аппаратов в атмосферах планет / Н. М. Иванов, А. И. Мартынов. – М.: Наука, – 1985. – 384р.
4. Banfield, D. The atmosphere of Mars as observed by InSight / D. Banfield, A. Spiga, C. Newman // *Net. Geosci*. – 2020. – Vol. 13. – P. 190-198.
5. Данченко, О.М. Марковская модель плотности атмосферы Марса / О.М. Данченко // *Электронный журнал «Труды МАИ»*. – 2012. Вып. 50. С.1-11.
6. Любимов, В.В. Двухканальный оптимальный дискретный закон управления космического аппарата с аэродинамической и инерционной асимметрией при спуске в атмосфере Марса / В.В. Любимов, И. Бакри // *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*. – 2022. – Т. 21. – № 3. – С. 36-46. – DOI:10.18287/2541-7533-2022-21-3-36-46
7. Бакри, И. Приближённо-оптимальный дискретный закон управления спуском космического аппарата с асимметрией в атмосфере Марса / И. Бакри // *Вестник Московского авиационного института*. – 2022. – Т. 29. – № 2. – С. 179-188. DOI: – 10.34759/vst-2022-2-179-188
8. Lyubimov, V.V. Application of the Dynamic Programming Method to Ensure of Dual-Channel Attitude Control of an Asymmetric Spacecraft in a Rarefied Atmosphere of Mars / V.V. Lyubimov, I. Bakry // *Aerospace Systems*, Springer. – 2021. – Vol. 5. – С. 213–221. DOI: 10.1007/s42401-021-00112-y
9. Любимов, В.В. Моделирование динамики и стабилизация вращательного движения асимметричного КА изменяемой формы в разрежённой атмосфере Марса / В.В. Любимов, И. Бакри // *Управление движением и*

навигация летательных аппаратов: сборник трудов XXIV всероссийского семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. – Самара: Издательство Самарского университета. – 2022. – С. 55-60.

10. Любимов, В.В. Численное моделирование оптимальной стабилизации возмущенного движения КА относительно центра масс в атмосфере Марса / В.В. Любимов, И. Бакри // Управление движением и навигация летательных аппаратов: сборник трудов XXV Всероссийского семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов: Самара, 15-17 июня 2022 г. – Самара: Издательство Самарского университета. – 2022. – С. 3-11.

11. Любимов, В.В. Оптимальный непрерывный закон управления космического аппарата с массово-аэродинамической асимметрией при спуске в разреженной атмосфере Марса / В.В. Любимов, И. Бакри // Сборник: проблемы машиноведения. Материалы VI Международной научно-технической конференции. Омск, – 2022. – С. 183-192.

12. Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. // М.: Наука. – 1976. – 392 с.

13. Беллман, Р.Э. Динамическое программирование / Р.Э. Беллман // М.: ИЛ. – 1960. – 400 с.

14. Болтянский, В.Г. Оптимальное управление дискретными системами / В.Г. Болтянский // М.: Наука. – 1973. – 446 с.

15. Болтянский, В.Г. Математические методы оптимального управления / В.Г. Болтянский // М.: Наука. – 1969. – 408 с.

16. Гамкрелидзе, Р.В. Основы оптимального управления / Р.В. Гамкрелидзе // Тбилиси: Тбилисский университет. – 1977. – 253 с.

17. Гурман, В.И. Вырожденные задачи оптимального управления / В.И. Гурман // М.: Наука. – 1977. – 304 с.

18. Гурман, В. И. Модели и методы теории управления / В.И. Гурман // Труды межд. конф. «Программные системы: теория и приложения» // Переславль-Залесский: Физматлит. – 2004. – Т. 1. – С. 101–116.

19. Моисеев, Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н.Н. Моисеев // М.: Наука. Физматлит. – 1969. – 378 с.
20. Моисеев, Н.Н. Математические задачи системного анализа / Н.Н. Моисеев // М.: Наука. – 1981. – 488 с.
21. Черноузько, Ф.Л. Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром / Ф.Л. Черноузько // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 32. – Вып. 1. – С. 15–26.
22. Кротов, В.Ф. Основы теории оптимального управления / В.Ф. Кротов, Б.А. Лагоша, С.М. Лобанов, Н.И. Данилина, С.И. Сергеев // М.: Высш. шк. – 1990. – 430 с.
23. Летов, А.М. Динамика полёта и управление / А.М. Летов // М.: Наука. – 1969. – 360 с.
24. Калман, Р.Е. Об общей теории систем управления / Р.Е. Калман // Труды I конгресса ИФАК. – М.: Известия АН СССР. – 1961. – Т. 2. – С. 521–547.
25. Красовский, Н.Н. Управление динамической системой / Н.Н. Красовский // М.: Наука. – 1985. – 522 с.
26. Заболотнов, Ю.М. Оптимальное управление непрерывными динамическими системами: учебное пособие / Ю.М. Заболотнов // Издательство Самарского государственного аэрокосмического университета. – 2006. – 148 с.
27. Robert, F.S. Optimal control and estimation / F.S. Robert // Princeton university publication. – 2012. – pp. 672.
28. Ross, I.M. A Primer on Pontryagin's Principle in Optimal Control / I.M. Ross // Collegiate Publishers. – 2009. – pp. 370.
29. Betts, J.T. Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming / J.T. Betts // Philadelphia, Pennsylvania: SIAM Press. – 2011. – pp. 449.
30. Freidlin, M. I. The averaging principle and theorems on large deviations / M.I. Freidlin // Uspekhi Mat. Nauk. – 1978. – Vol. 33. – Issue 5(203), – P. 107–160.

31. Пятницкий, А.Л. Усреднение – методы и некоторые приложения / А.Л. Пятницкий, Г.А. Чечкин, А.С. Шамаев // Новосибирск. – 2004. – 341 с.
32. Гребепиков, Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах / Е.А. Гребепиков // М.: Наука. Гл. ред. физ. -мат. лит., – 1986. – 256 с.
33. Любимов, В.В. Оптимальное управление угловой скоростью асимметричного зонда в атмосфере Марса посредством двигателей малой тяги / В.В. Любимов, Е.В. Куркина // Общероссийский научно-технический журнал "Полет". – 2019. – № 5. – С. 31-36.
34. Lyubimov, V. Optimal Discrete Control Law for Rotation of a Descent Probe with a Small Inertial Asymmetry during the Descent in the Atmosphere of Mars / V. Lyubimov, E. Kurkina // Proceedings 21st International Conference of Complex Systems: Control and Modeling Problems, CSCMP 2019. – 2019. – P. 504-508
35. Lyubimov, V.V. Application of the dynamic programming method to obtain of the angular velocity control law of a spacecraft with a small geometric asymmetry in the atmosphere / V.V. Lyubimov, E.V. Kurkina // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1210. – Issue 1.
36. Lyubimov, V.V. Dynamics and control of angular acceleration of a reentry spacecraft with a small asymmetry in the atmosphere in the presence of the secondary resonance effects / V.V. Lyubimov // International Siberian conference on control and communications, SIBCON Proceedings. –2015. – P. 1-4.
37. Lyubimov, V.V. External stability against resonance during the descent of a spacecraft vehicle with a small asymmetry in the atmosphere of Mars / V.V. Lyubimov, V.S. Lashin // Advances in Space Research Journal. – 2017. – Vol. 59. – No. 6. – pp. 1607-1613.
38. Lyubimov, V.V. Asymptotic Analysis of the Stability of the Angle of Attack in an Atmospheric Descent of a Spacecraft with Small Mass and Inertial Asymmetries / V.V. Lyubimov, V.S. Lashin // 12th International Scientific and Technical Conference "Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines", Dynamics 2018. – 2019.



39. Любимов, В.В. Оптимальное управление угловой скоростью асимметричного зонда в атмосфере Марса посредством двигателей малой тяги / В.В. Любимов, Е.В. Куркина // Общероссийский научно-технический журнал "Полет". – 2019. – № 5. – С. 31-36.

40. Lyubimov, V. Optimal Discrete Control Law for Rotation of a Descent Probe with a Small Inertial Asymmetry during the Descent in the Atmosphere of Mars / V. Lyubimov, E. Kurkina // Proceedings 21st International Conference of Complex Systems: Control and Modeling Problems, CSCMP 2019. – 2019. – P. 504-508

41. Lyubimov, V.V. Application of the dynamic programming method to obtain of the angular velocity control law of a spacecraft with a small geometric asymmetry in the atmosphere / V.V. Lyubimov, E.V. Kurkina // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1210. – Issue 1.

42. Lyubimov, V.V. Dynamics and control of angular acceleration of a reentry spacecraft with a small asymmetry in the atmosphere in the presence of the secondary resonance effects / V.V. Lyubimov // International Siberian conference on control and communications, SIBCON Proceedings. –2015. – P. 1-4.

43. Bootle, W.J. Spin variation in slender entry vehicles during rolling trim / W.J. Bootle // AIAA Journal. – 1971. – Vol. 9.

44. Nayfeh, A.H. An analysis of asymmetric rolling bodies with nonlinear aerodynamics/ A.H. Nayfeh, W.S. Saric // AIAA Journal. – 1972. – Vol. 10. – № 8. –pp.1004-1011.

45. Vaughn, H.R. Boundary conditions for persistent roll resonance on reentry vehicles/ H.R. Vaughn // AIAA Journal. – 1968. – Vol. 6, – № 6. – pp.1030-1035.

46. Ярошевский, В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере / В.А. Ярошевский // М.: Машиностроение. – 1978. - 168с.

47. Бобылев, А.В. Оценка условий захвата в режим резонансного вращения неуправляемого тела при спуске в атмосферу / А.В. Бобылев, В.А. Ярошевский// Космические исследования. – 1999. – Т.37. – Вып. 5. – С. 512-524.

48. Шилов, А.А. Резонансные режимы пространственного неуправляемого движения аппаратов на участке входа в атмосферу / А.А. Шилов, М.Г. Гоман // Труды ЦАГИ. – 1975. – Вып. 1624. – 44с.

49. Гоман, М.Г. Неустановившиеся резонансные режимы движения неуправляемого аппарата при полёте в атмосфере / М.Г. Гоман // Учёные записки ЦАГИ. – 1977. – Том 8. – №6. – С.67-80.

50. Koryanov, V.V. Dynamics of Angular Motion of Landing Vehicle in Martian Atmosphere with Allowance for Small Asymmetries / V.V. Koryanov, V.P. Kazakovtsev // International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research. – 2018. – Vol. 7. – № 4. – P. 385 – 391.

51. Асланов, В.С. Нелинейное резонансное движение асимметричного космического аппарата в атмосфере / В.С. Асланов, В.В. Бойко // Космические исследования. – 1985. – Т. 23. – Вып.3. – С. 408-415.

52. Асланов, В.С. Два вида нелинейного резонансного движения асимметричного КА в атмосфере / В.С. Асланов // Космические исследования. – 1988. – Т. 24. – Вып. 2. – С. 220-226.

53. Асланов, В.С. Нелинейные резонансы при неуправляемом спуске в атмосфере асимметричных КА / В.С. Асланов // Космич. исслед.–1992. – Т. 30. – № 5. – С. 608-614.

54. Асланов, В.С. Устойчивость нелинейных резонансных режимов движения космического аппарата в атмосфере II / В.С. Асланов, С.В. Мясников// Космич. исслед. – 1996. – Т. 34. – №6. – С. 626.

55. Асланов, В.С. Переходные режимы углового движения КА на верхнем участке траектории спуска / В.С. Асланов, И.А. Тимбай // Космические исследования. – 1997. – Т. 35. – Вып. 3. – С.279-286.

56. Aslanov, V.S. Analysis of nonlinear resonances during spacecraft descent in the atmosphere / V.S. Aslanov, S.V. Myasnikov // Cosmic Research. – 1997. – Vol. 35. – Issue 6. – P. 616-622.

57. Aslanov, V.S. Resonance at descent in the mars's atmosphere of analogue of the beagle 2 lander / V.S. Aslanov, S. Vladimir // proceedings of the 6th WSEAS

international conference on education and educational technology (edu'07). – 2007. – P. 178.

58. Асланов, В.С. Устранение резонанса, возникающего при спуске осесимметричного КА в разреженной атмосфере / В.С. Асланов, А.С. Ледков // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. – 2008. – №7. – С.46-50.

59. Aslanov, V.S. Resonance at motion of a body in the Mars's atmosphere under biharmonic moment / V.S. Aslanov // WSEAS Transactions on Systems and Control. – 2008. – Vol. 3. – Issue 1. – P. 33-39

60. Aslanov, V.S. Analysis of the resonance and ways of its elimination at the descent of spacecrafts in the rarefied atmosphere / V.S. Aslanov, A. Ledkov // Aerospace Science and Technology. – 2009. – Vol. 13. – Issue 4-5. – P. 224-231.

61. Асланов, В.С. Пространственное движение тела при спуске в атмосфере/ В.С. Асланов // М: Изд. Физматлит. – 2004. – С. 160.

62. Aslanov, V. S. Rigid Body Dynamics for Space Applications / V.S. Aslanov // Butterworth-Heinemann (Elsevier). – 2017, – P. 400.

63. Заболотнов, Ю.М. Асимптотический анализ квазилинейных уравнений движения в атмосфере КА с малой асимметрией. I / Ю.М. Заболотнов // Космич. исслед. – 1993. – Т. 31. – №6. – С. 39-50.

64. Заболотнов, Ю.М. Асимптотический анализ квазилинейных уравнений движения в атмосфере КА с малой асимметрией. II / Ю.М. Заболотнов // Космич. исслед. – 1994. – Т. 32. – № 2. – С. 22-33.

65. Заболотнов, Ю.М. Асимптотический анализ квазилинейных уравнений движения в атмосфере КА с малой асимметрией. III / Ю.М. Заболотнов // Космич. исслед. – 1994. – Т. 32. – № 4-5. – С. 112-115.

66. Заболотнов, Ю.М. Методы моделирования и исследования устойчивости резонансного движения твёрдого тела с малой асимметрией в атмосфере / Ю.М. Заболотнов // Диссертация на соискание учёной степени доктора технических наук. – 1995. – 410 с.

67. Zabolotnov, Yu.M. Secondary resonance effect in the motion of a spacecraft in the atmosphere / Yu. M. Zabolotnov, V.V. Lyubimov // *Cosmic Research*. – 1998. – Vol. 36. – Issue 2. – P. 194-201.

68. Zabolotnov, Yu.M. Application of the method of integral manifolds for construction of resonant curves for the problem of spacecraft entry into the atmosphere / Yu. M. Zabolotnov, V.V. Lyubimov // *Cosmic Research*. – 2003. – Vol. 41. – Issue 5. – P. 453-459.

69. Заболотнов, Ю.М. Резонансные эффекты при вращательном движении космического аппарата с малой инерционной асимметрией в атмосфере / Ю.М. Заболотнов, В.В. Любимов, А.В. Иванов // Сб. трудов XI Всерос. науч.-техн. семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. – 2003. – С. 74-77.

70. Заболотнов, Ю.М. Устойчивость легкой конической капсулы при спуске в атмосфере / Ю.М. Заболотнов, В.В. Любимов, А.В. Усалко // Известия Самарского научного центра Рос. акад. наук. – 2005. – Т. 7. – № 1. – С. 118-123.

71. Заболотнов, Ю.М. Статистический анализ движения относительно центра масс лёгкой капсулы при входе в атмосферу / Ю.М. Заболотнов // *Космические исследования*. – 2013. – Т.51. – №.2. – С.1-12.

72. Voevodin, P.S. Quasi-Optimal Stabilization of Oscillatory Systems with Many Degrees of Freedom / P.S. Voevodin, Y.M. Zabolotnov // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. – 2022. – Vol. 61(3). – pp. 332–347.

73. Заболотнов, Ю.М. Асимптотические методы в задачах динамики твердого тела / Ю.М. Заболотнов, В.В. Любимов // Учебное пособие. – СПб.: Издательство Лань. – 2021. – С. 408.

74. Баринаева Е.В. Предотвращение возможности возникновения резонансных режимов движения для низковысотных спутников класса CUBESAT / Е.В. Баринаева, И.В. Белоконов, И.А. Тимбай // *Гироскопия и навигация*. – 2021. – Т. 29. - №4 (115). – С. 115-133.

75. Дмитриевский А.А. Внешняя баллистика / А.А. Дмитриевский, Л.Н. Лысенко // *Машиностроение*. – Москва. – 4е издание – 2005. – 606с.

76. Platus, D.H. Ballistic reentry vehicle flight / D.H. Platus // Journal of guidance and control. – 1982. – Vol.5.

77. Найфэ, А.Х. Введение в методы возмущений / А.Х. Найфэ // John wiley & sons inc. Перевод с английского языка «Мир» – 1984. – С. 535.

78. Белоконов, В.М. Ускоренный расчёт траекторий снижения в атмосфере неуправляемых КА с учётом их движения относительно центра масс / В.М. Белоконов, И.В. Белоконов, Ю.М. Заболотнов // Космические исследования. – Вып.4 – 1983. – С.512 – 521.

79. Белоконов, В.М. Метод ускоренного моделирования квазипериодического движения в атмосфере твёрдого почти симметричного тела / В.М. Белоконов, И.В. Белоконов, Ю.М. Заболотнов // Механика твёрдого тела. РАН. – 1982. – № 2. – С.43-50.

80. Заболотнов, Ю.М. Метод исследования резонансного движения одной нелинейной колебательной системы / Ю.М. Заболотнов // Известия РАН. механика твёрдого тела - №1 – 1999. – с.33 – 45.

81. Воеводина, П.С. Квазиоптимальная стабилизация колебательных систем со многими степенями свободы / П.С. Воеводина, Ю.М. Заболотнов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2022. - № 3. – с. 41–56

82. Асланов, В.С. Выбор формы космического аппарата предназначенного для спуска в разрежённой атмосфере Марса / Асланов В.С., Ледков А. С. // Вестник СГАУ им. академика Королёва С.П. – 2008. – № 1-14. – С. 9-15.

83. Ледков, А.С. Исследование резонансных движений сегментально-конических тел в атмосфере / А.С. Ледков // диссертация кандидата технического наука. Самара. – 2009. – С. 149.

84. Телицын, В.А. Анализ сегментальных конических форм спускаемых аппаратов / Телицын В.А., Журавлев Е.И. // Молодежный научно-технический вестник ФС77-51038. – 2015. - №12.

85. Любимов, В.В. Внешняя устойчивость резонансов в динамике движения космических аппаратов с малой асимметрией / В.В. Любимов // Издательство СНЦ РАН. – 2013. – 276 с.

86. Kurkina, E.V. Acceptable range parameters of asymmetry of spacecraft descending in the Martian atmosphere / E.V. Kurkina // IOP Conference Series Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 868. – № 1. – Work № 012036. – DOI:10.1088/1757-899X/868/1/012036.

87. Лашин, В.С. Метод оценки параметров асимметрии при проектировании спускаемого космического аппарата / В.С. Лашин // Вестник Московского авиационного института. – 2020. – Т. 27. – №. 1. – С. 100-107. – DOI: 10.34759/vst-2020-1-100-107.

88. Бакри, И. Методика оценки допустимых значений параметров аэродинамической и инерционной асимметрии Марсианского зонда / И. Бакри // Ракетно-космическая техника. – 2023. – Т. 7. – № 1(43). – DOI 10.26732/j.st.2023.1.02.

89. Robotic exploration of mars // European Space Agency. URL: <http://exploration.esa.int/mars>.

90. Douglas, I. Mars Polar lander / I. Douglas, O.D. Franklin, A. Diane, G.W. John, D. George // National Aeronautics and Space Administration (NASA). – 1998. – pp. 65. URL: [https://mars.nasa.gov/internal\\_resources/818/](https://mars.nasa.gov/internal_resources/818/).

91. Schiaparelli: The ExoMars entry, descent and landing demonstrator module // European Space Agency. URL: <http://exploration.esa.int/mars/47852-entry-descent-and-landing-demonstrator-module>.

92. List of interplanetary spacecrafts about the Mars system // Planetary society. URL: <https://www.planetary.org/space-missions/every-mars-mission>.

93. Любимов, В.В. Управляемое изменение размеров спускаемого в атмосфере Марса космического аппарата осесимметричной формы / В.В. Любимов, И. Бакри // Мехатроника, автоматизация и управление МАУ. – 2021. – Т. 22. – № 7. – С. 383–390. – DOI: 10.17587/MAU.22.383-390.

94. Lyubimov, V.V. Controlled change in the dimensions of an axisymmetric spacecraft descending in the atmosphere of mars / V.V. Lyubimov, I. Bakry // *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. – 2021, – Vol. 22 (7). – С. 383–390. – DOI: 10.17587/MAU.22.383-390.

95. Lyubimov, V.V. Synthesis of Two-Channel Control to Stabilize the Rotation of a Small Asymmetric Spacecraft in the Martian Atmosphere / V.V. Lyubimov, I. Bakry // *30th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems*. Saint Petersburg. Russia. - 2023.

96. Любимов, В.В. Управление габаритами спускаемого в атмосфере марса космического аппарата с корпусом в форме двуполостного гиперболоида / В.В. Любимов, И. Бакри // *Сборник трудов конференции ПИТ*. – 2021. – С. 572-575.

97. Қонстантинов, М.С. Механика космического полета: Учебник для вузов / М.С. Қонстантинов, Е.Ф. Қаменков, Б.П. Перелыгин, В.К. Безвербый // Под ред. В.П. Мишина - М.: Машиностроение. – 1989. – 408 с.

98. Нариманов, Г.С. Основы теории полета космических аппаратов / Г.С. Нариманова, М. К. Тихонравова // - М.: Машиностроение, – 1972. – 608 с.

99. Куркина, Е.В. Анализ и синтез динамики спускаемых в атмосфере Марса космических аппаратов с малой асимметрией с учетом резонансных возмущений / Куркина Е.В. // *Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук*. – Самара. – 2020. – 131 с.

100. Любимов, В.В. Оптимальный дискретный закон управления вращением зонда с малой инерционной асимметрией при спуске в атмосфере Марса / В.В. Любимов, Е.В. Куркина // *XXI Международная конференция "Проблемы управления и моделирования в сложных системах"*. – 2019. – Т. 1. – С. 353-357.

101. Ярошевский, В.А. Вход в атмосферу космических летательных аппаратов / В.А. Ярошевский // М. Наука. – 1988. – 336 с.

102. Голомазов, М.М., аэродинамическое проектирование спускаемого аппарата в атмосфере Марса по проекту «ЭкзоМарс» / М.М. Голомазов,

В.С. Финченко // Институт автоматизации проектирования РАН. – 2013. – С. 40-46.

103. Ведякова, А.О. Методы теории оптимального управления. Учебное пособие / Ведякова А.О., Милованович Е.В., Слита О.В., Даури В.Ю. // Университет ИТМО, Санкт-Петербург. – 2021. – 219 с.

104. Wenyu, S. Optimization Theory and Methods – Nonlinear Programming / S. Wenyu, Y. Yaxiang // Springer Science. – 2006. – P. 700.

105. Andrei, A.A. Nonlinear and Optimal Control Theory – Lecture Notes in Mathematics / A.A. Andrei, A.S. Morse, D.S. Eduardo // Springer Science. – 2004. – p. 368.

106. Donald, E.K. Optimal Control Theory: An Introduction / E.K. Donald // California, San Jose State University, Dover Publications. – 1998, – 472 с.

107. David, G.L. Linear and Nonlinear Programming / G.L. David, Y. Yinyn // Stanford University. Springer. – 2008. – p. 546.

108. Dimitri, P.B. Nonlinear Programming / P.B. Dimitri // Massachusetts Institute of Technology. Athena Scientific. – 1999. – p. 372.

109. Брюханов, Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов: учебное пособие / Ю.А. Брюханов, А.Л. Приоров, В.И. Джиган, В.В. Хрящев // Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. Ярославль: ЯрГУ. – 2013. – 344 с.

110. Горелов, Ю.Н. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Рунге–Кутты) / Ю.Н. Горелов // Учебное пособие, издательство «Самарский университет». – 2006. – 47 с.

111. Рындин, Е.А. Основы численных методов: теория и практика / Е.А. Рындин, И.В. Куликова, И.Е. Лысенко // Южный федеральный университет. – 2015. – 227 с.

112. Haugen, F. Discrete-time signals and systems / F. Haugen // Skien, Norway. – 2005. – p. 75.

113. Lopez, L. Variable step-size techniques in continuous Runge-Kutta methods for isospectral dynamical systems / L. Lopez, C. Mastroserio, T. Politi //



University of Bari in Italy. – 1997. – Vol. 82. - № 1-2. - pp. 261-278. DOI: 10.1016/S0377-0427(97)00048-4.

114. Рыжков, В.В. Двигательные установки и ракетные двигатели малой тяги на различных физических принципах для систем управления малых и сверхмалых космических аппаратов / В.В. Рыжков, А.В. Сулинов // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2018. – Т. 17. – № 4. – С. 115-128. DOI: 10.18287/2541-7533-2018-17-4-115-128.

115. Lyubimov V.V. Synthesis of Two-Channel Control to Stabilize the Rotation of a Small Asymmetric Spacecraft in the Martian Atmosphere / V. V. Lyubimov, I. Bakry // 2023 30th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). Saint Petersburg. Russian Federation. - 2023. - pp. 1-4. DOI: 10.23919/ICINS51816.2023.10168482.

116. Қонстантинов, М.С. Механика космического полета: Учебник для вузов / М.С. Қонстантинов, Е.Ф. Қаменков, Б.П. Перелыгин, В.К. Безвербый // Под ред. В.П. Мишина - М.: Машиностроение. – 1989. – 408 с.

117. Тырнов, П.А. Решение задачи управления перемещением центра масс и угловым движением космического аппарата с использованием двигателей ориентации методом наименьших квадратов / П.А. Тырнов // ПАО РКК «Энергия» имени С.П. Королёва, XLIV Королёвские академические чтения по космонавтике. – 2020. – Т. 17. – С. 177–179.

118. Сыров, А.С. Способ ориентации космического аппарата и устройство для его реализации / А.С. Сыров, В.Н. Соколов, М.А. Шатский, П.А. Самусь, А.Я. Лащев // Москва, Федеральное государственное унитарное предприятие «Московское опытно-конструкторское бюро «Марс». Патент № RU 2514650 С2. – 2014.

119. Полуин, И.Ф. Курс математического программирования: учебное пособие / И.Ф. Полуин // Москва – издательство Высшей школы. – 2008. – 464 с.